1-3
F 2557
R F 2557
46
927
1968 MAJ 6

1
TOMUL 27
1 9 6 8

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

BIBLIOTECA INSTITUTUL POLITEHNIC BUCUREŞTI

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** – *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** – *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘTEFAN BĂLAN,**
Prof. **GH. MANEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CR. MATEESCU,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA,** membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Conf. **RADU C. BOGDAN** – *secretar de redacție.*

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1968.
În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții.
Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134–135, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN
Redacția : **București,**
str. Const. Mille 15, tel. 14.89.07

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 27, nr. 1 1968

SUMAR

STUDII

Pag.

N. N. PATRAULEA, N. POSTELNICU, Echilibrul relativ macroscopic al plasmei cu simetrie cilindrică 3

H. PASCAL, Studiul curbei de restabilire a presiunii în cazul curgerii polifazice 17

IOAN DAVID, Mişcarea plan-orizontală într-un mediu poros în prezenţa unui dren arcuit 35

DAN PAVELESCU, Dependenţa regimului de frecare şi a mişcării sacadate de principalii factori ai uzării 45

GH. VASILCA, Persistenţa stratului superficial de staniu pe suprafaţa activă a lagărelor de la motoare 63

OLGA BIŢĂ, I. DINCĂ, Efectul unor aditivi asupra lubrificaţiei oţelului dur la sarcini ridicate 77

C. TEODOSIU, Contribuţii la teoria macroscopică a dislocaţiilor şi tensiunilor iniţiale. III 87

LIVIU LIBRESCU, Fundamentarea unei teorii a învelitorilor şi plăcilor elastice, anizotrope 105

S. RĂUTU, V. BĂNUŢ, În legătură cu calculul structurilor formate din elemente prefabricate 129

EINAR KEINTZEL, Calculul diafragmelor cu goluri rezemate elastic la sarcini orizontale 145

ION D. LĂZĂRESCU, Asupra posibilităţii de abstractizare a sculei aşchietoare . . 159

N. BOICU, Calculul forţelor care acţionează în plăcile plane asamblate în puncte . . 197

VLAD ION, Ecuaţiile de mişcare ale sistemului de manevră al instalaţiilor de foraj . . . 209

NOTE

N. D. POPESCU, Aplicaţii ale teoriei distribuţiei la studiul vibraţiilor plăcilor, solicitate de sarcini mobile 229

RECENZII 239

St. cerc. mec. apl., Tom. 27, Nr. 1, P. 1–242, Bucureşti, 1968

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratolvasó
249/1969

ECHILIBRUL RELATIV MACROSCOPIC AL PLASMEI CU SIMETRIE CILINDRICĂ

de N. N. PATRAULEA şi N. POSTELNICU
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

533 : 538.6

Se studiază echilibrul macroscopic al unui sistem de ioni de acelaşi semn într-un sistem de referinţă rotitor cu o viteză unghiulară constantă în raport cu un sistem de referinţă galilean în cazul configuraţiei cilindrice, ţinînd seama de difuzia sarcinilor sub efectul agitaţiei termice.

1. Anterior s-a arătat [1], [2] posibilitatea realizării unei gropi de potenţial într-un sistem de referinţă care se roteşte cu o viteză constantă ω în raport cu un sistem de referinţă galilean. În prezenta lucrare ne propunem să studiem influenţa difuziei asupra figurii de echilibru macroscopic a unui sistem de ioni de acelaşi semn. Pentru simplificare considerăm cazul configuraţiei cilindrice, ceea ce nu denaturează în mod esenţial fenomenul difuziei.

Notînd prin Φ_j, $j = 1, 2, 3, 4$ cvadripotenţialul electromagnetic definit prin

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\beta}, \tag{1.1}$$

unde $F_{\alpha\beta}$ sînt componentele tensorului electromagnetic în sistemul rotitor, $\mathcal{J}_j$ termenii inerţiali

$$\mathcal{J}_1 = 0; \quad \mathcal{J}_2 = r^2 \omega \overline{m}_0 c; \quad \mathcal{J}_3 = 0; \quad \mathcal{J}_4 = -\frac{i \overline{m}_0 \omega^2 r^2}{2}, \tag{1.2}$$

$\overline{m}_0 = \dfrac{m_0}{q}$ raportul masei de repaus la sarcina electrică a particulei, c viteza luminii şi $i = \sqrt{-1}$, componentele

$$G_j = \Phi_j + \mathcal{J}_j \tag{1.3}$$

Publicată şi în „Rev. Roum. sci. techn. — Mécanique Appliquée", **18**, *1* (1968) (în limba franceză).

satisfac, în cazul configurațiilor independente de coordonata după axa de rotație, ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\omega}{c}\frac{4\pi\rho r}{\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\mathrm{i}r\frac{\mathrm{d}G_4}{\mathrm{d}r}\right) = \frac{2\omega}{c}\frac{\mathrm{d}G_2}{\mathrm{d}r} + 4\pi\rho r\sqrt{1-\frac{\omega^2 r^2}{c^2}}. \tag{1.5}$$

După cum se știe, la echilibru macroscopic, distribuția densității de sarcină este dată de

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{\mathrm{i}G_4}{kT}\right), \tag{1.6}$$

unde ρ_0 este densitatea de sarcină pentru $r = 0$, k fiind constanta lui Boltzmann, T temperatura absolută, iar $\mathrm{i}G_4(0) = 0$.

2. În domeniul în care se poate neglija termenul $\frac{\omega^2 r^2}{c^2}$ și folosind notațiile

$$H^* = \frac{1}{r}\frac{dG_2}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_2}{\mathrm{d}r} = H + 2\omega c\,\overline{m}_0, \tag{2.1}$$

$$E^* = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}G_4}{\mathrm{d}r} = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}r} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\mathcal{J}_4}{\mathrm{d}r} = E + \omega^2 r\,\overline{m}_0, \tag{2.2}$$

se obține în loc de (1.4) și (1.5)

$$\frac{\mathrm{d}(rE^*)}{\mathrm{d}r} = \frac{2\omega}{c}rH^* + 4\pi\rho r, \tag{2.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}H^*}{\mathrm{d}r} = -\frac{\omega}{c}4\pi\rho r. \tag{2.4}$$

În toate ecuațiile, cîmpul electric și sarcinile electrice sînt exprimate în unități CGS electrostatice, iar cîmpul magnetic în unități CGS electromagnetice.

Din cauza valorilor mici ale lui ρ, membrul al doilea al ecuației (2.4) poate fi neglijat, ceea ce ne permite să considerăm $H^* = \text{const}$. Vom defini, ca și lucrările precedente, densitatea de sarcină fictivă prin

$$\rho^* = \frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{c}H^* = \text{const}. \tag{2.5}$$

În lipsa difuziei, deducem din (1.5) și (1.6) că sarcinile reale în domeniul ocupat de acestea „neutralizează" sarcinile fictive, adică, notînd prin ρ_1 densitatea de sarcină în absența difuziei, avem

$$\rho_1 = -\rho^*. \tag{2.6}$$

Evident, densitatea ρ_1 este de asemenea constantă.

În cazul real al difiziei ($T \neq 0$), gazul se va răspîndi în toată incinta și ne propunem să studiem repartiția densității de sarcină $\rho\,(r)$.

Fie

$$i\,G_4 = -\,\varphi, \tag{2.7}$$

cu

$$\varphi\,(0) = 0, \tag{2.8}$$

și, ținînd seama de (2.6), ecuațiile (2.3) și (1.6) devin

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr} + 4\pi\,\rho_0\,e^{-\frac{\varphi}{kT}} + 4\pi\rho^* = 0, \tag{2.9}$$

$$\rho = \rho_0\,e^{-\frac{\varphi}{kT}}. \tag{2.10}$$

Sarcina totală introdusă în groapa de potențial va fi dată de

$$Q = \int_0^R 2\pi\rho\,r\,dr, \tag{2.11}$$

unde R este raza incintei.

3. Introducînd variabilele fără dimensiune

$$x = \frac{\omega r}{c}, \tag{3.1}$$

$$y = \frac{\varphi}{kT}, \tag{3.2}$$

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\rho_0}{\rho_1}; \tag{3.3}$$

$$\theta = \frac{\omega^2\,kT}{4\pi\,c^2\,\rho_1}, \tag{3.4}$$

în loc de (2.9) obținem ecuația

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' + \frac{\bar{\rho}_0}{\theta}\,e^{-y} - \frac{1}{\theta} = 0, \tag{3.5}$$

pe care ne propunem s-o studiem pentru diverse valori ale parametrilor $\frac{\bar{\rho}_0}{\theta}$ și $\frac{1}{\theta}$ în intervalul

$$0 \leqslant x < 1, \tag{3.6}$$

valoarea unu corespunzînd vitezei liniare de rotație egale cu viteza luminii.

4. Din (2.8) rezultă condiția

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 ; \tag{4.1}$$

cum și cîmpul trebuie să fie nul în origine, avem a doua condiție:

$$x = 0 \quad , \quad y' = 0. \tag{4.2}$$

Adimensionînd și densitatea de sarcină prin

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1}, \tag{4.3}$$

din (2.10), (3.2) și (3.3) rezultă

$$\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0} = e^{-v}. \tag{4.4}$$

Pentru rezolvarea numerică a ecuației (3.5) observăm că la valori mici ale lui y putem neglija, în dezvoltarea în serie a lui e^{-v} termenii de grad mai mare ca unu, obținînd astfel o ecuație liniară. Pentru valori mari ale lui y putem neglija termenul $\frac{\bar{\rho}_0}{\theta} e^{-v}$ în comparație cu $\frac{1}{\theta}$, obținînd de asemenea o ecuație liniară simplă (după cum se va vedea, $\bar{\rho}_0$ este apropiat de unitate).

Ținînd seama că $\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}$ variază de la valoarea unu, la centru pînă aproape de zero spre periferia incintei, noi am adoptat o valoare convenabilă $\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}\right)_s = e^{-v_s}$, suficient de apropiată de unu, astfel ca în domeniul $0 < y \leqslant y_s$ în ecuația (3.5) să fie acceptabilă neglijarea termenilor de grad mai mare ca unu în dezvoltarea în serie a lui e^{-v}. Am adoptat de asemenea o valoare $\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}\right)_i = e^{-v_i}$, suficient de mică, astfel ca în domeniul $y_i \leqslant y$ să putem neglija termenul $\frac{\bar{\rho}_0}{\theta} e^{-v}$ în comparație cu $\frac{1}{\theta}$.

Astfel vom distinge un prim interval, I, în care ecuația (3.5) poate fi aproximată prin

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{\bar{\rho}_0}{\theta} y + \frac{1}{\theta}(\bar{\rho}_0 - 1) = 0 \quad , \quad 0 < y \leqslant y_s, \tag{4.5}$$

și un interval periferic, III, în care putem considera ecuația

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{\theta} = 0 \quad , \quad y_i \leqslant y. \tag{4.6}$$

5. Ecuația (4.5) poate fi rezolvată prin funcții Bessel [1], soluția fiind de forma

$$y = A I_0\left(\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\theta}}\, x\right) - \frac{1}{\bar{\rho}_0} + 1 \quad , \quad 0 < y \leqslant y_s . \tag{5.1}$$

[1] Notațiile sînt cele folosite în [3].

Determinînd constanta de integrare A, din condiția (4.1) se obține

$$y = \left(\frac{1}{\bar{\rho}_0} - 1\right)\left[I_0\left(\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\theta}}\, x\right) - 1\right], \tag{5.2}$$

$$y' = \left(\frac{1}{\bar{\rho}_0} - 1\right)\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\theta}}\, I_1\left(\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\theta}}\, x\right). \tag{5.3}$$

După cum se vede, și condiția (4.2) este satisfăcută.

Pentru valori asimptotice ale funcțiilor Bessei, din (5.2) și (5.3) rezultă

$$y' = y\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\theta}}. \tag{5.4}$$

6. Integrînd ecuația (4.6), valabilă în intervalul periferic III ($y \geqslant y_i$), obținem

$$y = \frac{1}{4\theta}\, x^2 - c_1 \ln x - c_2, \tag{6.1}$$

$$y' = \frac{1}{2\theta}\, x - \frac{c_1}{x}, \tag{6.2}$$

constantele de integrare putînd fi determinate în funcție de valorile calculate în $x = x_i$,

$$c_1 = x_i\left(\frac{1}{2\theta}\, x_i - y_i'\right), \tag{6.3}$$

$$c_2 = \frac{1}{4\theta}\, x_i^2 - c_1 \ln x_i - y_i, \tag{6.4}$$

printr-o metodă numerică adecvată folosită în intervalul II, $y_s \leqslant y \leqslant y_i$.

7. În intervalul II se manifestă puternic difuzia sarcinilor sub efectul agitației termice. Matematic, aceasta se reflectă printr-o variație pronunțată a funcției $y\,(x)$ și a densității de sarcină $\bar{\rho}\,(x) = \mathrm{e}^{-y}\,\bar{\rho}_0$.

În scopul unei rezolvări numerice convenabile vom face schimbarea de funcție definită de

$$P(y) = (y')^2, \tag{7.1}$$

care transformă ecuația (3.5) într-o ecuație de ordinul întîi :

$$P' = -\frac{2}{x}\sqrt{P} - \frac{2\bar{\rho}_0}{\theta}\,\mathrm{e}^{-y} + \frac{2}{\theta}. \tag{7.2}$$

Pe lîngă faptul că în acest fel am redus ordinul ecuației, remarcăm avantajul că $\frac{2}{x}\sqrt{P}$ este singurul termen al acestei ecuații a cărui integrală exactă nu o cunoaștem. Pe de altă parte, în domeniile de interes practic ($\theta \ll 10^{-4}$), termenul este mic față de ceilalți.

Într-adevăr, scriind relația (5.4) în punctul de trecere de la intervalul I la II, notat cu indicele s, sub forma

$$P_s = y_s^2 \frac{\bar{\rho}_0}{\theta}, \tag{7.3}$$

rezultă că raportul dintre termenul $\frac{2}{x}\sqrt{P}$ și $\frac{2\bar{\rho}_0}{\theta} e^{-y} - \frac{2}{\theta}$ tinde către zero atunci cînd θ tinde către zero :

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{P}}{\frac{\bar{\rho}_0}{\theta} e^{-y} - \frac{1}{\theta}} = \lim_{\theta\to 0} \frac{\theta\sqrt{P_s - 2\int_s \frac{\sqrt{P}}{x}\,dy + \frac{2\bar{\rho}_0}{\theta}(e^{-y} - e^{-y_s}) + \frac{2}{\theta}(y - y_s)}}{x(\bar{\rho}_0 e^{-y} - 1)} =$$

$$= \lim_{\theta\to 0} \frac{\sqrt{-2\theta^2\int_s \frac{\sqrt{P}}{x}\,dy + \theta[y_s^2 + 2\bar{\rho}_0(e^{-y} - e^{-y_s}) + 2(y - y_s)]}}{x(\bar{\rho}_0 e^{-y} - 1)} = 0. \tag{7.4}$$

Chiar înainte de limită, valoarea raportului de mai sus este foarte mică. Pentru $\theta = 10^{-4}$, $x_s = 0{,}1$ și $x = 0{,}106$, efectuînd calculul numeric (prin aproximații), am obținut că acest raport este $< 0{,}055$. Totuși nu am neglijat termenul $-\frac{2}{x}\sqrt{P}$ în ecuația (7.2), rezolvînd numeric ecuația

$$P = -\int \frac{2}{x}\sqrt{P}\,dy - \frac{2\bar{\rho}_0}{\theta} e^{-y} + \frac{2}{\theta} y + c \tag{7.5}$$

pe intervalul II.

Ținînd seama de ecuația (7.1), se calculează apoi abscisele respective pe același interval :

$$x(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{P}}. \tag{7.6}$$

8. Din cauza valorilor mici ale parametrului $\bar{\rho}_0$ este neconvenabil să pornim de la valori date acestuia, astfel încît, rezolvînd ecuația (5.2), să ajungem la determinări interesante pentru x_s. De aceea, avînd în vedere că pentru un θ dat o pereche de valori x_s și y_s adoptate, în punctul care separă intervalul I de intervalul II, determină unic atît constanta $\bar{\rho}_0$ corespunzătoare soluției Bessel pentru intervalul I, cît și derivata y'_s în punctul respectiv, pentru simplificarea problemei am pornit cu toate calculele din acest punct.

Ținînd seama de criteriile expuse în paragraful 4, am adoptat $\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}\right)_i = 0{,}01$ și, din considerente de simetrie, am luat $\left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}\right)_s = 1 - \left(\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_0}\right)_i = 0{,}99$, rezultînd din (4.4) : $y_i = 4{,}60517$ și $y_s = 0{,}01005$.

Calculele au fost efectuate pentru diferite valori ale lui $\theta \leqslant 10^{-4}$, deci suficient de mici pentru a aplica metodele de calcul expuse. Domeniul cercetat acoperă de fapt posibilitățile experimentale.

După cum am mai arătat, pentru simplificarea metodelor de calcul, respectiv pentru comoditatea folosirii diagramelor, acestea au fost trasate în funcție de un același parametru x_s corespunzător lui y_s, ceea ce permite trecerea directă de la o diagramă la alta.

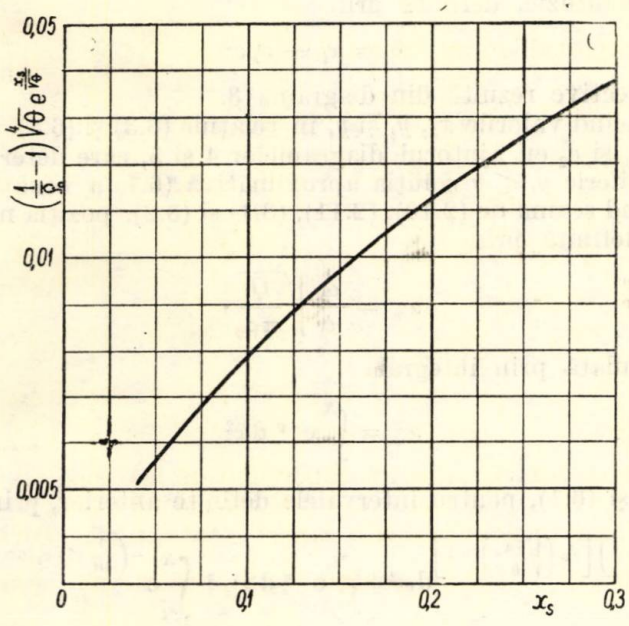


Diagrama 1

Luînd într-o primă aproximație $\bar{\rho}_0 = 1$ în argumentul $\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\theta}}\, x$ al funcției Bessel I_0, din relația (5.2) rezultă aproximativ

$$\frac{1}{\bar{\rho}_0} - 1 \approx \frac{y_s}{I_0\left(\frac{x_s}{\sqrt{\theta}}\right) - 1}. \tag{8.1}$$

Pentru domenii de interes practic, adică pentru argument $\frac{x_s}{\sqrt{\theta}}$ mare, neglijînd pe 1 față de I_0 și luînd expresia asimptotică a funcției Bessel, obținem

$$\left(\frac{1}{\rho_0} - 1\right)\sqrt[4]{\theta}\, e^{\frac{x_s}{\sqrt{\theta}}} = \frac{y_s\sqrt{2\pi x_s}}{1 + \frac{1}{8}\frac{\sqrt{\theta}}{x_s} + \frac{5}{132}\left(\frac{\sqrt{\theta}}{x_s}\right)^2 + \ldots} \approx y_s\sqrt{2\pi x_s}, \tag{8.2}$$

deci, practic, primul membru este funcție numai de x_s.

În diagrama 1 s-a reprezentat această dependență, din care rezultă că, exceptînd domeniul $x_s < 0{,}1$, $\theta \geqslant 10^{-4}$, avem $1 > \bar{\rho}_0 > \frac{10^5}{10^5 + 1}$, ceea ce justifică aproximarea de mai sus.

Folosind relația (5.4), am calculat valoarea derivatei $y'_s(\theta, x_s)$ la începutul intervalului II și apoi, prin calcul numeric, după cum am arătat, s-au obținut valorile x_i și y_i (diagrama 2), care marchează începutul intervalului III. Totodată am calculat în funcție de θ și x_s lărgimea zonei principale de difuzie, definită prin

$$\delta = x_i - x_s. \tag{8.3}$$

Valorile respective rezultă din diagrama 3.

Introducînd valorile x_i, y_i și y'_i în relațiile (6.3) și (6.4), am calculat constantele c_1 și c_2 cu ajutorul diagramelor 4 și 5, care determină pentru domeniul periferic $y_i \leqslant y$ soluția aproximativă (6.1) a ecuației studiate.

9. Ținînd seama de (2.10), (2.11), (3.1) și (3.2), poziția medie a zonei de difuzie, definită prin

$$x_m = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{Q}{\pi\rho_0}}, \tag{9.1}$$

poate fi calculată prin integrala

$$x_m^2 = \int_0^X \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x^2 \tag{9.2}$$

sau cu (5.2) și (6.1), pentru intervalele definite anterior, prin integralele

$$x_m^2 = \int_0^{x_s} \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{\bar{\rho}_0}-1\right)\left[I_0\left(\sqrt{\frac{\bar{\rho}_0}{\theta}}\,x\right)-1\right]}\mathrm{d}x^2 + \int_{x_s}^{x_i} \mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x^2 + \int_{x_i}^{X} \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{4\theta}x^2 - c_1\ln x - c_2\right)}\mathrm{d}x^2, \tag{9.3}$$

unde

$$X = \frac{\omega}{c}R. \tag{9.4}$$

Ultima integrală fiind de forma

$$\int \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{4\theta}x^2 - c_1\ln x - c_2\right)}\mathrm{d}x^2 = -4\theta\,\mathrm{e}^{c_2 - \frac{x^2}{4\theta}}\left[\sum_{k=0}^{\frac{c_1}{2}} \frac{\left(\frac{c_1}{2}\right)!}{\left(\frac{c_1}{2}-k\right)!}(4\theta)^k\,x^{c_1-2k}\right] + c \tag{9.5}$$

pentru domeniile pe care le studiem: $\theta = 10^{-4}$ și x_i depărtat de zero, se găsește că seria din membrul drept poate fi foarte bine aproximată prin primul termen al ei și deci putem lua

$$\int_{x_i}^{X} \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{4\theta}x^2 - c_1\ln x - c_2\right)}\mathrm{d}x^2 = 4\theta\,\mathrm{e}^{c_2}\left(x_i^{c_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{x_i^2}{4\theta}} - X^{c_1}\,\mathrm{e}^{-\frac{X^2}{4\theta}}\right). \tag{9.6}$$

Dacă peretele incintei este depărtat de zona de difuzie, în (9.6) se poate lua aproximativ $X = 1$, deoarece, în intervalele periferice, contribuția la integrala (9.6) este neglijabilă.

Pentru $\theta = 10^{-4}$ și $x_s = 0{,}1$, efectuînd calculele, rezultă că prima și ultima integrală din (9.3) sînt $\approx 0{,}9989\,x_s^2$ și, deoarece o dată cu mic-

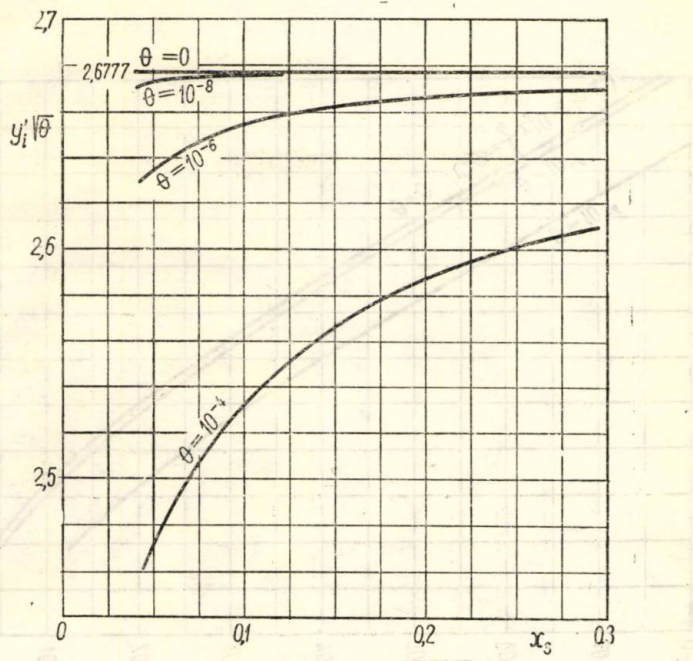


Diagrama 2

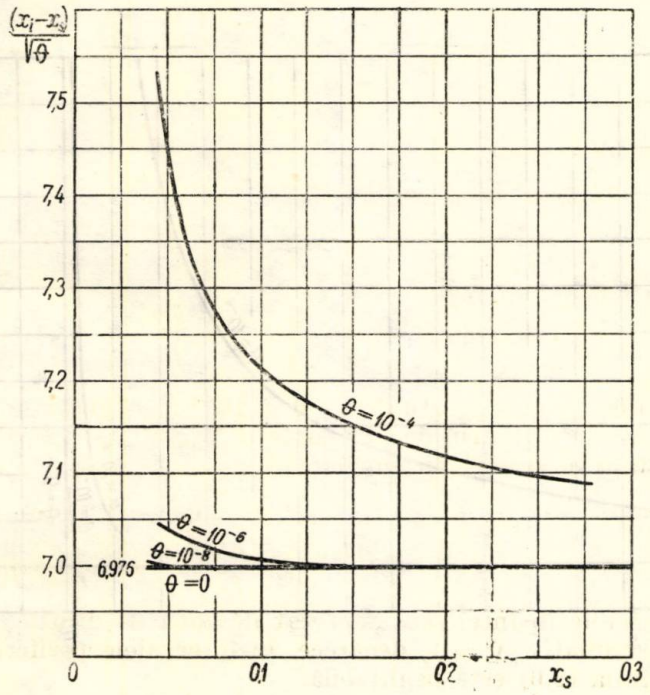


Diagrama 3

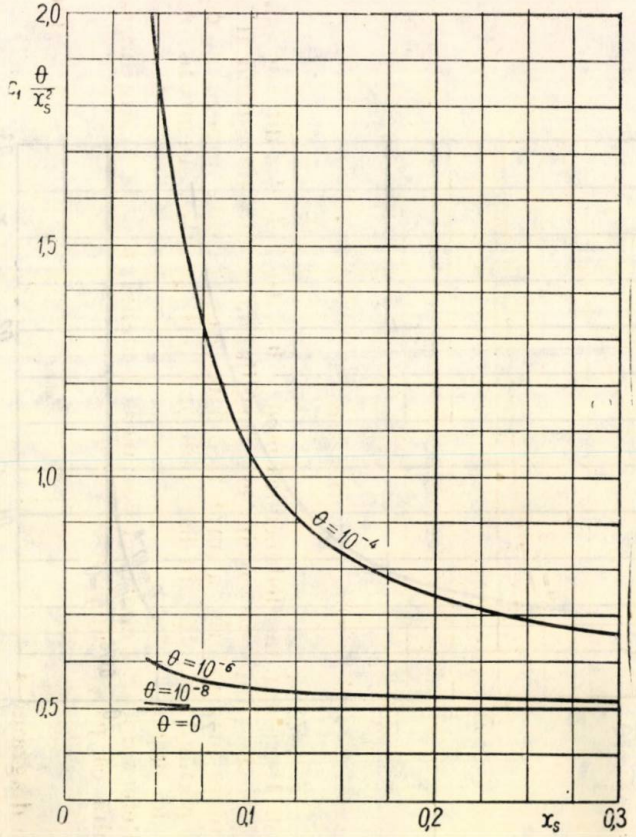


Diagrama 4

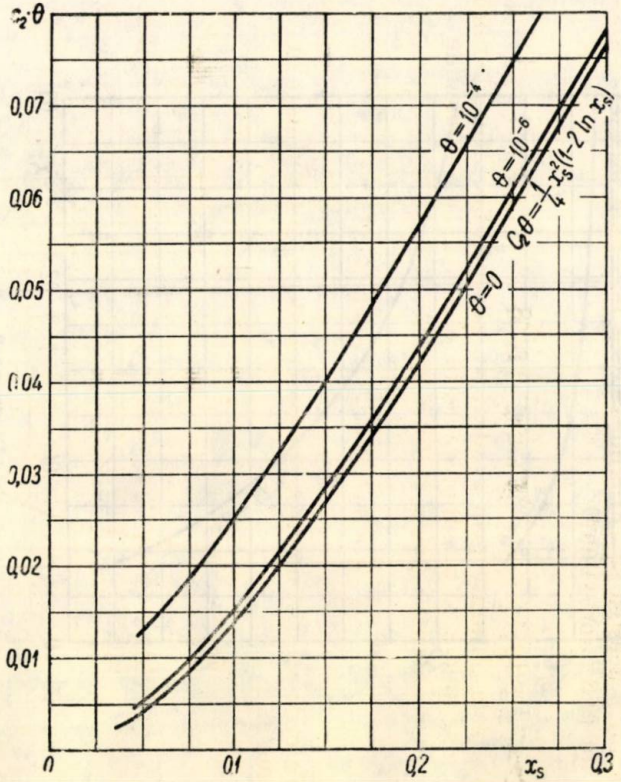


Diagrama 5

șorarea lui θ acestea se aproximează tot mai bine prin x_s^2, putem folosi în loc de (9.3) aproximația

$$x_m^2 = x_s^2 + \int_{x_s}^{x_i} e^{-y}\, dx^2. \tag{9.7}$$

Valorile obținute prin cvadraturi, ale integralei din membrul drept pentru mărimile y_s și y_i adoptate arată că, exceptînd domeniile $x_s \leqslant 0{,}05$ și $\theta \geqslant 10^{-6}$, aceasta poate fi bine aproximată prin

$$\int_{x_s}^{x_i} e^{-y}\, dx^2 \approx 8{,}507\, x_s \sqrt{\theta} + 23{,}5\theta. \tag{9.8}$$

Valorile poziției medii x_m în funcție de x_s și θ sînt date în diagrama 6.

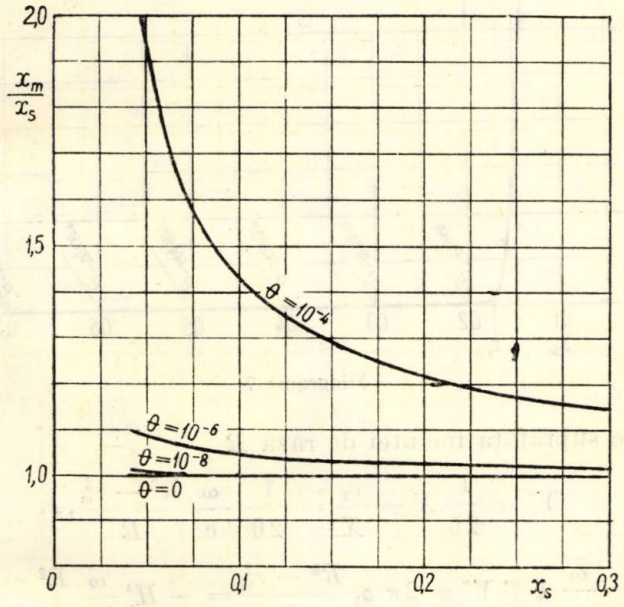


Diagrama 6

10. Din diagrame deducem că pentru $\theta < 10^{-8}$ efectul difuziei asupra repartiției densității de sarcini este neglijabil, rezultatele putînd fi bine aproximate prin valorile asimptotice date. Aceasta este important, deoarece ne permite a efectua, în domeniile de interes practic, însemnate simplificări de calcul.

Referindu-ne în continuare la acest domeniu ($\theta < 10^{-8}$), din diagrama 6 rezultă că putem aproxima

$$x_s = x_m, \tag{10.1}$$

iar din diagrama 4

$$c_1 = \frac{x_s^2}{2\theta} \tag{10.2}$$

și deci, definind raza medie de difuzie prin

$$r_m = \frac{c}{\omega} x_m, \tag{10.3}$$

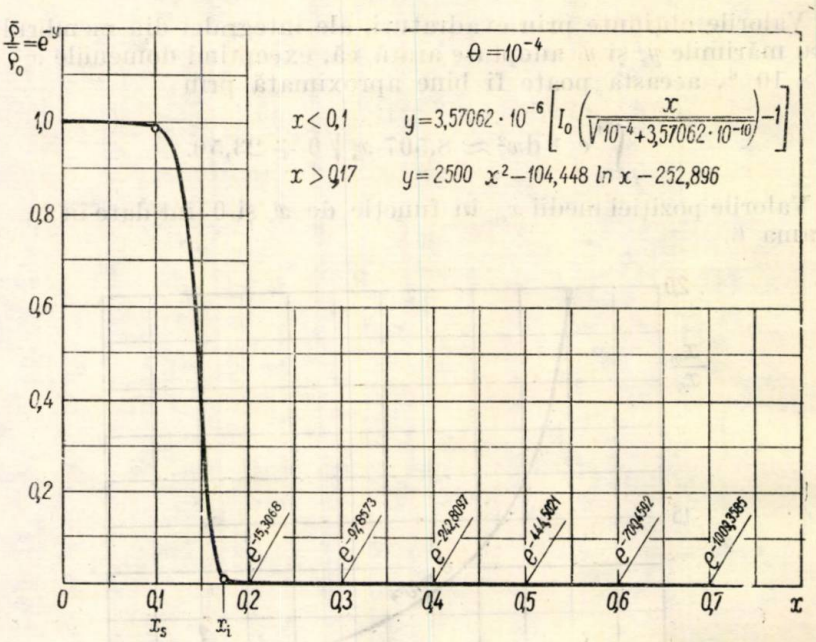


Diagrama 7

vom avea pe suprafața incintei de rază R

$$Y' = \frac{1}{2\theta} X - \frac{c_1}{X} = \frac{1}{2\theta} \frac{\omega}{c} \frac{R^2 - r_m^2}{R}, \tag{10.4}$$

$$E^* = \frac{\omega}{c} k T Y' = 2\pi \rho_1 \frac{R^2 - r_m^2}{R} = - H^* \frac{\omega}{c} \frac{R^2 - r_m^2}{R}, \tag{10.5}$$

$$E = - H \frac{\omega}{c} \frac{R^2 - r_m^2}{R} - \omega^2 \overline{m}_0 \frac{3R^2 - 2r_m^2}{R}. \tag{10.6}$$

Se poate vedea că ω și H^* vor avea semne contrare. Pentru concretizare vom considera ω pozitiv, iar cîmpul magnetic H negativ. Totodată, după cum rezultă din diagrama 1 (pentru $\theta < 10^{-8}$), $\overline{\rho}_0$ fiind foarte apropiat de unitate, putem aproxima

$$\rho_0 = \rho_1 \tag{10.7}$$

și deci sarcina totală introdusă în groapa de potențial, corespunzător unității de lungime a axei de rotație, va fi

$$Q = \rho_0 \pi r_m^2 = - (H + 2\omega c \overline{m}_0) \frac{\omega}{2c} r_m^2. \tag{10.8}$$

11. Pentru exemplificare, folosind relaţiile (10.6) şi (10.8), deducem că într-o incintă cilindrică de raza $R = 10$ cm echilibrul macroscopic al unui sistem de electroni ($\overline{m}_0 = 1{,}89 \cdot 10^{-18}$), antrenaţi în rotaţie cu o viteză unghiulară $\omega = 10^7$ rad/s, se stabileşte la o rază medie de difuzie $r_m = 3$ cm, sub efectul unui cîmp mgnetic $H = 10^4$ oersted, atunci cînd intensitatea cîmpului electric pe incintă este E = 30,3 u. $CGS_{\varepsilon_0} = 9\,090$ volţi/cm, ceea ce corespunde la o sarcină totală pe unitatea de generatoare introdusă în groapa de potenţial $Q = 15$ u. CGS_{ε_0}, respectiv circa $3{,}12 \cdot 10^{10}$ electroni. În acest caz, densitatea de sarcină în groapa de potenţial va fi $\rho_1 \approx 0{,}53$ u. CGS_{ε_0}. Dacă temperatura este $T = 10^6$ °K, constanta lui Boltzmann fiind $k = 1{,}38 \cdot 10^{-16}$ erg/grad, rezultă $\theta = 2{,}3 \cdot 10^{-18}$, ceea ce justifică folosirea relaţiilor (10.6) şi (10.8). De asemenea rezultă că lărgimea zonei principale de difuzie în limitele adoptate de noi va fi $\delta = 2{,}093 \cdot 10^{-5}$ cm.

Tot pentru exemplificare, în diagrama 7 am redat repartiţia sarcinilor adimensionale $\frac{\overline{\rho}}{\overline{\rho}_0}$ pentru $x_s = 0{,}1$ şi $\theta = 10^{-4}$.

12. Din exemplul dat în diagrama 7 rezultă că zona de difuzie a sarcinilor sub efectul temperaturii corespunde intervalului II, unde au loc variaţii mari ale parametrilor ρ şi y.

Din diagrama 3 rezultă că această zonă se îngustează rapid o dată cu scăderea temperaturii, devenind chiar neglijabilă pentru $\theta < 10^{-8}$, ceea ce ar corespunde, de exemplu, pentru $\omega = 10^9$ rad/s şi $H = 10^4$ oersted la o temperatură $T < 10^{13}$ °K.

De asemenea această zonă se îngustează în oarecare măsură atunci cînd raza medie a zonei de difuzie creşte, deci atunci cînd creşte sarcina totală introdusă în groapa de potenţial.

Primită la redacţie la 8 iunie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Patraulea, *Equilibre macroscopique d'un système d'ions, isolé, par rapport à un système de référence tournante*, C. R. Acad. Sc. Paris, **A 263**, 226 (1966).
2. — *L'équilibre relatif d'un système d'ions par rapport à un système de référence tournante*, Rev. roum. sci. techn. — Méc. Appl., **11**, 5, 1199–1209 (1966).
3. A. Gray, G. B. Mathews, *Funcţiile Bessel şi aplicaţiile lor în fizică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1958.

STUDIUL CURBEI DE RESTABILIRE A PRESIUNII ÎN CAZUL CURGERII POLIFAZICE *)

de H. PASCAL
Institutul de mecanică a fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

BUDAPESTI MŰSZAKI KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

532

În lucrare se studiază curgerea tranzitorie a amestecului gaze-țiței printr-un mediu poros în cazul problemei restabilirii presiunii de fund după închiderea sondei. Rezolvarea efectivă a ecuațiilor neliniare care descriu curgerea nestaționară cu schimbare de fază este efectuată cu ajutorul metodei perturbațiilor pentru aproximația de ordinul doi.

I. INTRODUCERE

Exploatarea rațională a zăcămintelor de hidrocarburi fluide implică cunoașterea proprietăților fizice ale mediului poros. În acest scop, în prezent se aplică pe scară largă metode bazate pe analiza unor particularități ale curbei de restabilire a presiunii obținute într-o sondă după închiderea acesteia, care permite determinarea *in situ* a permeabilității, precum și a presiunii dinamice de zăcământ aferente zonei de drenaj a sondei. Dacă presiunea este superioară celei de saturație, atunci, după închiderea sondei, va avea loc în zăcământ o curgere tranzitorie a unui fluid omogen și, în consecință, determinarea permeabilității, care în acest caz este o constantă a mediului poros, după curba de restabilire a presiunii poate fi considerată o problemă practic rezolvată [1]—[5].

Rezultă deci că domeniul de aplicabilitate a metodelor bazate pe analiza curbei de restabilire a presiunii în cazul curgerii unui fluid omogen este limitat de condiția ca presiunea în zona de drenaj aferentă sondei să fie mai mare decît presiunea de saturație. Acest caz se întîlnește numai în faza inițială a exploatării zăcămintelor, unde expulzarea fluidelor are loc datorită expansiunii acestora.

*) Lucrarea a fost publicată în Revue de l'Institut Français du Pétrole, nº. 3, 1967.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 27, NR. 1, P. 17–34, BUCUREȘTI, 1968

Pe de altă parte, după cum s-a arătat în [6], permeabilitatea mai poate fi determinată cu ajutorul unei metode bazate pe proprietatea de dispersie a undelor de presiune cînd acestea se propagă într-un fluid care saturează un mediu poros. În timpul exploatării zăcămintelor, presiunea variază atît în spațiu, cît și în timp, și, prin urmare, aceasta va scădea sub cea de saturație, permițînd gazelor să iasă din soluție. Dacă saturația în gaze a mediului poros este suficient de mare, astfel încît faza gazoasă să devină mobilă, atunci vom avea o curgere simultană de țiței și de gaze libere. În acest caz, după cum se știe, permeabilitatea este o funcție de saturație și, în consecință, analiza curbei de restabilire a presiunii implică cunoașterea particularităților variației în timp a presiunii de fund după închiderea sondei, în condițiile unei curgeri bifazice.

Spre deosebire de cazul fluidului omogen, curgerea bifazică nestaționară cu schimbare de fază este descrisă de un sistem de ecuații cu derivate parțiale neliniare [7]. Rezolvarea analitică a sistemului nu poate fi efectuată exact, chiar în cazurile cele mai simple întîlnite în practică, astfel încît pentru analiza curbei de restabilire a presiunii în cazul curgerii bifazice s-a recurs, în lucrările [1], [8]—[13], la procedee care presupun validitatea soluțiilor obținute pentru fluidul omogen, utilizînd în acest scop mobilitatea echivalentă și coeficientul de compresibilitate echivalent definite în lucrările menționate mai sus.

În felul acesta, rezultatele obținute reprezintă, după cum se va arăta mai departe, o primă aproximație a soluției sistemului de ecuații neliniare [7], care rezultă din liniarizarea acestora atunci cînd se consideră anumite ipoteze referitoare la variația saturației și la proprietățile fizice ale fluidelor.

După cum se știe, în cazul curgerii nestaționare cu schimbare de fază, saturația variază continuu în spațiu și timp atît datorită fenomenului de curgere cît și a variației presiunii. Pe de altă parte, o rezolvare numerică a ecuațiilor în cazul curgerii tranzitorii după închiderea sondei nu permite o discuție a soluției și nici stabilirea influenței diferiților parametri, absolut necesare pentru elaborarea unor metode practice, în scopul determinării saturației mediului poros și a presiunii dinamice de zăcămînt aferente zonei de drenaj a sondei. Este deci justificată necesitatea de a se recurge la soluții analitice chiar aproximative, în cadrul unor scheme fizice bazate pe ipoteze care conduc la erori acceptabile pentru aplicațiile practice atît în ceea ce privește aspectul calitativ, cît și cel cantitativ al fenomenului fizic.

Scopul lucrării de față este de a examina curgerea tranzitorie bifazică, țiței-gaze și țiței-apă, în cazul restabilirii presiunii după închiderea sondei, eliminînd unele ipoteze utilizate în lucrările anterioare, pentru a putea stabili, pe de o parte, domeniul de aplicabilitate a soluțiilor utilizate în prezent și, pe de altă parte, pentru a elabora o metodă practică de determinare a saturației mediului poros. În prima parte a lucrării vom expune o metodă de rezolvare aproximativă a ecuațiilor curgerii nestaționare cu schimbare de fază cu condiții la limită variabile în timp, care poate permite în general studierea unui grup de probleme întîlnite în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide în regim de gaze dizolvate, în ceea ce privește prevederea comportării acestora în timp. În partea a doua vom aplica rezultatele obținute la studiul problemei restabilirii presiunii într-o sondă după închiderea acesteia.

II. ECUAȚIILE CURGERII NESTAȚIONARE CU SCHIMBARE DE FAZĂ

a) Cazul gaze-țiței

Dacă considerăm mediul poros omogen și izotrop și presupunem validitatea legii lui Darcy pentru fiecare fază, atunci curgerea nestaționară a unui amestec de țiței și gaze este descrisă de sistemul de ecuații [7]

$$\nabla\left[\left(\frac{\omega(p)}{\beta(p)}\frac{\gamma_{g_0}k_t(\sigma)}{\mu_t}+\frac{\gamma_g k_g(\sigma)}{\mu_g}\right)\nabla p\right]=m\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(p)}{\beta(p)}\gamma_{g_0}\sigma+\gamma_g(1-\sigma)\right],$$

$$\nabla\left[\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t\beta(p)}\nabla p\right]=m\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\sigma}{\beta(p)}\right), \tag{II.1}$$

unde ∇ este operatorul nabla $\left(\nabla=\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)$.

Cele două ecuații (I.1) sînt suficiente pentru determinarea funcțiilor necunoscute $p(x, y, z, t)$ și $\sigma(x, y, z, t)$, respectiv a distribuției presiunii și saturației, în cazul unor condiții la limită și inițiale care apar în exploatarea zăcămintelor de hidrocarburi fluide. Datorită neliniarității ecuațiilor, rezolvarea sistemului (I.1) în cazul general nu este posibilă. Pe de altă parte, funcțiile de presiune $\beta(p)$, μ_t, μ_g și $\omega(p)$, precum și cele de saturație $k_t(\sigma)$ și $k_g(\sigma)$, care apar în (I.1), pot fi cunoscute prin expresii empirice, respectiv după curbele obținute experimental.

Din acest motiv apare necesar să recurgem la introducerea unor ipoteze atît cu privire la variația cu presiunea a proprietăților fizice, cît și la variația cu saturația a permeabilităților efective. În acest scop vom ține seama de faptul că, în cazul presiunilor diferențiale întîlnite în general la exploatarea sondelor, putem să considerăm pentru funcțiile $\beta(p)$, $\mu_t(p)$ și $\mu_g(p)$ valorile lor medii ponderate după presiune, definite în intervalul $p_0 < p < p_k$ de relațiile

$$\bar{\beta}=\frac{1}{p_k-p_0}\int_{p_0}^{p_k}\beta(p)\,dp,\ \bar{\mu}_t=\frac{1}{p_k-p_0}\int_{p_0}^{p_k}\mu_t(p)\,dp \text{ și}$$

$$\bar{\mu}_g=\frac{1}{p_k-p_0}\int_{p_0}^{p_k}\mu_g(p)\,dp. \tag{II.2}$$

Dacă curbele care exprimă variația proprietăților fizice ale fluidelor $\beta(p)$, $\mu_t(p)$ și $\mu_g(p)$ pot fi aproximate prin funcții analitice, atunci integralele (II.2) pot fi efectuate ; în caz contrar, integralele (II.2) se efectuează numeric cu ajutorul formulelor de cvadratură cunoscute.

În ceea ce privește volumul de gaze dizolvate, acesta poate fi determinat admițînd validitatea legii lui Henry și, în consecință, vom avea

$$\omega(p)=\alpha\frac{p}{p_a}, \tag{II.3}$$

p_a fiind presiunea atmosferică, iar din ecuația de stare termodinamică a fazei gazoase, în ipoteza evoluției izotermice, rezultă

$$\gamma_g = \frac{\gamma_{g_0}}{\bar{z}} \frac{p}{p_a}. \tag{II.4}$$

Ținînd seama de relațiile (II.2), (II.3) și (II.4), sistemul (II.1) poate fi scris sub forma [13]

$$\nabla\left[\left(\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g}\right) p \nabla p\right] = m\frac{\partial}{\partial t}[\bar{\alpha} p\sigma + p(1-\sigma)],$$

$$\nabla\left[\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t}\nabla p\right] = m\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{II.5}$$

După cum s-a menționat mai sus, dependentele permeabilităților efective în funcție de saturație nu sînt cunoscute decît după curbele determinate experimental. Dacă ne referim la cazul curgerii în perioada tranzitorie, adică pînă la momentul stabilizării presiunii după închiderea sau deschiderea sondei, atunci putem presupune cu o bună aproximație că funcțiile $k_t(\sigma)$ și $k_g(\sigma)$ variază liniar cu saturația. În consecință vom avea în intervalul $\sigma_k < \sigma < \sigma_0$ următoarele relații:

$$\bar{\alpha}\frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} + \frac{k_g(\sigma)}{\mu_g} = a_1\sigma + b_1 \quad \text{și} \quad \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} = a_2\sigma + b_2, \tag{II.6}$$

unde σ_0 reprezintă valoarea saturației după stabilizarea presiunii.

Coeficienții a_1, b_1, a_2 și b_2 pot fi determinați după curbele experimentale, cunoscînd permeabilitățile efective pentru două valori σ_{10} și σ_{20} convenabil alese, astfel încît eroarea rezultată în intervalul $\sigma_{10} < \sigma < \sigma_{20}$ din aproximarea curbelor $k_t(\sigma)$ și $k_g(\sigma)$ prin relațiile (II.6) să fie minimă.

Prin urmare, sistemul (II.5) devine acum în cazul plan-radial

$$\frac{1}{2}(a_1\sigma + b_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p^2}{\partial r}\right) + \frac{a_1}{2}\frac{\partial \sigma}{\partial r}\frac{\partial p^2}{\partial r} = m(\bar{\alpha}-1)\frac{\partial(p\sigma)}{\partial t} + m\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$(a_2\sigma + b_2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p}{\partial r}\right) + a_2\frac{\partial \sigma}{\partial r}\frac{\partial p}{\partial r} = m\frac{\partial \sigma}{\partial t}, \tag{II.7}$$

unde prin $\bar{\alpha}$ s-a notat $\bar{\alpha} = \dfrac{\alpha}{\bar{z}\beta}$.

Se observă acum că în urma simplificărilor făcute, acceptabile din punctul de vedere al aplicațiilor practice, ecuațiile sistemului (II.7) rămîn neliniare, însă sub această formă, după cum s-a arătat în lucrarea [14], devine posibilă pentru rezolvarea lor utilizarea metodei perturbațiilor, considerînd pentru funcțiile $p(r, t)$ și $\sigma(r, t)$ următoarele dezvoltări în serii de puteri după parametrul ε:

$$\frac{p}{p_k} = 1 + \varepsilon p_1(r, t) + \varepsilon^2 p_2(r, t) + \ldots + \varepsilon^n p_n(r, t) + \ldots,$$

$$\sigma = \sigma_k + \varepsilon\sigma_1(r, t) + \varepsilon^2\sigma_2(r, t) + \ldots + \varepsilon^n\sigma_n(r, t) + \ldots, \tag{II.8}$$

presupuse uniform convergente, unde ε este un parametru auxiliar, iar σ_k valoarea saturației în țiței corespunzătoare stării de repaus a fluidelor, adică la momentul inițial, unde presiunea este uniformă și egală cu p_k. Dacă la momentul inițial curgerea era staționară, putem considera într-o primă aproximație că σ_k reprezintă valoarea medie ponderată după volum a saturației, definită de relația

$$\sigma_k = \frac{1}{V}\int_V \sigma(x, y, z, 0)\, dV. \tag{II.9}$$

Dacă ne limităm numai la aproximația de ordinul doi a soluției sistemului (II.7), respectiv la funcțiile p_1, p_2, σ_1 și σ_2, atunci, introducînd relațiile (II.8) în (II.7) și identificînd coeficienții după puterile parametrului ε, vom obține

$$p_k(a_2\sigma_k + b_2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = m\frac{\partial \sigma_1}{\partial t},$$

$$p_k(a_1\sigma_k + b_1)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = m(\bar{\alpha} - 1)\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + m[1 + (\bar{\alpha} - 1)\sigma_k]\frac{\partial p_1}{\partial t} \tag{II.10}$$

și

$$p_k(a_1\sigma_k + b_1)\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1^2}{\partial r}\right)\right] + a_1 p_k\left[\frac{\partial \sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \sigma_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)\right] = m(\bar{\alpha} - 1)p_1\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + m(\bar{\alpha} - 1)\frac{\partial \sigma_2}{\partial t} + \tag{II.11}$$

$$+ m(\bar{\alpha} - 1)\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial t} + m[1 + (\bar{\alpha} - 1)\sigma_k]\frac{\partial p_2}{\partial t},$$

$$p_k(a_2\sigma_k + b_2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) + a_2 p_k\left[\sigma_1\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) + \frac{\partial \sigma_1}{\partial r}\frac{\partial p_1}{\partial r}\right] = m\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}.$$

În felul acesta, rezolvarea sistemului (II.7) a fost redusă la rezolvarea sistemelor de ecuații liniare (II.10) și (II.11), cu anumite condiții la limită și inițiale care vor fi arătate mai departe.

Din (II.10) se obține pentru determinarea funcțiilor σ_1 și p_1 ecuațiile omogene

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = \lambda\frac{\partial p_1}{\partial t} \quad \text{și} \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \Omega\frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{II.12}$$

unde

$$\lambda = \frac{m[1 + (\bar{\alpha} - 1)\sigma_k]}{p_k\left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right]} \quad \text{și} \quad \Omega = (a_2\sigma_k + b_2)\frac{\lambda p_k}{m} = \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\frac{\lambda p_k}{m}. \tag{II.13}$$

Pe de altă parte, din (II.11) rezultă pentru funcția p_2 ecuația neomogenă

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) = \lambda\frac{\partial p_2}{\partial t} + \Phi_1(r,t), \tag{II.14}$$

unde termenul liber Φ_1 se obține din relația

$$\Phi_1(r,t) = A\frac{\partial p_1^2}{\partial t} - Bp_1(r,0)\frac{\partial p_1}{\partial t} - C\left(\frac{\partial p_1}{\partial r}\right)^2 + D\frac{\partial p_1}{\partial r}\cdot\frac{\partial p_1(r,0)}{\partial r} \tag{II.15}$$

iar constantele A, B, C și D din relațiile

$$\begin{aligned}
A &= \frac{-m(\bar{\alpha}-1)\,\Omega + \left(\bar{\alpha}\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right)\lambda\dfrac{p_k}{2} + (a_1-(\bar{\alpha}-1)\,a_2)\dfrac{p_k\lambda\Omega}{2}}{p_k\left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right]},\\
B &= \Omega\frac{m(\bar{\alpha}-1) + \lambda p_k\,[a_1-(\bar{\alpha}-1)\,a_2]}{p_k\left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right]},\\
C &= \frac{\bar{\alpha}\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g} + [a_1-(\bar{\alpha}-1)\,a_2]\,\Omega}{p_k\left[\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}\right]},\\
D &= \Omega\frac{a_1-(\bar{\alpha}-1)\,a_2}{\dfrac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \dfrac{k_g(\sigma_k)}{\mu_g}}.
\end{aligned} \tag{II.16}$$

Pentru prima aproximație a distribuției saturației σ_1, vom avea din (II.12

$$\sigma_1 = \Omega p_1 + \varphi(x,y,z), \tag{II.17}$$

care, cu condiția inițială $\sigma(x,\,y,\,z,\,0) = \sigma_k$, respectiv $\sigma_1(x,\,y,\,z,\,0) = 0$, devine

$$\sigma_1(x,y,z,t) = \Omega\,[p_1(x,y,z,t) - p_1(x,y,z,0)]. \tag{II.18}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (II.18), (II.14) și (II.11) se obține pentru determinarea funcției $\sigma_2(x,y,z,t)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_2}{\partial t} &= \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}\frac{p_k}{m}\left[\lambda\frac{\partial p_2}{\partial t} + \Phi_1(x,y,z,t)\right] + \frac{a_2p_k\Omega}{m}\,[p_1(x,y,z,t) -\\
&- p_1(x,y,z,0)]\,\lambda\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{a_2p_k\Omega}{m}\,[(\nabla p_1)^2 - \nabla p_1\nabla p_2(x,y,z,0)].
\end{aligned} \tag{II.19}$$

Deoarece în cele ce urmează vom studia cazul cînd la momentul inițial curgerea începe din stare de repaus, atunci avem $p(x,\,y,\,z,\,0) = p_k$ și

$p_1(x, y, z, 0) = \nabla p_1(x, y, z, 0) = 0$. În ceea ce privește termenul $[\nabla p_1]^2$, vom ține seama, după cum s-a arătat în lucrările [9] și [13], că, în cazul curgerii amestecului gaze-țiței, gradienții de presiuni, întîlniți frecvent la exploatarea sondelor, au în general valori care permit ca termenul $(\nabla p_1)^2$ să poată fi neglijat *). În consecință, termenul liber al ecuației neomogene (II.14) poate fi scris sub forma

$$\Phi_1(x, y, z, t) = A \frac{\partial p_1^2}{\partial t}, \tag{II.20}$$

iar din (II.10) rezultă

$$\sigma_2(x, y, z, t) = \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} \frac{\lambda p_k}{m} p_2(x, y, z, t) + \left(A \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{a_2 \lambda \Omega}{2} \right) \frac{p_k}{m} p_1^2(x, y, z, t) + \varphi(x, y, z). \tag{II.21}$$

Pe de altă parte, pentru condiția inițială avem $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ și, prin urmare, distribuția saturației în cazul aproximației de ordinul doi a soluției sistemului (II.7) va fi

$$\sigma = \sigma_k + \Omega p_1 + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} \frac{\lambda p_k}{m} p_2 + \frac{p_k}{m} \left(A \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t} + \frac{a_2 \lambda \Omega}{2} \right) p_1^2. \tag{II.20'}$$

b) *Cazul apă-țiței*

Ecuațiile care descriu curgerea nestaționară a unui amestec constituit din două fluide imiscibile, apă-țiței, pot fi scrise sub forma [14]

$$\begin{aligned} \nabla \left[\rho_a \frac{k_a(\sigma)}{\mu_a} \nabla p \right] &= m \left(\sigma_a \frac{\partial \rho_a}{\partial p} + \rho_a \frac{\partial \sigma_a}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t}, \\ \nabla \left[\rho_t \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} \nabla p \right] &= m \left(\sigma_t \frac{\partial \rho_t}{\partial p} + \rho_t \frac{\partial \sigma_t}{\partial p} \right) \frac{\partial p}{\partial t}, \\ \rho_t &= \rho_{t_0}[1 + \beta_t(p - p_0)]\ ; \quad \rho_a = \rho_{a_0}[1 + \beta_a(+p - p_0)] \\ \text{și } \sigma_a &+ \sigma_t = 1, \end{aligned} \tag{II.22}$$

unde ρ_{a_0} și ρ_{t_0} sînt masele specifice corespunzătoare presiunii de referință p_0.

Dacă ținem seama de relațiile

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial p} = \rho_{a_0} \beta_a \quad \text{și} \quad \frac{\partial \rho_t}{\partial p} = \rho_{t_0} \beta_t \tag{II.23}$$

*) Este interesant de remarcat că neglijarea termenului $(\nabla p_1)^2$ este echivalentă cu neglijarea termenului $\nabla \sigma_1 \nabla p_1 = 0$, întrucît pe baza relației (II.18) avem $\nabla \sigma_1 \nabla p_1 = [\nabla p_1]^2$. Asta înseamnă că în acest caz am admis că saturația este o funcție numai de timp, considerînd o valoare medie ponderată după distanța care se obține din (II.9).

și de faptul că masele specifice din membrul stîng al sistemului (II.22) pot fi considerate egale cu ρ_{t_0} și ρ_{a_0}, atunci (II.22) devine

$$\begin{aligned} k_a(\sigma)\,\nabla^2 p + \nabla k_a(\sigma)\nabla p &= \mu_a m\left(\sigma\beta_a\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right), \\ k_t(\sigma)\,\nabla^2 p + \nabla k_t(\sigma)\,\nabla p &= \mu_t m\left[(1-\sigma)\,\beta_t\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right], \end{aligned} \tag{II.24}$$

unde σ reprezintă saturația în țiței.

La fel ca în cazul gaze-țiței vom considera că permeabilitățile efective $k_t(\sigma)$ și $k_a(\sigma)$ sînt funcții liniare de saturație în intervalul $\sigma_k < \sigma < \sigma_0$, astfel încît vom avea

$$\frac{k_a(\sigma)}{\mu_a} = \bar{a}_1\sigma + \bar{b}_1 \text{ și } \frac{k_t(\sigma)}{\mu_t} = \bar{a}_2\sigma + \bar{b}_2. \tag{II.25}$$

Cunoscînd valorile permeabilităților efective după curbele experimentale pentru valori σ_{10} și σ_{20}, cuprinse în intervalul $\sigma_k < \sigma < \sigma_0$, coeficienții din (II.25) se obțin din relațiile

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= \frac{k_a(\sigma_{10}) - k_a(\sigma_{20})}{(\sigma_{10}-\sigma_{20})\,\mu_a};\quad \bar{b}_1 = \frac{\sigma_{10}k_a(\sigma_{20}) - \sigma_{20}k_a(\sigma_{10})}{(\sigma_{10}-\sigma_{20})\,\mu_a}, \\ \bar{a}_2 &= \frac{k_t(\sigma_{10}) - k_t(\sigma_{20})}{(\sigma_{10}-\sigma_{20})\,\mu_t};\quad \bar{b}_2 = \frac{\sigma_{10}k_t(\sigma_{20}) - \sigma_{20}k_t(\sigma_{10})}{(\sigma_{10}-\sigma_{20})\,\mu_a}. \end{aligned} \tag{II.26}$$

Ținînd seama de (II.25), sistemul (II.24) devine

$$\begin{aligned} (\bar{a}_1\sigma + \bar{b}_1)\,\nabla^2 p + a_2\nabla\sigma\nabla p &= m\left(\beta_a\sigma\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\right), \\ (\bar{a}_2 + \bar{b}_2)\,\nabla^2 p + a_2\nabla\sigma\nabla p &= m\left[\beta_t(1-\sigma)\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t}\right] \end{aligned} \tag{II.27}$$

și rezolvarea acestuia poate fi de asemenea efectuată cu ajutorul metodei perturbațiilor, considerînd în acest scop pentru funcțiile σ și p dezvoltările în serie de puteri (II.8). În acest caz obținem pentru determinarea funcțiilor necunoscute p_1, p_2 și σ_1, σ_2 sistemele de ecuații liniare

$$\begin{aligned} (\bar{a}_1\sigma_k + \bar{b}_1)\,\nabla^2 p_1 &= m\left(\beta_a\sigma_k\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}\right), \\ (\bar{a}_2\sigma_k + \bar{b}_2)\nabla^2 p_1 &= m\left[(1-\sigma_k)\,\beta_t\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial t}\right], \end{aligned} \tag{II.28}$$

și

$$\begin{aligned} &(\bar{a}_1\sigma_k + \bar{b}_1)\,\nabla^2 p_2 + a_2\sigma_1\nabla^2 p_1 + a_1\nabla\sigma_1\nabla p_1 = \\ &\quad = m\left(\beta_a\sigma_k\frac{\partial p_2}{\partial t} + \beta_a\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial t}\right], \\ &(\bar{a}_2\sigma_k + \bar{b}_2)\,\nabla^2 p_2 + \bar{a}_2\sigma_1\nabla^2 p_1 + \bar{a}_2\nabla\sigma_1\nabla p_1 = \\ &\quad = m\left[(1-\sigma_k)\,\beta_t\frac{\partial p_2}{\partial t} - \beta_t\sigma_1\frac{\partial p_1}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial t}\right]. \end{aligned} \tag{II.29}$$

Este ușor de observat că din sistemul (II.28) rezultă pentru determinarea funcțiilor p_1 și σ_1

$$\nabla^2 p_1 = \bar{\lambda} \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad \text{și} \quad \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \bar{A} \frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{II.30}$$

unde

$$\bar{\lambda} = \frac{m[\beta_t + (\beta_a - \beta_t)\sigma_k]}{\underbrace{\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a}}_{} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}} \quad \text{și} \quad \bar{A} = \frac{\lambda k_a(\sigma_k)}{m\mu_a} - \beta_a \sigma_k. \tag{II.31}$$

Pe de altă parte, dacă considerăm cazul cînd la momentul inițial curgerea începe din stare de repaus și presupunem, la fel ca în cazul gaze-țiței, că $\nabla\sigma_1 \nabla p_1 = \bar{A}[\nabla p_1]^2 = 0$, atunci rezultă din (II.29)

$$\nabla^2 p_2 = \bar{\lambda} \frac{\partial p_2}{\partial t} + \Phi(x, y, z, t), \tag{II.32}$$

unde pentru termenul liber Φ_1 avem relația

$$\Phi_1(x, y, z, t) = -K\sigma_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} \tag{II.33}$$

sau, dacă ținem de (II.30), de unde rezultă $\sigma_1 = Ap_1$, funcția Φ_1 devine

$$\Phi_1 = -\frac{K\bar{A}}{2} \frac{\partial p_1^2}{\partial t}, \tag{II.34}$$

unde

$$K = \frac{(\bar{a}_1 + \bar{a}_2)\bar{\lambda} - m(\beta_a - \beta_t)}{\frac{k_a(\sigma_k)}{\mu_a} + \frac{k_t(\sigma_k)}{\mu_t}}. \tag{II.35}$$

În ceea ce privește funcția σ_2, aceasta se determină din ecuația

$$\sigma_2 = \left[(1-\sigma_k)\beta_t - \frac{\bar{\lambda} k_t(\sigma_k)}{m\mu_t}\right] p_2(r, t) + \frac{\bar{A}}{2}\left[\frac{k_t(\sigma_k)}{m\mu_t} K - \frac{\lambda a_2}{m} - \beta_t\right] p_1^2(r, t). \tag{II.36}$$

Se observă cu destulă ușurință că ecuațiile (II.12) și (II.14), obținute în cazul curgerii amestecului gaze-țiței, sînt similare cu ecuațiile (II.30) și (II.32), obținute în cazul curgerii amestecului apă-țiței, cu deosebirea coeficienților care sînt diferiți. Condițiile la limită și inițiale pe care trebuie să le satisfacă funcțiile p și σ fiind de asemenea similare atît pentru gaze-țiței, cît și pentru apă-țiței, rezultă deci că din punct de vedere matematic rezultatele stabilite mai sus pot fi aplicate la ambele cazuri, ținînd seama, bineînțeles, de coeficienții corespunzători care apar în ecuații. Din acest motiv ne vom referi în cele ce urmează la cazul gaze-țiței.

III. VARIAȚIA PRESIUNII ÎNTR-O SONDĂ DUPĂ ÎNCHIDEREA ACESTEIA. APROXIMAȚIA DE ORDINUL DOI

După cum se știe, soluția problemei restabilirii presiunii într-o sondă după închiderea acesteia poate fi obținută cu ajutorul principiului superpoziției dacă cunoaștem soluția problemei exploatării sondei la un debit constant [3].

Dat fiind faptul că ecuațiile (II.12) și (II.14) sînt liniare, atunci principiul superpoziției poate fi aplicat și în cazul curgerii bifazice, astfel încît în cele ce urmează vom examina problema unei sonde care exploatează la un debit constant un zăcămînt de întindere infinită*). Pînă cînd frontul depresionar n-a atins conturul de alimentare aferent zonei de drenaj a sondei, evoluția în timp a presiunii de fund este identică cu aceea care se obține pentru cazul infinit

În ceea ce privește condiția inițială, vom considera că la momentul inițial fluidele se aflau în stare de repaus.

Condițiile la limită și inițiale pe care trebuie să le satisfacă funcțiile $p(r\,t)$ și $\sigma\ (r\,t)$, considerînd sonda ca o sursă punctiformă, sînt

$$t > 0 \quad \begin{cases} p(\infty, t) = p_k, \\ r\dfrac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=0} = BQ_0 = \text{const} \end{cases} \text{ și } t = 0 \quad \begin{cases} p(r, 0) = p_k, \\ \sigma(r, 0) = \sigma_k, \end{cases} \tag{III.1}$$

unde $B = \dfrac{\mu_t}{2\pi h k_t(\sigma_k)(1 + R_0)}$, Q_0 fiind debitul volumetric al amestecului de țiței și gaze și R_0 rația gaze-țiței.

Prin urmare, rezultă pentru funcțiile p_1, p_2, σ_1 și σ_2, ținînd seama de (II.8), următoarele condiții la limită și inițiale :

$$t > 0 \quad \begin{cases} p_1(\infty, t) = 0 \\ r\dfrac{\partial p_1}{\partial r}\Big|_{r=0} = -\dfrac{BQ_0}{\varepsilon p_k} \end{cases} \text{ și } t = 0 \quad \begin{cases} p_1(r, 0) = 0, \\ \sigma_1(r, 0) = 0, \end{cases} \tag{III.2}$$

respectiv

$$t > 0 \quad \begin{cases} p_2(\infty, t) = 0 \\ r\dfrac{\partial p_2}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0 \end{cases} \quad \text{și } t = 0 \quad \begin{cases} p_2(r, 0) = 0, \\ \sigma_2(r, 0) = 0. \end{cases} \tag{III.3}$$

Soluția ecuației

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_1}{\partial r}\right) = \lambda\frac{\partial p_1}{\partial t}, \tag{III.4}$$

*) Sonda este considerată perfectă hidrodinamic atît din punctul de vedere al modului de deschidere, cît și al caracterului.

care satisface condițiile (II.12), va fi [3]

$$p_1(r, t) = \frac{Q_0 B}{\varepsilon p_k} E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right), \tag{III.5}$$

iar în cazul cînd debitul este variabil în timp vom avea

$$p_1(r, t) = \frac{B}{\varepsilon p_k} \int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} e^{-\frac{\lambda r^2}{4(t-\tau)}} d\tau, \tag{III.6}$$

unde $E_i = -\int_{\frac{\lambda r^2}{4t}}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$ reprezintă funcția exponențială integrală.

În ceea ce privește soluția ecuației neomogene (II.14)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_2}{\partial r}\right) = \lambda \frac{\partial p_2}{\partial t} + \Phi_1(r, t), \tag{III.7}$$

aceasta poate fi obținută cu ajutorul transformatei Hankel [15].

În cazul condițiilor la limită și inițiale (III.3) rezultă pentru $p_2(r, t)$ ecuația [15].

$$p_2(r_0, t) = \frac{1}{2\lambda}\int_0^t \frac{1}{t-\tau} \exp\left[-\frac{\lambda r_0^2}{4(t-\tau)}\right] d\tau \int_0^{\infty} \xi \Phi_1(\xi, \tau) \times$$

$$\times I_0\left[\frac{\lambda r_0 \xi}{2(t-\tau)}\right] \exp\left[-\frac{\lambda \xi^2}{4(t-\tau)}\right] d\xi, \tag{III.8}$$

unde r_0 este raza sondei și I_0 este funcția Bessel de ordinul zero.

În general, putem considera în (III.8) $r_0 \to 0$ și, prin urmare, vom avea

$$I_0\left[\frac{\lambda r_0 \xi}{2(t-\tau)}\right] = 1 \quad \text{și} \quad e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4(t-\tau)}} = 1. \tag{III.9}$$

Pe de altă parte, utilizînd în ecuația (III.7) transformata lui Boltzmann $u = \frac{\sqrt{\lambda} r}{2\sqrt{t}}$, obținem ecuația diferențială neomogenă

$$\frac{d^2 p_2}{du^2} + \left(\frac{1}{u} + 2u\right)\frac{dp_2}{du} = \Phi_1(u). \tag{III.10}$$

Ținînd seama de condițiile (III.3), soluția ecuației (III.7) va fi [14]

$$p_2(r, t) = -\frac{2AB^2Q_0^2}{\varepsilon^2 \lambda p_k^2}\left[-\frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}) E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) + E\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right)\right]. \tag{III.11}$$

Rezultă deci din (II.8) pentru distribuția presiunii, în cazul aproximației de ordinul doi a soluției sistemului (II.7), următoarea relație [14]:

$$p(r, t) - p_k = BQ_0 E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) + \frac{2AB^2Q_0^2}{\lambda p_k}\left[-\frac{1}{2}(1 + e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}) E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) + \right.$$

$$\left. + E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right)\right], \tag{III.12}$$

care pentru $\frac{\lambda r_0^2}{4t} < 1$ mai poate fi scrisă sub forma

$$p_k - p(t) = BQ_0\left(\ln\frac{4t}{\lambda r_0^2} - 0{,}5772\right) - \frac{B^2AQ_0^2}{\lambda p_k}\left[\left(1 + e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4t}}\right) \times \right.$$
$$\left. \times\left(\ln\frac{4t}{\lambda r_0^2} - 0{,}5772\right) - 2\ln\frac{2t}{\lambda r_0^2} + 1{,}1544\right]. \qquad \text{(III.12')}$$

Deoarece rapiditatea convergenței seriilor (II.8), care reprezintă soluția sistemului (II.7), nu poate fi stabilită decît prin calcule numerice, vom examina în cele ce urmează comportarea funcțiilor $p_1(r, t)$ și $p_2(r, t)$ pentru valorile parametrului adimensional $\frac{\lambda r^2}{4t}$, care prezintă interes practic.

Astfel, din relațiile (III.5) și (III.12) obținem

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2BAQ_0}{\lambda p_k}\left[-\frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}\right) + \frac{E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right)}{E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)}\right], \qquad \text{(III.13)}$$

de unde, ținînd seama de faptul că $\frac{E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right)}{E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)} < 1$ și $e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}} > 0$, vom avea inegalitatea $\left|\frac{p_2}{p_1}\right| < \frac{BAQ_0}{\lambda p_k}$, valabilă pentru orice valoare a parametrului adimensional $\frac{\lambda r^2}{4t}$. Dacă este îndeplinită condiția $\frac{BAQ_0}{\lambda p_k} < \frac{1}{100}$, atunci avem $\left|\frac{p_2}{p_1}\right| < \frac{1}{100}$ și în acest caz funcția p_2 poate fi neglijată în raport cu p_1. În consecință, distribuția presiunii devine din punct de vedere calitativ identică cu cea obținută pentru cazul curgerii monofazice, întrucît putem considera numai prima aproximație a sistemului (II.7), adică $p_1(r, t)$.

În tabela 1 sînt redate valorile funcțiilor $\overline{p}_1(r, t)$ și $\overline{p}_2(r, t)$, unde s-a notat

$$\overline{p}_1(r, t) = \frac{p_1(r, t)}{BQ_0p_k} = E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)$$

și

$$\overline{p}_2(r, t) = \frac{p_k^2\lambda p_2(r, t)}{2AB^2Q_0^2} = -\frac{1}{2}\left(1 + e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}\right)E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right) + E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right).$$

Deoarece coeficientul $\frac{AB}{\lambda}$ este o constantă care depinde numai de caracteristicile mediului poros, de proprietățile fizice ale fluidelor și de valoarea

saturației corespunzătoare stării de repaus a fluidelor, rezultă că influența neliniarității ecuațiilor (II.7) asupra distribuției presiunii depinde de valoarea debitului Q_0. Din acest motiv, în cazul cînd sonda este exploatată la un debit relativ mare, convergența seriilor (II.8) va fi slabă și, în consecință, pentru determinarea distribuției presiunii va trebui să ținem seama de aproximațiile de ordin superior, deci de funcțiile $p_2, p_3, \ldots$.

Tabela 1

$\frac{\lambda r^2}{4t}$	$\lvert\bar{p}_1\rvert$	$\lvert\bar{p}_2\rvert$	$\frac{\lambda r^2}{4t}$	$\lvert\bar{p}_1\rvert$	$\lvert\bar{p}_2\rvert$
0,01	4,036	1,372	0,2	1,223	0,82
0,02	3,355	1,938	0,4	0,702	0,55
0,03	2,959	1,311	0,6	0,454	0,387
0,04	2,681	1,297	0,8	0,311	0,2784
0,06	2,295	1,156	1	0,22	0,203
0,08	2,027	1,2178	1,2	1,158	0,148
0,1	1,82	1,021	1,3	0,135	0,128
0,12	1,66	0,9804	1,4	0,116	0,111
0,16	1,41	0,8953	1,5	0,1	0,096

Pe de altă parte, se poate arăta că seria (II.8) mai poate fi scrisă sub forma

$$\frac{p}{p_k} = 1 + Q_0 B f_1(r, t) + Q_0^2 B^2 f_2(r, t) + \ldots + Q_0^n B^n f_n(r, t) + \ldots \quad \text{(III.14)}$$

Rezultă deci că rapiditatea convergenței acestei serii crește cu cît produsul $Q_0 B$ este mai mic, întrucît avem $Q_0 B < 1$ și $|f_1| > |f_2| > \ldots > |f_n| > \ldots$, unde

$$f_1 = \frac{p_1}{Q_0 B}, \quad f_2 = \frac{p_2}{Q_0^2 B^2}, \ldots, f_n = \frac{p_n}{Q_0^n B^n}, \ldots$$

După cum s-a arătat mai sus, cînd $Q_0 < \frac{\lambda p_k}{100 A B}$, putem considera pentru soluția sistemului de ecuații neliniare (II.7) numai prima aproximație, respectiv $p_1(r, t)$.

Rezultatele obținute mai sus ne permit să studiem cazul cînd debitul sondei variază în timp. În acest scop vom considera o variație în trepte a funcției $Q(\tau)$, astfel încît ecuația (III.6) poate fi scrisă sub forma

$$p_1(r, t) = \frac{B}{p_k \varepsilon} [Q_0 f(r, t) + (Q_1 - Q_0) f(r, t - t_1) + \ldots + (Q_n - Q_{n-1}) f(r, t - t_n)], \quad \text{(III.15)}$$

unde $f(r, t) = E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)$, pentru $t > t_n$.

Ţinînd seama de (III.15), termenul liber al ecuaţiei neomogene (III.7) va fi

$$\Phi_1(r,t) = 2Ap_1 \frac{\partial p_1}{\partial t} = -\frac{2AB^2}{\varepsilon^2 p_k^2}\,[Q_0 f(r,t) + (Q_1-Q_0) f(r,t-t_1) +$$

$$+\ldots+(Q_n-Q_{n-1}) f(r,t-t_n)]\left[Q_0 \frac{\partial f(r,t)}{\partial t} + (Q_1-Q_0)\frac{\partial f(r,t-t_1)}{\partial t} + \right. \tag{III.16}$$

$$\left. + \ldots + (Q_n - Q_{n-1}) \frac{\partial f(r,t-t_n)}{\partial t}\right], \text{ pentru } t > t_n,$$

iar în cazul cînd considerăm numai două trepte rezultă

$$\Phi_1(r,t) = \frac{2AB^2}{\varepsilon^2}\frac{Q_0^2}{p_k^2} f(r,t)\,\frac{\partial f(r,t)}{\partial t} \text{ pentru } 0 < t < t_1 \text{ şi}$$

$$\Phi_1(r,t) = \frac{2AB^2}{p_k^2\varepsilon^2}\left[Q_0^2 f(r,t)\frac{\partial f(r,t)}{\partial t} + Q_0(Q_1-Q_0)\frac{\partial}{\partial t}\,[f(r,t) f(r,t-t_1)] + \right. \tag{III.17}$$

$$\left. + (Q_1 - Q_0)^2 f(r,t-t_1)\,\frac{\partial f(r,t-t_1)}{\partial t}\right], \text{ pentru } t > t_1,$$

sau

$$\Phi_1(r,t) = -\frac{2AB^2}{p_k^2\varepsilon^2}\left\{Q_0^2 E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)\frac{e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}}{t} + Q_0(Q_1-Q_0)\left[E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4(t-t_1)}\right)\times\right.\right. \tag{III.18}$$

$$\left.\left.\times\,\frac{e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}}{t} + E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)\frac{e^{-\frac{\lambda r^2}{4(t-t_1)}}}{t-t_1}\right] + (Q_1-Q_0)^2 E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4(t-t_1)}\right)\frac{e^{-\frac{\lambda r^2}{4(t-t_1)}}}{t-t_1}\right\}$$

pentru $t > t_1$.

Ţinînd seama de (III.18), putem scrie, în conformitate cu (III.18), pentru $p_2(r,t)$ la $t > t_1$:

$$p_2(r,t) = \frac{2AB^2}{\lambda\varepsilon^2 p_k^2} Q_0^2\left[-\frac{1}{2}E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4t}\right)(1+e^{-\frac{\lambda r^2}{4t}}) + E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2t}\right)\right] +$$

$$+\frac{2AB^2}{p_k^2\lambda\varepsilon^2}(Q_1-Q_0)^2\left[-\frac{1}{2}E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4(t-t_1)}\right)(1+e^{-\frac{\lambda r^2}{4(t-t_1)}}) + \right.$$

$$\left. + E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{2(t-t_1)}\right)\right] +$$

$$+\frac{2AB^2}{2\lambda\varepsilon^2}\frac{Q_0(Q_1-Q_0)}{p_k^2}\left[\int_{t_1}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int_0^\infty E_i\left(-\frac{\lambda u}{4\tau}\right)\frac{e^{-\frac{\lambda u}{4}\frac{t-t_1}{(\tau-t_1)(t-\tau)}}}{\tau-t_1}\,du + \right.$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t}\frac{d\tau}{t-\tau}\int_0^\infty E_i\left(-\frac{\lambda u}{4(\tau-t_1)}\right)\frac{e^{-\frac{\lambda u t}{4\tau(t-\tau)}}}{\tau}\,du\right]. \tag{III.19}$$

Pe de altă parte, integralele de mai sus au următoarele valori:

$$\int_{t_1}^{t} \frac{1}{\tau - t_1} \frac{\mathrm{d}\tau}{t-\tau} \int_0^\infty E_i\left(-\frac{\lambda u}{4\tau}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\lambda u}{4}\frac{t-t_1}{(\tau-t_1)(t-\tau)}} \mathrm{d}u =$$

$$= -\frac{4}{\lambda t_0} \int_0^{t_0} \ln\left[1 + \frac{(\tau_1 + t_1) t_0}{\tau_1 (t_0 - \tau_1)}\right] \mathrm{d}\tau_1,$$

$$\int_{t_1}^{t} \frac{1}{\tau} \frac{\mathrm{d}\tau}{t-\tau} \int_0^\infty E_i\left(-\frac{\lambda u}{4(\tau - t_1)}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\lambda u t}{4\tau(t-\tau)}} \mathrm{d}u = \tag{III.20}$$

$$= \frac{4}{\lambda (t_1 + t_0)} \int_0^t \ln\left[1 + \frac{(t_1 + t_0)\tau_1}{(\tau_1 + t_1)(t_0 - \tau_1)}\right] \mathrm{d}\tau_1,$$

unde $t_0 = t - t_1$, t_1 fiind timpul în care sonda a produs cu debit constant. Dacă presupunem că la momentul t_1 sonda este închisă instantaneu, atunci vom avea $Q_1 = 0$ și, în consecință, putem obține cu ajutorul relațiilor de mai sus variația presiunii la momentul t_0. Vom ține seama de faptul că timpul după închiderea sondei, respectiv t_0, este în general neglijabil în raport cu timpul t_1, corespunzător exploatării sondei la un debit constant, și în acest caz vom obține din (III.19), pentru funcția $p_2(r, t)$, ținînd seama de (III.20),

$$p_2(r_0, t) = \frac{2AB^2}{\lambda \varepsilon^2} \frac{Q_0^2}{p_k^2} \left[-\frac{1}{2} E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{4t}\right)\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\lambda r_0^2}{4t}}\right) + E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{2t}\right) - \right. \tag{III.21}$$

$$\left. - \frac{1}{2} E_i\left(-\frac{\lambda r^2}{4(t-t_1)}\right)\left(1 + \mathrm{e}^{-\frac{\lambda r_0^2}{4(t-t_1)}}\right) + E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{2(t-t_1)}\right) - 2\ln\frac{t_1}{t_0} + 1\right],$$

valabilă pentru $t_0 < t_1$ și

$$p_1(r, t) = \frac{BQ_0}{\varepsilon p_k}\left[E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{4t}\right) - E_i\left(-\frac{\lambda r_0^2}{4(t-t_1)}\right)\right],$$

care, introduse în (II.8), permit determinarea variației presiunii după închiderea sondei.

Dacă ținem seama de faptul că pentru $u < 1$ avem $E_i(-u) \cong \ln u + 0{,}5772$, atunci cu ajutorul relațiilor (III.21) și (II.8), după ce facem schimbarea $t = t_1 + t_0$, obținem

$$\frac{p}{p_k} = 1 + \frac{BQ_0}{p_k} \ln\frac{t_0}{t_0 + t_1} + \frac{AB^2 Q_0^2}{\lambda p_k^2}\left\{\ln\frac{\lambda^2 r_0^4}{t_0 (t_1 + t_0)} + \right.$$

$$+ \mathrm{e}^{-\frac{\lambda r_0^2}{4(t_1+t_0)}} \ln\frac{4(t_1+t_0)}{\lambda r_0^2} + \mathrm{e}^{-\frac{\lambda r_0^2}{4t_0}} \ln\frac{4t_0}{\lambda r_0^2} - 4\ln\frac{t_1}{t_0} - \tag{III.22}$$

$$\left. - 0{,}5772\left(\mathrm{e}^{-\frac{\lambda r_0^2}{4(t_1+t_0)}} + \mathrm{e}^{-\frac{\lambda r_0^2}{4t_0}}\right) + 3{,}1544\right\}.$$

Pe de altă parte, dacă considerăm cazul cînd $\frac{\lambda r_0^2}{4t_0} < 0{,}01$ și $t_0 < t_1$, atunci avem

$$e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4(t_1+t_0)}} + e^{-\frac{\lambda r_0^2}{4t_0}} \cong 2$$

și în consecință, relația (III.22) mai poate fi scrisă sub forma

$$p - p_k = BQ_0\left(1 + \frac{4ABQ_0}{\lambda p_k}\right)\ln\frac{t_0}{t_1} + \frac{AB^2Q_0^2}{\lambda p_k^2}(2 + \ln 16). \qquad \text{(III.23)}$$

În felul acesta, presiunea de fund după închiderea sondei variază în acest caz liniar cu $\ln\frac{t_0}{t_1}$.

Este interesant de remarcat că, spre deosebire de cazul curgerii monofazice, vom obține pentru panta dreptei $i = BQ_0\left(1 + \frac{4ABQ_0}{\lambda p_k}\right)$ și pentru intersecția dreptei cu axa $(p - p_k)$

$$\beta = \frac{AB^2Q_0^2}{\lambda p_k^2}(2 + \ln 16).$$

Se observă de asemenea din relațiile de mai sus că, dacă avem $\frac{ABQ}{\lambda p_k} < 0{,}01$, atunci $i = BQ_0$ și β poate fi neglijat. Prin urmare variația presiunii este determinată în acest caz cu ajutorul primei aproximații a soluției sistemului (II.7), adică cu ajutorul funcției $p_1(r.t.)$.

Ținînd seama de cele arătate mai sus, pentru cazul cînd avem $\frac{\lambda r_0^2}{4t_0} < 0{,}01$ și $\frac{ABQ_0}{\lambda p_k} < 0{,}01$ putem obține într-o primă aproximație valoarea saturației σ_k a mediului poros aferentă zonei de drenaj, după panta curbei de restabilire a presiunii obținută într-o sondă după închiderea acesteia.

ANEXA 1

În cele ce urmează vom determina valoarea constantei B, care a fost introdusă în paragraful precedent pentru condițiile la limită (III.1).

Deoarece între gradientul de presiune și debitele de fluide avem pentru $t > 0$ relațiile

$$\begin{aligned} Q_t(r_0, t) &= -2\pi hr(a_2\sigma + b_2)\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = \text{const}, \\ Q_g(r_0, t) &= -2\pi hr(a_1\sigma + b_1)\frac{p}{p_a}\frac{\partial p}{\partial r}\bigg|_{r=r_0} = \text{const}, \end{aligned} \qquad \text{(A.1)}$$

atunci se pune problema liniarizării condițiilor la limită (III.1).

Din (A.1) rezultă relaţiile

$$R_0(r_0, t) = \frac{Q_g(r_0, t)}{Q_t(r_0, t)} = \frac{a_1\sigma + b_1}{a_2\sigma + b_2}\frac{p}{p_a}\Bigg|_{r=r_0} = \text{const},$$
$$Q_0(r_0, t) = Q_t(r_0, t)\,(1 + R_0) = \text{const} \tag{A.2}$$

şi, în consecinţă, condiţiile la limită (A.1) devin

$$Q_0(r_0, t) = -2\pi h(1 + R_0)(a_2\sigma + b_2)\, r\,\frac{\partial p}{\partial r}\Bigg|_{r=r_0} = \text{const}$$

sau

$$Q_g(r_0, t) = -2\pi h R_0 (a_2\sigma + b_2)\, r\,\frac{\partial p}{\partial r}\Bigg|_{r=r_0} = \text{const}, \tag{A.3}$$

R_0 fiind raţia gaze-ţiţei.

Pe de altă parte, valoarea saturaţiei σ, care depinde de presiune, nu este cunoscută pe conturul sondei, adică la $r = r_0$. Rezultă deci că pentru determinarea gradientului de presiune $\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_{r=r_0}$ va trebui să considerăm, într-o primă aproximaţie, în (A.3) valoarea saturaţiei corespunzătoare momentului iniţial, unde avem $\sigma(r, 0) = \sigma_k$.

Această ipoteză nu poate introduce erori sensibile, întrucît variaţia saturaţiei este relativ mică în perioada tranzitorie a curgerii, adică pînă la stabilizarea presiunii.

Dacă ţinem seama de cele arătate mai sus, atunci, în conformitate cu relaţiile (II.8), vom obţine, în cazul cînd sonda este considerată ca o sursă punctuală, următoarele condiţii la limită:

$$t > 0 \begin{cases} r\,\dfrac{\partial p_1}{\partial r}\Big|_{r=0} = -BQ_0; & r\,\dfrac{\partial p_2}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0, \\ p_1(\infty, t) = 0, & p_2(\infty, t) = 0, \end{cases} \tag{A.4}$$

unde

$$B = \frac{1}{2\pi h p_k (1 + R_0)(a_2\sigma_k + b_2)} = \frac{\mu_t}{2\pi h p_k (1 + R_0)\, k_t(\sigma_k)}. \tag{A.5}$$

În practică putem avea două cazuri-limită în ceea ce priveşte raţia de gaze, adică *G.O.R.* Astfel, cînd saturaţia în ţiţei este egală cu valoarea critică, avem $k_t(\sigma_k) = 0$ şi în zăcămînt curge numai faza gazoasă, întrucît $Q_t(r_0, t) = 0$ şi $R_0 \to \infty$.

Al doilea caz apare cînd în zăcămînt curge numai faza lichidă, care a fost considerată incompresibilă, unde $k_g(\sigma_k) = 0$ şi $R_0 = 0$.

Din (A.5) rezultă pentru constanta B în cazul $k_g(\sigma_k) = 0$ şi $R_0 = 0$

$$B = \frac{\mu_t}{2\pi h p_k k_t(\sigma_k)} \quad \text{şi} \quad Q_0 = Q_t.$$

Pentru $k_t(\sigma_k)$ şi $R_0 = \infty$ este necesar să considerăm în (A.1) o valoare medie a presiunii corespunzătoare conturului sondei, astfel încît constanta B să poată fi scrisă sub forma

$$B = \frac{p_a \mu_g}{2\pi h \bar{p} k_g(\sigma_k)} \quad \text{şi} \quad Q_0 = Q_g,$$

unde $\bar{p} = p(r_0, t)$.

Primită la redacţie la 5 august 1966.

NOTAȚII

γ — greutatea specifică;
$k(\sigma)$ — permeabilitatea efectivă;
ρ — masa specifică;
$\beta(p)$ — factorul micșorării de volum al țițeiului;
μ — viscozitatea dinamică;
σ — saturația;
p — presiunea;
$\omega(p)$ — volumul de gaze dizolvate;
α — coeficientul de solubilitate a gazelor;
V — volumul mediului poros;
$\bar{z}$ — factorul de abatere de la legea Boyle-Mariotte, exprimat la presiunea și de temperatura medie;
Q_0 — debitul volumetric al amestecului gaze-țiței;
m — porozitatea mediului poros;
β — coeficientul de compresibilitate.

Indicii a se referă la apă, t la țiței și g la gaze.

BIBLIOGRAFIE

1. C. C. Miller, A. B. Dyes, C. A. Hutchinson, *The estimation of permeability and reservoir pressure from bottom pressure build-up characteristics*, Transaction A.I.M.E., 1950.
2. A. R. Horner, *Pressure build-up in wells*, Proceeding Third World Petr Congress, The Hague, 1951.
3. A. Houpeurt, *Eléments de mécaniques des fluides dans les milieux poreux*, Paris, 1958.
4. Б. Н. Щелкачев, *Разработка нефтяных пластов при упругом режиме*, Москва, 1959.
5. C. S. Matthews, F. Barms, P. Hazebrack, *A method of determination of average pressure in a bounded reservoir*, Trans, A.I.M.E., 1954.
6. H. Pascal, *Dispersion des ondes de pression dans un liquide qui s'écoule à travers un milieu poreux*, Rev. roum. sci. techn. Méc. Appl., *4* (1964).
7. M. Muskat, *Physical principles of oil production*, Mc Graw Hill Book, New York, 1949.
8. R. L. Perrine, *Analysis of pressure build-up curves*, Drilling and Produc Pract. API (1956).
9. J. Martin, *Simplified equation of flow in gas drive and the theoretical foundation of multiphase pressure building analyses*, A.I.M.E., 1959.
10. — *Analysis of pressure transients in two-phase radial flow*, Trans. AIME, 1963.
11. W. T. Weller, *Reservoir performance during two-phase flow*, Journal of Petroleum Technology, February, 1966.
12. J. S. Levine, M. Prots, *The calculated performances of solution gas-drive reservoirs*, Soc. Pet. Eng. Journal, Sept. 1961.
13. Г. Пахачев, *Подземная гидравлика*, Москва, 1961, p. 362.
14. H. Pascal, *L'écoulement d'un fluide biphasique dans un milieu poreux en régime transitoire*, Rev. roum. sci. techn. — Méc. Appl. *2* (1966).
15. I. Sneddon, *Fouriers transforms*, New York, 1951.

MIŞCAREA PLAN-ORIZONTALĂ ÎNTR-UN MEDIU POROS ÎN PREZENŢA UNUI DREN ARCUIT

de IOAN DAVID
Institutul politehnic Timişoara

Se consideră mişcarea plan-orizontală către un dren de captare dispus în curentul subteran în formă de arc de cerc. Punînd condiţiile-limită necesare, se determină potenţialul complex al mişcării către dren pentru o neomogenitate dată a mediului poros.
Prin particularizarea funcţiilor obţinute se determină potenţialul complex pentru următoarele cazuri : drenul arcuit în strat omogen ; drenul liniar de lungime finită în stratul neomogen şi omogen ; cavitatea arcuită şi eliptică cînd de-a lungul lor avem o sursă negativă distribuită (o pompare).
Cazurile amintite au aplicabilitate la calculul hidraulic al drenurilor de captare scurte şi al pompărilor din cavităţile de forme amintite. Ca o aplicaţie practică se tratează drenul arcuit în curentul subteran frontal.

1. Calculul hidraulic al drenurilor de captare orizontale de lungime finită necesită determinarea potenţialului complex al mişcării care permite trasarea spectrului hidrodinamic şi a liniei piezometrice, stabilirea debitului captat etc., adică un studiu hidrodinamic complet. Potenţialul complex care reprezintă mişcarea plan-orizontală către un dren de captare scurt situat în curentul subteran se obţine în general prin suprapunerea a două mişcări : mişcarea plan-orizontală, cînd la mari distanţe avem un curent uniform ce face unghiul α cu OX, şi o sursă negativă, distribuită de-a lungul drenului. Grosimea drenului fiind neglijabilă faţă de lungimea lui, acesta se poate asimila cu o tăietură de grosime nulă. Bazat pe această ipoteză, în [2], de exemplu, se studiază drenul liniar de lungime finită situat în curentul subteran. Nivelul apei în dren fiind orizontal (din condiţii fizice), se impune a-l considera ca o linie echipotenţială.

Lucrarea de faţă studiază cazul drenului perfect scurt, dispus în plan în formă de arc de cerc într-un strat poros de o neomogenitate dată.

Forma curbă, în speţă cea arcuită, poate prezenta interes în unele situaţii întîlnite în practică.

2. Se consideră tăietura AB în formă de arc de cerc, situată în domeniul D_2 de permeabilitate k_2, care, la rîndul său, e situat în domeniul D_1 de permeabilitate k_1 (fig. 1).

Asimilînd tăietura AB cu drenul arcuit, se pune problema determinării funcțiilor analitice

$$F_j(z) = f_j(z) + f_j'(z), \tag{1}$$

definite, respectiv, în D_j $(j = 1, 2)$.

Funcțiile $f_j(z)$ vor reprezenta mișcarea plană în prezența drenului și a neomogenității date cînd la mari distanțe avem un curent paralel,

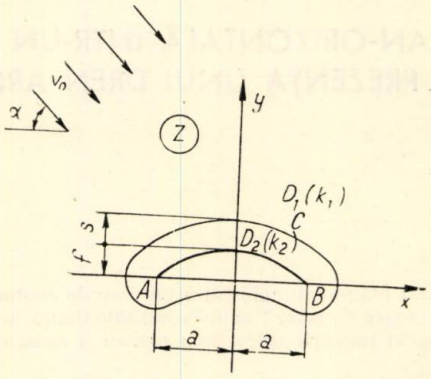


Fig. 1

iar funcțiile $f_j'(z)$ sursa negativă distribuită după arcul AB în aceleași condiții de neomogenitate.

Funcțiile analitice $F_j(z)$ se vor determina astfel încît să fie satisfăcute condițiile la limită

$$\begin{aligned} &\mathcal{R}e\,\{k_1F_2(z) - k_2F_1(z)\} = 0, \\ &\frac{\partial \mathcal{R}e\,\{F_2(z)\}}{\partial n} = \frac{\partial \mathcal{R}e\,\{F_1(z)\}}{\partial n}, \end{aligned} \tag{2}$$

pe conturul de separare a celor două domenii, și

$$\mathcal{R}e\{F_2(z)\} = 0, \tag{3}$$

pe arcul de cerc AB.

Condițiile (2) sînt cele obișnuite ce se pun la frontiera de separare a două medii poroase de permeabilitate diferită expuse în [1, p. 45], iar condiția (3) exprimă faptul că tăietura (drenul) trebuie să constituie o linie echipotențială.

Pentru determinarea funcțiilor analitice f_j și f_j' vom căuta să reducem problema la un caz mai simplu.

Astfel, considerînd transformarea conformă

$$z = \frac{1}{2}(\zeta_1 + a^2\zeta_1^{-1}), \tag{4}$$

observăm că planul z se transformă în ζ_1, astfel încît arcul de cerc AB și conturul C devin circumferințe concentrice de raze r_2, respectiv r_1, centrul comun avînd afixa if. Cu notațiile din figura 1, rezultă

$$r_1 = s + \sqrt{a^2 + (s+f)^2},$$
$$r_2 = \sqrt{a^2 + f^2}. \tag{5}$$

Se observă deci că conturul C este astfel ales, încît prin transformarea (3) să devină un contur circular, adică este transformatul prin

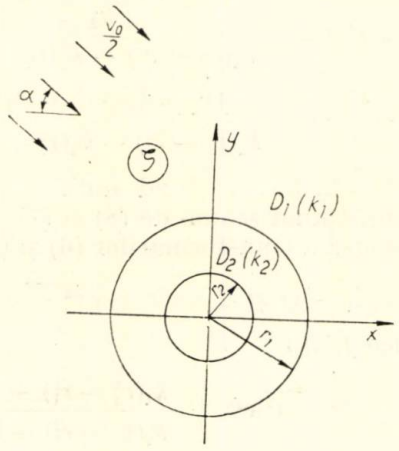


Fig. 2

(4) al cercului de rază r_1 cu centrul în punctul de afixa if din planul ζ_1.

Dacă se efectuează translația

$$\zeta_1 = \zeta + if, \tag{6}$$

problema inițială din planul z se reduce în planul ζ la cazul cercurilor concentrice ca frontiere de separare, cu centrul în origine (fig. 2).

2.1. *Determinarea funcțiilor* $f_j(z)$. Presupunînd definită în tot planul z funcția analitică $f_0(z) = V_0 \cdot e^{i\alpha} \cdot z$, în planul ζ acestuia îi va corespunde $f_0(\zeta) = \frac{V_0}{2} e^{i\alpha} \cdot \zeta$, unde V_0 este viteza la mari distanțe care formează unghiul $-\alpha$ cu axa reală (fig. 1 și 2).

Introducînd potențialul perturbator $f_j^*(\zeta)$, funcțiile $f_j(\zeta)$ devin

$$f_j(\zeta) = f_0(\zeta) + f_j^*(\zeta). \tag{7}$$

Punînd pe $f_j^*(\zeta)$ sub forma [1, p. 274]

$$f_1^*(\zeta) = \sum_1^n A_{1,n}\zeta^{-n} \text{ și } f_2^*(\zeta) = \sum_1^n (A_{2,n}\zeta^{-n} + B_{2,n}\zeta^n), \tag{8}$$

se determină coeficienții $A_{1,n}, A_{2,n}$ și $B_{2,n}$, astfel încît să fie satisfăcute condițiile (2) și (3), care în planul ζ se transcriu

$$\frac{\varphi_1^*}{k_1} - \frac{\varphi_2^*}{k_2} = \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\varphi_0\,; \quad \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial r} \qquad \text{pentru } r = r_1 \text{ și}$$
$$\varphi_0 + \varphi_2^* = 0 \qquad \text{pentru } r = r_2. \tag{9}$$

Se obține

$$A_{1,1} = \frac{V_0}{2}\cdot r_1^2 \cdot e^{-i\alpha}\,\frac{k_1(r_2^2 - r_1^2) + k_2(r_2^2 + r_1^2)}{k_1(r_2^2 - r_1^2) - k_2(r_2^2 + r_1^2)},$$

$$A_{2,1} = V_0 \cdot r_1^2 \cdot r_2^2 e^{-i\alpha}\,\frac{k_2}{k_1(r_2^2 - r_1^2) - k_2(r_2^2 + r_1^2)}, \tag{10}$$

$$B_{2,1} = -\frac{V_0}{2}\cdot e^{i\alpha}\cdot\frac{(k_1 - k_2)(r_2^2 + r_1^2)}{k_1(r_2^2 - r_1^2) - k_2(r_2^2 + r_1^2)},$$

restul coeficienților ($n = 2, 3, \ldots$) fiind nuli.

Cu coeficienții (10), ținînd seama de (8) și (7) și revenind la planul fizic prin efectuarea inversă a transformărilor (6) și (4), adică

$$\zeta = \zeta_1 - if \text{ și } \zeta_1 = z + \sqrt{z^2 - a^2}, \tag{11}$$

găsim funcțiile analitice $f_j(z)$:

$$f_1(z) = \frac{V_0}{2}\left[(z - if + \sqrt{z^2 - a^2})e^{i\alpha} + \frac{k_1(r_2^2 - r_1^2) + k_2(r_2^2 + r_1^2)}{k_1(r_2^2 - r_1^2) - k_2(r_2^2 + r_1^2)} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{r_1^2}{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}} \cdot e^{-i\alpha}\right], \tag{12}$$

definită în D_1

și

$$f_2(z) = -V_0 r_1^2 \frac{k_2}{k_1(r_2^2 - r_1^2) - k_2(r_2^2 + r_1^2)}\left[(z - if + \sqrt{z^2 - a^2})e^{i\alpha} - \right.$$
$$\left. - \frac{r_2^2}{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}} e^{-i\alpha}\right], \tag{13}$$

definită în D_2, f_1, f_2 reprezentînd mișcarea în D_1, respectiv D_2, în prezența drenului arcuit (care nu funcționează), cînd la mari distanțe avem un curent paralel.

2.2. *Determinarea funcțiilor* $f_j'(z)$. Deoarece conturul C și arcul AB din planul z se transformă în cercurile concentrice de raze r_1 și r_2, funcțiile $f_j'(\zeta)$ va trebui să reprezinte mișcarea către o sursă negativă situată în origine avînd raza egală cu r_2.

Se ia pentru expresiile potențialului forma

$$\varphi_j(P) = -\frac{q}{2\pi}\ln\frac{r}{r_2} + C_j\,; \quad P \in D_j \ (j = 1,2), \tag{14}$$

unde constantele C_1 și C_2 înglobează efectul frontierelor. Constantele se determină din condiția de egalitate a presiunilor pentru $r = r_1$ și luînd ca nivel de referință piezometric nivelul la peretele sursei negative $h_0=0$.

După calcule simple găsim

$$C_1 = \left(1 - \frac{k_1}{k_2}\right)\frac{q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}; \quad C_2 = 0. \tag{15}$$

Trecînd la reprezentarea complexă și, prin transformările (11), la planul fizic, găsim

$$f_j'(z) = -\frac{q}{2\pi}\ln\frac{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}}{r_2} + C_j, \tag{16}$$

unde $z \in D_j$, $j = 1, 2$.

Notînd

$$K_1 = \frac{k_1(r_2^2 - r_1^2) + k_2(r_2^2 + r_1^2)}{k_1(r_2^2 - r_1^2) - k_2(r_2^2 + r_1^2)}; \quad K_2 = \frac{-k_2 r_1^2}{k_1(r_2^2 - r_1^2) - k_2(r_2^2 + r_1^2)}, \tag{17}$$

potențialul complex rezultant se scrie

$$F_1(z) = \frac{V_0}{2}\left[(z - if + \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{i\alpha} + K_1 \frac{r_1^2}{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}} e^{-i\alpha}\right] -$$

$$- \frac{q}{2\pi}\ln\frac{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}}{r_2} + C_1, \tag{18}$$

definit pentru $z \in D_1 \cup C$, și

$$F_2(z) = V_0 K_2\left[(z - if + \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{i\alpha} - \frac{r_2^2}{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}} \cdot e^{-i\alpha}\right] -$$

$$- \frac{q}{2\pi}\ln\frac{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}}{r_2}, \tag{19}$$

definit pentru $z \in D_2 \cup C$.

Funcțiile (18) și (19) reprezintă mișcarea către un dren arcuit, situat în curentul subteran, în condițiile de neomogenitate prezentată în figura 1. Curentul subteran la mari distanțe are viteza V_0 și face unghiul $-\alpha$ cu axa reală; q reprezintă debitul total al sursei negative (al drenului).

3. Prin particularizări se pot obține o serie de cazuri mai simple întîlnite în practică, unele constituind și o verificare a relațiilor obținute, fiind tratate și în lucrările citate.

Pentru $f = 0$, relațiile (18) și (19) vor reprezenta mișcarea către drenul liniar de lungime $2a$, situat în mediul poros neomogen, frontiera de separare a celor două medii fiind o elipsă cu semiaxele s și $t = \sqrt{a^2 + s^2}$.

$$F_1(z) = \frac{V_0}{2}\left[(z + \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{i\alpha} + K_1 \frac{t + s}{t - s}(z - \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{-i\alpha}\right] -$$

$$- i\frac{q}{2\pi}\arccos\frac{z}{a} + C_1, \tag{20}$$

în exteriorul elipsei, și

$$F_2(z) = V_0 K_2[(z + \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{i\alpha} - (z - \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{-i\alpha}] - \\ - i\frac{q}{2\pi} \arccos \frac{z}{a}, \tag{21}$$

în interiorul elipsei.

O altă particularizare interesantă se obține pentru $k_1 = k_2$, adică drenul arcuit și mediul poros omogen. În acest caz, ca o verificare va trebui ca independent de r_1 să avem $F_1 = F_2$.

Într-adevăr, pentru $k_1 = k_2$ avem

$$K_1 = -\frac{r_2^2}{r_1^2};\ K_2 = \frac{1}{2},\ C_1 = C_2 = 0, \tag{22}$$

iar (18) și (19) devin

$$F_1 = F_2 = \frac{V_0}{2}\left[(z - if + \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{i\alpha} - \frac{a^2 + f^2}{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}}\, e^{-i\alpha}\right] - \\ - \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + f^2}}. \tag{23}$$

Dacă în (23) $f = 0$ regăsim cazul drenului liniar de lungime $2a$ situat în stratul acvifer omogen, expresia este identică cu cea din [2, p. 964]:

$$F = V_0\,[iz.\sin\alpha + \sqrt{z^2 - a^2}\cos\alpha] - i\frac{q}{2\pi} \arccos \frac{z}{a}. \tag{24}$$

La aceeași expresie se ajunge dacă în (20) și (21) facem $k_1 = k_2$.

Alte cazuri utile găsim pentru $k_2 \to \infty$.

În acest caz,

$$K_1 = -1,\ K_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2 + r_1^2},\ C_1 = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}.$$

Înlocuind în (18), (19), găsim potențialul complex către o cavitate arcuită limitată de curba (C) (fig. 1), în care este amplasată sursa negativă distribuită de-a lungul arcului AB.

Pentru $f = 0$, în aceleași condiții, avem mișcarea către cavitatea eliptică în care este amplasată sursa distribuită după segmentul de lungime $2a$ situată între focarele elipsei.

Pentru acest ultim caz,

$$F_1(z) = \frac{V_0}{2}\left[(z + \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{i\alpha} - \frac{t + s}{t - s}(z - \sqrt{z^2 - a^2})\, e^{-i\alpha}\right] - \\ - \frac{q}{2\pi} \ln \frac{z + \sqrt{z^2 - a^2}}{t + s}, \tag{25}$$

în exteriorul elipsei, și

$$F_2(z) = \frac{V_0}{2}\frac{t+s}{t}\left[(z+\sqrt{z^2-a^2})\,e^{i\alpha} - (z-\sqrt{z^2-a^2})\,e^{-i\alpha}\right] -$$

$$-\frac{q}{2\pi}\ln\frac{z+\sqrt{z^2-a^2}}{a}, \tag{26}$$

în interiorul cavității.

Ultimele două cazuri au aplicabilitate în studiul pompărilor la epuismente, apărarea incintelor etc.

Cunoașterea potențialului complex în toate cazurile amintite permite determinarea spectrului hidrodinamic, expresia debitului, distribuția vitezelor etc., deosebit de utile în aplicațiile practice.

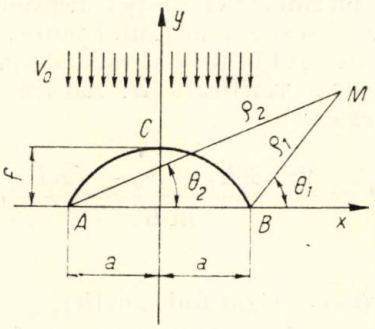


Fig. 3

4. O aplicație interesantă ar fi stabilirea expresiilor liniilor de curent a liniilor echipotențiale și a debitului captat pentru drenul arcuit dispus în curentul subteran frontal $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$ (arcul ACB din figura 3).

Pentru rezolvarea acestei probleme se pleacă de la relația (23), din care pentru $\alpha = \frac{\pi}{2}$ se găsește potențialul complex al mișcării :

$$F(z) = i\frac{V_0}{2}\left[(z - if + \sqrt{z^2-a^2}) + \frac{a^2+f^2}{z-if+\sqrt{z^2-a^2}}\right] -$$

$$-\frac{q}{2\pi}\ln\frac{z-if+\sqrt{z^2-a^2}}{\sqrt{a^2+f^2}}. \tag{27}$$

Pentru explicitarea expresiilor liniilor de curent Ψ și a liniilor echipotențiale Φ notăm

$$A = x + \sqrt{\rho_1\cdot\rho_2}\cdot\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2},$$

$$B = -\left(y - f + \sqrt{\rho_1\cdot\rho_2}\cdot\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right), \tag{28}$$

unde notaţiile folosite se pot urmări în figura 3. Cu acestea, Φ şi Ψ se scriu

$$\Phi = \frac{V_0}{2} B\left(1 - \frac{a^2 + f^2}{A^2 + B^2}\right) + \frac{q}{4\pi} \ln \frac{a^2 + f^2}{A^2 + B^2},$$
$$\Psi = \frac{V_0}{2} A\left(1 + \frac{a^2 + f^2}{A^2 + B^2}\right) + \frac{q}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{B}{A}. \tag{29}$$

Ţinînd seama că în ipoteza valabilităţii legii Darcy potenţialul de viteză se scrie

$$\Phi = -kh + c, \tag{30}$$

unde h reprezintă cota piezometrică a apei în raport cu patul impermeabil, şi k coeficientul de filtraţie a mediului poros, şi introducînd ipoteza Dupuit cu privire la caracterul limitat al razei de influenţă a unei captări de apă subterană, ipoteză verificată în natură [2, p. 965], expresia debitului captat se scrie

$$Q = \frac{2\pi k \delta (H_0 - h_0 - IRE)}{\ln G}, \tag{31}$$

unde

δ reprezintă grosimea stratului acvifer,

H_0 — cota piezometrică la distanţa razei de influenţă R de dren,

h_0 — cota piezometrică în dren,

I — panta hidraulică a curentului subteran frontal,

iar

$$E = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2})}{\alpha(\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2} - \beta)},$$
$$G = \frac{\alpha + \sqrt{1 + \alpha^2} - \beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \tag{32}$$

sînt funcţii de parametrii adimensionali :

$\alpha = \frac{R}{a}$ — parametru care caracterizează raza de influenţă a drenului comparativ cu lungimea „corzii" drenului,

$\beta = \frac{f}{a}$ — parametru care caracterizează curbura drenului.

Expresia (31) permite calculul debitului captat pentru un dren arcuit dispus în curentul subteran frontal cînd se cunosc parametrii hidraulici şi geometrici necesari.

Deşi expresiile (32) par dificile din punctul de vedere al calculului numeric, ele pot fi uşor prezentate sub formă tabelară sau grafică funcţie de parametrii α şi β.

Relația (31) se poate particulariza pentru $\Gamma = 0$, adică drenul situat în bazinul sub presiune (lipsa curentului subteran).

De asemenea, pentru $\beta = 0$ regăsim cazul drenului liniar, relația (31) devenind identică cu relația (13) din [2, p. 968].

Primită la redacție la 14 ianuarie 1967,
unele completări 9 mai 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. I. Gheorghiță, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei, 1966.
2. E. Trofin, *Contribuție la calculul hidraulic al drenurilor de captare de lungime finită*, St. cerc. mec. aplic., **16**, *4* (1964).

DEPENDENȚA REGIMULUI DE FRECARE ȘI A MIȘCĂRII SACADATE DE PRINCIPALII FACTORI AI UZĂRII

de DAN PAVELESCU
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

539.6 : 621

Se continuă cercetările din lucrările [6], [7], stabilindu-se experimental ordinea factorilor preponderenți ai schimbării regimului de frecare în mișcarea alternativă și ai *stick-slip*-ului.

Se aprofundează evoluția *stick-slip*-ului și a elementelor sale principale (viteza de *slip*, numărul de lipiri *stick*), care prezintă o distribuție statistică normală; se măsoară coeficienții de frecare. Se remarcă corelația: viteza de uzură — *stick-slip* și posibilitatea de amortizare cu aditivi de onctuozitate. În ecuația mișcării se ține seamă de variația vitezei și a coeficientului de frecare.

1. CUPLE DE FRECARE

Clasificările instalațiilor diferind de la un autor la altul, iar prezentarea cuplelor de frecare nefiind sistematizată [1], [2], [3], [4], s-a adoptat drept criteriu tipul contactului de frecare și, funcție de numărul contactelor și a mărimii suprafeței, se prezintă o clasificare-tabelă a principalelor cuple de frecare (fig. 1), fiecare cuplă de frecare putînd fi localizată (de exemplu, IV—1—b, care va fi utilizat mai jos).

Clasificarea cuprinde patru clase, care pe linii și coloane indică creșterea contactelor. Rezultă că criteriul cinematic rămîne un criteriu auxiliar, cuplele prezentate pretîndu-se la mișcări diferite (de exemplu alternative); frecarea de alunecare predomină față de cea de rostogolire și instalațiile din cele patru clase cu unul sau cu două contacte predomină față de cele cu mai multe contacte. Prezentarea unei clasificări-tabelă este utilă cu atît mai mult cu cît facilitează alegerea adecvată tocmai a elementului caracteristic principal al instalațiilor de frecare, cupla de frecare; aceasta s-a dovedit a fi aleasă corect, sau, dimpotrivă, principial greșit, funcție de măsura în care răspunde în general la două condiții pe care le socotim esențiale:

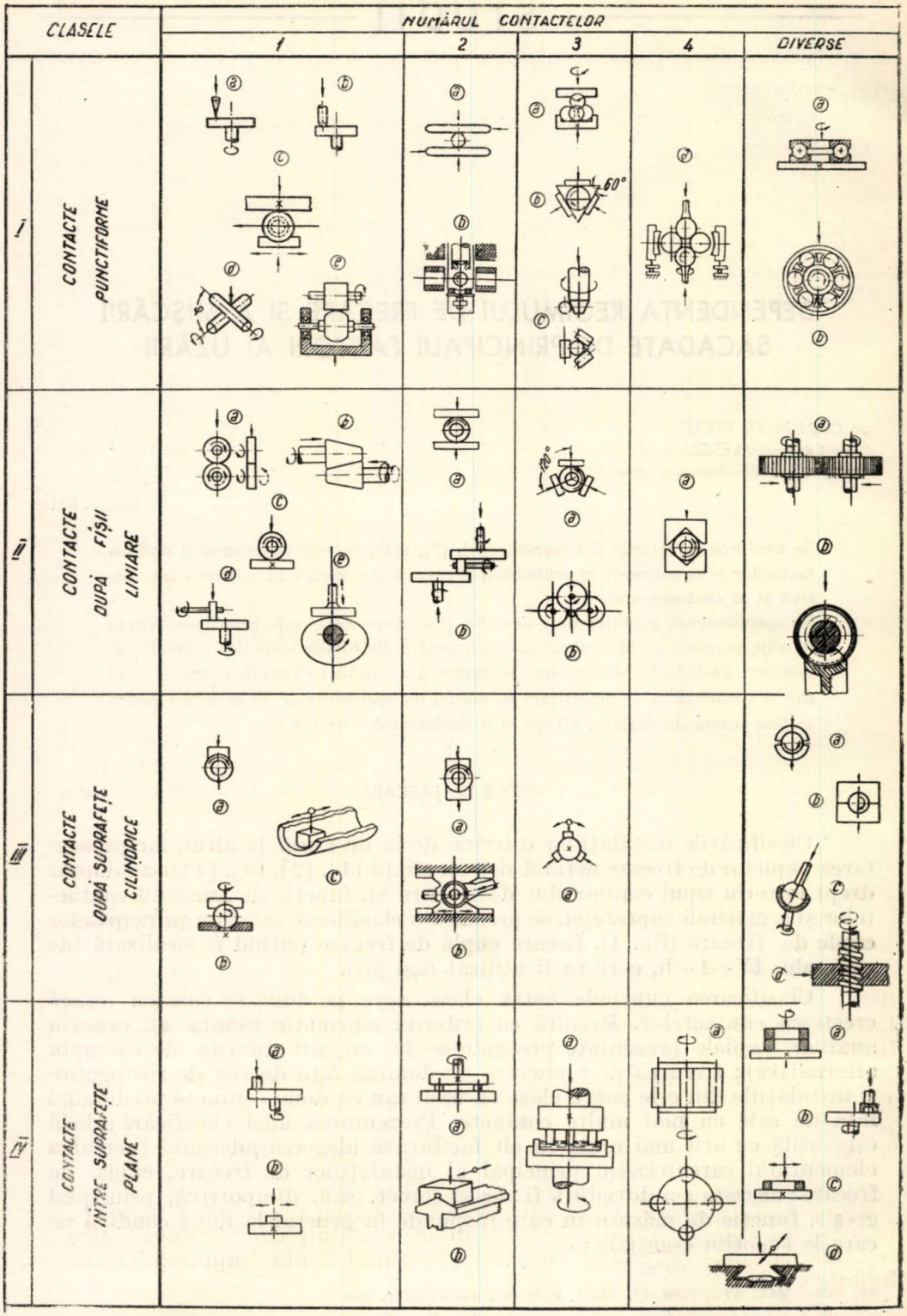


Fig. 1. — Clasificarea principalelor cuple de frecare utilizate în instalații de încercare.

— modelarea și reproducerea unor procese de frecare identice celor din exploatare;

— asigurarea unui grad mai ridicat de reproductibilitate a determinărilor.

După cum am arătat [5], în soluționările întîlnite în construcția de mașini sau în instalațiile de modelare se întîlnesc cazuri cînd tipul contactului se dovedește a fi principial greșit din punctul de vedere al modelării uzării și al condițiilor de reproductibilitate (de exemplu tipurile III—1—a și III—2—a); constatarea este valabilă și din punctul de vedere al stabilirii ponderii parametrilor uzării, a ordinii acestora, a evoluției intime a procesului de frecare-uzare etc. În lucrarea [6] a fost determinat, pentru o cuplă de frecare (IV—1—b) formată din două suprafețe plane circulare, momentul $\delta_0 < 0{,}8$ μm, în care relația stabilită pentru scurgerea hidrodinamică respectivă încetează să mai aibă corespondent fizic, indicînd trecerea la regimul semifluid (δ—grosimea filmului de lubrifiant).

Pentru studiul frecării de alunecare în condițiile unei mișcări alternative a fost utilizată instalația prezentată în lucrarea [7] (fig. 2).

2. DEPENDENȚA REGIMULUI DE FRECARE DE SARCINĂ, RUGOZITATE ȘI VISCOZITATE

Au fost preferate condiții industriale de material (rugozitate), lubrifianți (viscozitate) etc.

Utilizînd o metodă electrică asemănătoare celei folosite de alți autori pentru cuple de frecare, îndeosebi de tip punctiform [8], [9], cu un circuit simplu (fig. 3) cu rezistență suplimentară ($R = 20$ kΩ) și un oscilograf de frecvență joasă (0,1 Hz — 10 KHz), s-au obținut prin înregistrare determinările din care prezentăm în figura 4 cîteva rezultate semnificative [10].

Pentru a se marca mijlocul cursei $S = 72$ mm s-a utilizat un contact fix care a produs pe oscilogramă căderea de tensiune prin scurtcircuitare și, respectiv, trecerea $R \infty \rightarrow R_0$.

În condițiile factorilor indicați în figura 4 se constată următoarele:

— *rugozitatea suprafeței* este principalul factor care influențează dispariția peliculei fluide; trecerea de la suprafețele superfinisate la cele finisate prin tușare și, desigur, prin frezare, conduce la stabilirea regimului-limită și, respectiv, semifluid;

— *sarcina* apare ca al doilea factor important; în condițiile suprafețelor superfinisate, regimul de ungere hidrodinamic se reduce progresiv cu creșterea sarcinii, iar la suprafața cu rugozitate mai mare (tușare-frezare) creșterea sarcinii grăbește stabilirea regimului semifluid;

— *viscozitatea* influențează în al treilea rînd dispariția regimului hidrodinamic; astfel, la rugozitate și sarcină egală, reducerea viscozității face ca regimul de ungere să se modifice simțitor, deplasîndu-se către regimul semifluid (suprafețe rugoase) și regimul limită (suprafețe superfinisate).

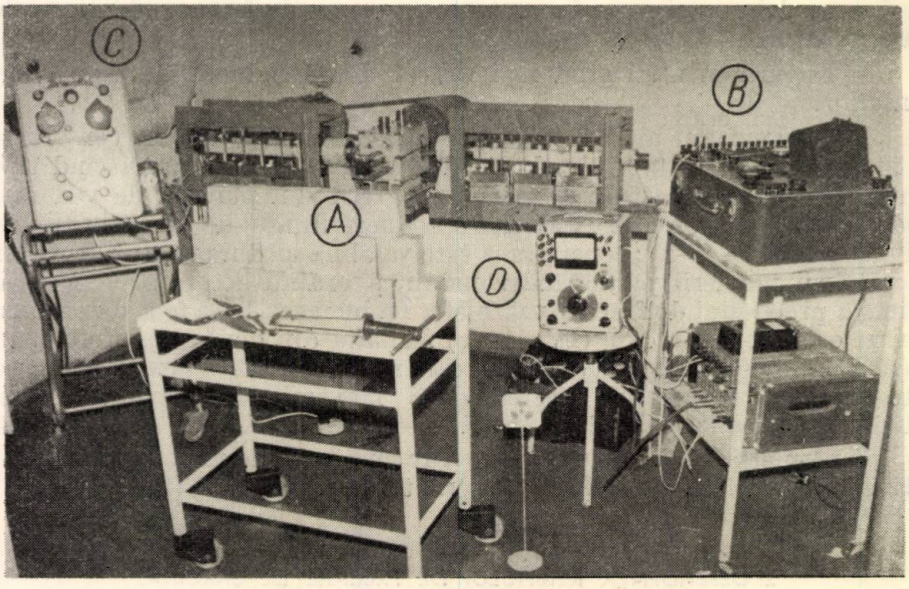


Fig. 2. — Vedere generală a instalației.

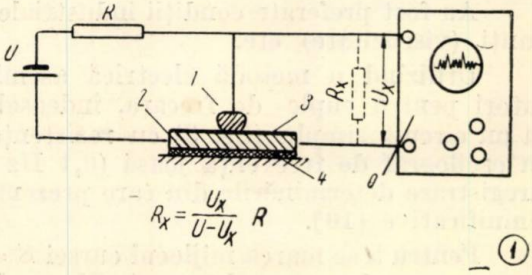


Fig. 3. — Schița circuitului electric de înregistrare a variației regimului de ungere ; filmul de lubrifiant (*3*) ; două epruvete cu suprafețe plane (*1*—*2*) ; *4* — izolator electric ; *O* — oscilograf de variații lente ; *R* — 20 KΩ (fig. 2 C).

3. DEPENDENȚA MIȘCĂRII SACADATE

Deși în ultimul timp, datorită implicațiilor practice, s-a acordat o atenție sporită fenomenului complex de *stick-slip*, natura sa este diferit explicată [4], [11]—[15], unii autori fiind chiar de părere că coeficientul de frecare cinetic depășește pe cel static [16]; se admite apariția *stick-slip*-ului numai la viteze foarte mici ; nu este suficient studiată influența factorilor, dependența de aceștia a numărului de lipiri (*stick*), determinarea valorii de *slip*, nu se privesc și efectele prin prisma uzării etc.

Pentru studiul acestor aspecte s-a folosit instalația precedentă [7]; utilizînd un traductor — cadrul elastic spațial și mărci tensometrice — s-a studiat de asemenea, prin înregistrări pe oscilograf, variația forței de frecare, evoluția fenomenului de *stick-slip* funcție de viteză și de aceiași parametri și condiții ca în cazul regimului de frecare, pentru a se verifica concluzia de mai sus.

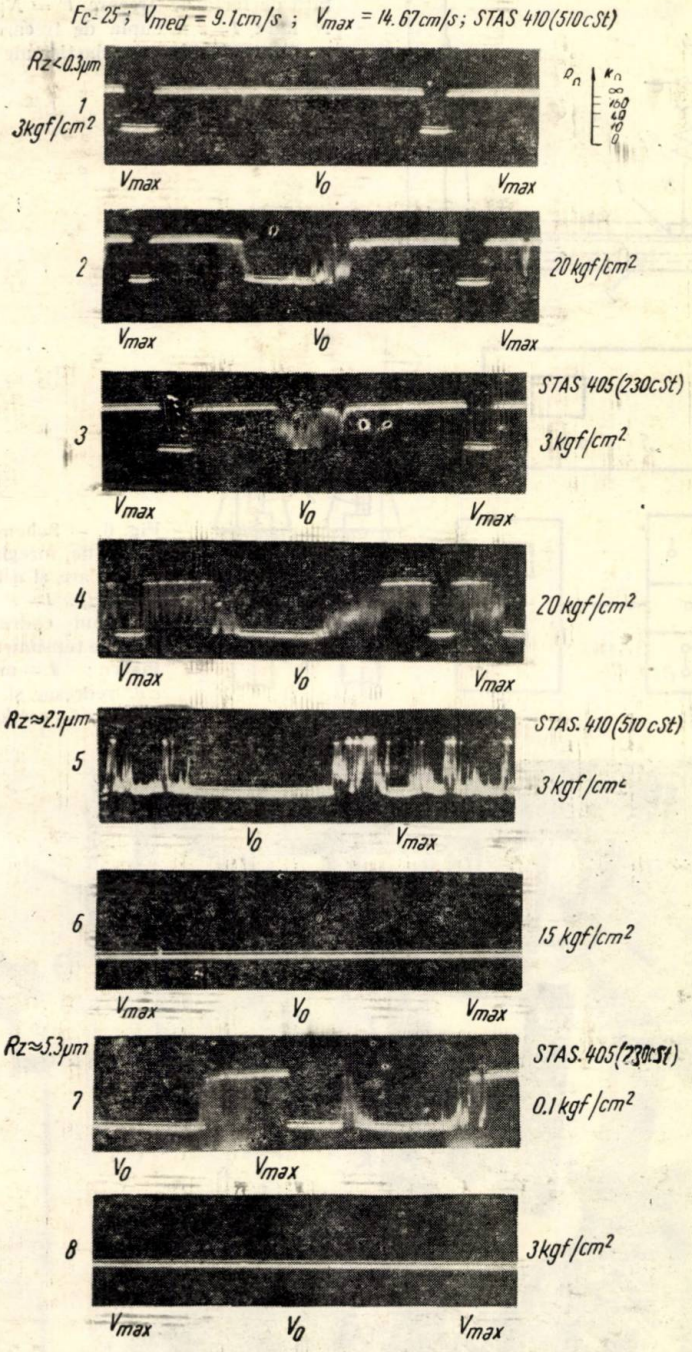


Fig. 4. — Extras din oscilogramele privind variația regimului de ungere de-a lungul cursei în condițiuni diferite de rugozitate, sarcină și viscozitate.

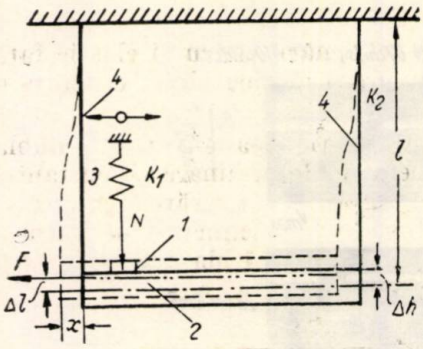


Fig. 5. — Schema deformării cadrului elastic față de forța de frecare $F = N\mu$ și încărcarea N kgf: *1—2* — cupla de frecare; *3* — resortul tarat; *4* — lamele elastice ale cadrului.

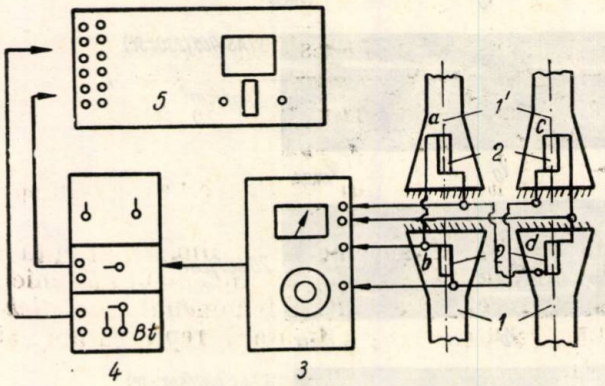


Fig. 6. — Schema-bloc a circuitului de înregistrare a forței de frecare și a fenomenului de *stick-slip*. *1—1'* — ambele fețe ale unui cadru elastic; *2* — mărcile tensometrice; *3* — tensometru; *4* — amplificator de c.c. redresor și baza de timp (Bt); *5* — oscilograf cu bucle.

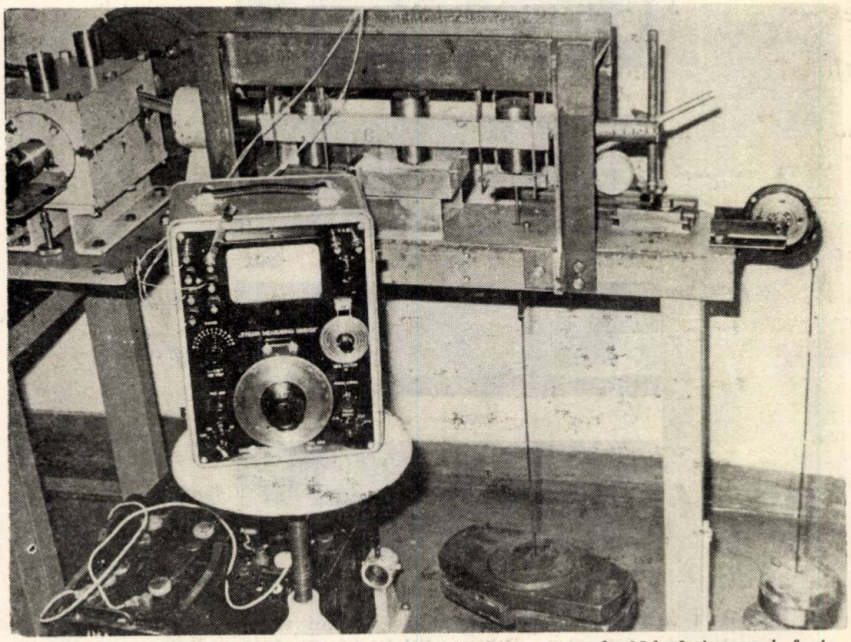


Fig. 6 *a*. — Momentul tarării în prezența unei forțe normale N kgf și a unei forțe tangențiale F kgf.

În figura 5 este prezentată schema deformării cadrului elastic față de forța de frecare și de încărcare, iar în figura 6 schema-bloc a circuitului de înregistrare a forței de frecare (fig. 2b).

Dată fiind complexitatea sistemului elastic, s-a efectuat o dublă etalonare (electrică și micrometrică) pentru determinarea constantei elastice K atît în condițiile sistemului descărcat, cît și încărcat progresiv la sarcină maximă N (fig. 6 *a*). De asemenea s-a determinat experimental coeficientul de amortizare δ^*, epruveta inferioară fiind plasată în aer sau în ulei :

	Aer	Ulei (STAS)		
		405 (230 cSt)	410 (510 cSt)	413 (640 cSt)
$\delta^*(s^{-1})$	0,98	8,6	11,4	16

Frecvența proprie circulară a sistemului elastic neîncărcat în aer este $\omega_0 = 50$ Hz.

În condițiile cuplei de frecare și ale factorilor similari studiului evoluției regimului de ungere, la diferite viteze medii, îndeosebi mai mici, s-au obținut variațiile forței de frecare și evoluțiile fenomenului de *stick-slip* pe numeroase oscilograme, dintre care în figura 7 reprezentăm selectiv o parte dintre ele [10] :

În tabela 1 sînt prezentate sintetic valorile maxime și minime ale forței de frecare, coeficientul de frecare static (μ_s) și cinetic (μ_c), precum și valorile medii ale vitezei de *slip* funcție de parametrii experimentali menționați ; de asemenea la cuplele de frecare cu rugozitate mai mare s-a studiat și variația numărului mediu de lipiri pe cursă (elemente care nu au fost determinate și studiate ca atare în alte lucrări). Astfel aceste determinări experimentale permit mai multe concluzii :

— în condițiile regimului hidrodinamic preponderent, forța de frecare are valoare redusă, iar *fenomenul de* stick-slip *nu se face practic simțit* ;

— se remarcă *o amplitudine sporită a fenomenului de* stick-slip, *o dată cu creșterea rugozității, a sarcinii, reducerea viscozității și a vitezei relative de alunecare* ;

— frecarea alternativă de alunecare în condițiile sistemului mecanic adoptat și a ungerii în regim semifluid și limită conduce la *apariția unui* stick-slip *de tip neregulat* de-a lungul cursei, la viteze mari apărînd și oscilații de rezonanță, influențînd variația forței de frecare ;

— în lungul unei curse, perioadele de lipire (*stick*) și vitezele medii de alunecare (*slip*) prezintă *caracter statistic*, distribuția fiind normală (Gauss-Laplace) ;

— *numărul perioadelor de stick* crește cu reducerea forței de frecare, respectiv reducerea sarcinii, creșterea viscozității, reducerea rugozității ; domeniul de existență este dependent de mărimea vitezei de alunecare ;

Tabela 1

Suprafaţa (rugozitate)	Ulei (ν) cSt	Vmax cm/s	σ_N kgf/cm²	F kgf		μ_s		μ_c		Stick-slip (mm)		V slip cm/s		nr. per. stick/ S.	Observaţii
				F_1	F_2	μ_{s1}	μ_{s2}	μ_{c1}	μ_{c2}	Sk—p max.	Sk—p (Vmax.)	V_{sl_1}	V_{sl_2}		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Superfinisată ($R_z < 0{,}3$ μm)	413 (640 cSt)	14,67	30	3,7	1,8	0,12	0,06	0,08	0,02	1,6	0,8	3,4	3,6	—	5 perioade Sk—p la începutul cursei
		,,	15	1,6	0,6	0,1	0,04	0,06	0,02	1,2	0,5	1,5	5,6	—	4 perioade Sk—p la începutul cursei
		,,	10	0,9	0,3	0,09	0,03	0,06	0,02	0,9	0,2	1,5	5,6	—	nu se disting
		,,	3	0,2	—	0,07	—	0,03	—	0,05	—	4,6	—	—	,,
	410 (510 cSt)	,,	30	5,2	2,5	0,12	0,08	0,08	0,05	0,9	0,6	6,2	7,2	—	8 perioade la începutul cursei
		,,	15	3,3	1,1	0,23	0,09	0,11	0,04	0,4	0,15	3,4	11,8	—	,,
		,,	10	2,5	0,9	0,25	0,09	0,15	0,07	0,3	0,3	6,5	11,1	—	10 ,,
		,,	3	1,2	—	0,4	—	0,15	—	0,1	—	12	—	—	3 perioade
Tuşare 24 pete ($R_z \approx 2{,}7$ μm)	410 (510 cSt)	1,17	30	6,0	4,0	0,2	0,15	0,12	0,10	0,9	0,5	10,5	4,0	50	
		,,	15	3,6	2,8	0,24	0,18	0,12	0,08	0,7	0,4	7,8	5,8	70	
		2,93	30	5,8	3,4	0,19	0,11	0,09	0,07	0,8	0,4	32	18,6	43	
		,,	15	2,2	2,0	0,14	0,16	0,1	0,09	0,6	0,2	6,4	1,5	80	

	405 (230 cSt)	1,17	30	7,8	4,6	0,25	0,15	0,11	0,11	1,0	0,9	10,4	7,1	26	
		„	15	4,3	2,9	0,28	0,19	0,08	0,08	0,8	0,4	48	25	52	
		2,93	30	6,5	3,7	0,21	0,12	0,11	0,10	1,6	0,6	3,8	1,6	49	
		„	15	2,6	2,2	0,17	0,08	0,08	0,07	0,1	0,3	12,2	21	96	
Frezare transversală cuțit zburător ($R_z \approx 53$ μm)	413 (640 cSt)	1,17	30	8,8	7,2	0,29	0,24	0,14	0,12	1,6	1,4	18,3	15,3	13	
		„	15	3,7	3,0	0,24	0,2	0,15	0,10	0,8	0,7	38,5	30,1	24	
	410 (510 cSt)	1,17	30	9,1	8,1	0,30	0,27	0,15	0,13	1,8	1,6	26,2	23,2	14	
		„	15	4,8	4,2	0,32	0,28	0,16	0,14	1,0	0,8	19,6	20,2	35	
		2,93	30	7,4	5,0	0,25	0,17	0,21	0,08	1,5	0,9	37	28,7	15	
		„	15	6,4	3,9	0,42	0,26	0,22	0,13	1,3	0,6	50	24,6	36	
		14,67	10	2,7	2,0	0,27	0,20	0,16	0,11	0,6	0,4	7	6,7	26	
	405 (230 cSt)	1,17	30	10	8,8	0,33	0,29	0,17	0,15	2,0	1,7	21	34,5	15	
		„	15	5,1	4,8	0,34	0,31	0,19	0,17	0,9	0,6	15	12,8	46	
		2,93	30	9,8	8,1	0,32	0,27	0,17	0,13	1,9	1,6	45,5	37,0	13	
		„	15	4,7	3,9	0,33	0,26	0,16	0,13	0,8	0,5	22,6	18,6	34	

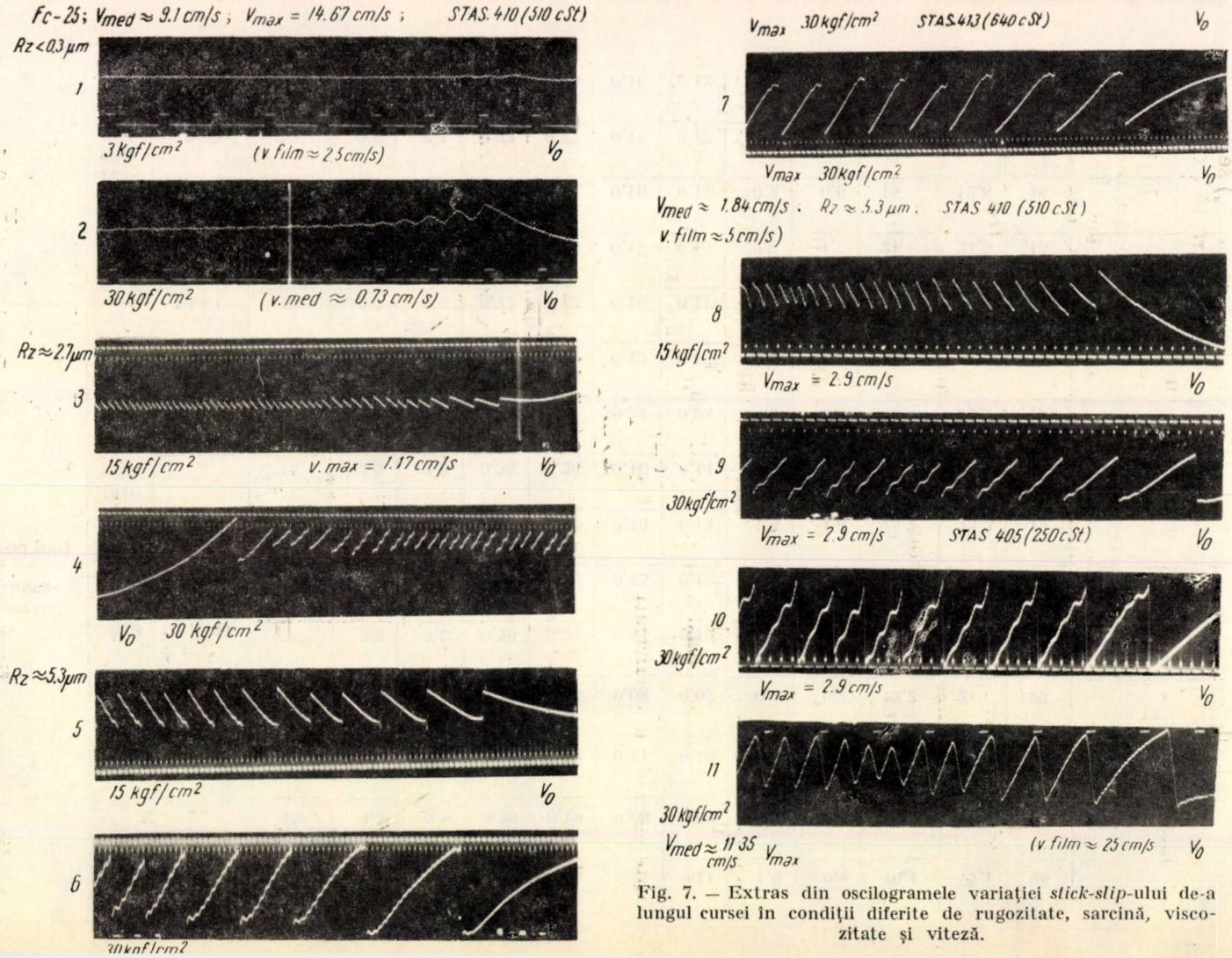


Fig. 7. — Extras din oscilogramele variaţiei *stick-slip*-ului de-a lungul cursei în condiţii diferite de rugozitate, sarcină, viscozitate şi viteză.

— valorile medii ale coeficienților de frecare statică (μ_s) se apropie, în anumite condiții de rugozitate, de cele privind μ_c, fără să existe vreo situație în care $\mu_c > \mu_s$, deși se remarcă timpi foarte scurți de lipire;

— în regim de frecare semifluidă, la aceeași viteză, la începutul cursei se determină o valoare destul de constantă a coeficientului de frecare cu sarcina, care, ținînd seama de evoluția temperaturii, permite o relație între diferența de temperatură și căldură degajată (după cum s-a arătat în [7]).

În ceea ce privește *concluziile de interes practic* pentru ghidajele metalice ale mașinilor-unelte (reducerea vibrațiilor de frecare ce afectează precizia de prelucrare) menționăm:

— necesitatea unei prelucrări cu rugozitate (R_z) cît mai redusă (evitîndu-se frezarea și rabotarea);

— utilizarea unui ulei aditivat de viscozitate mai ridicată (de exemplu 600 cSt, 413).

4. ECUAȚIA DE MIȘCARE; LIMITA APERIODICITĂȚII

Spre deosebire de alți autori care s-au ocupat și de soluții analitice [4], [12] — [15], s-a luat în considerare variația vitezei relative și a coeficientului de frecare cinetic, — în frecarea de alunecare alternativă — avînd în vedere în același timp și amortizarea; se admit totuși unele ipoteze simplificatoare pentru a obține — în primă aproximație — o ecuație diferențială cu coeficienți constanți.

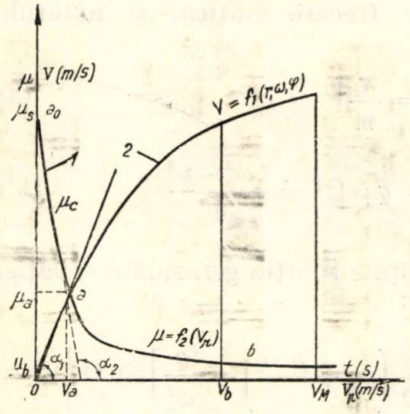


Fig. 8. — Schița variației coeficientului de frecare cu viteza (*1*) și variației vitezei (funcția sinusoidală *2*).

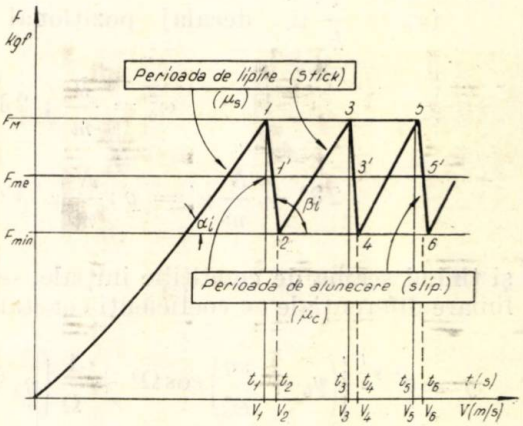


Fig. 9. — Schița evoluției forței de frecare și a fenomenului *stick-slip*.

Astfel se consideră liniară dependența dintre coeficientul de frecare cinetic și viteza de alunecare și de asemenea o variație liniară a vitezei cu timpul (fig. 8, regiunea $0 \to V_a$; $V_r < V_a$);

$$v = V\,\omega\,t, \quad V_r = v - \dot{x}. \tag{1}$$

Se admite $v \ll \dot{x}$, dependența dintre viteza medie de *stick* și viteza medie de *slip*, confirmată experimental prin raportul 1/15—1/20 (vezi și fig. 9), x fiind deplasarea (mm) în perioada de *slip*.

Astfel

$$\mu(V_r) \approx \mu_s + \mu'_v = \mu_s + \mu'(v - \dot{x}), \tag{2}$$

unde μ' este panta curbei coeficientul cinetic funcție de viteză. Se ajunge la ecuația de mișcare a masei m în cazul existenței frecării, amortizării și a forței perturbatoare admise :

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = N[\mu'(v - \dot{x}) + \mu_s], \tag{3}$$

$$m\ddot{x} + (r + N\mu')\dot{x} + k\left(x - \frac{N\mu_s}{k}\right) = N\mu' v\,\omega\,t, \tag{3'}$$

unde

m reprezintă masa epruvetei inferioare și a lamelor elastice, presupusă concentrată la partea inferioară a acestora (kg·masă),

k — coeficientul de rigiditate al sistemului elastic (kg·f/m),

r — coeficientul forței de frecare (kg·f·s/m).

$\mu' = \dfrac{d\mu_c}{dv}$ [s/m].

Adoptînd schimbarea de variabilă

$$Y - x - x_0 \tag{4}$$

($x_0 = \dfrac{N}{k}\mu_s$, decalaj pozițional de frecare statică) și notațiile

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}\ ;\ 2\delta^* = \frac{r}{m}, \tag{5}$$

$$2\delta^* + \frac{N}{m}\mu' = p\ ;\ \frac{N}{m}\mu' V\omega = q\ ;\ \Omega^2 = \frac{4\omega_0^2 - p^2}{4} \tag{5'}$$

și ținînd seama de condițiile inițiale, se obține soluția generală a ecuației liniare diferențiale cu coeficienți constanți :

$$y = e^{-p\frac{t}{2}}\left\{\left(y_0 + \frac{pq}{\omega_0^4}\right)\cos\Omega t + \frac{1}{\Omega}\left[\dot{y}_0 + \frac{p}{2}\left(y_0 + \frac{p\cdot q}{\omega_0^4}\right) - \frac{q}{\omega_0^2}\right]\sin\Omega t\right\} + \frac{q}{\omega_0^2}t - \frac{pq}{\omega_0^4}. \tag{6}$$

Oscilațiile proprii amortizîndu-se foarte repede, se obține expresia deplasării :

$$x \approx \frac{N}{k}\mu_s + \frac{q}{\omega_0^2}t - \frac{pq}{\omega_0^4} \tag{7}$$

și prin (5), (5') dependența de factorii respectivi ai sistemului.

Interesînd îndeosebi momentul-limită anterior apariției fenomenului de *stick-slip*, se ia în discuție numai componența Y^0 a ecuației de mișcare.

Deoarece natura mărimii Ω și, în consecință, felul mișcării descrise de Y^0 depind de semnul expresiei $4\,\omega_0^2 - p^2$, se studiază acest semn ținînd seama de limitarea μ' și, din considerente fizice, se reține numai intervalul de variație $\mu' < 0$. În cazul $\Omega = 0$ (*limita aperiodicității*),

$$-\frac{2m}{N}(\omega_0 + \delta^*) = \mu' \tag{8}$$

(spre deosebire de [17], apare și ω_0 parametrul elastic al sistemului) sau, față de notațiile anterioare, expresia poate fi pusă sub forma

$$-\frac{1}{N}(2\sqrt{km} + r) = \mu', \tag{8'}$$

care dă posibilitatea unei confruntări experimentale*).

5. STUDIEREA CORELAȚIEI DINTRE UZARE ȘI STICK-SLIP

Influențarea vitezei de uzare de către prezența mișcării sacadate, pe care alți autori nu au abordat-o în condiții de mișcare alternativă, a fost observată cu aceeași instalație și cuplă de frecare. S-a obținut o reproductibilitate cu o abatere medie pătratică de 12% și o sensibilitate de măsură ridicată (viteze de uzare $3 \cdot 10^{-3} - 3 \cdot 10^{-4}$ mg/h) prin măsurarea cuvelor cu ulei radioactiv direct în sistemul de contoare GM, ceea ce a necesitat o ușoară modificare față de [10].

Prin compararea evoluției uzurii și, respectiv, a vitezei de uzare cu și fără *stick-slip* (prin blocarea lamelor elastice), s-au obținut următoarele rezultate :

— în condițiile unui ulei de viscozitate redusă (405), a unor rugozități, sarcini și viteze alese pentru a produce un *stick-slip* de amplitudine maximă, a rezultat uzarea mai pronunțată a suprafeței finisate prin frezare decît prin tușare, cu tendința ca viteza de uzare să fie mai mare în condițiile mișcării sacadate decît în cazul aceleiași cuple de frecare cu sistemul elastic blocat (fig. 10).

— apariția și numărul pericadelor de lipire în cazul fenomenului de *stick-slip*, care limitează practic lungimea de frecare, precum și variația vitezei relative de *slip* funcție de condiții diferite de frecare (tabela 1), dovedesc complexitatea acestui fenomen și fac ca — funcție de rugozitate,

*) Admiterea unui singur grad de libertate conduce la diferențe evidente între valorile calculate și cele experimentale.

sarcină, viscozitate și, după cum se va vedea, prezența unor aditivi — valorile vitezei de uzare în condiții de *stick-slip* să se distribuie în jurul valorilor ce se obțin prin blocarea sistemului elastic.

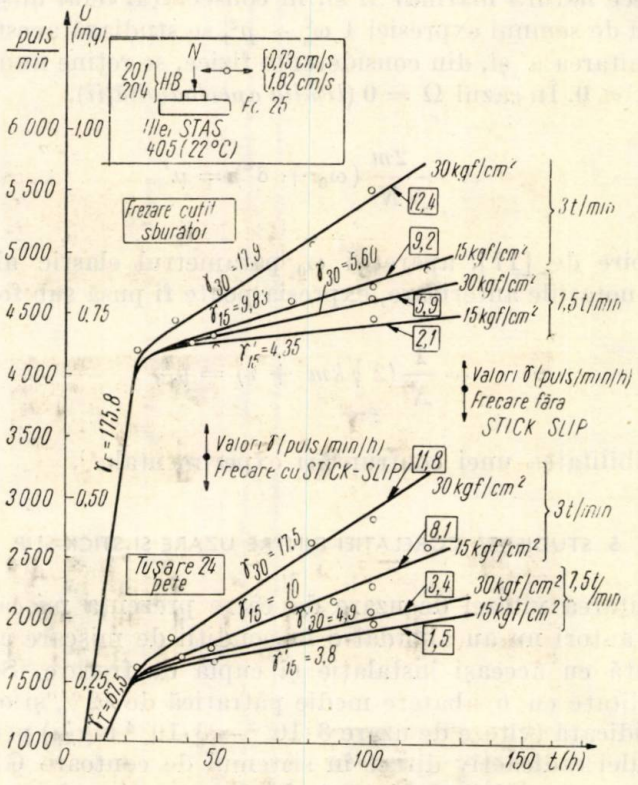


Fig. 10. — Rezultate comparative obținute privind viteza de uzare cu și fără *stick-slip*.

6. INFLUENȚA ADITIVILOR DE ONCTUOZITATE ASUPRA STICK-SLIP-ULUI

În puține lucrări publicate este sesizată influența prezenței unor aditivi asupra *stick-slip*-ului prin intermediul reducerii forței de frecare [11], [18], fără ca problema să fie pusă radical. Prezența unui aditiv de onctuozitate chiar în mică proporție (1—2% acid oleic) se dovedește a putea amortiza aproape complet fenomenul de *stick-slip* în condițiile de rugozitate, sarcină, viteză și viscozitate, care, de regulă, conduceau la o amplitudine mare (fig. 11) (tabela 2).

7. FLUCTUAȚII ÎN CONDIȚIILE MIȘCĂRII SACADATE

Pentru a pune în evidență influența variației de viteză de-a lungul cursei, în mișcarea alternativă de alunecare, în condițiile în care s-au constatat amplitudini mai mari ale fenomenului de *stick-slip*, s-a efectuat

analiza statistică a elementelor principale (forța de frecare și amplitudinea maximă a *stick-slip*-ului, perioada de lipire, viteza de alunecare). Au fost alese condițiile menționate, dat fiind și faptul că, în afară de amplitudinile mai mari constatate, prezintă o medie de 44 de perioade de lipire *stick* pe cursă.

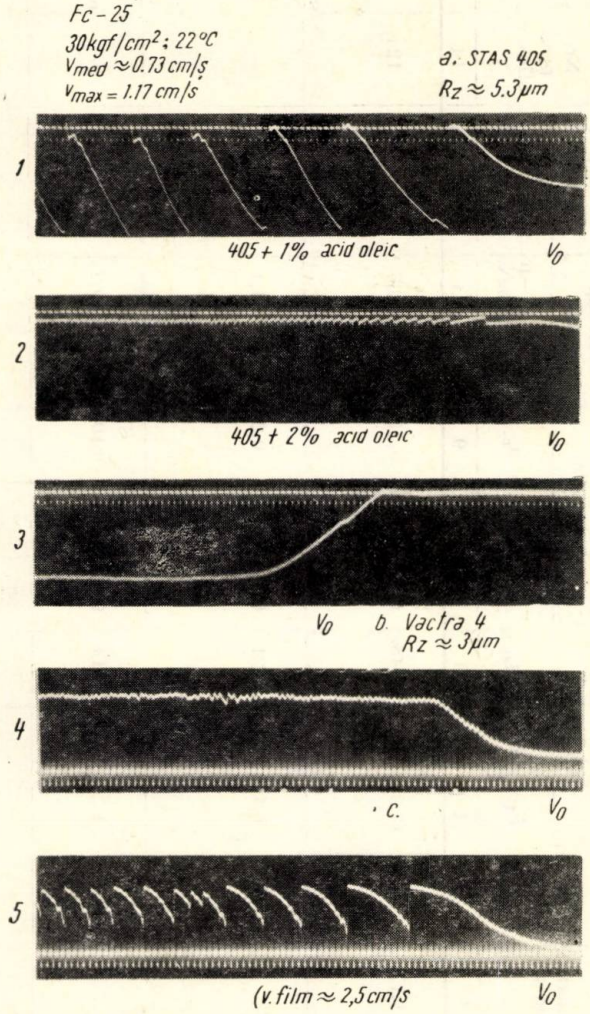


Fig. 11. — Extras din oscilogramele privind amortizarea *stick-slip*-ului (*1* — *3*) și comportarea la *stick-slip* a unui ulei Vactra 4 (*c*) și un ulei aditivat cu polimeri (5).

Observațiile experimentale obținute din oscilogramele variației forței de frecare prezintă o fluctuație statistică.

Redăm condițiile experimentale și unele rezultate statistice (tabela 3 a, b, c) obținute prin prelucrarea oscilogramelor forței de frecare și a *stick-slip*-ului :

Tabela 2

Suprafața (rugozitatea)	Ulei ν (cSt)	V max. cm/s	σ_N kgf/cm²	F kgf		μ_s		μ_c		Stick-slip (mm)		V slip cm/s		Nr. per. stick/s	Observații
				F_1	F_2	μ_{s_1}	μ_{s_2}	μ_{c_1}	μ_{c_2}	Sk−p max.	Sk−p V max.	V_{sl_1}	V_{sl_2}		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Frezare transversală cuțit zburător ($R_z \approx 5{,}3$ μm)	405 (230 cSt)	1,17	30	14,5	12,2	0,48	0,41	0,25	0,24	2,8	2,7	54	43	12	
	+ 1% acid oleic	„	30	6,4	3,1	0,21	0,11	0,2	0,2	1,1	1,1	—	—	—	la începutul cursei se disting 23 perioade Sk−p de amplitudine mică
	2% acid oleic	„	30	4,2	1,2	0,14	0,04	0,13	0,10	0,2	0,2	—	—	—	nu se disting perioade de Sk−p
	5% acid oleic	„	30	3,65	0,98	0,12	0,03	0,12	0,10	0,1	0,1	—	—	—	„

Condiții experimentale : — cupla de frecare Fc25, suprafețe frezate cuțit zburător $R_z = 5$ μm, ulei 405 $\theta =$ $= 22°C$, $n = 3$ *t*/min, $\sigma_N = 15$ kgf/cm².

Date : după oscilograma variației forței de frecare (*stick-slip*)

Număr perioade stick-slip pe cursă : 44

Tabela 3

a) Rezultate statistice)*:

Elemente :	$\bar{x}$	$\sigma_{\bar{x}}$	σ_{exp}	D^2	P
Perioada de lipire	51,6	7,18	20,06	402,5	0,02
Viteza medie *slip*	20,62	4,54	5,66	33,16	0,07
Forța de frecare	90,06	9,49	19,51	393,45	0,02

*) *Observ.* Valorile sînt date în unități relative (mm) rezultate prin citirea la documator (x11).

b) Valorile t_i pentru perioada de lipire $\left(t_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma_{exp}}\right)$:

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	etc.
2,12	0,9	1,0	0,7	1,3	0,98	

Observ. În diagrama $t_i x_i$ valorile se plasează aproximativ în jurul unei drepte, ceea ce indică existența unei distribuții normale.

c) (ex. privind viteza de *slip*)

	σ	2σ	3σ	
u	5,66	11,32	16,98	
$n\,(u)$	28,00	43,00	44,00	
$n\,(u)/N$	0,637	0,978	1,00	
$\theta\,(u)$	0,683	0,955	0,997	(teoretic)

Valorile $\sigma_{exp} > \sigma_{\bar{x}}$ arată existența suprapunerii mai multor surse de fluctuații (tabela 3*c*).

Din tabela 3*c* rezultă o concordanță mulțumitoare $n\,(u)/N$ față de $\theta\,(u)$:

63,7% față de 68%
97,8% „ „ 95%
100 % „ „ 99,7%

situație care indică o distribuție normală (Gauss-Laplace).

Se constată că la aceeași cursă valorile cele mai mari ale dispersiei și abaterii standard revin forței de frecare și cele mai mici vitezei relative de alunecare *slip*.

În cazul repetării determinărilor se constată o precizie mulțumitoare în condițiile în care amplitudinile permit reducerea erorii de citire la documator.

8. CONCLUZII

Reluîndu-se unele date din lucrările [1], [5], se prezintă o clasificare-tabelă a cuplelor de frecare (funcție de tipul și de mărimea contactului) care înlesnește alegerea adecvată și standardizarea.

În problema disputată a regimului de frecare, în continuarea lucrării [6], se pune în evidență trecerea frecării fluide în frecare semifluidă, precum și faptul că, într-o anumită gamă de viteze, ordinea factorilor (preponderența) este : rugozitatea, sarcina și viscozitatea.

Se demonstrează aceeași ordine a factorilor și în cazul *stick-slip*-ului ; totodată se determină existența acestuia și în zona vitezelor mai mari, distribuția normală (Gauss-Laplace) a perioadelor de lipire și a vitezelor (*slip*), care au fost măsurate ; în toate cazurile, deși timpii de lipire sînt foarte reduși, nu au fost sesizate cazuri în care $\mu_s < \mu_c$.

S-a obținut o ecuație a mișcării, determinîndu-se limitele de aperiodicitate, ținîndu-se seama și de variația vitezei și a coeficientului de frecare într-un anumit interval (pentru un singur grad de libertate).

S-a pus în evidență complexitatea corelației : viteza de uzare *stick-slip* și faptul că prezența unui aditiv de onctuozitate poate amortiza *stick-slip*-ul, avînd repercusiuni favorabile atît asupra vitezei de uzare, cît și privind condițiile de prelucrare a suprafeței.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pavelescu, *Cu privire la aparatura experimentală destinată studiilor de frecare și uzură*, St. cerc. mec. apl., **22**, *4*, 1133–1161 (1966).
2. E. R. Braitwaite, *Solid Lubrifiants and Surface*, Pergamon Press, London, 1964, p. 1–29.
3. И. В. Крагельски, *Трение и износ*, Машгиз, Москва, 1962, p. 119–131.
4. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of solids*, Oxford at the Clarendon Press, p. I ; p. II, 1964.
5. D. Pavelescu, I. Iliuc, *Apparatus for determining the Anti-wear Properties of Oils and Materials*, WEAR, **8**, 133–135, 1965.
6. — *L'étude par des méthodes radioactives de l'influence de la viscosité sur l'épaisseur de la pélicule de lubrifiant*, Conf. Genève, 1958, A. 158. 130.
7. D. Pavelescu, *Main parameters of the wear of Plane Surfaces in alternating motion*, Modelling and Measuring Installation (I), Mécanique Appliquée, **12**, *2*, 485–495 (1967).
8. E. Sisiis, G. A. Shawki, *Measurement of Oil-film thickness in Gear Teeth*, Trans. ASME. I. B. Eng., 1960.
9. O. I. Macconochie, A. Cameron, *Measurement of Oil-film thickness in Gear Teeth*, Trans. ASME. D. J. B. Eng., march 1960.
10. D. Pavelescu, *Aspecte ale evoluției uzurii în frecarea-limită și semifluidă de alunecare în legătură cu caracterul statistic al fenomenului și al metodei de măsură*, autoreferatul disertației, București, 1967 p. 13.
11. E. Rabinowicz, *A Study of the Stick-Slip Process*, Friction and Wear, Elsevier Publish. Co., London, 1959, p. 149–164.
12. B. I. Hunt, I. Torbe, C. G. Spencer, *The Phase Plane Analysis of Sliding Motion*, WEAR, **8**, 455–465 (1965).
13. G. Nieman, K. Ehrlenspiel, *Relative influence of Various Factors in the Stick-Slip of Metals*, Lubric. Engin., **20**, *3*, 84–86 (1964).
14. A. S. Tobias, *Machine Tool Vibration*, Ed. Blackie, London, 1965, p. 7 și 40–44.
15. Д. М. Толстой, Р. Л. Каплан, *К вопросу о роли нормальных перемещений при внешнем трении. Новое в теории трения*, Изд. Наука, Москва, 1966, p. 42, 58.
16. G. W. Voorhes, *Investigation of Stick-Slip in simultated Slideways*, Lubric. Engin., **19**, 457–462 (1963).
17. S. Timoshenko, H. D. Young, *Advances Dynamics*, Mc. Graw-Hill Book Co., London, 1948, p. 49–68 și 136–142.
18. R. Schurnmann, *Friction and Wear*, WEAR, **5** (1962).

PERSISTENȚA STRATULUI SUPERFICIAL DE STANIU PE SUPRAFAȚA ACTIVĂ A LAGĂRELOR DE LA MOTOARE

de GH. VASILCA

Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

539.6

Se studiază persistența stratului de staniu depus pe straturi suport din materiale antifricțiune diferite ca natură și tipuri de structură, pe modele de laborator și pe lagărele naturale de la motoare. Se arată că persistența staniului depășește perioada convențională de rodaj și poate fi studiată prin analizarea structurii și a macrogeometriei.

Straturile superficiale metalice, folosite curent la lagăre, constau din elemente simple (staniu, plumb, indiu) etc. sau din aliaje ale acestora [1]. Grosimea lor nu depășește 5.10^{-3} mm și se depun pe cale electrolitică. Rolul lor este să imprime suprafețelor de frecare proprietatea de comportare favorabilă în regimurile de lubrifiere semifluidă, mai ales în perioada de rodaj. Stratul superficial constituie în același timp parametrul asupra căruia se poate acționa în tehnică în direcția influențării duratei perioadei de rodaj, alegînd în mod adecvat natura substanței stratului, grosimea acestuia și felul lubrifiantului. Datorită grosimii sale reduse, stratul superficial nu poate participa la preluarea eforturilor din lagăre și nici nu poate persista pe suprafața activă pe toată durata obișnuită de funcționare a acestora din cauza procesului curent de uzură. Se poate deci presupune că, după un timp oarecare de funcționare, stratul superficial dispare total sau parțial din suprafața de alunecare. Din această cauză, noua suprafață dezvelită și atrasă în procesul de frecare trebuie să posede de asemenea proprietăți antifricțiune. Stratul susținător al stratului superficial trebuie deci să fie de asemenea un material antefricțiune.

Se admite că stratul superficial acționează în faza de început a funcționării lagărului pe două căi mai importante [2]. Dacă stratul este

Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **13**, *1* (1968) (în limba germană).

dintr-un metal sau aliaj moale, sub acțiunea sarcinii din lagăr metalul stratului ancorat pe vîrfurile asperităților suprafeței se deformează plastic în limitele grosimii sale, refulînd în adînciturile de rugozitate adiacente. Lucrul mecanic de deformare plastică fiind mic, cantitatea de căldură generată prin acest proces va fi de asemenea redusă. În această deformare plastică, datorită forțelor de legătură intermetalice dintre particulele metalului din stratul superficial și ale metalului din stratul susținător, este antrenat și vîrful asperității acestui din urmă strat, suferind de asemenea o deformare remanentă de tasare și la încovoiere. Făcînd abstracție de cazurile izolate, nivelarea asperităților suprafeței stratului susținător nu se face deci în acest proces prin acțiuni de forfecare, adică prin rupere și detașarea de material. Procesul de nivelare a asperităților de prelucrare nefiind deci însoțit de crearea și de antrenarea în mișcare a particulelor de material care acționează abraziv, microgeometria suprafețelor nu se degradează. În al doilea rînd, stratul superficial poate acționa în acest proces prin curgere plastică sub influența concentrărilor locale de temperatură și presiune. Astfel, datorită concentrației termice ridicate provocate de frecarea de contact a unui vîrf de asperitate, metalul, în general ușor fuzibil, al stratului superficial se topește și, curgînd , acoperă asperitatea, anihilînd sursa generatoare de căldură. Căldura dezvoltată fiind consumată prin acest proces de topire a metalului, echilibrul termic se restabilește, iar metalul topit se solidifică deasupra locului accidentat.

Din funcția antigripantă menționată rezultă că metalul stratului superficial nu poate dispărea niciodată în mod complet de pe suprafața stratului susținător. Într-adevăr, participînd la procesul de frecare prin curgerea sa plastică și în stare topită, vor exista în permanență în suprafața susținătoare locuri accidentate sub formă de micro- sau macrocavități în care acest metal refulează. Acțiunea stratului superficial poate fi astfel de lungă durată, scăzînd în intensitate pe măsură ce suprafața activă a lagărului se uzează. Poate fi considerat însă cert faptul că acțiunea stratului poate rămîne încă destul de eficientă și după perioada convențională de rodaj.

Straturile superficiale pot influența de asemenea mărimea forței de frecare în lagăre, în funcție de duritatea stratului susținător [3]. Deoarece în regimul de funcționare semifluid o componentă a forței de frecare este cea dată de frecarea de contact, valoarea acesteia are expresia $F_c = A\tau$, în care A este suprafața reală de contact, iar τ este rezistența la forfecare a metalului celui mai moale. Presupunînd că în procesul de contact nu se produc decît deformații plastice, aria reală de contact este $A = P/\sigma_c$, în care P este sarcina normală ce apasă pe suprafețe, iar σ_c limita de curgere de asemenea a metalului cu duritate mai redusă.

Forța de frecare are deci o valoare redusă dacă au valori mici în același timp atît aria reală de contact, cît și rezistența τ, și variază din acest punct de vedere ambele în același sens. La corpurile solide omogene, dacă P crește, crește și A și, τ rămînînd același, forța de frecare crește de asemenea. Acționînd legea lui Amontons, forța de frecare depinde de sarcina normală și nu poate fi obținută o variație în sens invers a lui F cu P [3]. O variație neproporțională a lui F cu P poate fi obținută însă în cazul straturilor superficiale. Dacă stratul este moale și metalul susținător dur, la o creștere a lui P, A crește în aceeași proporție numai în limita gro-

simii stratului. Pelicula fiind subțire, deformația acesteia se transmite și la stratul susținător. Duritatea acestuia fiind însă mare, A nu mai crește în aceeași proporție ca în pelicula moale. Dacă grosimea peliculei este suficient de mare ca să nu fie străpunsă, va rezulta o suprafață reală de contact globală mai mică decît în cazul numai a metalului moale singur și mai mare decît numai în cazul metalului susținător mai dur. Rezistența la forfecare τ, rămînînd neschimbată și corespunzînd metalului peliculei moi, înseamnă că la o arie de contact globală mai mică rezultă și o suprafață de frecare mai redusă. Dacă stratul superficial dur este depus pe un strat susținător moale, cel dintîi nu poate urmări, în procesul de deformare plastică, stratul moale și, în consecință, crapă, devenind neeficient.

Din condiția ca stratul susținător să se deformeze mai puțin decît metalul stratului depus rezultă că aplicarea acestor feluri de straturi pe aliaje antifricțiune mai moi este fără efect asupra forței de frecare, deoarece aria reală de contact crește aproape în aceeași proporție cu forța normală. Important în ceea ce privește folosirea unor straturi superficiale de acest fel este și faptul că rezistența la forfecare a stratului lor de aderență cu metalul susținător trebuie să fie mai mare decît al metalului peliculei și de asemenea ca stratul de aderență să fie rezistent la oboseală mecanică și termică pentru cazurile de solicitări dinamice.

În legătură cu persistența pe suprafața susținătoare a metalului depus, mai trebuie menționat și procesul de difuziune, datorită căruia concentrația în suprafața activă a metalului depus poate fi modificată, mai ales diminuată [4]. Procesul de difuziune poate într-adevăr să aibă loc în punctele de pe suprafața activă cu concentrații temporare mari de căldură, provocate de frecare. La metalele care difuzează la temperaturi joase, ca, de exemplu indiul în cazul sistemului indiu-plumb, diminuarea prin difuziune a indiului din stratul superficial poate fi importantă. Pentru cazuri de acest fel au fost găsite și remedii, unul dintre acestea fiind depunerea unui strat intermediar între stratul superficial și suprafața susținătoare. Metalul stratului intermediar trebuie să fie însă inert față de metalul stratului superficial. În cazul sistemului indiu-plumb, stratul intermediar poate fi din nichel.

Alegerea metalului pentru stratul superficial trebuie deci să fie în concordanță atît cu proprietățile la alunecare, frecare și uzură ale acestuia, cerute de natura lagărului, cît și cu aspectele de persistență fizico-metalurgică ale acestuia în suprafața de frecare. La această alegere se vor avea de asemenea în vedere eventuale cerințe anticorosive chimice formulate față de stratul superficial.

Staniul, fiind unul dintre metalele albe moi și rezistente la uzura corosivă care apare în mod obișnuit în procesele de lubrificație, se întrebuințează deseori ca strat superficial în cazul lagărelor de la motoarele cu ardere internă.

În cazul studiului de față, depunerea stratului superficial de staniu s-a făcut în condițiile tehnologice aplicate la stanarea cuzineților motorului SR 211, adică pe cale electrolitică și chiar în băile de la uzină. Procesul de stanare cuprinde următoarele faze în ordinea succesivă : decapare în acid azotic, spălare în apă, zincare, spălare în apă, cuprire, spălare în apă, stanare, spălare în apă fierbinte și suflarea cu aer cald pentru uscare. În aceste condiții tehnologice se obține pe suprafața de lucru a cuzinetului

un strat de staniu în grosime de $2-5\cdot10^{-3}$ mm. Straturile intermediare de cupru şi zinc sînt mult mai subţiri şi s-au dovedit a fi necesare, primul din cauza slabei afinităţi a staniului faţă de aluminiu, iar al doilea pentru evitarea oxidării aluminiului decapat. Grosimea stratului de staniu s-a măsurat prin metoda picăturilor, bazată pe sistemul staniu-cupru ($Fe\ Cl_36H_2O$ ... 90 g/l, $CuSO_45H_2O$ ... 146 g/l, CH_3COOH (80%) ... ... 348 cm^3/l). După depunerea staniului, suprafaţa activă a lagărului nu a mai fost prelucrată.

Modelul experimental de lagăr pentru încercările de laborator a fost o bucşă cilindrică $\varnothing 36/\varnothing 48\times 25$ mm, a cărei suprafaţă activă a fost prelucrată prin strungire fină cu un avans de 0,03 mm. Au fost folosite asemenea bucşi confecţionate din două materiale antifricţiune cu structuri diferite. Într-un caz s-a ales sistemul AL-Sb (5,5 % Sb, 0,5% Mg, rest Al), avînd o matrice semidură complexă (soluţie solidă), iar ca incluziuni dure stibiul. Sistemul al doilea de structură a fost dat de aliajul standardizat Y-PbSn 10 (STAS 202—59), avînd o matrice eutectică şi incluziuni dure, formate în principal din compusul definit AlSb.

Fusul pentru modelul experimental din Al-Sb a fost din oţel OLC15 cementat, călit şi rectificat, cu duritatea HRC = 60 în suprafaţa de lucru, jocul relativ la rece în lagăr fiind $\Psi = 1{,}66^0/_{00}$, iar alungirea relativă a lagărului $\lambda = 0{,}7$. Uleiul folosit a fost tip 305 STAS, introdus în suprafaţa activă sub presiune ($p_u = 1$ kgf/cm^2) printr-un orificiu de $\varnothing 4$ mm situat la mijlocul bucşii, în zona descărcată şi pe direcţia sarcinii. Temperatura cuzinetului s-a măsurat în zona presiunilor maxime, la distanţa de $\sim$ 2 mm de suprafaţa activă. Fusul pentru modelul din Y-PbSnl0 a fost din oţelul aliat 13 CN35 (STAS 793—53), cu suprafaţa activă durificată prin procedeul de carbonitrurare la HRC = 60...62. Jocul relativ în lagăr la rece a fost $\Psi = 1{,}94^0/_{00}$, iar uleiul folosit tip 408 STAS, cu aciditatea sporită artificial prin adăugirea de 1% acid oleic.

Instalaţiile folosite pentru încercări au fost în cazul sistemului Al-Sb cu fusul în consolă [5], iar în cazul Y-PbSn 10 cu fusul sprijinit pe două lagăre auxiliare [6].

Studiul pe modele naturale s-a făcut chiar pe cuzineţi de la motorul SR211, avînd ca material antifricţiune, într-un caz, materialul tip Al-Sb, iar în al doilea aliajul Y-Pb Sn10. Cuzineţii au fost construiţi în acest caz dintr-o carcasă de oţel cu un strat în grosime de 0,25—0,35 mm, format dintr-un asemenea aliaj, care constituie stratul susţinător al stratului superficial de staniu.

Pentru studierea comportării stratului superficial de staniu au fost alese regimuri severe de lucru, diferenţiate pentru fiecare dintre modelele experimentale tip Al-Sb, tip Y-PbSn10 şi cuzineţi modele naturale [5], [6].

Modelul experimental tip Al-Sb. Condiţiile foarte grele de lucru au constat în acest caz dintr-un regim de funcţionare cu porniri şi opriri repetate sub sarcină, în care viteza relativă, trecînd prin valori zero, atît la pornire, cît şi în sensul celălalt la oprire, pune lagărul în regim semifluid şi de uzură de contact. Procesul de frecare într-un astfel de regim solicită la maxim, atît din punct de vedere mecanic, cît şi fizico-chimic, stratul de metal din suprafaţa de frecare, deci şi stratul superficial de staniu. Pentru ca presiunile de contact fus-cuzinet să acţioneze cît mai eficace,

pornirea după oprire nu s-a făcut imediat, ci după un timp oarecare, lăsînd timp ca aceste presiuni să expulzeze în măsură cît mai mare lubrifiantul dintre suprafețe. Între o pornire și oprire succesive, lagărul a lucrat în regim hidrodinamic. În ceea ce privește viteza, s-a lucrat cu $V = 2{,}1$ m/s (1130 rot/min), iar regimul de pornire-oprire a fost : 30 s oprire, 110 s funcționare în regim hidrodinamic. Regimul de sarcină a fost stabilit în trei scări ($p_m = 22{,}66$ și 78 kgf/cm^2), apreciate ca sarcini medii și ridicate pentru pornirea și funcționarea în continuare de la început a unui lagăr.

Pentru punerea în evidență a aspectului antigripant al stratului superficial de staniu s-a pornit cu regimul de sarcină indicat mai sus de la început, adică fără a aplica lagărului un rodaj prealabil.

Tabela 1

Nr. crt.	Modelul	p_m kgf/cm^2	Durata etapei ore	Nr. cicl. opr.— porn.	t_c °C	Durata în care se oprește fusul s	Uzura bucșei g·10^{-3}	Observ.
1	A_1 cu	22	4	104	46,2	7,2	1,4	
2	Sn	22	4	104	46	7,8	1,1	
3		22	4	104	46	8	1,4	
4		22	4	104	46	8,2	0,7	
5		22	4	104	46	10	0,6	
6		22	4	104	46,7	8,4	0,15	
7		22	4	104	42,5	10	0,35	
8		66	1	26	48,6	3,8	1,0	
9		66	3	78	52	5,2	1,29	
10		66	4	104	53	5,7	0,11	
11	A_2 cu	66	4	104	49,2	6,2	1,9	
12	Sn	66	4	104	48	6,6	0,6	
13	A_3 cu	78	0,5	13	50 *)	5,3	—	
14	Sn	78	1	26	—	5	2,2	
15		78	1	26	52	4,8	0,5	
16		78	1,5	39	53	5	0,9	
17		78	1,5	fără oprire	59	—	0,6	
18	A_4 fără Sn	66	43 min	19	44,5 **)	—	5,3	

*) Debit mare de lubrifiant.
**) Funcționare neregulată.

Comportarea stratului superficial în aceste condiții a fost urmărită prin mai multe etape de funcționare, prin fotografierea suprafeței active, prin pierderea de greutate (uzură) a bucșei lagărului, prin regimul termic, precum și prin durata în care fusul a trecut de la $V = 2{,}1$ m/s la $V = 0$ în perioada de oprire.

Pentru analize comparative a fost supus unui regim similar de lucru un cuzinet-bucșă identic, însă fără strat superficial de staniu. Rezultatele încercărilor sînt arătate în tabela 1, în care modelele A_1, A_2 și A_3 au suprafețele active prevăzute cu strat superficial de staniu, iar modelul A_4 nu posedă un astfel de strat.

În regimul de încercări la rodaj sub sarcină mai redusă ($p_m = 22$ kgf/cm^2, modelul A_1), suprafața activă în zona presiunilor maxime, după primele patru ore de funcționare, se prezintă ca în figura 1, petele lucioase indicînd zonele afectate în măsură mai mare de regimul de funcționare semifluid. După 24 de ore de funcționare, suprafața petelor lucioase a crescut (fig. 2), ceea ce arată că în această perioadă a existat o uzură a suprafeței chiar în condițiile cu strat superficial de staniu. În figura 3 se poate vedea aceeași suprafață după 28 de ore de funcționare în regimul $p_m = 22$ kgf/cm^2, urmat de o funcționare timp de o oră cu sarcină sporită la $p_m = 66$ kgf/cm^2. După încă 7 ore de funcționare la $p_m = 66$ kgf/cm^2, suprafața cu pete lucioase a devenit și mai mare (fig. 4). Este de remarcat că, în toată această perioadă de încercare de 28 + 8 ore în regim intermitent, lagărul a lucrat în condiții termice de echilibru, cu temperatura $t_c = 46 \ldots 47$°C. Suprafața activă nu are urme de gripare, iar suprafața de lucru a fusului (fig. 5*b*) este normală. În figura 5 *a* se vede suprafața de prelucrare a fusului.

La modelul A_2 încercările au început dintr-o dată cu sarcina de $p_m = 66$ kgf/cm^2. Între suprafața de lucru marcată de petele lucioase după 4 ore de funcționare (fig. 6) și aceea după 8 ore apare doar o ușoară diferență cantitativă. Aceasta arată că sub sarcină sporită rodajul suprafețelor se face în timp mai scurt. Deși în acest caz lagărul are un joc relativ mai mare ($\Psi = 2{,}77^0/_{00}$) și a lucrat în consecință cu o grosime minimă h_2 a filmului de lubrifiant mai mică, totuși nu a gripat, stratul superficial de staniu împiedicînd producerea unui astfel de proces de uzură în dezechilibru. În figura 8 *b* se poate vedea suprafața de lucru la fus, de asemenea negripată.

Repetînd încercarea cu modelul A_3 sub o sarcină și mai mare, $p_m = 78$ kgf/cm^2, și urmărind gradul de formare a suprafeței active după un timp mai scurt (scurtarea perioadei de rodaj), s-a constatat că după o perioadă de funcționare de 30 min, suprafața de lucru se formează aproape complet (fig. 9). După alte 3,5 ore de funcționare, gradul de formare a suprafeței active sporește foarte puțin (fig. 10). Și în aceste condiții foarte grele, lagărul a lucrat într-un perfect echilibru termic, iar suprafața de lucru nu prezintă urme de gripare.

Punînd modelul A_4, fără strat superficial de staniu, în condițiile de funcționare ale modelului A_3, la $p_m = 66$ kgf/cm^2 de asemenea dintr-o dată fără rodaj, el nu a putut suporta acest regim. Din primele minute de funcționare s-a constatat că merge greu, ca în minutul 26, după o oprire, pornirea sub sarcină să nu mai fie posibilă. Repetînd încercarea prin descărcare la pornire, aceasta a sistat definitiv după o durată totală de 43 de minute, deoarece motorul electric de antrenare (7 kW) a devenit prea slab pentru a învinge momentul de frecare existent la pornirea din repaus a lagărului sub sarcină. Temperatura cuzinetului nu a depășit însă valoarea $t_c \cong 45$°C.

În figura 11 se poate vedea suprafața activă a cuzinetului A_4 în zona de presiuni maxime după 43 de minute de funcționare, într-o poziție care să poată permite o comparație cu figura 7. În figura 12 se prezintă aceeași porțiune de suprafață pe toată lățimea cuzinetului. Se constată astfel că, în condițiile încercate, suprafața materialului Al-Sb gripează

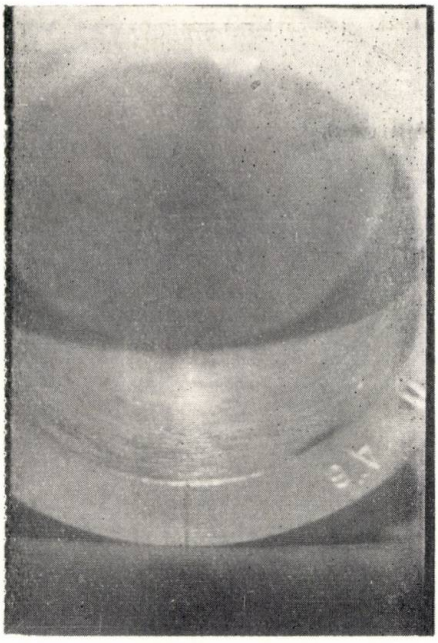


Fig. 1. — Modelul A_1, suprafața activă după 104 cicluri la $p_m = 22$ kgf/cm² (2 :1).

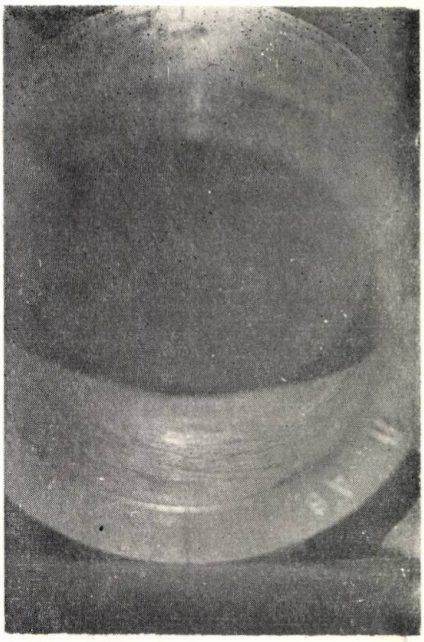


Fig. 2. — Modelul A_1, suprafața activă după 624 de cicluri la $p_m = 22$ kgf/cm² (2 :1).

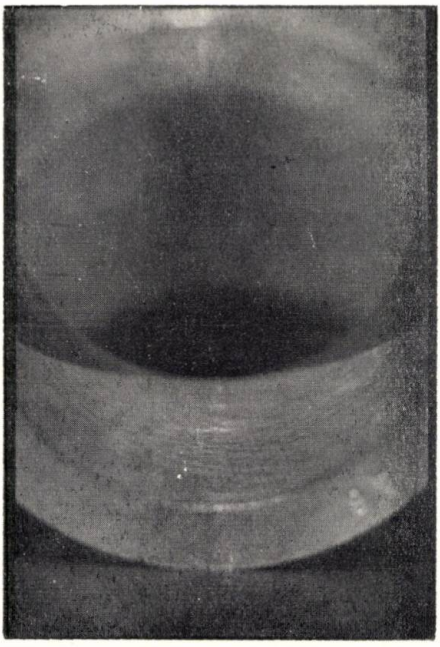


Fig. 3. — Modelul A_1, suprafața activă după 728 de cicluri la $p_m = 22$ kgf/cm² (2 :1).

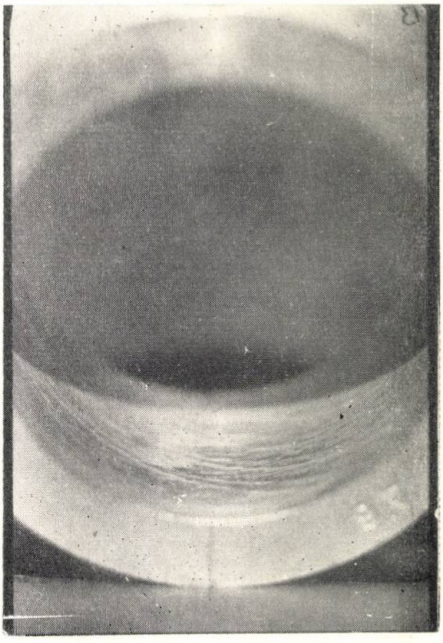


Fig. 4. — Modelul A_1, suprafața activă după 728 de cicluri la $p_m = 22$ kgf/cm² și 208 cicluri la $p_m = 66$ kgf/cm² (2 :1).

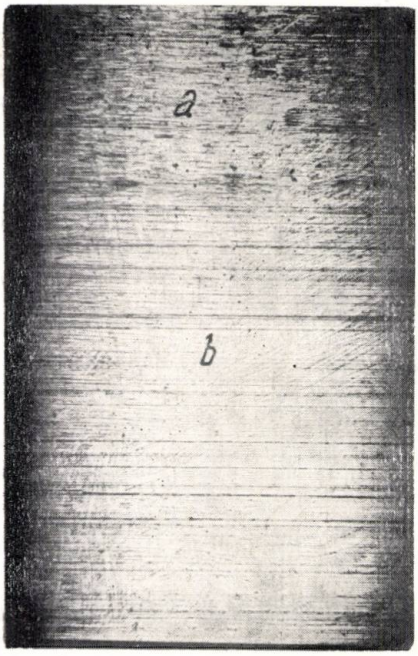


Fig. 5. — Modelul A_1, suprafața fusului : a — de prelucrare ; b — care a lucrat în cazul figurii 4 (25 :1).

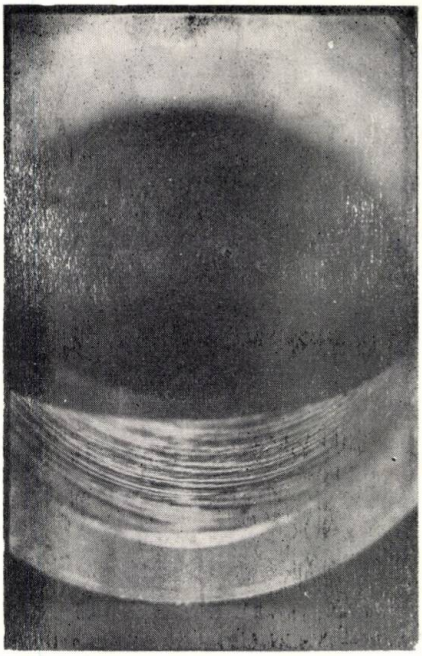


Fig. 6. — Modelul A_2, suprafața activă după 104 cicluri la $p_m = 66$ kgf/cm^2 (2 :1).

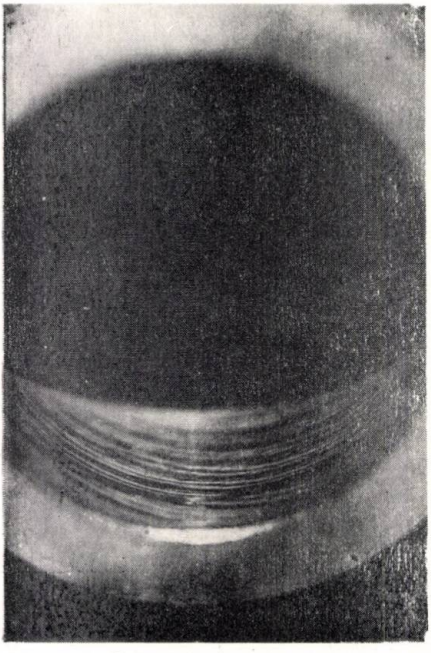


Fig. 7. — Modelul A_2 suprafața activă după 208 cicluri la $p_m = 66$ kgf/cm^2 (2 :1).

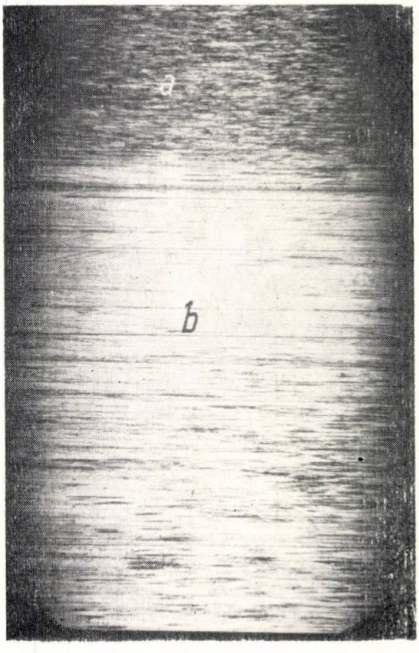


Fig. 8. — Modelul A_2, suprafața fusului : a — de prelucrare ; b — care a lucrat în cazul figurii 7 (25 :1).

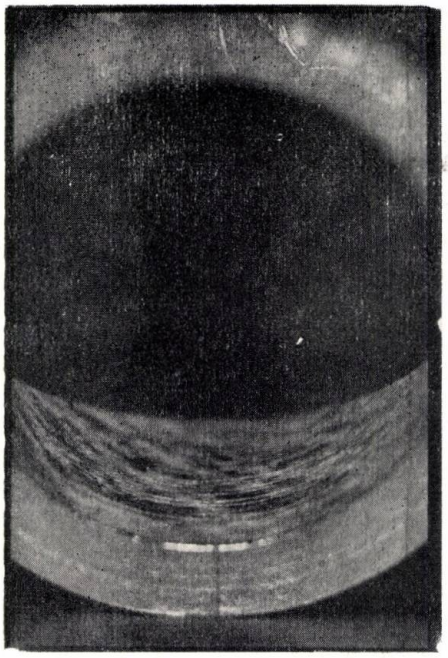


Fig. 9. — Modelul A_3, suprafața activă după 13 cicluri la $p_m = 78$ kgf/cm² (2 :1).

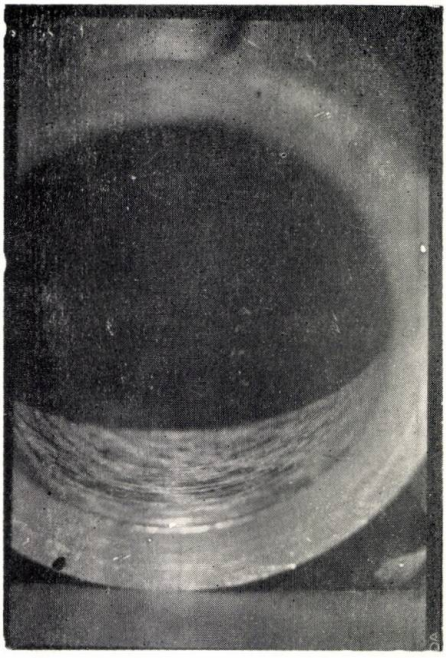


Fig. 10. — Modelul A_3, suprafața activă după 104 cicluri la $p_m = 78$ kgf/cm² (2 :1).

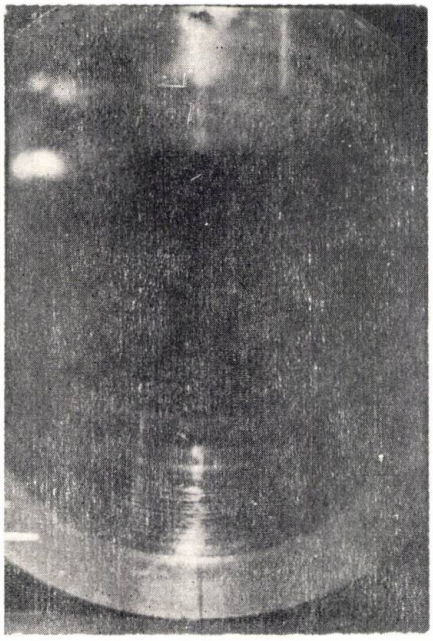


Fig. 11. — Modelul A_4, suprafața activă după 19 cicluri la $p_m = 66$ kgf/cm² (2 :1).

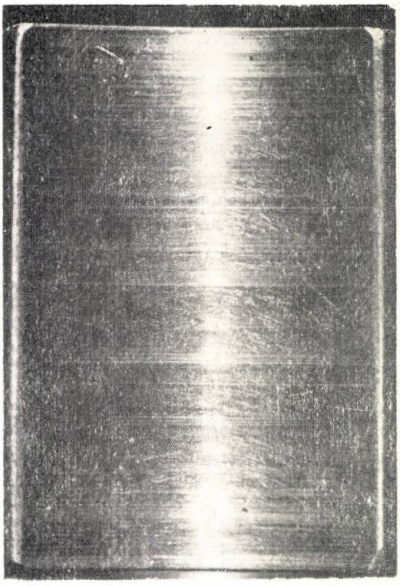


Fig. 12. — Modelul A_4, suprafața activă în cazul figurii 11 pe toată lățimea cuzinetului (3 :1).

dacă este lipsită de stratul superficial de staniu, demonstrîndu-se marea eficacitate a acestui strat în regimuri de funcţionare semifluide severe.

Procesul de gripare la modelul A_4 nu a luat, în cazul acestor încercări, o extindere şi o intensitate mai mare din cauza puterii prea reduse a

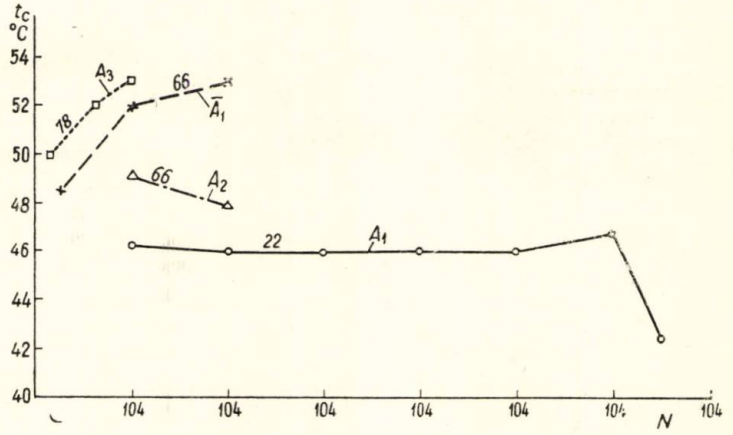


Fig. 13. — Variaţia temperaturii cuzinetului la diferitele etape de funcţionare : $\bar{A}_1$ — modelul A_1 la $p_m = 66$ kgf/cm^2 ; N — numărul de cicluri.

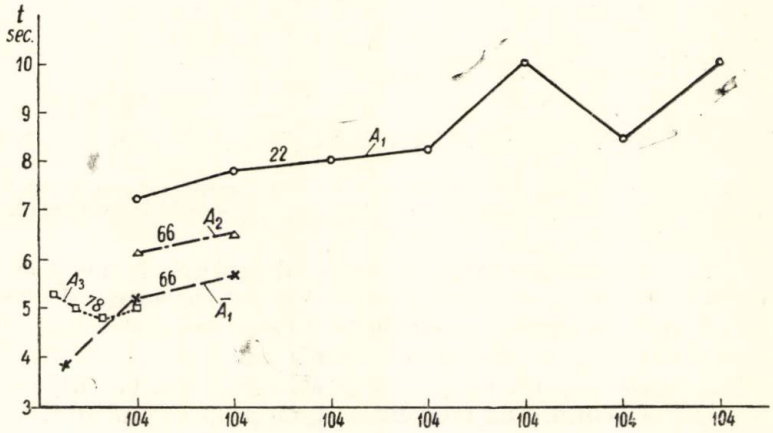


Fig. 14. — Variaţia duratei de oprire a fusului sub sarcină la diferitele etape de lucru : $\bar{A}_1$ — modelul A_1 la $p_m = 66$ kgf/cm^2 ; t — durata de oprire ; N — numărul de cicluri.

motorului de antrenare. Din aceeaşi cauză nu au apărut urme de gripare mai pronunţate nici pe suprafaţa activă a fusului. Momentul de frecare mult sporit arată în continuare că stratul superficial de staniu are de asemenea ca efect şi o reducere importantă a coeficientului de frecare.

Din tabela 1 şi figura 13 se mai poate vedea că temperatura de regim a lagărului t_c creşte cu sarcina, precum şi faptul că durata de atingere a regimului de repaus a fusului la oprire sub sarcină scade la sarcini mai mari (fig. 14). Cu creşterea duratei de funcţionare, ceea ce echivalează cu progresarea rodajului, durata de oprire sub sarcină creşte însă, toate aceste

aspecte fiind în deplină concordanță cu variația cu sarcina și cu evoluția formării suprafeței active, a ponderii frecării de contact în lubrificația semifluidă. În cazul modelului A_3, evoluția descrescătoare la început a duratei de oprire sub sarcină se datorește duratelor scurte de funcționare

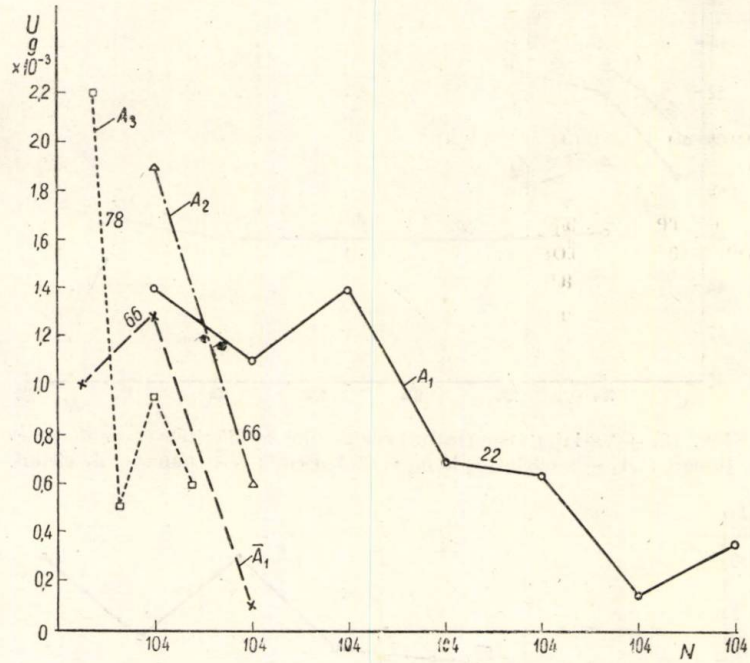


Fig. 15. — Variația uzurii cuzinetului la diferitele etape de funcționare : $\bar{A}_1$ — modelul A_1 la $p_m = 66$ kgf/cm²; U — uzura, N — numărul de cicluri.

a etapelor de la numerele curente 13 și 14 din tabela 1. De asemenea se confirmă că uzura este cantitativ mai mare în perioada de început a funcționării (fig. 15). Aspectul producerii gripajului în cazul modelului A_4 fără strat de staniu reiese și din pierderea mult sporită în greutate ($5{,}3.10^{-3}$), produsă într-un timp comparativ mai scurt. Curbele $\bar{A}_1$ din figurile 13, 14 și 15 corespund modelului A_1 cu $p_m = 66$ kgf/cm².

Mai trebuie de asemenea menționat că în aceste încercări nu au putut fi constatate desprinderi, exfolieri, fisurări ale stratului superficial de staniu de pe stratul suport. Aceasta arată nu numai că depunerea staniului a fost tehnologic corectă, ci și faptul că acest metal conferă stratului superficial în regim semifluid o tensiune la forfecare inferioară ca valoare rezistenței la forfecare a stratului de aderență.

Aceste încercări arată deci că stratul superficial de staniu depus pe matricea semidură de aluminiu redă în mod clar cele două proprietăți de bază ale acestui atrat, și anume antigripantă chiar sub sarcini mari, precum și frecarea redusă în procesul de rodaj.

Modelul experimental tip Y—PbSn10. Urmărirea comportării stratului superficial de staniu s-a făcut în acest caz în condiții schimbate,

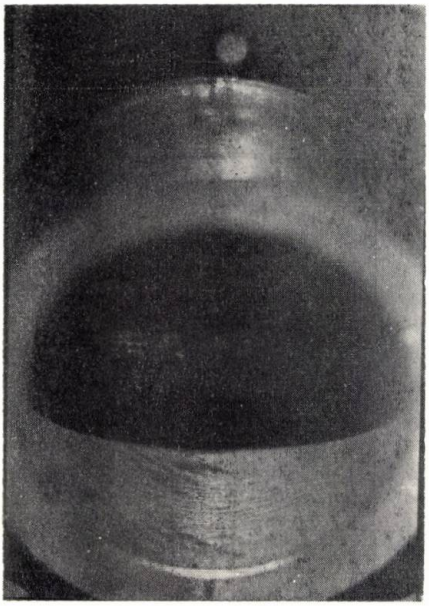


Fig. 16. — Modelul Y-PbSn10, suprafaţa activă după rodaj (2 :1).

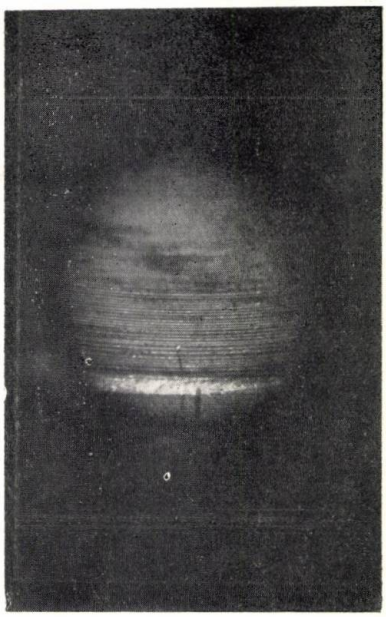


Fig. 17. — Microgeometria suprafeţei active în cazul figurii 16 (6,4 :1).

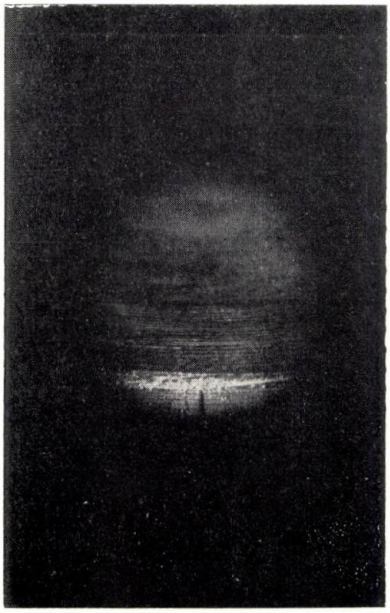


Fig. 18. — Microgeometria din figura 17 după 15 ore de lucru (6,4 :1).

Fig. 19. — Modelul Y-PbSn10, microgeometria suprafeţei active, zona către mijloc după 30 ore de funcţionare (6,4 :1).

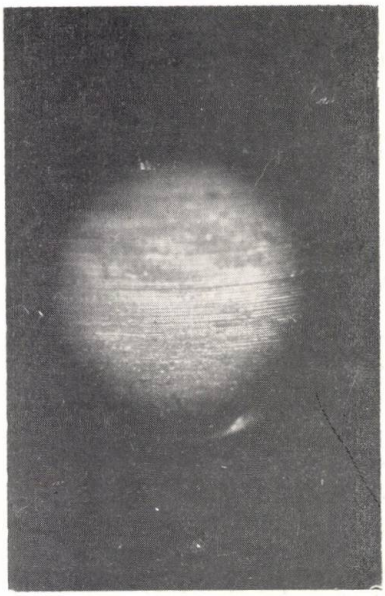


Fig. 20. — Modelul Y-PbSn10, microgeometria suprafeței active, zona de mijloc după 60 de ore de funcționare (6,4 :1).

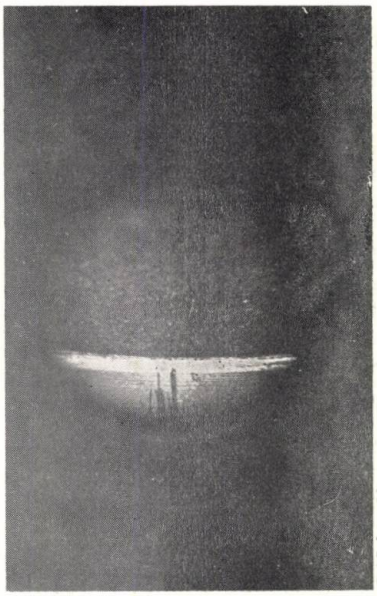


Fig. 21. — Microgeometria din figura 17 după 90 ore de lucru (6,4 :1).

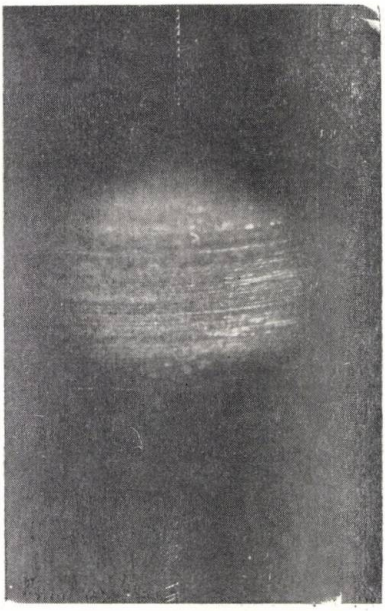


Fig. 22. — Microgeometria din figura 20 după încă 30 de ore de funcționare (6,4 :1).

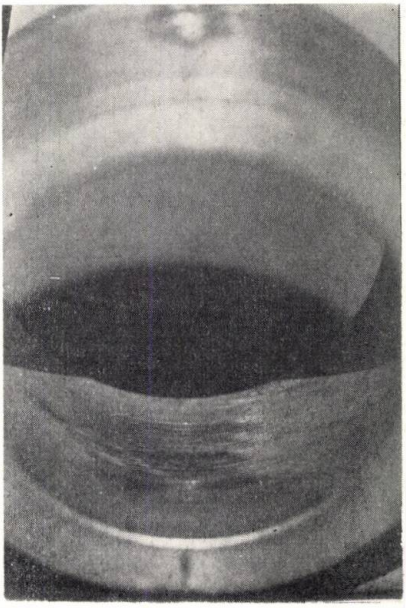


Fig. 23. — Modelul Y-PbSn10, suprafața activă după 90 de ore de funcționare (2 :1).

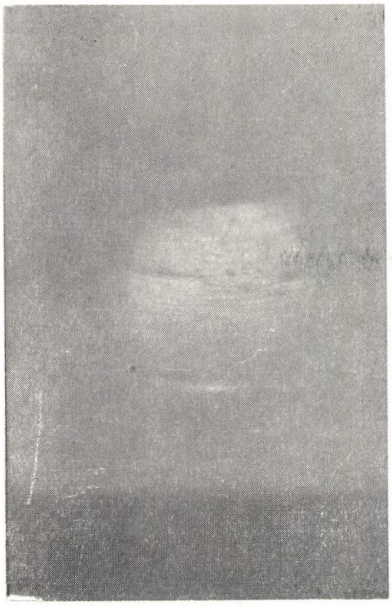


Fig. 24. — Microgeometria din figura 20 după încă 60 de ore de lucru (6,4 : 1).

Fig. 25. — Microgeometria din figura 17 după un total de 135 de ore de funcţionare (6,4 : 1).

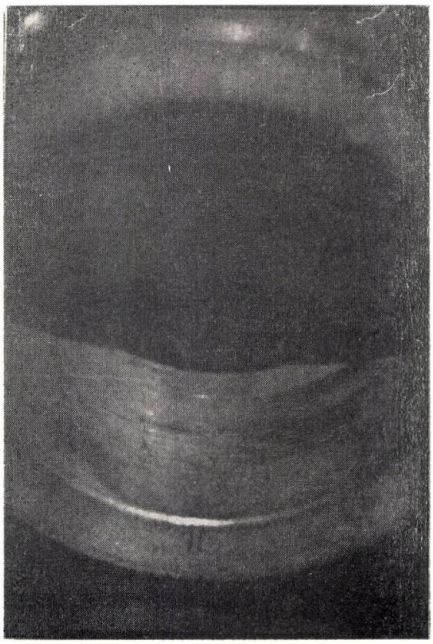


Fig. 26. — Ansamblul suprafeţei active din figura 25 (2 : 1).

constînd dintr-o funcționare continuă în regim hidrodinamic precedată de un rodaj prealabil al lagărului și lubrifierea cu ulei avînd aciditatea sporită.

Rodajul s-a făcut cu ulei curat, la aceeași viteză $V = 2{,}6$ m/s, în condiții de sporire treptată a sarcinii pînă la $p_m = 33$ kgf/cm^2. Durata rodajului a fost în total de 9 ore, temperatura maximă a cuzinetului nedepășind valoarea $t_c = 55°C$.

Pentru funcționarea continuă normală, condițiile au fost următoarele :

— sarcina (statică) $p_m = 22$ kgf/cm^2 = const,
— viteza relativă $V = 2{,}6$ m/s = const,
— mediul lubrifiant ulei 408 STAS + 1% acid oleic,
— temperatura lubrifiantului în baia de ulei $t_b = 28°C$ = const.

În aceste condiții, cuplul de frecare a fost pus să funcționeze în total 135 de ore, în etape de cîte 15 ore fiecare. După fiecare etapă, cuzinetul experimental a fost demontat și cîntărit, determinîndu-se pierderea de greutate, iar suprafața activă a fost examinată și fotografiată. În acest fel, de la etapă la etapă a fost analizat gradul de dispariție a stratului superficial de staniu din suprafața activă. Evident că în pierderea de greutate determinată pe această cale a fost inclusă și uzura stratului susținător al stratului superficial, ceea ce face ca în aceste determinări aspectul cantitativ al persistenței stratului de staniu să nu aibă un caracter absolut riguros. Prin studiul direct al suprafeței active și fixarea stării acesteia prin imagini fotografice, urmărirea evoluției uzurii stratului de staniu conduce la rezultate cantitative mai exacte, fără ca aceste rezultate să poată constitui valori certe.

Tabela 2

Modelul experimental	Nr. etapei	p_m kgf/cm^2	Durata etapei ore	V m/s	t_c °C	Uzura cuzinetului g · 10^{-3}
	1				49,5	20,1
	2				51	20,9
	3				50	18,9
Y—PbSn10	4				50,5	17,4
cu strat su-	5				50	18
perficial de	6	22	15	2,6	51	4,9 *)
staniu	7				52	11,1
	8				51	7,9
	9				50	5,7

Total ore de funcționare = 135 ; uzura = 123,9 · 10^{-3} g.

*) Valoare neconcludentă.

În tabela 2 sînt prezentate variațiile în greutate ale cuzinetului, corespunzătoare fiecăreia din cele nouă etape de cîte 15 ore de funcționare.

În figurile 16—26 se prezintă imaginile fotografice ale suprafețelor active ale cuzineților, în zona de presiuni maxime după unele din cele nouă etape de încercare.

Astfel, în figura 16 se arată suprafața în zona de presiuni maxime și pe toată lățimea cuzinetului după perioada de rodaj, iar în figura 17

porțiunea din fața frontală a aceleiași suprafețe. Petele de culoare mai închisă din fotografie reprezintă zone lucioase din suprafață, adică cele afectate în măsură mai accentuată ca acțiune metal fus-metal cuzinet în procesul de rodaj. Se poate observa, mai ales în figura 17, că striurile provenite din prelucrare nu au dispărut complet de pe suprafață. Dacă se admite drept criteriu de aprecierea sfîrșitului rodajului dispariția completă din suprafața activă a microgeometriei de prelucrare [2], rodajul efectuat în cazul de față trebuie considerat incomplet. Aspectul acesta a fost admis de altfel în mod intenționat pentru a putea urmări comportarea stratului superficial de staniu mai ales în condiții grele de lucru. Rodaj incomplet înseamnă în cazul de față o suprafață mai mare a cuzinetului acoperită cu staniu.

În figura 18 se prezintă porțiunea de suprafață din figura 17 după prima etapă de 15 ore de funcționare în condițiile arătate mai sus. Se poate observa că striurile de prelucrare au început să dispară, acest proces fiind mai accentuat la capetele cuzinetului, posibil și ca efect al presiunilor pe muchii[2]. Către mijlocul suprafeței active, în direcția axială, durata de funcționare de 15 ore a afectat numai foarte puțin striurile de prelucrare.

După 30 de ore de lucru, suprafața activă are aspectul din figura 19, reprezentînd o porțiune mai aproape de mijlocul acesteia. Se poate constata că striurile de prelucrare de la marginea frontală au dispărut (partea de jos a figurii) și că această zonă progresează către mijlocul cuzinetului.

În figura 20 se prezintă suprafața activă în zona de mijloc după 60 de ore de lucru, putîndu-se constata că în această porțiune striurile de prelucrare persistă încă, deși parțial afectate, dar extinderea acesteia este mai redusă.

În figurile 21, 22 și 23 se arată suprafața activă a cuzinetului în aceeași porțiune a presiunilor maxime după o perioadă de funcționare de 90 de ore. Se poate vedea că striurile din zona de mijloc a suprafeței au devenit mai șterse (figura 22), în porțiunile cu vîrful ondulațiilor suprafeței proeminente striurile de prelucrare dispărînd complet. La ambele capete frontale, prezența microgeometriei de prelucrare nu mai poate fi identificată (fig. 21). În figura 23 se poate vedea suprafața activă pe toată lățimea cuzinetului, cu punerea la punct pe zona de mijloc cu striurile mai șterse.

După 135 de ore de funcționare, suprafața activă a cuzinetului este arătată în figurile 24, 25 și 26. Zona de mijloc a devenit foarte îngustă (fig. 24), iar în interiorul ei apar porțiuni în care striurile de prelucrare au dispărut de asemenea în mod complet. Aceasta înseamnă că microgeometria suprafeței nu mai poate evolua și se poate considera că rodajul abia acum a luat forma definitivă. La ambele capete striurile sînt șterse complet (în figura 25 se prezintă marginea frontală). Suprafața activă în această stare, pe toată lățimea cuzinetului, se poate vedea în figura 26.

Din examinarea rezultatelor încercărilor, obținute pe cale gravimetrică, cu privire la persistența stratului superficial de staniu depus pe aliajul Y-PbSn10, se poate constata o evoluție în sens descrescător a uzurii cuzinetului cu durata de funcționare a cuplului (fig. 27). Acest aspect se prezintă normal, însă durata de 135 de ore, în care nu s-a ajuns încă la stabilizarea mai completă a uzurii, poate fi considerată lungă. Faptul poate fi atribuit la două cauze mai importante. Prima poate fi

considerată aceea a condițiilor de sarcină și de viteză în care s-a efectuat încercarea. Sarcina ($p_m = 22$ kgf/cm^2) relativ mică și viteza ($V = 2{,}6$ m/s) suficient de ridicată au avut ca urmare crearea în lagăr a unei excentricități relative reduse și, ca urmare, a unei grosimi minime a peliculei de lubrifiant de ordinul de mărime $h_2 = 13{,}5.10^{-3}$ mm [5], deci destul de

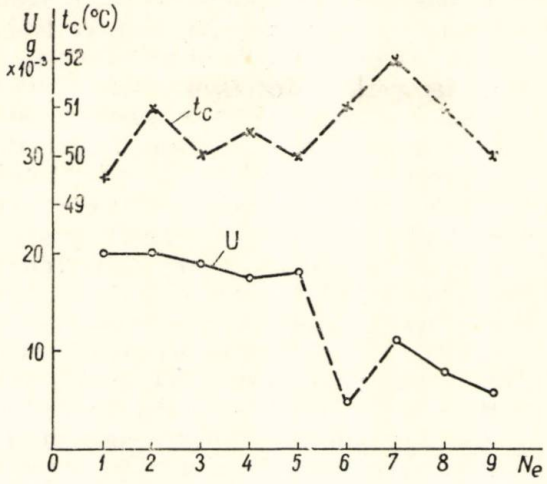


Fig. 27. — Modelul Y-PbSn10, variația uzurii și a temperaturii cuzinetului, corespunzătoare diferitelor etape de lucru : U — uzură ; Ne — numărul etapei.

mare. Suprafețele de frecare fiind mult distanțate una de alta în timpul funcționării, uzura prin abraziune și de adeziune au fost reduse. A doua cauză a duratei lungi de stabilizare a uzurii poate fi considerată rezistența mare la acțiunea acidului oleic a staniului. La aliajul Y-PbSn10, elementul corodat mai puternic de acidul oleic din lubrifiant fiind plumbul [7], stratul superficial de staniu, atît timp cît acoperă suprafața activă a cuzinetului, constituie un strat protector împotriva acestei acțiuni corosive. Dacă uzura a progresat relativ încet în aceste încercări, înseamnă că persistența stratului superficial de staniu pe suprafața de alunecare a cuzinetului a fost suficient de bună. Faptul că după 135 de ore de lucru uzura gravimetrică absolută a cuzinetului pe etapă, s-a prezentat mai redusă decît la începutul încercării nu trebuie interpretat ca fiind în contradicție cu evoluția stării de acoperire cu staniu a suprafeței aliajului corodabil. La orice cuplu de frecare, uzura suprafețelor crește la început mai mult, deoarece predomină uzura de contact datorită vîrfurilor asperităților. Rezistența acestor vîrfuri este totodată slabă și la coroziune, din cauza suprafeței lor mare expusă acțiunii chimice. În cazul de față predomină însă uzura mecanică, deoarece stratul de staniu constituie o protecție. Pe măsură ce striurile provenite din prelucrare se șterg, uzura mecanică scade. Scăderea acesteia este cu atît mai mare, cu cît grosimea minimă a peliculei de lubrifiant este mai mare și, în consecință, în cazul de față

către sfîrşitul perioadei de încercare predomină aspectul chimic în procesul de uzură. Procesul de coroziune fiind funcţie de temperatură, pe măsură ce asperităţile se nivelează vîrfurile de presiuni scad şi concomitent concentraţiile locale de temperatură. Ca urmare, acţiunea chimică de uzură se reduce pe măsură ce rodajul progresează, ceea ce explică evoluţia cantitativă a uzurii în cazul încercărilor de faţă.

Din figura 27 se poate constata de asemenea o evoluţie cu caracter stabilizator a temperaturii t_c a cuzinetului, ceea ce trebuie atribuit eficienţei stratului superficial de staniu, mai ales în perioada de început a funcţionării. Saltul de temperatură corespunzător etapei 7 nu poate avea decît cauze accidentale externe sau chiar interne, ca, de exemplu, impurităţi antrenate între suprafeţe prin intermediul lubrifiantului sau, cu totul neprevăzut, o concentraţie locală de frecare intensă. De altfel nici uzura din etapa 6 nu se prezintă concludentă ca valoare.

Urmărirea persistenţei stratului superficial de staniu prin metoda studiului evoluţiei microgeometriei suprafeţei active conduce de asemenea la concluzii satisfăcătoare. Astfel se poate considera că, atîta timp cît în suprafaţa activă se menţin striuri rezultate din prelucrare, legată de acestea este şi prezenţa staniului. Pe măsură ce aceste striuri dispar, prezenţa staniului în suprafaţă nu mai poate fi stabilită în mod cert pe calea observării directe. Evoluţia microgeometriei suprafeţelor de frecare în procesul de modificare a rugozităţii iniţiale de prelucrare poate oferi astfel o imagine a persistenţei stratului superficial de staniu pe suprafaţa cuzinetului. În cazul de faţă, această metodă este facilitată şi prin modul specific în care se prezintă suprafaţa aliajului Y-PbSn 10 sub acţiunea corosivă a acidului oleic din lubrifiant. Porţiunile de suprafaţă corodată pot fi uşor deosebite de acelea rămase încă acoperite de striuri de la prelucrare. O imagine mulţumitoare în această privinţă prezintă, de exemplu, figurile 17 şi 20, în care trecerea de la zona corodată la zona cu striuri de prelucrare apare bine conturată. Striurile (figura 17) şi, o dată cu acestea, prezenţa staniului în suprafaţă dispar treptat, în proporţie cu durata de funcţionare a cuplului, aspect vizibil de la o etapă de lucru la cea următoare. Mai poate fi remarcat că, în cazul aliajului de suport Y-PbSn10, ca un efect al coroziunii acestuia de către acidul oleic apare în suprafaţă constituentul SnSb sub formă de pete mici albe (figura 21), care se constată a fi cristalitele cubice ale acestei faze. Aceasta constituie încă un indiciu că în suprafaţa corodată stratul superficial de staniu a devenit discontinu sau chiar a dispărut.

Cuzineţi modele naturale. Cercetările de laborator asupra comportării stratului superficial de staniu depus pe aliajele antifricţiune-suport Al-Sb şi Y-PbSn10 au putut fi efectuate numai în anumite condiţii de funcţionare. Pentru încercări în regimuri de lucru mai complexe au fost alese condiţii noi, care se referă la forma modelului experimental, la încărcare, viteză, la parametrii termici, alimentarea cu lubrifiant etc. În acest scop au fost luate ca modele cuzineţi de motoare, puşi să funcţioneze chiar pe motorul respectiv, realizîndu-se astfel o încercare pe model natural.

Cuzineţii, atît pentru biele, cît şi pentru lagărele de sprijin (paliere), au fost sub formă de semicuzineţi din tablă de oţel cu strat din aliajul Al-Sb în grosime de 0,25—0,35 mm. Cuzinetul palier mijloc a avut stratul

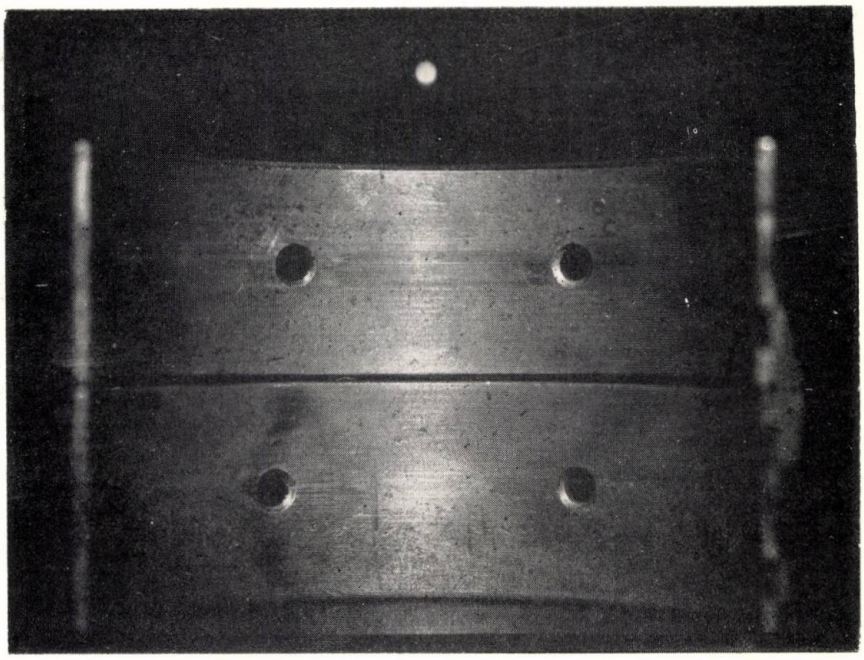


Fig. 28. — Cuzineţii bielei 4 cu Al-Sb după 71 de ore rodaj plus 106 ore de funcţionare (1,2 : 1).

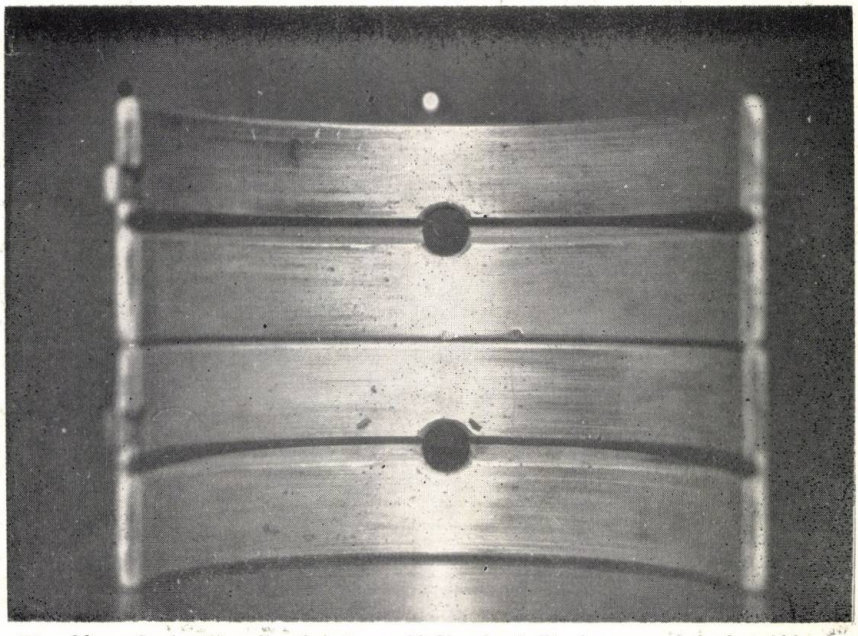


Fig. 29. — Cuzineţii palierului 1 cu Al-Sb, după 71 de ore rodaj plus 106 ore de funcţionare (1 : 1).

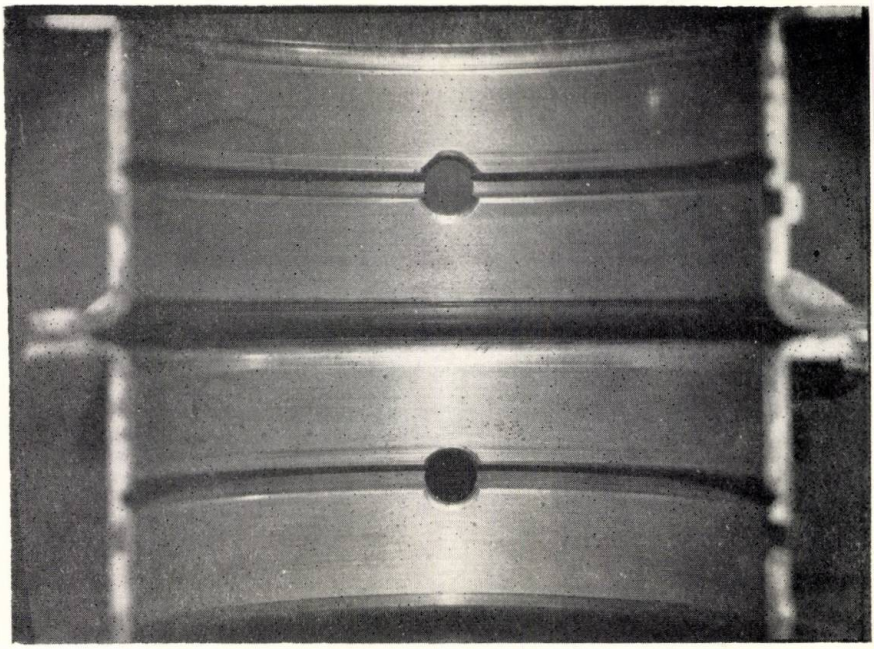


Fig. 30. — Cuzineţii palierului mijloc cu Y-PbSn10 după 71 de ore rodaj plus 106 ore de funcţionare (1 : 1).

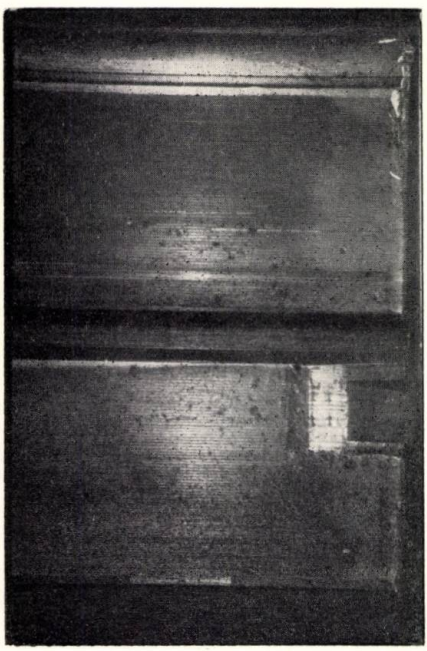


Fig. 31. — Zonă cu microgeometria de lucru nemodificată în cazul suprafeţei active din figura 30 (2 : 1).

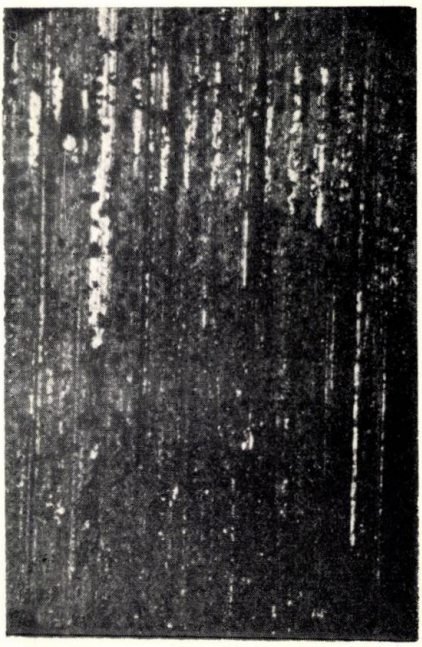


Fig. 32. — Zonă de frontieră între microgeometria de prelucrare şi cea specifică în cazul suprafeţei active din figura 29 (25: 1).

antifricțiune din Y-PbSn10, aplicat prin turnare centrifugală. Stratul superficial de staniu s-a aplicat pe toți cuzineții, în grosime de $3-5.10^{-3}$mm. Procesul de fabricație a cuzineților și a depunerii stratului de staniu a fost cel de serie. Motorul la care au fost montați acești cuzineți a fost cu 8 cilindri în V, tip SR211, avînd capacitatea cilindrică 5,03 l, raportul de compresie 6,7 și fabricație de serie. Presiunea specifică maximă în lagăre a fost $p_m \cong 250$ kg/cm^2, iar viteza maximă de alunecare $V \cong 16$ m/s. Uleiul folosit a fost tip 408, neaditivat.

Regimul de încercare a constat dintr-un rodaj prelungit, efectuat timp de 71 de ore după o anumită schemă [6], urmat de o funcționare timp de 106 ore la $n = 3\,600$ rot/min, $N = 72$ CP, cu cîte o oprire medie de 10 min după un interval de lucru de două ore. Încercările au fost efectuate la banc în cadrul uzinei. Lagărele au fost alimentate în mod obișnuit cu lubrifiant din baia de ulei, avînd temperatura $t_b = 90°$ C = const. Arborele cotit al motorului a fost construit din fontă nodulară.

Comportarea stratului superficial de staniu în aceste condiții de lucru a fost studiată prin examinarea suprafețelor active ale cuzineților. În figurile 28—32 sînt arătate suprafețele de lucru de la unii dintre cuzineții de bielă și paliere cu strat antifricțiune susținător din Al-Sb, precum și perechea de cuzineți palier mijloc cu stratul susținător din Y-PbSn10. În figura 28, semicuzinetul de la piciorul bielei, mai solicitat, este așezat peste cel de la capac, iar în figurile 29 și 30 semicuzineții cei mai solicitați (de la capac) sînt așezați peste perechile lor de la bloc.

În ceea ce privește microgeometria la lagărele acestui motor, se poate considera că la semicuzineții de la picioarele bielelor striurile provenite de la prelucrare sînt dispărute la aproape toți dintre ei. Suprafețele active ale acestora prezintă deci o microgeometrie specifică. După cum se poate constata din figură, perechea de materiale Al-Sb cu fusul din fontă nodulară, prin intermediul stratului superficial de staniu, dau o microgeometrie specifică fină, favorabilă lubrifierii. La semicuzineții din capacele lagărelor de bielă se pot constata încă, pe porțiuni relativ mari, striuri de prelucrare, aspect în concordanță cu încărcarea mai redusă a acestora.

Constatări similare pot fi făcute și la cuzineții lagărelor paliere cu Al-Sb. Astfel, striurile de prelucrare sînt complet dispărute la semicuzineții mai solicitați de la capace, prezența acestora în suprafața activă la semicuzineții mai puțin încărcați (de la bloc) fiind suficient de bine vizibilă. Microgeometria suprafețelor în care striurile de prelucrare au dispărut a devenit specifică și este la fel de fină ca și la lagărele de bielă.

În cazul lagărului palier mijloc (fig. 30) perechea de materiale este Y-PbSn10 —arbore cotit feros. La acest aliaj matricea structurii [2] are microduritatea $\sim$ 20 kgf/mm^2, față de $\sim$ 50kgf/mm^2 a matricei aliajului Al-Sb. Ca urmare, sub acțiunea aceleiași sarcini, microdeformarea plastică a asperităților la aliajul Y-PbSn10 este mai pronunțată. Dacă filtrarea lubrifiantului nu este însă corespunzătoare, impuritățile dure vehiculate prin lagăre pot provoca o microgeometrie mai rugoasă. În cazul de față, efectele suprapuse, datorite tasării asperităților și procesului de abraziune, au condus la diferențe foarte mici de rugozitate în cazul celor două aliaje de natură diferită. Din acest punct de vedere, materialul Y-PbSn10 se constată a avea o comportare foarte apropiată de cea a aliajului Al-Sb.

Eforturile mai mari pe lagărul palier de mijloc și rezistența la coroziunea chimică mai redusă a plumbului sînt factorii suplimentari care au provocat o dispariție mai accentuată a striurilor de prelucrare și la semicuzinetul din bloc al acestui lagăr.

Comportarea stratului superficial de staniu este în strînsă legătură cu evoluția modificării microgeometriei de prelucrare și a fost analizată admițînd și în cazul de față ipoteza prezenței staniului în suprafață, cel puțin în porțiunile în care striurile de prelucrare au persistat. În figura 31 se arată o porțiune, avînd culoarea mai deschisă, a suprafeței active, cu striuri de prelucrare nedispărute la semicuzinetul capacului de la lagărul din figura 30. Se poate deosebi, sub formă de linii mai albe, prezența staniului în suprafața înconjurătoare, care este mată. Trecerea de la microgeometria de prelucrare, mai rugoasă, la microgeometria specifică de lucru a cuplului din aceste materiale se vede că are loc în mod treptat și fin, acțiune ce poate fi atribuită și prezenței staniului în suprafață. În figura 32 se prezintă, la mărirea de 25 : 1,0 zonă de întrepătrundere în cazul Al-Sb și staniu. Dungile albe reprezintă de obicei văile dintre asperități, ale căror pereți sînt acoperiți cu staniu. În imediata apropiere a acestor dungi pot fi distinse de asemenea și puncte mici albe, care reprezintă pete minuscule de staniu. Suprafața arătată este de la semicuzinetul capacului bielei din figura 28. Aceste încercări arată deci că, chiar în condițiile grele de lucru de la lagărele motoarelor cu ardere internă greu solicitate, staniul din stratul superficial persistă în suprafața activă a acestor lagăre un timp de funcționare care depășește cu mult perioada convențională de rodaj, aspect ce poate fi considerat avantajos.

Primită la redacție la 9 mai 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. R. Cazaud, *Le frottement et l'usure des métaux*, Les antifrictions, Dunod, Paris, 1955, p. 189.
2. Gh. Vasilca, Olga Biță, *Procese de lubrificație, frecare și uzură la suprafețele metalice.* Edit. Academiei, 1967, p. 321.
3. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford, 1964, p. 112.
4. E. Römer, *Dreistofflager mit galvanischer Laufschicht*, Motor-technische Zeitschrift (MTZ), **10**, *21* (1960).
5. Gh. Vasilca, Al. Nica, *Aplicarea teoriei hidrodinamice a ungerii la studiul comportării lagărelor cu cuzineți trimetalici*, Memoriu IMA, 1963 (lucrare nepublicată).
6. — *Aplicarea teoriei hidrodinamice a ungerii în cazul straturilor subțiri*, Memoriu IMA, 1964 (lucrare nepublicată).
7. Olga Biță, I. Dincă, *Aspecte ale comportării la uzură a unor materiale de lagăre*, St. cerc. mec. apl., *2* (1963).

EFECTUL UNOR ADITIVI ASUPRA LUBRIFICAȚIEI OȚELULUI DUR LA SARCINI RIDICATE

de OLGA BIȚĂ și I. DINCĂ
Institutul de mecanica fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

621.89

Se prezintă unele date și observații experimentale comparative privind comportarea la sarcini ridicate (contact punctiform) a peliculelor formate pe suprafețe dure din oțel în frecare de alunecare, în prezența unor aditivi antiuzură și de extremă presiune (lecitina industrială, fosfatul de tricrezil și doi aditivi pe bază de dialchildithiofosfat de zinc cunoscuți sub denumirea de „Monto-Gear" și „Monto-500").

Într-o lucrare anterioară [1] s-a urmărit influența viscozității lubrifianților asupra rezistenței filmului în condițiile regimurilor severe de ungere. Datele experimentale prezentate au subliniat rolul important pe care îl joacă această proprietate a mediului lubrifiant și modificările ei în regimul de frecare de contact care caracterizează funcționarea unor cupluri de frecare la sarcini ridicate. Totuși, viscozitatea lubrifianților nu poate constitui factorul determinant al formării și persistenței peliculei foarte rezistente la forfecare, caracteristică regimurilor de ungere la sarcini foarte mari (contact liniar și, mai ales, punctiform).

Este, de altfel, bine cunoscut faptul că eficacitatea unui mediu de ungere în condiții grele de sarcină este determinată în special de natura și de structura lui chimică și fizico-chimică, exprimată prin mărimea interacțiunii dintre moleculele lui și cele ale suprafețelor în frecare. Aceasta explică necesitatea folosirii aditivilor de onctuozitate și de extremă presiune (E. P.) pentru a imprima lubrifianților o reactivitate pronunțată, o capacitate mai mare de a forma la interfața lubrifiant-metal filme solide, maleabile și rezistente. Cele două amprente din figura 1-*a*, obținută în cazul frecării uscate, și *b*, obținută în condiții identice, însă în prezența benzenului aditivat cu 1% acid oleic — ilustrează în mod categoric rolul

Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée", **12**, *6* (1966) (în limba franceză).

important, aproape spectaculos, pe care îl joacă în cazul presiunilor foarte mari (contact punctiform) stratul de molecule polare interpus între suprafețele în frecare.

Literatura de specialitate furnizează un bogat material bibliografic, caracterizat mai ales prin studii și observații experimentale privind atît

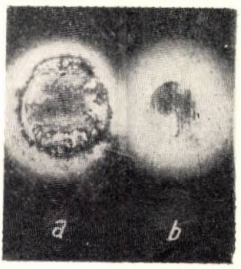


Fig. 1. — Amprentele de uzură obținute pe bilele fixe: *a* — în cazul frecării uscate; *b* — în prezența benzenului aditivat cu 1% acid oleic (20×).

mecanismul acțiunii diverselor tipuri de aditivi, cît și stabilirea domeniilor lor de eficacitate [2]—[8].

Multiplele aspecte ridicate însă de lubrificația la sarcini foarte mari, la studiul căreia, datorită influenței extrem de complexe a diverșilor factori care intervin (sarcină, viteză, regim termic, proprietăți fizico-chimice complexe și mai puțin cunoscute ale suprafețelor în frecare și ale lubrifiantului, starea suprafețelor și deformațiile etc.), nu se pot aplica legi de comportare generală, fac ca în cele mai multe cazuri aceste lucrări să aibă un caracter parțial, datele experimentale fiind uneori chiar contradictorii. Deci oricare alt rezultat sau observație, de orice natură, care se referă la această problemă contribuie la completarea tabloului general care caracterizează ungerea în regim de sarcini ridicate. De altfel, această concluzie a rezultat la Conferința internațională de lubrificație de la Washington din 13 — 16 octombrie 1964, ca urmare a discuțiilor purtate în cadrul multiplelor lucrări cu teme asemănătoare prezentate cu această ocazie.

În acest sens trebuie privită și lucrarea de față, care prezintă o serie de date și observații referitoare la comportarea comparativă a unor aditivi antiuzură și de extremă presiune de largă utilizare, experimentați în condiții de alunecare identice la presiuni foarte mari (contact punctiform).

DATE ȘI OBSERVAȚII EXPERIMENTALE

Condiții de lucru. Aparatura experimentală folosită în scopul urmăririi unor aspecte ale influenței naturii peliculei de lubrifiant asupra uzurii în regim de sarcini ridicate (contact punctiform) a fost descrisă pe larg în lucrarea deja menționată [1], fiind reprezentată, în esență, printr-un dispozitiv cu patru bile.

Condițiile de experimentare s-au încadrat în domeniile de sarcini, viteze, temperaturi, timp expuse în aceeași lucrare [1].

În ceea ce privește *mediul de ungere*, s-au folosit ca uleiuri de bază uleiurile minerale de natură parafinică din grupa 400 (STAS), cu visco-

zitate $\nu_{50°C}$ cuprinsă între ~ 40 și 150 cSt, cu adaosuri de aditivi antiuzură și E.P. cu conținut variabil de fosfor. Astfel s-a urmărit comportarea peliculei lubrifiante în cazul aditivării uleiului de bază cu lecitină industrială de natură animală (Lec.), fosfat de tricrezil (TCF), aditivul „Monto-Gear" (MG, un amestec de parafină clorurată și dialchilditiofosfat de zinc, părți egale) și, pentru unele verificări, aditivul „Monto-500" (M 500), pe bază de dialchilditiofosfat de zinc, ZnDF.

Studiul comportării aditivilor T.C.F. și Lec. a mai făcut obiectul unei lucrări [8], în care s-au urmărit diferite aspecte ale influenței acestor aditivi în cazul contactului liniar.

Concentrația aditivului în uleiul de bază s-a ales în funcție de eficacitatea medie a acestuia, și anume 2%.

Se remarcă din figura 2 că la temperatură mai ridicată (80°C) creșterea concentrației în cazul aditivilor TCF și MG peste 2% mărește în continuare rezistența filmului. Totuși, pentru a menține condiții similare s-a folosit și în acest caz concentrația de 2%; în practică însă, concentrația optimă a acestor aditivi E.P. trebuie să fie mai mare, cel puțin dublă.

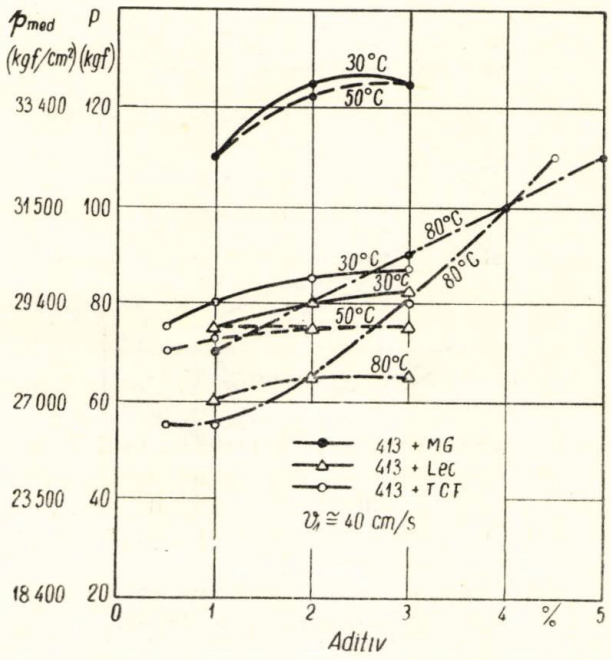


Fig. 2. — Dependența sarcinii maxime de gripare a bilelor în funcție de concentrația aditivului în uleiul de bază.

Natura epruvetelor experimentale. A fost aceeași ca și în cazul lucrării [1]: bile din oțel dur de rulmenți, cu Ø 12,7 mm (STAS), identice ca stare a suprafețelor și duritate. Duritatea bilelor a fost aproximativ identică pentru același set de bile, dar putînd să varieze în limitele $H_{RC} = 60-64$ de la un set la altul. Această diferență, aparent fără mare importanță, s-a reflectat totuși în comportarea diferită, de la un set de bile la altul, a diverselor straturi lubrifiante, în special, în ceea ce privește

rezistența la gripaj și mărimea amprentei de uzură. Astfel, s-au obținut variații ale sarcinii de gripaj de cca. 15—20 kgf/cm² de la $H_{RC} = 60$ la $H_{RC} = 64$. Pentru a înlătura acest neajuns, în trasarea curbelor experimentale s-au folosit valori medii pentru indicarea sarcinii de gripaj în cazul unui anumit grup de experimentări.

Rezultate și observații

Rezistența la gripaj și la uzură a celor patru bile de oțel dur în contact punctiform a constituit criteriul de urmărire a unor aspecte ale lubrificației la presiuni foarte mari în prezența celor trei aditivi, a căror comportare comparativă s-a urmărit.

Rezistența la gripaj. În figura 3 este prezentat efectul temperaturii inițiale a mediului de ungere asupra rezistenței peliculei, rezistență exprimată prin sarcina maximă de gripare a bilelor pentru două viteze diferite, $v_1 \cong 40$ și $v_2 \cong 80$ cm/s.

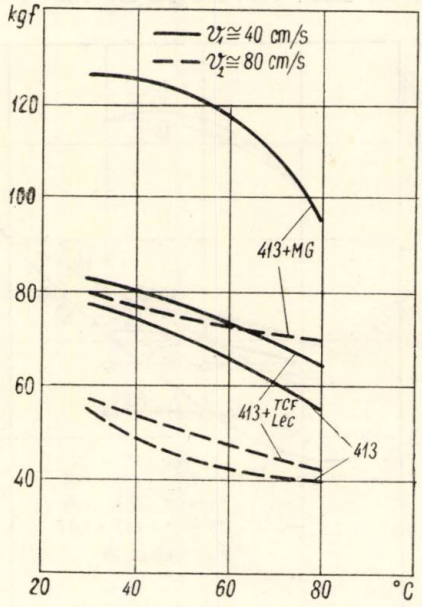


Fig. 3. — Variația eficacității aditivului în funcție de temperatura mediului lubrifiant.

Curbele din această figură arată că o dată cu creșterea temperaturii inițiale a mediului lubrifiant, indiferent de natura acestuia, sarcina maximă de gripaj scade. Surprinzător, această scădere apare mai evidentă în cazul aditivului MG. La viteză dublă însă (curba trasată prin linii întrerupte), efectul temperaturii inițiale scade simțitor și în cazul aditivului MG. Ceilalți doi aditivi, TCF și Lec., s-au comportat identic, rezistența peliculei obținute în prezența lor, cu toate că este mult mai redusă (mai ales la $v_1 \cong 40$ cm/s), nu a prezentat scăderi prea mari în funcție de temperatura inițială a mediului lubrifiant.

Efectul vitezei şi al temperaturii iniţiale a mediului asupra rezistenţei peliculei apare mai clar din curbele prezentate în figura 4.

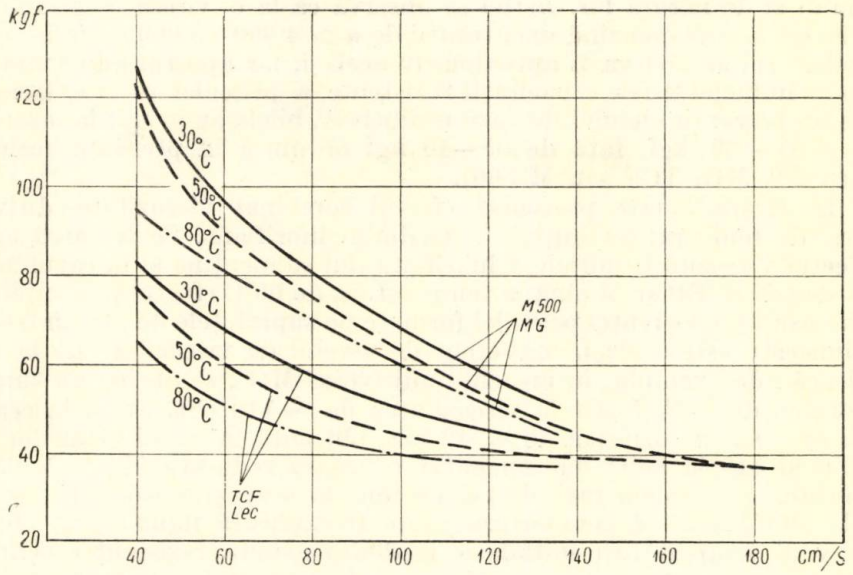


Fig. 4. — Dependenţa eficacităţii aditivului de viteza de alunecare a bilelor.

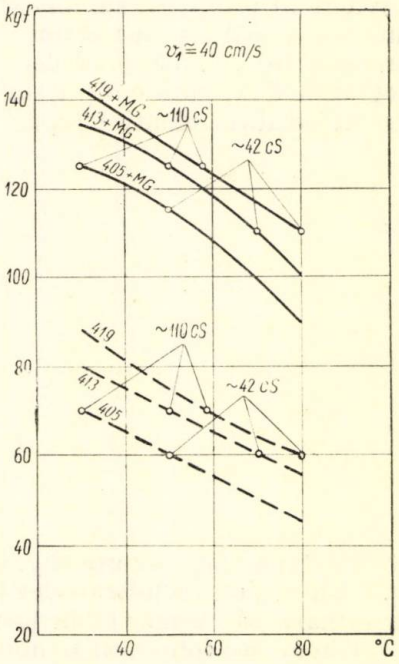


Fig. 5. — Efectul viscozităţii uleiului de bază şi a adaosului de 2% MG asupra capacităţii rezistente a filmului lubrifiant.

Curbele prezentate indică pentru cazul maşinii cu patru bile existenţa unor valori-limită pentru viteza maxină, peste care eficacitatea acestor aditivi scade foarte mult, indiferent de temperatura iniţială a mediului şi de natura lor. Astfel se observă că la o viteză $v \cong 185 \ldots$ $\ldots 190$ cm/s, corespunzînd unei turaţii de $n \cong 4\,900-5\,000$ rot/min, efectul celor trei aditivi va fi aproximativ acelaşi, iar aportul aditivului EP (MG) la îmbunătăţirea capacităţii rezistente a peliculei va fi extrem de redus (în prezenţa uleiului de bază neaditivat, bilele au gripat la o sarcină $P_{max} = 25 - 30$ kgf, faţă de $35-40$ kgf obţinută în prezenţa aceluiaşi ulei cu 2% MG, TCF sau M 500).

În figura 5 este prezentat efectul combinat viscozitate-aditiv în funcţie de temperatura iniţială a mediului lubrifiant. Se remarcă astfel că efectul viscozităţii iniţiale a lubrifiantului se menţine şi în cazul adaosului de aditiv EP şi că pînă la temperatura de 60°C efectul prezenţei aditivului asupra rezistenţei peliculei formate pe suprafeţele de oţel în frecare de alunecare este acelaşi, indiferent de nivelul de viscozitate de la care se pleacă : de exemplu, în prezenţa aditivului MG , se obţine un surplus de sarcină de 55 kgf atît la viscozitatea de ~ 110 cSt, cît şi la cea de ~ 42 cSt. La viscozitatea de ~ 42 cSt, obţinută în cazul uleiurilor 413 la 70°C şi 419 la 80°C, s-a constatat o uşoară reducere (de ~ 5 gkf) a surplusului de sarcină faţă de cel obţinut la aceeaşi viscozitate cu ulei 405 la 50°C. Această comportare poate fi explicată numai prin efectul negativ al temperaturii iniţiale a mediului asupra rezistenţei peliculei formate în prezenţa aditivului MG , efect intensificat la $v_1 \cong 40$ cm/s, mai ales peste 60°C (fig. 5).

Rezistenţa la uzură. Eficacitatea în timp a acestor aditivi din punctul de vedere al protejării suprafeţelor metalice în frecare de contact contra uzurii s-a urmărit prin mărimea şi aspectul amprentelor de pe bilele fixe la aceeaşi sarcină, mai mică decît cea maximă de gripaj. Astfel, în microfotografiile din figura 6 *a* şi *b* sînt prezentate amprentele de contact obţinute în condiţii identice ($v_1 \cong 40$ cm/s, $p_{med} = 25\,000$ kgf/cm^2, $t_i =$ $= 50$°C) după două minute (fig. 6 *a*) şi după 30 de minute de funcţionare (fig. 6 *b*), în cazul folosirii celor trei aditivi a căror comportare la sarcini foarte mari este urmărită în lucrarea de faţă.

Din aceste fotografii se observă că în primele două minute de funcţionare, în condiţii grele de alunecare, cei trei aditivi imprimă filmului

format pe suprafețe aproximativ aceeași capacitate de protecție contra uzurii (fig. 6 *a*). După un timp mai îndelungat de lucru în condiții de alunecare, în cazul de față după 30 de minute, se observă (fig. 6 *b*) o creștere apreciabilă a amprentelor, apariția — în prezența aditivilor M G și T C F — a conturului neregulat și a unor rizuri adînci.

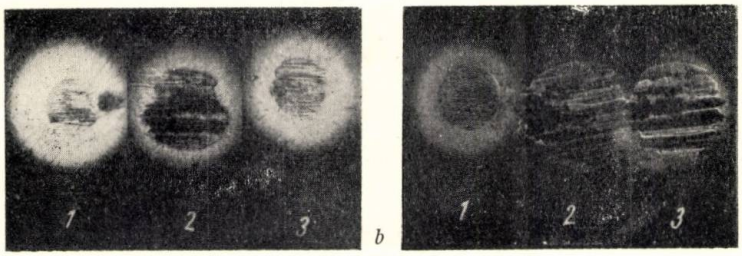


Fig. 7. — Prezentarea comparativă a calităților antiuzură ale aditivilor Lec. [1], TCF[2] și MG[3], la viteză dublă ($v_2 \cong 80$ cm/s) (20×): *a* — la 50°C; *b* — la 80°C.

Cea mai bună protecție a conferit-o în aceste condiții lecitina industrială (Lec.), care a prezentat o amprentă cu un contur aproape perfect și mult mai puține rizuri. Capacitatea antiuzură a acestui aditiv multifuncțional (Lec.) se menține și în cazul dublării vitezei de lucru la două temperaturi inițiale ale mediului : 50°C (fig. 7 *a*) și 80°C (fig. 7 *b*).

Pentru a menține parcursul constant, timpul de lucru a fost în acest caz numai de un minut, sarcina rămînînd aceeași ($p_{med} \cong 25\,000$ kgf/cm²).

DISCUȚII

Datele experimentale prezentate scot în evidență cîteva observații interesante privind comportarea, în condiții de alunecare la sarcini foarte mari (contact punctiform), a peliculei lubrifiante formate pe suprafața oțelului dur în prezența celor trei aditivi studiați. Se remarcă astfel superioritatea rezistenței peliculei formate în prezența aditivului care conține în molecula sa mai multe elemente antigripante (fosfor, sulf, zinc, clor). Este cazul aditivului MG. Experimentările efectuate însă cu Monto-500 pe bază de alchilfenoldithiofosfat de zinc (M 500), indicat ca aditiv antioxidant și anticorosiv [9], [10] ș.a., au arătat, în condiții egale și la o concentrație de 1 %, aceeași comportare ca în cazul aditivului M G la o concentrație de 2 %. S-a ales concentrația de 1% ZnDF, deoarece M G, conținînd ZnDF și parafină clorurată în părți egale, rezultă o concentrație de 1% ZnDF în MG 2%. De altfel verificarea s-a făcut și la concentrații mai mari obținîndu-se rezultate identice, iar la concentrații în MG și M 500 egale acesta din urmă a prezentat o comportare mai bună. Rezultă deci că, în condițiile de lucru existente, eficacitatea atomului de clor, conținut în cantitate mare în M G (circa 20% Cl), este foarte redusă. S-ar părea că nu au existat condițiile necesare pentru a se putea forma sărurile feroase, cunoscute prin calitățile lor lubrifiante și stabilitate ridicată la temperaturi înalte. S-ar putea ca eficacitatea parafinei clorurate să crească

în cazul unui regim termic mai ridicat, superior celui existent în experiențele prezentate. Alura curbei MG din figura 3 nu indică însă această posibilitate în limitele domeniului de temperaturi folosit, eficacitatea aditivului reducîndu-se o dată cu creșterea temperaturii mediului lubrifiant.

Rezultatele prezentate evidențiază însă efectul sulfului, care, alături de fosfor, ridică foarte mult capacitatea rezistentă a filmului lubrifiant format pe suprafețele de oțel dur în cazul presiunilor excesive. Aceste date confirmă observația [10] că în condiții dinamice cantitatea de sulf legat care contribuie la formarea filmului lubrifiant solid, rezistent și cu proprietăți de forfecare reduse crește în prezența fosforului. Ca urmare, crește și capacitatea rezistentă a filmului. Curbele Lec. și T C F din figura 3 indică o comportare identică a peliculelor formate în prezența acestor aditivi la concentrația de 2%. Rezistența acestor pelicule este însă mult inferioară față de cea a peliculei obținute în prezența aditivului M G. Această observație arată că domeniul sarcinilor excesive de contact folosit depășește domeniul optim al capacității rezistente la viteza medie a acestor pelicule formate în contact cu suprafața dură din oțel aliat. După cum s-a arătat într-o lucrare anterioară [8], acești doi aditivi, T C F și Lec., au eficacitate mai mare în cazul contactului liniar.

Efectul negativ al temperaturii și vitezei asupra capacității rezistente a peliculelor (fig. 3 și 4) se poate explica prin stabilirea la sarcini mai reduse, o dată cu creșterea acestor doi factori, a gradienților energetici limită ai materialelor peste care se declanșează procesul violent de gripaj. Curbele din figura 4 indică existența unei limite maxime a vitezei peste care declanșarea procesului de gripaj are loc la aproximativ aceeași sarcină independent de natura filmului lubrifiant. Aceeași observație a fost făcută în lucrarea [1] și în legătură cu anularea efectului viscozității inițiale a mediului lubrifiant asupra rezistenței peliculei peste o anumită valoare maximă a vitezei de alunecare. Influența negativă a acestor doi factori se manifestă în special prin reducerea eficacității aditivului E P (MG).

În ceea ce privește efectul combinat viscozitate-natura mediului lubrifiant (fig. 5), se constată că, pentru valori medii ale vitezei, capacitatea rezistentă a peliculei este influențată atît de prezența aditivului în uleiul de bază, cît și de viscozitatea acestuia. Prin urmare, presupunînd că unei sarcini maxime de gripaj îi corespunde o temperatură critică în punctul de contact, aceasta va depinde, în prezența aditivului E P, nu numai de natura mediului lubrifiant [11], ci și de viscozitatea acestuia [12]. În condiții egale efectul viscozității mediului lubrifiant rămîne însă mult mai redus față de cel al calităților onctuoase și antigripante ale acestuia. De asemenea s-a arătat [1] că efectul viscozității este dependent de viteză, anulîndu-se peste anumite valori ale acesteia.

Datele experimentale obținute (fig. 5) arată că surplusul de sarcină datorat prezenței aditivului depinde de eficacitatea acestuia și, pînă la o anumită valoare a temperaturii mediului lubrifiant, este același în prezența unui anumit aditiv, indiferent de valoarea viscozității uleiului de bază.

În ceea ce privește comportarea peliculelor formate în prezența aditivilor T C F și Lec., s-a constatat că, în cazul ambelor filme lubrifiante obținute la o concentrație de 2%, capacitatea lor rezistentă este egală. Prin urmare, cu toate că T.C.F. conține, la concentrații egale aproximativ de 3—4 ori mai mult fosfor decît Lec., totuși nu a arătat superioritate

față de aceasta. Explicația ar consta în faptul că Lec., fiind o fosfatidă complexă, conține în molecula ei, în afară de fosfor și de azot, și doi radicali corespunzînd unor acizi grași saturați (stearic) sau nesaturați (oleic, palmitic, linoleic, arachidonic ș.a.), acizii nesaturați predominînd cantitativ asupra celor saturați (indice de iod peste 60). Prin urmare, la descompunerea Lec. (prin hidroliză), alături de acidul fosforic se mai pun în libertate două molecule diferite de acizi grași și o moleculă de amino-alcool, toate caracterizate prin polaritate ridicată, care contribuie la mărirea rezistenței peliculei solide formate pe suprafețele metalice. Efectul acestor produse polare se manifestă mai ales prin imprimarea unor calități antiuzură superioare, observate în cazul peliculei onctuoase obținute în prezența Lec. (fig. 6 și 7).

Efectul global al acțiunii unei molecule de lecitină ar putea fi următorul [13]: descompunerea produsului prin hidroliză, peste o anumită valoare a temperaturii mediului lubrifiant, cu formarea unei molecule de H_3PO_4, a două molecule de acizi grași diferiți și a unei molecule de amino-alcool; reacția locală, la interfața metal-lubrifiant, dintre H_3PO_4 și metal cu formarea fosfatului respectiv ($FePO_4$ sau $FePO_4.2H_2O$ în prezența fierului); pasivarea suprafeței de către stratul de fosfat; aderarea la stratul pasivat a produselor puternic polare (acizi grași și amino-alcooli), care măresc capacitatea rezistentă a stratului protector format.

După cum s-a văzut însă, domeniul de eficacitate al acestor straturi este limitat de temperatură (fig. 3) și de viteză (fig. 4). La sarcini inferioare celor maxime de gripaj, straturile formate în prezența Lec. prezintă totuși calități antiuzură superioare celorlalți doi aditivi cu conținut mai mare de fosfor. Dintre aceștia, TCF, la concentrația de 2%, a prezentat cele mai slabe calități antiuzură, rezultatele contrazicînd indicațiile mai multor specialiști [2], [3], [4], [14] ș.a. Slabele calități antiuzură s-au evidențiat mai ales la viteză (fig. 7 *a*) și temperatură (fig. 7 *b*) mai ridicate ale mediului lubrifiant, iar în cazul vitezelor medii la prelungirea timpului de funcționare în condițiile frecării de alunecare (fig. 6 *b*). De fapt, la prelungirea timpului de lucru sau la mărirea vitezei, factorul negativ rămîne tot regimul termic, care atinge mai repede valori critice, creînd astfel condiții favorabile ruperii filmului protector și intensificării diverselor uzuri la punctul de contact al suprafețelor.

Primită la redacție la 30 noiembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Olga Biță, I. Dincă, *Asupra influenței viscozității în lubrificația la sarcini ridicate*, St. cerc. mec. apl., **21**, 2 (1966).
2. F. Lagarde, M. Roberts, *Résistance des couches lubrifiantes et en particulier des couches monomoléculaires*, Rev. de l'Inst. du Pétrole, 5, (1963).
3. D. Godfrey, *The Lubrication Mechanism of Tricrezyl Phosphate on Steel*, ASLE Trans., 8 (1965).
4. F. G. Rounds, *Effects of Additives on the Friction of Steel on Steel, I, II, 1* and 7 (1965).
5. R. S. Fein, K. L. Keuz, *Chemistry of Boundary Lubrication of Steel by Hydrocarbons*, ASLE Trans., 8 (1965).
6. F. G. Rounds, *Some Environmental Factors Affecting Surface Coating Formation with Lubricating Oil Additives*, ASLE-ASME Conf. San Francisco, California, Oct. 18–20, 1965 (reprint 65LC).

7. F. R. Barcoft, S. G. Daniel, *The Action of Neutral Organic Phosphates as E. P. Additives, ASLE-ASME International Lubrication Conference*, Washington, Oct. 13—16, 1964, Paper 64—Lub. 22.
8. Olga Biță, I. Dincă, *Le comportement aux charges lourdes de quelques additifs à base de phosphore*, Rev. roum. sci. techn. Méc. Appl., III, *3* (1963).
9. A. Schilling, *Les huiles pour moteurs et le graissage des moteurs*, vol. I, Edit. Technic, Paris, 1962.
10. E. R. Braithwaite, *Solid Lubricants and Surfaces*, Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1964.
11. R. M. Matveeski, *The Critical Temperature of Oil with Point and Line Contact Machines*, ASLE-ASME International Lubrication Conference, Washington, Oct. 13—16, 1964, (Paper 64 — Lub. 7).
12. R. S. Fein, *Effects of Lubricants on Transition Temperatures*, ASLE Trans., *8*, (1965).
13. Olga Biță, I. Dincă, *Reducerea timpului de rodaj prin metode chimice. Cercetări în domeniul așchierii metalelor și rodajului*, vol. III, I.D.T. București, 1962.
14. E. E. Klaus, H. E. Bieber, *Effect of some Physical and Chemical Properties of Lubricants on Boundary Lubrication*, ASLE VII, *1* (1965).

CONTRIBUȚII LA TEORIA MACROSCOPICĂ A DISLOCAȚIILOR ȘI TENSIUNILOR INIȚIALE. III*)

de C. TEODOSIU
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Această lucrare reprezintă ultima parte a unui studiu consacrat teoriei materialelor cu tensiuni și hipertensiuni inițiale produse de dislocații sau cvasidislocații. La începutul lucrării se expune un nou procedeu de construire a soluției particulare a sistemului de ecuații, bazat pe folosirea metodei elaborate de E. Kröner, pentru determinarea tensiunilor generate de dislocații în medii infinite. Metodele prezentate sînt aplicate pentru determinarea tensiunilor și hipertensiunilor inițiale produse de o distribuție uniformă de dislocații-treaptă într-o placă plană infinită și de o dislocație-șurub într-o bară cilindrică infinită. În continuare se indică o metodă de rezolvare prin aproximații succesive a problemelor la limită neliniare. Lucrarea se încheie cu o discuție asupra rezultatelor obținute și asupra posibilităților de extindere a teoriei.

14. ALTĂ METODĂ PENTRU CONSTRUIREA SOLUȚIEI PARTICULARE A ECUAȚIILOR CÎMPULUI

Așa cum am arătat și în lucrarea [26], rezolvarea problemei la limită poate începe într-un mod diferit, prin căutarea unei soluții particulare a ecuațiilor (12.2) pentru care tensiunile $\overline{\sigma}^{kl}$ corespunzătoare au divergența nulă deci care satisface ecuațiile

$$-\varepsilon^{ikl}\,\varepsilon^{jmn}\,\overline{e}_{ln,\,km} = \eta^{ij}, \tag{14.1}$$

$$\overline{e}_{ij} = \frac{\lambda}{3\lambda+2\mu}\,\overline{\sigma}^{m}_{\cdot m} + \frac{1}{2\mu}\,\overline{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\overline{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu}\,\overline{\sigma}^{m}_{\cdot m}\,g_{ij}\right), \tag{14.2}$$

$$\overline{\sigma}^{ij}_{\cdot\cdot,\,j} = 0, \tag{14.3}$$

unde ν este coeficientul lui Poisson.

Găsirea unei soluții particulare a sistemului de ecuații (14.1)—(14.3) se poate face prin metoda elaborată de E. Kröner [20], [2] pentru deter-

*) Publicată și în „Rev. roum. sci. tech. — Mécanique Appliquée" **12**, *6* (1967) (în limba engleză).

minarea tensiunilor simetrice generate de dislocaţii în medii infinite. Rezumăm aici procedeul de utilizare a acestei metode. În cazul corpului simplu-conex, ecuaţiile (14.3) sînt identic satisfăcute dacă utilizăm binecunoscuta substituţie cu funcţii de tensiuni a lui Beltrami

$$\bar{\sigma}^{ij} = - \varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} \chi_{in,\,km} \tag{14.4}$$

unde χ_{ij} este un tensor simetric.

După cum se ştie, întrucît cele şase funcţii $\bar{\sigma}^{ij}$ trebuie să satisfacă ecuaţiile (14.3), funcţiile χ_{ij} pot fi supuse la trei condiţii suplimentare, cu condiţia ca acestea să nu introducă restricţii asupra stărilor de tensiune posibile.

Pe de altă parte, ţinînd seama de identitatea

$$\varepsilon^{ikl} \varepsilon^{jmn} = \begin{vmatrix} g^{ij} & g^{im} & g^{in} \\ g^{kj} & g^{km} & g^{kn} \\ g^{lj} & g^{lm} & g^{ln} \end{vmatrix},$$

ecuaţiile (14.1) se mai pot scrie sub forma

$$\Delta \bar{e}_{ij} - (\bar{e}^{\,k}_{i\cdot,\,jk} + \bar{e}^{\,k}_{\cdot j,\,ik}) + g_{ij}\, \bar{e}^{km}_{\cdot\cdot,\,km} + \bar{e}^{\,m}_{\cdot m,\,ij} - g_{ij}\, \Delta \bar{e}^{\,m}_{\cdot m} = \eta_{ij} \tag{14.5}$$

şi, dacă înlocuim pe $\bar{e}_{ij}$ din (14.2), obţinem, ţinînd seama de (14.3), ecuaţiile de tip Beltrami,

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} + \frac{1}{1+\nu} (\bar{\sigma}^{\,m}_{\cdot m,\,ij} - g_{ij}\, \Delta \bar{\sigma}^{\,m}_{\cdot m}) = 2\mu\, \eta_{ij}\,. \tag{14.6}$$

Înlocuind (14.4) în (14.6), putem obţine ecuaţiile pe care trebuie să le satisfacă funcţiile de tensiune. După cum a arătat însă E. Kröner, ecuaţiile obţinute se pot simplifica mult dacă se introduc noi funcţii de tensiune χ'_{ij} prin relaţiile

$$\chi_{ij} = 2\mu \left(\chi'_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \chi'^{\,m}_{\cdot m}\, g_{ij} \right), \tag{14.7}$$

cu condiţiile suplimentare admisibile

$$\chi'^{\,ij}_{\cdot\cdot,\,j} = 0. \tag{14.8}$$

Se observă analogia dintre relaţiile (14.1), $(14.2)_2$,(14.3), pe de o parte, şi (14.4), (14.7) şi (14.8), pe de altă parte. Ca urmare, înlocuind (14.7) în (14.4) şi ţinînd seama de (14.8), se obţin ecuaţii analoge cu (14.6), şi anume

$$\Delta \chi'_{ij} + \frac{1}{1-\nu} (\chi'^{\,m}_{\cdot m,\,ij} - g_{ij}\, \Delta \chi'^{\,m}_{\cdot m}) = \frac{1}{2\mu}\, \bar{\sigma}_{ij}\,. \tag{14.9}$$

În sfîrşit, înlocuind (14.9) în (14.6), se obţin ecuaţiile bipotenţiale neomogene

$$\Delta \chi'_{ij} = \eta_{ij}\,. \tag{14.10}$$

Problema determinării soluţiei particulare căutate a ecuaţiilor (14.1)–(14.3) revine deci la găsirea unei soluţii particulare a ecuaţiilor

(14.10), cu condițiile suplimentare (14.8). În cazul mediului infinit și al coordonatelor carteziene, o soluție particulară de acest fel este

$$\chi'_{ij}(\mathbf{z}) = -\frac{1}{8\pi}\int_v \eta_{ij}(\mathbf{z}')\,|\mathbf{z}-\mathbf{z}'|\,dv', \tag{14.11}$$

unde integralele din membrul drept sînt extinse la întreg spațiul.

În cazul unui corp finit, după cum a arătat E. Kröner, soluția (14.11) rămîne valabilă, dacă se înlocuiesc η_{ij} cu funcțiile $\overline{\eta}_{ij}$, obținute prin prelungirea lui η_{ij} continuu diferențiabil în tot spațiul și astfel încît $\overline{\eta}_{ij}$ să se anuleze suficient de repede la infinit. După obținerea lui χ'_{ij} se calculează $\overline{\sigma}_{ij}$ și $\overline{e}_{ij}$ cu ajutorul relațiilor (14.9) și (14.2). Determinarea lui $\overline{r}_{klm}$, $\overline{h}^{lkm}$ și a ecuațiilor problemei la limită asociate se face apoi ca în paragraful precedent.

Metoda de determinare a soluției particulare expusă în acest paragraf, prezintă unele avantaje față de metoda prezentată în paragraful precedent, întrucît în multe cazuri se cunoaște soluția particulară a ecuațiilor (14.1) și (14.2), care satisface condițiile suplimentare (14.3), ca rezultat al determinării tensiunilor generate de dislocații în medii infinite. Apare deci posibilitatea completării soluțiilor cunoscute pînă în prezent în teoria macroscopică a dislocațiilor cu termeni care să țină seama de condițiile la limită și de apariția hipertensiunilor, prin rezolvarea problemelor la limită asociate. Un alt avantaj al variantei prezentate în acest paragraf este că problema la limită asociată nu mai depinde de soluția particulară decît prin intermediul condițiilor la limită. Într-adevăr, ținînd seama de nota care însoțește relația (13.15), precum și de condiția (14.3), obținem

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_k = &-(2a_1+2a_2+a_3-a_4+2a_5+a_6-a_7+2a_8-a_9+a_{10}+a_{11})\,\Delta\overline{e}^{\,l}_{\cdot l,\,k}-\\ &-2(a_4+a_7+a_9)\,\Delta\overline{e}^{\,l}_{k\cdot,\,l}-2(a_1+a_2+a_5+a_6-a_7+2a_8-a_9+a_{10}+\\ &+a_{11})\,S^{lm}_{\cdot\cdot m,\,lk}+2(a_4-a_5)\,\Delta S^{\cdot\cdot l}_{kl}+2(a_7+a_9-a_8-a_{10})\,S^{\cdot lm}_{k\cdot\cdot,\,lm}+f_k.\end{aligned} \tag{14.12}$$

Dar din (14.3) și (13.4) rezultă

$$\overline{e}^{\,l}_{k\cdot,\,l} = -\frac{\lambda}{2\mu}\,\overline{e}^{\,l}_{\cdot l,\,k}, \tag{14.13}$$

de unde

$$\Delta\overline{e}^{\,l}_{k\cdot,\,l} = -\frac{\lambda}{2\mu}\,\Delta\overline{e}^{\,l}_{\cdot l,\,k},\quad \overline{e}^{kl}_{\cdot\cdot,\,kl} = -\frac{\lambda}{2\mu}\,\Delta\overline{e}^{\,l}_{\cdot l}. \tag{14.14}$$

Din $(14.14)_2$ și (12.12) rezultă însă

$$\Delta\overline{e}^{\,l}_{\cdot l} = -\frac{4\mu}{\lambda+2\mu}\,S^{lm}_{\cdot\cdot m,\,l}. \tag{14.15}$$

În sfîrșit, înlocuind $(14.14)_1$, (14.15) și (12.13) în (14.12), obținem după cîteva transformări

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_k = &\frac{2}{\lambda+2\mu}\,[(2\mu-\lambda)(a_1+a_2)+2\mu a_3-\lambda(a_4+2a_5+a_6+a_7+2a_8+\\ &+a_9+a_{10}+a_{11})]\,S^{lm}_{\cdot\cdot m,\,lk}+2(a_4+a_7+a_9-a_5-a_8-a_{10})\,S^{\cdot lm}_{k\cdot\cdot,\,lm}+f_k,\end{aligned} \tag{14.16}$$

ceea ce arată că ecuația (13.20) nu mai depinde de soluția particulară.

În următoarele două paragrafe vom aplica în două cazuri concrete metodele de abordare a problemelor la limită expuse în paragrafele 13 și 14.

15. DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ DE DISLOCAȚII-TREAPTĂ INTR-O PLACĂ PLANĂ INFINITĂ

Ca primă aplicație a teoriei expuse în paragrafele precedente vom studia cazul unei distribuții uniforme de dislocații-treaptă într-o placă plană infinită de grosime $2h$ în absența forțelor masice*). Vom alege axele z_1 și z_2 în planul median al plăcii și vom presupune că singura componentă nenulă a densității dislocațiilor este $\alpha_{12} = \text{const}$ și deci

$$\alpha_{ij} = \alpha_{12}\,\delta_{i1}\,\delta_{j2}. \tag{15.1}$$

În acest caz obținem din (12.9)

$$\eta_{ij} \equiv 0 \tag{15.2}$$

și deci putem lua ca soluție particulară a sistemului de ecuații (14.1)—(14.3)

$$\bar{e}_{kl} \equiv 0, \quad \bar{\sigma}_{kl} \equiv 0. \tag{15.3}$$

Pe de altă parte, înlocuind (15.1) în (12.8), obținem

$$S_{\{mkl\}} = \frac{\alpha_{12}}{2}\,(\in_{ml1}\delta_{k2} - \in_{lk1}\delta_{m2} + \in_{km1}\delta_{l2}), \tag{15.4}$$

iar din (13.3) rezultă ținînd seama de $(15.3)_1$ și (15.4),

$$\bar{r}_{klm} = \frac{\alpha_{12}}{2}\,(\in_{ml1}\delta_{k2} - \in_{lk1}\delta_{m2} + \in_{km1}\delta_{l2}). \tag{15.5}$$

Dar din (15.5) rezultă ușor că singurele componente nenule ale tensorului hiperdeformației sînt

$$\bar{r}_{232} = -\,\bar{r}_{322} = \alpha_{12}. \tag{15.6}$$

De aici rezultă imediat, înlocuind în (11.12), că singurele componente nenule ale tensorului $\bar{h}_{lkm}$ sînt

$$\begin{aligned}
&\bar{h}_{113} = (a_2 - a_1)\,\alpha_{12}, \quad \bar{h}_{131} = (a_5 - a_4)\,\alpha_{12}, \quad \bar{h}_{311} = (a_6 - a_5)\,\alpha_{12},\\
&\bar{h}_{223} = (a_2 - a_1 + a_9 - a_{11})\,\alpha_{12}, \quad \bar{h}_{232} = (a_5 - a_4 + a_{10} - a_7 + a_8 - a_9)\,\alpha_{12},\\
&\bar{h}_{322} = (a_6 - a_5 + a_7 - a_{10} - a_8 + a_{11})\,\alpha_{12}, \quad \bar{h}_{333} = (a_2 - a_1 - a_4 + a_6)\,\alpha_{12}.
\end{aligned} \tag{15.7}$$

Introducînd $(15.3)_2$ și (15.7) în (13.15), obținem

$$\tilde{f}_k = 0. \tag{15.8}$$

*) În acest paragraf vom utiliza coordonate carteziene ortogonale z_1, z_2, z_3 și, conform convenției menționate anterior, vom scrie toți indicii la partea inferioară a simbolurilor.

Pe de altă parte, pe suprafețele $z_3 = \pm h$ avem

$$t_k = h_k = 0 \tag{15.9}$$

și, întrucît în cazul nostru

$$n_l = \delta_{l3}, \quad b_{lm} = 0, \tag{15.10}$$

obținem din (13.16) și (13.17) pentru problema la limită asociată

$$\tilde{t}_k = 0, \tag{15.11}$$

$$\tilde{h}_k = -\tilde{h}_{3k3} = \delta_{k3}(a_1 - a_2 + a_4 - a_6)\,\alpha_{12}. \tag{15.12}$$

Rezolvarea problemei la limită asociate revine deci în acest caz la integrarea sistemului de ecuații (13.20), care devine acum

$$(\lambda+2\mu)(1-l_1^2\Delta)\,\partial_k\partial_l u_l - \mu(1-l_2^2\Delta)(\partial_k\partial_l u_l - \Delta u_k) = 0, \tag{15.13}$$

cu condițiile la limită (13.13), (13.14) care, ținînd seama de (15.10) — (15.12), se scriu

$$\tilde{\sigma}_{k3} - D\tilde{h}_{3k3} - 2D_l\tilde{h}_{(l\,|\,k\,|\,3)} = 0, \tag{15.14}$$

$$\tilde{h}_{3k3} = \delta_{k3}(a_1 - a_2 + a_4 - a_6)\,\alpha_{12}. \tag{15.15}$$

Vom căuta soluția acestei probleme la limită sub forma

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = f(z_3), \tag{15.16}$$

unde f este o funcție ce urmează a fi determinată. Din (15.16) obținem

$$\partial_1\partial_l u_l = \partial_2\partial_l u_l = 0, \quad \partial_3\partial_l u_l = f''(z_3) \tag{15.17}$$

și deci primele două ecuații (15.13) sînt identic satisfăcute, iar a treia devine ecuația diferențială ordinară de ordinul patru

$$l_1^2 f^{\mathrm{IV}} - f'' = 0. \tag{15.18}$$

Ținînd seama acum că h_{lkm} depinde numai de z_3, rezultă

$$D\tilde{h}_{lkm} = \partial_p\tilde{h}_{lkm}n_p = \partial_3\tilde{h}_{lkm},$$

$$D_p\tilde{h}_{llm} = \partial_p\tilde{h}_{llm} - \partial_3\tilde{h}_{llm}n_p = 0$$

și deci (15.14) devine

$$\tilde{\sigma}_{k3} - \partial_3\tilde{h}_{3k3} = 0. \tag{15.19}$$

Din (11.12) rezultă acum

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{3k3} = \delta_{k3}[&(a_1 + a_5)\,\tilde{r}_{3ss} + (a_2 + a_6)\,\tilde{r}_{s3s} + (a_2 + a_3)\,\tilde{r}_{ss3} + \\ &a_1\,\tilde{r}_{ssk} + a_4\,\tilde{r}_{kss} + a_5\,\tilde{r}_{sks} + (a_7 + a_9)\,\tilde{r}_{k33} + \\ &+ (a_8 + a_{11})\,\tilde{r}_{33k} + (a_8 + a_{10})\,\tilde{r}_{3k3}\end{aligned}$$

și, luînd în considerație relațiile (13.18), (15.17) și (13.21), obținem

$$\tilde{h}_{3k3} = l_1^2(\lambda + 2\mu)\,\delta_{k3}f''. \tag{15.20}$$

Înlocuind (15.20) în (15.19) și (15.15) și ținînd seama că

$$\tilde{\sigma}_{k3} = \lambda \delta_{k3} \partial_l u_l + \mu (\partial_3 u_l + \partial_l u_3) = (\lambda + 2\mu)\, \delta_{k3} f', \tag{15.21}$$

rezultă următoarele condiții la limită pentru ecuația diferențială (15.18) :

$$l_1^2 f''' - f' = 0, \tag{15.22}$$

$$f'' = A, \tag{15.23}$$

pentru $z_3 = \pm h$, unde am notat

$$A = \frac{(a_1 - a_2 + a_4 - a_6)\, \alpha_{12}}{l_1^2 (\lambda + 2\mu)}. \tag{15.24}$$

Integrînd de două ori ecuația (15.18) în raport cu z_3 și ținînd seama de (15.22) rezultă

$$l_1^2 f'' - f = K, \tag{15.25}$$

unde K este o constantă arbitrară.

Se calculează însă ușor că soluția ecuației (15.25), care satisface condiția (15.23), este

$$u_3 = f(z_3) = \frac{A l_1^2 \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}, \tag{15.26}$$

unde am lăsat deoparte constanta K, căreia îi corespunde o deplasare rigidă a întregului corp.

Din (13.11) și (13.18) rezultă însă acum

$$\tilde{\sigma}_{kl} = (\lambda \delta_{kl} + 2\mu\, \delta_{k3}\, \delta_{l3}) f'$$

și deci singurele componente nenule ale tensorului $\tilde{\sigma}_{kl}$ sînt

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{\sigma}_{22} = \frac{A l_1 \lambda \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}, \quad \tilde{\sigma}_{33} = \frac{A l_1 (\lambda + 2\mu) \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}. \tag{15.27}$$

Pe de altă parte, din (13.18) se obține

$$\tilde{r}_{klm} = \delta_{k3}\, \delta_{l3}\, \delta_{m3} f'' = \delta_{k3}\, \delta_{l3}\, \delta_{m3} \frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1} \tag{15.28}$$

și, înlocuind în (11.12), rezultă că singurele componente nenule ale tensorului $\tilde{h}_{lkm}$ sînt

$$\begin{aligned} &\tilde{h}_{113} = \tilde{h}_{223} = (a_1 + a_2 + a_3) \frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}, \quad \tilde{h}_{131} = \tilde{h}_{232} = (a_1 + a_4 + a_5) \frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}, \\ &\tilde{h}_{311} = \tilde{h}_{322} = (a_2 + a_5 + a_6) \frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}, \quad \tilde{h}_{333} = (a_1 - a_2 + a_4 - a_6)\, \alpha_{12} \frac{\operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}. \end{aligned} \tag{15.29}$$

Soluția finală a problemei, care rezultă din însumarea soluției particulare cu soluția problemei la limită asociate, este

$$e_{33} = \frac{Al_1 \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}, \quad r_{232} = -r_{322} = \alpha_{12}, \quad r_{333} = -\frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1},$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{Al_1 \lambda \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}, \quad \sigma_{33} = \frac{Al_1(\lambda+2\mu) \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1},$$

$$h_{113} = (a_2 - a_1)\,\alpha_{12} + (a_1 + a_2 + a_3)\frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1},$$

$$h_{131} = (a_5 - a_4)\,\alpha_{12} + (a_1 + a_4 + a_5)\frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1},$$

$$h_{311} = (a_6 - a_5)\,\alpha_{12} + (a_2 + a_5 + a_6)\frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1},$$

$$h_{223} = (a_2 - a_1 + a_9 - a_{11})\,\alpha_{12} + (a_1 + a_2 + a_3)\frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1},$$

$$h_{232} = (a_5 - a_4 + a_{10} - a_7 + a_8 - a_9)\,\alpha_{12} + (a_1 + a_4 + a_5)\frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1},$$

$$h_{322} = (a_6 - a_5 + a_7 - a_8 - a_{10} + a_{11})\,\alpha_{12} + (a_2 + a_5 + a_6)\frac{A \operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1},$$

$$h_{333} = (a_2 - a_1 - a_4 + a_6)\,\alpha_{12}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1}\right).$$

Din examinarea acestor formule se vede că soluția problemei la limită asociate, care corespunde unei distribuții uniforme de hipertensiuni superficiale $\widetilde{h}_3$ pe suprafețele $z_3 = \pm h$, introduce un efect de strat-limită. Într-adevăr, pentru plăci suficient de groase ($h > 7\ l_1$), avem pentru $z_3 > 0$

$$\frac{\operatorname{ch} z_3/l_1}{\operatorname{ch} h/l_1} \approx e^{-\frac{h - z_3}{l_1}}$$

și pentru $h - z_3 = 5\ l_1$, soluția problemei la limită asociate scade la 0,6% din valoarea sa pe suprafața $z_3 = h$.

În cazul în care constantele de material satisfac condițiile restrictive (11.13′), obținem

$$A = 0, \quad e_{kl} = 0, \quad \sigma_{kl} = 0$$

și singurele componente nenule ale tensorilor r_{klm} și h_{klm} sînt

$$r_{232} = -r_{322} = \alpha_{12},$$

$$h_{131} = -h_{311} = \frac{\gamma - \varepsilon}{2}\alpha_{12}, \quad h_{322} = -h_{232} = \frac{\gamma + \varepsilon}{2}\alpha_{12}.$$

În sfîrșit, dacă folosim relațiile $(5.23)_1$ și $(9.13)_1$, obținem soluția dată anterior de autor [26] pentru acest caz particular (vezi observația care însoțește relația (11.15)) :

$$\varkappa_{12} = -\alpha_{12},$$

$$\mu_{12} = -(\gamma + \varepsilon)\,\alpha_{12}, \quad \mu_{21} = -(\gamma - \varepsilon)\,\alpha_{12}.$$

16. DISLOCAȚIE-ȘURUB INTR-O BARĂ CILINDRICĂ INFINITĂ

Vom considera acum o bară cilindrică infinită a cărei secțiune transversală este un cerc de rază R. Alegem ca sistem de coordonate curbilinii sistemul de coordonate cilindrice $x_1 = \rho$, $x_2 = \theta$, $x_3 = z$, care are axa x_3 dirijată după axa barei. Vrem să determinăm starea de tensiune produsă de o dislocație-șurub dirijată după axa barei și al cărei vector Burgers are mărimea b. Singura componentă nenulă a densității dislocațiilor este

$$\alpha_{33} = b\,\delta(x_1)\,\delta(x_2), \tag{16.1}$$

unde $\delta(x_1)$ și $\delta(x_2)$ sînt funcții Dirac.

În acest caz se cunoaște soluția particulară a ecuațiilor (14.1)—(14.3), dată de V. Volterra [46] (vezi și [45], p. 18). Singurele componente nenule ale tensorilor $\bar{\sigma}_{kl}$ și $\bar{e}_{kl}$ sînt

$$\bar{e}_{23} = \frac{b}{4\pi} = \bar{e}_{32}, \quad \bar{\sigma}_{23} = \frac{\mu b}{2\pi} = \bar{\sigma}_{32}. \tag{16.2}$$

În sistemul de coordonate ales avem (vezi, de exemplu [42], p. 440)

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}} = 1, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}} = x_1^2, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}} = 1, \tag{16.3}$$

$$\Gamma^1_{22} = -x_1, \quad \Gamma^2_{21} = \Gamma^2_{12} = \frac{1}{x_1}, \tag{16.4}$$

celelalte componente ale tensorului metric și ale conexiunii fiind nule. De asemenea avem pentru un tensor oarecare $f^{\cdots}_{\cdots}$

$$f^{m\cdots}_{\cdots} = g^{mm} f^{\cdots}_{m\cdots} \text{ (fără sumare)}. \tag{16.5}$$

Din $(16.2)_1$ și (16.4) rezultă

$$\bar{e}_{kl,\,m} = -(\Gamma^2_{mk}\,\delta^3_l + \Gamma^2_{ml}\,\delta^3_k)\,\frac{b}{4\pi}$$

și deci singurele derivate covariante nenule ale tensorului $\bar{e}_{kl}$ sînt

$$\bar{e}_{23,1} = \bar{e}_{13,2} = \bar{e}_{32,1} = \bar{e}_{31,2} = -\frac{b}{4\pi\,x_1}. \tag{16.6}$$

În cele ce urmează vom exclude din considerațiile noastre, așa cum se obișnuiește de altfel, inima dislocației (vecinătatea axei x_3), deci vom considera $S_{mlk} = 0$. Dar atunci din (13.3) obținem

$$\bar{r}_{klm} = \bar{e}_{kl,\,m} - \bar{e}_{lm,\,k} + \bar{e}_{mk,\,l}$$

și deci singurele componente nenule ale tensorului $\bar{r}_{klm}$ sînt

$$\bar{r}_{312} = \bar{r}_{321} = -\frac{b}{2\pi x_1}. \tag{16.7}$$

Din (16.3), (16.4) și (16.7) rezultă acum

$$\bar{r}^{312} = \bar{r}^{321} = -\frac{b}{2\pi x_1^3}, \quad \bar{r}^{klm} = \bar{r}^{(k\,|\,l\,|\,m)}, \quad \bar{r}^{\cdot\cdot s}_{ks} = \bar{r}^{\cdot\cdot s}_{sk} = \bar{r}^{s}_{\cdot sk} = 0 \tag{16.8}$$

și din (11.12) obținem

$$\bar{h}^{lkm} = (a_7 + a_9)\,\bar{r}^{klm} + (a_8 + a_{10})\,\bar{r}^{lmk} + (a_8 + a_{11})\,\bar{r}^{mkl}. \tag{16.9}$$

Înlocuind acum (16.8) în (16.9), deducem că singurele componente nenule ale tensorului $\bar{h}^{lkm}$ sînt

$$\begin{aligned}
\bar{h}^{321} &= \bar{h}^{312} = -(a_8 + a_{10})\frac{b}{2\pi x_1^3}, \\
\bar{h}^{132} &= \bar{h}^{231} = -(a_7 + a_9)\frac{b}{2\pi x_1^3}, \\
\bar{h}^{123} &= \bar{h}^{231} = -(a_8 + a_{11})\frac{b}{2\pi x_1^3}.
\end{aligned} \tag{16.10}$$

Din (16.9) obținem

$$\bar{h}^{lkm}_{\cdot\cdot\cdot,\,lm} = (a_7 + a_9)\,\bar{r}^{klm}_{\cdot\cdot\cdot,\,lm} + (2a_8 + a_{10} + a_{11})\,\bar{r}^{lkm}_{\cdot\cdot\cdot,\,lm}. \tag{16.11}$$

Dar, din (16.4) și (16.8) rezultă succesiv

$$\begin{aligned}
\bar{r}^{klm}_{\cdot\cdot\cdot,\,m} &= \frac{\partial \bar{r}^{klm}}{\partial x_m} + \Gamma^k_{ms}\,\bar{r}^{slm} + \Gamma^l_{ms}\,\bar{r}^{ksm} + \Gamma^m_{ms}\,\bar{r}^{kls} = \\
&= \delta^k_3\,\delta^l_2\left(\frac{\partial \bar{r}^{321}}{\partial x_1} + 3\Gamma^2_{12}\,\bar{r}^{312}\right) = \frac{b}{2\pi}\,\delta^k_3\,\delta^l_2\left(\frac{3}{x_1^4} - \frac{3}{x_1^4}\right) = 0
\end{aligned}$$

și atunci din (16.11) obținem

$$\bar{h}^{lkm}_{\cdot\cdot\cdot,\,lm} = 0. \tag{16.12}$$

Pe de altă parte, din (16.2) și (16.5) deducem

$$\bar{\sigma}^{kl}_{\cdot\cdot,\,l} = \delta^k_2\,\bar{\sigma}^{23}_{\cdot\cdot,\,3} = \delta^k_2\left(\frac{\partial \bar{\sigma}^{23}}{\partial x_3} + \Gamma^2_{3s}\,\bar{\sigma}^{s3} + \Gamma^3_{3s}\,\bar{\sigma}^{2s}\right) = 0. \tag{16.13}$$

Înlocuind acum (16.12) şi (16.13) în (13.15) şi ţinînd seama că $t^k = 0$, obţinem

$$\tilde{f}^k = 0. \tag{16.14}$$

Pentru a obţine condiţiile la limită ale problemei asociate, observăm mai întîi că în cazul nostru

$$n_1 = 1, \quad n_2 = n_3 = 0 \tag{16.15}$$

şi deci, pentru o funcţie tensorială f oarecare, avem

$$D_1 f = 0, \quad D_2 f = f_{.2}, \quad D_3 f = f_{.3}, \tag{16.16}$$

$$Df = f_{.1}. \tag{16.17}$$

Aplicînd relaţiile (16.16) vectorului n_j şi ţinînd seama de (16.4)' rezultă

$$D_1 n_j = 0, \quad D_2 n_j = -\Gamma^1_{2j} = \delta^2_j x_1, \quad D_3 n_j = -\Gamma^1_{3j} = 0$$

şi deci

$$b_{lm} = -\delta^2_l \delta^1_m x_1, \quad b^l_{.m} = -\delta^l_2 \delta^1_m \frac{1}{x_1}. \tag{16.18}$$

Aşadar, pe suprafaţa laterală a barei avem

$$b_{lm} - b^p_p n_l n_m = -\delta^2_l \delta^2_m R + \delta^1_l \delta^1_m \frac{1}{R}. \tag{16.19}$$

Dar din (16.19) şi (16.10) rezultă acum

$$\overline{h}^{lkm}(b_{lm} - b^p_p n_l n_m) = -\overline{h}^{2k2} R - \overline{h}^{1k1} \frac{1}{R} = 0. \tag{16.20}$$

Pe de altă parte, din (16.17), (16.10) şi (16.4) obţinem

$$D\overline{h}^{lkm} n_l n_m = \overline{h}^{1k1}_{\ldots,1} = \frac{\partial \overline{h}^{1k1}}{\partial x_1} + \Gamma^1_{1s}\overline{h}^{sk1} + \Gamma^k_{1s}\overline{h}^{1s1} + \Gamma^1_{1s}\overline{h}^{1ks} = 0. \tag{16.21}$$

Mai departe, ţinînd seama de (16.16), deducem

$$2D_l \overline{h}^{(l\,|\,k\,|\,m)} n_m = D_l(\overline{h}^{lk1} + \overline{h}^{1kl}) = \overline{h}^{2k1}_{\ldots,2} + \overline{h}^{3k1}_{\ldots,3} + \overline{h}^{1k2}_{\ldots,2} + \overline{h}^{1k3}_{\ldots,3},$$

de unde, cu ajutorul relaţiilor (16.4) şi (16.10), obţinem

$$2D_l \overline{h}^{(l\,|\,k\,|\,m)} n_m = 0. \tag{16.22}$$

Înlocuind acum (16.20) —(16.22) în (13.16) şi ţinînd seama că $t^k = 0$, iar $\overline{\sigma}^{kl} n_l = \overline{\sigma}^{k1} = 0$, obţinem

$$\tilde{t}^k = 0. \tag{16.23}$$

În sfîrşit, avem din (16.10) şi (16.15)

$$\overline{h}^{lkm} n_l n_m = \overline{h}^{1k1} = 0 \tag{16.24}$$

și din $(13.17)_2$ obținem, ținînd seama că $h^k = 0$,

$$\tilde{h}^k = 0. \tag{16.25}$$

Relațiile (16.14), (16.23), (16.24) ne arată că soluția particulară a ecuațiilor cîmpului satisface și condițiile la limită, deci reprezintă soluția finală a problemei, dată de relațiile (16.2), (16.7) și (16.10).

17. REZOLVAREA PRIN APROXIMAȚII SUCCESIVE A PROBLEMELOR LA LIMITĂ NELINIARE

Așa cum am arătat și în introducere, E. Krčner și A. Seeger [1] au elaborat o metodă de rezolvare prin aproximații succesive a problemelor la limită în cazul considerării neliniarității geometrice și fizice în ipoteza absenței hipertensiunilor. Algoritmul propus de ei a fost aplicat ulterior de H. Pfleiderer, E. Krčner și A. Seeger [34] pentru rezolvarea unor probleme neliniare bidimensionale.

În cazul mai general considerat în această lucrare, se poate construi formal un algoritm asemănător, bazat pe metoda expusă în paragraful 13. Pentru aceasta vom porni de la sistemul de ecuații și condiții la limită (10.1)—(10.7), în care vom înlocui însă ecuațiile (10.4), (10.5), ținînd seama de considerentele din paragraful 11, prin

$$\sigma^{kl} = F^{klst} e_{st} + H^{klstn} r_{stn} + \hat{\sigma}^{kl} \tag{17.1}$$

și, respectiv,

$$h^{lkm} = H^{klmst} e_{st} + G^{klmstn} r_{stn} + \hat{h}^{lkm}. \tag{17.2}$$

În aceste relații, funcțiile

$$\hat{\sigma}^{kl} = \hat{\sigma}^{kl}(e_{st}, r_{stn}), \quad \hat{h}^{lkm} = \hat{h}^{lkm}(e_{st}, r_{stn}) \tag{17.3}$$

reprezintă termenii neliniari din membrii drepți ai relațiilor (10.4) și (10.5), proveniți atît din $\hat{W}$, cît și din produsele dintre tensorii e_{kl}, r_{klm} și $\beta^k_{\varkappa}$ sau $\beta^k_{\varkappa,l}$ (vezi paragraful 11).

Vom căuta soluția problemei la limită neliniare ca limita unui șir de soluții ale unor probleme la limită liniare, fiecare dintre acestea fiind determinată cu ajutorul metodei expuse în paragraful 13. Astfel, soluția problemei la limită liniare în aproximația de ordinul N va fi căutată sub forma

$$\begin{aligned} &\underset{N}{e_{kl}} = \underset{N}{\bar{e}_{kl}} + \underset{N}{\tilde{e}_{kl}}, \quad \underset{N}{r_{klm}} = \underset{N}{\bar{r}_{klm}} + \underset{N}{\tilde{r}_{klm}}, \\ &\underset{N}{\sigma^{kl}} = \underset{N}{\bar{\sigma}^{kl}} + \underset{N}{\tilde{\sigma}^{kl}}, \quad \underset{N}{h^{lkm}} = \underset{N}{\bar{h}^{lkm}} + \underset{N}{\tilde{h}^{lkm}}. \end{aligned} \tag{17.4}$$

Mărimile notate cu cîte o bară suprapusă rezultă din relațiile

$$\begin{aligned} &-\varepsilon^{ikl}\,\varepsilon^{jmn}\,\underset{N}{\bar{e}_{ln,\,km}} = \eta^{ij} + \underset{N-1}{q^{ij}}, \\ &\underset{N}{\bar{r}_{klm}} = \underset{N}{\bar{e}_{kl,\,m}} - \underset{N}{\bar{e}_{lm,k}} + \underset{N}{\bar{e}_{mk,\,l}} + S_{\{mkl\}}, \\ &\underset{N}{\bar{\sigma}^{kl}} = F^{klst}\,\underset{N}{\bar{e}_{st}} + H^{klstn}\,\underset{N}{\bar{r}_{stn}} + \underset{N-1}{\hat{\sigma}^{kl}}, \\ &\underset{N}{\bar{h}^{lkm}} = H^{klmst}\,\underset{N}{\bar{e}_{st}} + G^{klmstn}\,\underset{N}{\bar{r}_{stn}} + \underset{N-1}{\hat{h}^{lkm}}, \quad N \geqslant 1, \end{aligned} \tag{17.5}$$

unde

$$\begin{aligned} \underset{N}{q^{ij}} &= \frac{1}{2}\,\varepsilon^{lk(i}\,\varepsilon^{j)mn}\,\underset{N}{c^{pq}}\,\underset{N}{r_{qkn}}\,\underset{N}{r_{plm}}, \\ \underset{N}{\hat{\sigma}^{kl}} &= \hat{\sigma}^{kl}\,(\underset{N}{e_{st}}, \underset{N}{r_{stn}}), \\ \underset{N}{\hat{h}^{lkm}} &= \hat{h}^{lkm}\,(\underset{N}{e_{st}}, \underset{N}{r_{stn}}), \\ \underset{N}{c^{pq}}\,(g_{ql} - 2\,\underset{N}{e_{ql}}) &= \delta^p_l, \end{aligned} \tag{17.6}$$

pentru $N \geqslant 1$, iar

$$\underset{0}{q^{ij}} = \underset{0}{\hat{\sigma}^{kl}} = \underset{0}{\hat{h}^{lkm}} = 0. \tag{17.7}$$

Soluţia problemei la limită asociate, în aproximaţia de ordinul N, este dată de relaţiile

$$\begin{aligned} \underset{N}{\tilde{e}_{kl}} &= \frac{1}{2}\,(\underset{N}{u_{k,l}} + \underset{N}{u_{l,k}}), \\ \underset{N}{\tilde{r}_{klm}} &= \underset{N}{u_{k,lm}}, \\ \underset{N}{\tilde{\sigma}^{kl}} &= F^{klst}\,\underset{N}{u_{s,t}} + H^{klstn}\,\underset{N}{u_{s,tn}}, \\ \underset{N}{\tilde{h}^{lkm}} &= H^{klmst}\,\underset{N}{u_{s,t}} + G^{klmstn}\,\underset{N}{u_{s,tn}}. \end{aligned} \tag{17.8}$$

Vectorul deplasării în aproximaţia de ordinul N se obţine prin integrarea sistemului de ecuaţii

$$F^{klst}\,\underset{N}{u_{s,tl}} + 2\,H^{klstn}\,\underset{N}{u_{[s,t]ln}} - G^{klmstn}\,\underset{N}{u_{s,tnlm}} + \underset{N}{\tilde{f}^k} = 0, \tag{17.9}$$

cu condiţiile la limită

$$\underset{N}{\tilde{\sigma}^{kl}}\,n_l + D\,\underset{N}{\tilde{h}^{lkm}}\,n_l n_m - 2\,D_l\,\tilde{h}^{(l\,|\,k\,|\,m)}\,n_m + \tilde{h}^{lkm}\,(b_{lm} - b^p_p\,n_l n_m) = \underset{N}{\tilde{t}^k}, \tag{17.10}$$

$$\underset{N}{\tilde{h}^{lkm}}\,n_l n_m = \underset{N}{\tilde{h}^k}, \tag{17.11}$$

unde am notat

$$\underset{N}{\tilde{f}^k} \equiv f^k + \underset{N}{\bar{\sigma}^{kl}_{\cdots,l}} - \underset{N}{\bar{h}^{llm}_{\cdots,lm}}, \tag{17.12}$$

$$\underset{N}{\tilde{t}^k} \equiv t^k - \underset{N}{\bar{\sigma}^{kl}}\,n_l - D\,\underset{N}{\bar{h}^{lkm}}\,n_i n_m + 2\,D_l\,\underset{N}{\bar{h}^{(l\,|\,k\,|\,m)}}\,n_m - \underset{N}{\bar{h}^{lkm}}\,(b_{lm} - b^p_p\,n_i n_m), \tag{17.13}$$

$$\underset{N}{\tilde{h}^k} \equiv h^k - \underset{N}{\bar{h}^{lkm}_{\cdots,lm}}. \tag{17.14}$$

Convergenţa algoritmului propus depinde evident de structura termenilor neliniari q^{ij}, $\hat{\sigma}^{kl}$, $\hat{h}^{lkm}$ şi trebuie studiată pentru fiecare caz concret în parte. Dificultăţile suplimentare care apar din necesitatea respectării

condițiilor de compatibilitate (5.21) și (5.22) în fiecare etapă a iterației pot fi depășite la fel ca în teoria deformațiilor mari compatibile, adăugînd vectorului deplasare în fiecare etapă a iterației cîte o rotație rigidă, convenabil aleasă, a întregului corp.

Este demn de remarcat faptul că ecuațiile care definesc problemele la limită considerate succesiv se referă la același material și la aceeași frontieră. Ca urmare, este posibil ca rezultatele intermediare ale calculelor să fie folosite pentru toate etapele iterației.

18. DISCUȚIA REZULTATELOR OBȚINUTE. PERSPECTIVE DE DEZVOLTARE A TEORIEI

În acest paragraf vom analiza pe scurt unele relații suplimentare față de cele menționate în introducere dintre teoria dezvoltată în lucrarea de față și rezultatele obținute în ultimii ani în teoria dislocațiilor. De asemenea vor fi indicate unele dezvoltări posibile ale teoriei care pot fi obținute utilizînd metodele expuse în paragrafele anterioare. O generalizare imediată poate fi realizată prin renunțarea la ipoteza teleparalelismului care a intervenit în stabilirea relațiilor geometrice fundamentale. Consecința cea mai importantă a acestei ipoteze a fost anularea tensorului de curbură R^{ij} în (9.5). După cum au arătat însă K. Kondo [3], [5], [47] și E. Kröner [2], tensorul de curbură poate fi considerat, ca și tensorul de torsiune, ca o densitate a surselor de tensiuni inițiale. În [2] și [47] au fost analizate două interpretări fizice distincte care pot fi date unui tensor de curbură nenul. Astfel, E. Kröner [2] a arătat că R^{ij} poate introduce efectul prezenței materialului străin (atomi interreticulari, atomi de substituție etc.) Pe de altă parte, K. Kondo, Y. Hirano și S. Minagawa [47] au demonstrat că R^{ij} poate constitui o măsură a densității perechilor de dislocații de semne contrare. Oricare ar fi însă interpretarea dată unui tensor nenul al curburii, prezența lui aduce modificări neînsemnate teoriei dacă se consideră cunoscut apriori, o dată cu tensorul de torsiune. Într-adevăr, în acest caz, ecuația (9.7) devine

$$- \varepsilon^{ikl}\, \varepsilon^{jmn}\, e_{ln,\,km} = R^{ij} + \eta^{ij} + q^{ij}, \tag{18.1}$$

iar R^{ij} poate fi înglobat formal în η^{ij}.

O altă linie importantă de dezvoltare a teoriei o constituie includerea efectelor dinamice și stabilirea legăturii cu teoria fenomenologică a plasticității.

Un pas care se poate efectua imediat în această direcție este considerarea unei mișcări a corpului suprapusă peste o stare de tensiune inițială constantă în timp. În acest caz se consideră că sistemul de forțe generalizate (F) variază în timp, fără ca aceasta să modifice însă densitatea surselor de tensiuni și de hipertensiuni inițiale și distorsiunile A_K^x. În schimb, relația (3.7) trebuie înlocuită acum prin

$$x^k = x^k(X^K, t). \tag{18.2}$$

Cîtă vreme nu se introduce inerția de spin, considerațiile din paragraful 5 se pot generaliza ușor, înlocuind principiul lucrului mecanic virtual printr-un principiu al minimei acțiuni [27]. Sistemul de ecuații ale cîmpului

şi de condiţii la limită (10.1)—(10.7) rămîne neschimbat, timpul intervenind numai ca parametru, cu excepţia ecuaţiei (10.3), care devine

$$\sigma^{kl} - h^{lkm}_{\cdot\cdot\cdot,lm} + f^k = \rho\ddot{x}^k. \tag{18.3}$$

Consideraţiile din paragrafele 13 şi 14 rămîn de asemenea valabile, dar acum problema la limită asociată devine o problemă dinamică pentru materiale de gradul doi, iar ecuaţiile (13.23) se scriu

$$(\lambda + 2\mu)(1 - l_1^2\Delta)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u} - \mu(1 - l_2^2\Delta)\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} + \tilde{\boldsymbol{f}} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}}. \tag{18.4}$$

În ceea ce priveşte stabilirea unei legături cu teoria fenomenologică a plasticităţii, aceasta se poate realiza presupunînd că distorsiunile $A^{\times}_{K}$ şi deci densitatea surselor de autotensiuni depind de sistemul de forţe (F) şi de variaţia lui în timp. În acest caz, ecuaţiilor constitutive deduse în paragraful 7 trebuie să li se adauge legi de producere şi deplasare a surselor de tensiuni iniţiale (în particular a dislocaţiilor), legi care vor avea, probabil, o formă incrementală, fiind de tipul celor considerate de E. Kröner în [48].

Aşa cum am menţionat şi în introducere unul dintre principalele rezultate obţinute în această lucrare este stabilirea ecuaţiilor constitutive pentru materialele de gradul doi cu tensiuni şi hipertensiuni iniţiale. În legătură cu aceasta este necesar să discutăm o ipoteză formulată în unele lucrări recente ale lui E. Kröner [30] şi F. Hehl şi E. Kröner [24]. Pentru a stabili dependenţa dintre cuplurile de tensiune şi curbările de structură, în aceste lucrări se presupune că răspunsul materialului la curbările de structură care provin din gradienţii deformaţiilor este mult mai mic decît răspunsul la curbările de structură produse de dislocaţii. În cazul nostru, această ipoteză revine, pentru materialele izotrope şi în cazul liniar, la înlocuirea ecuaţiilor constitutive (12.5) prin

$$h^{lkm} = G^{klmstn}\, e_{\{st.n\}} + \overline{G}^{klmstn}\, S_{\{nst\}}, \tag{18.5}$$

unde

$$|G^{klmstn}| \ll |\overline{G}^{klmstn}|, \quad k,l,m,s,t,n \in \{1,2,3\}. \tag{18.6}$$

Este uşor de văzut că aceasta aduce modificări neînsemnate formulelor din paragrafele următoare, iar metodele expuse în paragrafele 13 şi 14 rămîn valabile. În cazul-limită în care se neglijează primul termen din membrul drept al relaţiei (18.5) faţă de al doilea termen, se obţin simplificări importante ale teoriei. Astfel r_{klm} poate fi înlocuit acum prin $S_{\{mkl\}}$, care este cunoscut, iar hipertensiunile pot fi determinate imediat din (11.12), şi anume

$$\begin{aligned} h^{lkm} = {} & c_1\, g^{kl}\, S^{ms}_{\cdot\cdot\ s} + c_2\, g^{lm}\, S^{ks}_{\cdot\cdot\ s} + c_3\, g^{mk}\, S^{ls}_{\cdot\cdot\ s} + \\ & + c_4\, S^{mlk} + c_5\, S^{lkm} + c_6\, S^{kml}, \end{aligned} \tag{18.7}$$

unde am notat

$$c_1 = 2(a_2 - a_1), \quad c_2 = 2(a_5 - a_4), \quad c_3 = 2(a_6 - a_5),$$

$$c_4 = -a_7 + 2a_9 - a_{11}, \quad c_5 = a_7 - 2a_8 + a_{11}, \quad c_6 = a_{11} - a_7.$$

Se observă că în acest caz există numai 8 constante de material distincte (inclusiv λ și μ), iar h^{lkm} sînt complet determinate de (18.7). În ceea ce privește tensiunile σ^{kl}, ele satisfac același sistem de ecuații ale cîmpului și condiții la limită ca în teoria clasică a elasticității, și anume

$$\sigma^{kl}{}_{\cdot\cdot,l} + {}_{\circ}f^k = 0, \quad x \in v, \tag{18.8}$$

$$\sigma^{kl} n_l = {}_{\circ}t^k, \qquad x \in s, \tag{18.9}$$

în care termenii

$${}_{\circ}f^k \equiv f^k - h^{lkm}{}_{\cdot\cdot,lm}, \tag{18.10}$$

$${}_{\circ}t^k \equiv t^k - D\,h^{lkm} n_l n_m + 2\,D_l\,h^{(l|k|m)} n_m - h^{lkm}(b_{lm} - b^p_p\, n_l n_m) \tag{18.11}$$

sînt cunoscuți, datorită lui (18.7). În ceea ce privește condițiile la limită (12.7), acestea pot fi satisfăcute numai dacă considerăm pentru h^{lkm} ecuația constitutivă completă (18.5). Este posibil însă ca soluția problemei la limită asociate, în cazul general, să difere de soluția problemei la limită dată de ecuațiile (18.8) și (18.9) numai prin termeni care introduc un efect de strat-limită (vezi aplicațiile considerate în paragraful 15 și în lucrarea [27]).

După cum am văzut, acceptarea ipotezei lui E. Kröner poate aduce simplificări importante. Totuși, adoptarea acestei ipoteze este, evident, condiționată de verificarea ei experimentală.

În încheierea acestui paragraf menționăm că există o asemănare formală între unele ecuații folosite în teoria materialelor de gradul doi cu tensiuni și hipertensiuni inițiale și cele deduse în teoriile microstructurale elaborate în ultimii ani. În ceea ce privește materialele de gradul doi fără tensiuni și hipertensiuni inițiale, această asemănare a fost analizată de către R. D. Mindlin [33], care a comparat rezultatele sale cu cele ale lui R. A. Toupin [13], și de către A. E. Green [49], care a comparat rezultatele obținute de A. E. Green și R. S. Rivlin [50], cu cele ale lui A. C. Eringen și E. S. Suhubi [51], [52]. Pentru materialele de gradul doi cu tensiuni și hipertensiuni inițiale, această analogie a fost folosită în paragraful 13 și a fost analizată în lucrările [53], [54] ale autorului.

ANEXĂ

În cadrul anexei vom folosi noțiunile și notațiile introduse în paragrafele 1—3. După cum am văzut, partea geometrică a teoriei se bazează pe ipoteza că între componentele unui vector material elementar în starea deformată și în cea naturală există relațiile de legătură

$$\mathrm{d}x^k = A^k_{\varkappa}(\mathrm{d}\xi)^{\varkappa}, \quad (\mathrm{d}\xi)^{\varkappa} = A^{\varkappa}_k\,\mathrm{d}x^k. \tag{A.1}$$

Aceste relații nu sînt în general integrabile, deci nu există un homeomorfism de forma $\xi^{\varkappa} = \xi^{\varkappa}(x^k)$. Totuși, în interiorul fiecărui element relațiile (A. 1) stabilesc un homeomorfism local. Întrucît aproape întreaga teorie a cîmpurilor tensoriale duble se bazează pe considerații locale, ea se extinde în mod natural în cazul nostru, înlocuind consecvent derivatele $\xi^{\varkappa}_{;k}$ și $x^k_{;\varkappa}$ prin distorsiunile $A^{\varkappa}_k$ și $A^k_{\varkappa}$ și folosind definiția componentelor neolonome ale tensorilor. Deși construirea unei teorii de acest fel nu

comportă nici o dificultate principială, ne vom mărgini să considerăm numai un caz particular al ei — utilizat efectiv în lucrarea de față — , și anume, așa cum s-a arătat în paragraful 2, vom folosi în interiorul fiecărui element, în starea naturală, cîte un sistem local de coordonate carteziene ortogonale. De asemenea vom considera numai tensori de forma $t^{\cdots} = t^{\cdots}(\boldsymbol{x})$, deci care depind numai de $\boldsymbol{x}$. Folosind acum formula (20.2) din [35] și ținînd seama că $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda} = 0$, obținem pentru tensorii de acest fel

$$t^{\cdots}_{\cdots;\varkappa} = t^{\cdots}_{\cdots,k} A^k_{\varkappa}, \tag{A.2}$$

$$t^{\cdots}_{\cdots;k} = t^{\cdots}_{\cdots,k}, \tag{A.3}$$

În formulele (A.2), (A.3), derivatele covariante parțiale $t^{\cdots}_{\cdots,k}$, se calculează, ca și derivatele covariante obișnuite în raport cu x^k, cu ajutorul conexiunii $\{^k_{ml}\}$, făcînd abstracție de prezența indicilor grecești. În particular, pentru distorsiunile $A^k_{\varkappa}$, care reprezintă vectori contravarianți față de schimbările olonome de coordonate x^k și vectori covarianți față de schimbările neolonome de coordonate $(\varkappa)$, obținem din (A.2) și (A.3)

$$A^k_{\varkappa;\lambda} = A^k_{\varkappa,l} A^l_{\lambda} = (\partial_l A^k_{\varkappa} + \{^k_{ls}\} A^s_{\varkappa}) A^l_{\lambda}, \tag{A.4}$$

$$A^k_{\varkappa;l} = A^k_{\varkappa,l} = \partial_l A^k_{\varkappa} + \{^k_{ls}\} A^s_{\varkappa}. \tag{A.5}$$

O altă operație definită în teoria cîmpurilor tensoriale duble (vezi [35], sect. 16) și care se extinde ușor la cazul nostru este translația componentelor tensorilor (transportul paralel finit).

Considerăm două puncte arbitrare $\boldsymbol{\xi}$ și $\boldsymbol{x}$ ale unui spațiu euclidian. Fie $\bar{\tau}^{\lambda}$ componentele unui vector $\boldsymbol{\tau}$ cu originea în $\boldsymbol{\xi}$ într-un sistem de coordonate carteziene ortogonale z^l. În punctul $\boldsymbol{x}$ există un vector $\mathbf{t}$ ale cărui componente $\bar{t}^l$ în acest sistem de coordonate, în ordine, au aceleași valori numerice cu cele ale lui $\boldsymbol{\tau}$, adică

$$\bar{t}^l = \delta^l_{\lambda} \bar{\tau}^{\lambda}, \quad \bar{\tau}^{\lambda} = \delta^{\lambda}_l \bar{t}^l. \tag{A.6}$$

În spațiul euclidian considerăm că $\boldsymbol{\tau}$ și $\mathbf{t}$ reprezintă același vector și spunem că $\boldsymbol{t}$ este obținut prin translația lui $\boldsymbol{\tau}$ din $\boldsymbol{\xi}$ în $\boldsymbol{x}$.

Fie acum t^k componentele contravariante ale vectorului $\boldsymbol{t}$ într-un sistem arbitrar de coordonate $x^k = x^k(z^l)$, iar $\tau^{\varkappa}$ componentele vectorului $\boldsymbol{\tau}$ într-un nou sistem de coordonate carteziene ortogonale introdus în $\boldsymbol{\xi}$. Avem

$$t^k = \frac{\partial x^k}{\partial z^l} \bar{t}^l, \quad \bar{t}^l = \frac{\partial z^l}{\partial x^k} \bar{t}^k, \tag{A.7}$$

$$\tau^{\varkappa} = O^{\varkappa}_{\lambda} \bar{\tau}^{\lambda}, \quad \bar{\tau}^{\lambda} = \bar{O}^{\lambda}_{\varkappa} \tau^{\varkappa}, \tag{A.8}$$

unde $O^{\varkappa}_{\lambda}$ și $\bar{O}^{\lambda}_{\varkappa}$ sînt matrice ortogonale inverse, care definesc sistemul local de coordonate introdus în $\boldsymbol{\xi}$.

Înlocuind (A.7) și (A.8) în (A.6), obținem

$$t^k = g^k_{\varkappa} \tau^{\varkappa}; \quad \tau^{\varkappa} = g^{\varkappa}_k t^k, \tag{A.9}$$

unde translatorii $g_{\varkappa}^{k}$ și $g_{k}^{\varkappa}$ sînt definiți prin relațiile

$$g_{\varkappa}^{k} \equiv \delta_{\lambda}^{l}\,\overline{O}_{\varkappa}^{\lambda}\frac{\partial x^{k}}{\partial z^{l}}\,, \quad g_{k}^{\varkappa} \equiv \delta_{l}^{\lambda}\,O_{\lambda}^{\varkappa}\frac{\partial z^{l}}{\partial x^{k}}\,. \tag{A.10}$$

Din (A.10) rezultă relațiile

$$g_{\varkappa}^{l}\,g_{k}^{\varkappa} = \delta_{k}^{l}\,; \quad g_{\varkappa}^{l}\,g_{l}^{\lambda} = \delta_{\varkappa}^{\lambda}, \tag{A.11}$$

$$g_{kl} = \delta_{\varkappa\lambda}\,g_{k}^{\varkappa}\,g_{l}^{\lambda}\,; \quad g^{kl} = \delta^{\varkappa\lambda}\,g_{\varkappa}^{k}\,g_{\lambda}^{l}, \tag{A.12}$$

$$g_{\varkappa}^{k} = \delta_{\varkappa\lambda}\,g_{l}^{\lambda}\,g^{kl}, \quad g_{k}^{\varkappa} = g_{kl}\,g_{\lambda}^{l}\,\delta^{\varkappa\lambda}. \tag{A.13}$$

Folosind (A.9) și (A.10), se poate arăta de asemenea că prin translația unui tensor absolut $\tau_{\lambda\ldots\nu}^{\varkappa\ldots\mu}$ din $\boldsymbol{\xi}$ în $\boldsymbol{x}$ obținem componentele translatate

$$t_{l\ldots n}^{k\ldots m} = \tau_{\lambda\ldots\nu}^{\varkappa\ldots\mu}\,g_{\varkappa}^{k}\ldots\,g_{\mu}^{m}\,g_{l}^{\lambda}\ldots\,g_{n}^{\nu}\,. \tag{A.14}$$

Putem pune acum imediat în legătură rezultatele obținute cu considerațiile noastre anterioare. Presupunem că pozițiile și orientările elementelor de volum în starea naturală sînt fixate. Atunci relațiile (A.1) stabilesc în interiorul fiecărui element de volum o corespondență biunivocă între pozițiile ocupate în spațiul euclidian de particulele acestui element de volum în starea naturală și în cea deformată. Fie $\boldsymbol{x}$ și $\boldsymbol{\xi}$ două puncte puse în corespondență prin acest homeomorfism local, de exemplu originile vectorilor materiali $\mathrm{d}x^{k}$ și $(\mathrm{d}\xi)^{\varkappa}$, legați prin relația (A. 1). Este evident că toate raționamentele de mai sus și în particular formula (A.14) pot fi aplicate pentru translația componentelor tensorilor din ξ și $\boldsymbol{x}$. În acest caz, matricele $O_{\lambda}^{\varkappa}$ și $\overline{O}_{\varkappa}^{\lambda}$ definesc legătura dintre sistemul comun de coordonate carteziene ortogonale z^{l} și sistemele neolonome de coordonate la care sînt raportate elementele de volum în starea naturală. Aceste matrice depind, ca și mai sus, de $\boldsymbol{\xi}$, dar sînt constante în interiorul aceluiași element de volum.

Aplicînd acum relația (A.14) vectorilor materiali $\mathrm{d}x^{k}$ și $(\mathrm{d}\xi)^{\varkappa}$, definim tensorii $\beta_{\varkappa}^{k}$ și $\beta_{k}^{\varkappa}$ prin relațiile

$$\mathrm{d}x^{k} - g_{\varkappa}^{k}\,(\mathrm{d}\xi)^{\varkappa} \equiv \beta_{\varkappa}^{k}\,(\mathrm{d}\xi)^{\varkappa}, \tag{A.15}$$

$$g_{k}^{\varkappa}\,\mathrm{d}x^{k} - (\mathrm{d}\xi)^{\varkappa} \equiv \beta_{k}^{\varkappa}\,\mathrm{d}x^{k}. \tag{A.16}$$

Membrul stîng al relației (A.15) reprezintă diferențele dintre componentele unui vector material elementar în starea deformată și componentele aceluiași vector material în starea naturală, dar translatate din $\boldsymbol{\xi}$ în $\boldsymbol{x}$. Membrul stîng al relației (A.16) reprezintă diferențele dintre componentele unui vector material elementar în starea deformată, translatate din $\boldsymbol{x}$ în $\boldsymbol{\xi}$ și componentele aceluiași vector în starea naturală. Dacă formele Pfaff (A. 1) sînt integrabile, avem $(\mathrm{d}\xi)^{\varkappa} \equiv \mathrm{d}\xi^{\varkappa} = \xi_{;k}^{\varkappa}\,\mathrm{d}x^{k}$, iar tensorii $\beta_{\varkappa}^{k}$ și $\beta_{k}^{\varkappa}$ se reduc la derivatele totale covariante ale vectorului deplasare $u_{;\varkappa}^{k}$, respectiv $u_{;k}^{\varkappa}$ (vezi [10], formulele (20.4)).

Introducînd acum (A.1) în (A.15) și (A.16), obținem

$$A_{\varkappa}^{k} = g_{\varkappa}^{k} + \beta_{\varkappa}^{k}, \tag{A.17}$$

$$A_{k}^{\varkappa} = g_{k}^{\varkappa} - \beta_{k}^{\varkappa}. \tag{A.18}$$

Mai departe, folosind relaţiile $A_\varkappa^k A_k^\lambda = \delta_\varkappa^\lambda$, $g_\varkappa^k g_k^\lambda = \delta_\varkappa^\lambda$, deducem din (A. 17) şi (A.18) relaţiile dintre tensorii $\beta_\varkappa^k$ şi $\beta_k^\varkappa$

$$\beta_\varkappa^k = g_\lambda^k (g_\varkappa^k + \beta_\varkappa^l)\, \beta_l^\lambda, \tag{A.19}$$

din care se poate explicita fie $\beta_\varkappa^k$, fie β_l^λ.

În încheierea acestor consideraţii, vom calcula raportul j dintre elementele de volum $\mathrm{d}V$ şi dv în starea deformată şi în starea naturală. Notînd cu $(\mathrm{d}\zeta)^\lambda$ şi dz^l componentele vectorilor materiali $(\mathrm{d}\xi)^\varkappa$, respectiv $\mathrm{d}x^k$, în sistemul comun de coordonate carteziene ortogonale, avem din (A.8) şi (A.1)

$$(\mathrm{d}\zeta)^\lambda = \bar{O}_\varkappa^\lambda (\mathrm{d}\xi)^\varkappa = \bar{O}_\varkappa^\lambda A_k^\varkappa \mathrm{d}x^k = \bar{O}_\varkappa^\lambda A_k^\varkappa \frac{\partial x^k}{\partial z^l} \mathrm{d}z^l \tag{A.20}$$

şi deci

$$j = \det |\bar{O}_\varkappa^\lambda| \det |A_k^\varkappa| \det \left| \frac{\partial x^k}{\partial z^l} \right| . \tag{A.21}$$

Dar $\det |\bar{O}_\varkappa^\lambda| = 1$, iar $\det \left| \frac{\partial x^k}{\partial z^l} \right| = \frac{1}{\sqrt{g}}$ şi deci (A. 21.) devine

$$j = \frac{1}{\sqrt{g}} \det |A_k^\varkappa| . \tag{A.22}$$

Primită la redacţie la 20 ianuarie 1967.

FUNDAMENTAREA UNEI TEORII A ÎNVELITORILOR ŞI PLĂCILOR ELASTICE, ANIZOTROPE [1]

de LIVIU LIBRESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Socialiste România

539.3

Se dezvoltă o teorie liniară a învelitorilor şi plăcilor elastice anizotrope, ipoteza Love-Kirchhoff fiind abrogată.
Condiţiile la limită pe suprafeţele de mărginiri exterioare ale învelitorii sînt satisfăcute riguros. Nu se face nici o restricţie în ceea ce priveşte grosimea învelitorii, fapt ce permite abordarea problemei învelitorilor şi plăcilor groase.
În a doua parte a lucrării, bazat pe rezultatele obţinute în prima parte, este abordată problema plăcilor plane anizotrope.

1. INTRODUCERE

Interesul crescînd acordat în ultimul timp problemei construirii teoriei învelitorilor şi plăcilor elastice, nelegată de introducerea ipotezei Love-Kirchhoff [2], s-a reafirmat recent prin apariţia unor lucrări (A. L. Goldenweiser [3], P. M. Naghdi [4], [5], S. A. Ambartsumian [6], [7], N. A. Kilcevski [8], I. I. Vorovici [9], L. Ainola şi U. Nigul [10]), prezentînd stadiul, metodele de abordare a acestei probleme, dar şi extensive bibliografii consacrate acestui subiect.

În cadrul acestei probleme generale, construirea teoriei învelitorilor şi plăcilor elastice, anizotrope, nelegată de ipoteza Love-Kirchhoff, prezintă o deosebită actualitate. Ea a constituit subiectul unui mare număr de lucrări recente, dintre care vom menţiona doar cîteva [10]—[27].

Lucrarea de faţă prezintă o teorie liniară a învelitorilor de formă arbitrară, elastice, omogene, anizotrope, ipoteza Love-Kirchhoff fiind abrogată. Abordarea problemei se face în cadrul considerării în condiţii generale a forţelor masice şi de suprafaţă. Condiţiile la limită pe suprafeţele de mărginire exterioară ale învelitorii sînt satisfăcute riguros. Nu se

[1] Lucrare publicată în INTERNATIONAL JOURNAL OF SOLIDS AND STRUCTURES, vol. 3, 53—68 (1967).

[2] O largă discuţie a conţinutului şi erorii introduse de ipoteza Love-Kirchhoff este întreprinsă în [1], [2] de W. T. Koiter.

face nici o restricție în ceea ce privește grosimea învelitorii, avînd astfel posibilitatea de a determina starea de tensiune a învelitorilor anizotrope groase. În continuarea analizei întreprinse, rezultatele generale obținute în prima parte a lucrării sînt dezvoltate pentru cazul plăcii plane.

Se definesc condițiile care corespund teoriei plăcilor plane de grosime medie, în cadrul cărora sînt deduse ecuațiile de încovoiere și de întindere a plăcilor plane anizotrope. Se arată că, în cazul încovoierii plăcii plane, ecuațiile deduse conțin drept caz special ecuațiile obținute în cadrul teoriei Reissner-Green [28]—[30] (vezi de asemenea [31]), precum și ecuațiile obținute de A. A. Haceatrian [20]—[21] prin transformarea ecuațiilor deduse în cadrul teoriei dezvoltate de S. A. Ambarțumian [10].

2. CONSIDERAȚII GEOMETRICE

Învelitoarea poate fi definită ca o regiune a spațiului mărginită de două suprafețe $s^{\pm}\left(z = \pm \frac{h}{2}\right)$, simetric dispuse în raport cu suprafața mediană s ($z = 0$), și de o suprafață laterală cilindrică Σ cu generatoarele paralele la axa z. Vectorul de poziție al unui punct a spațiului învelitorii este definit de

$$\overline{R}(x^1, x^2, x^3) = \overline{r}(x^1, x^2) + x^3\,\overline{n}, \tag{2.1}$$

unde $\overline{n}$ este vectorul-unitate, $x^3 = z\left(-\frac{h}{2} \leqslant z \leqslant \frac{h}{2}\right)$ distanța punctului *respectiv* la suprafața mediană, h grosimea constantă a învelitorii, $\overline{r} = \overline{r}(x^\omega)$ vectorul de poziție al unui punct arbitrar al suprafeței mediane, x^μ ($\mu = 1, 2$) [3] coordonatele gaussiene ale punctelor suprafeței.

Notăm prin

$$\overline{a}_\rho = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^\rho},\ a_{\alpha\beta} = \overline{a}_\alpha \overline{a}_\beta;\ \overline{g}_i = \frac{\partial \overline{R}}{\partial x^i},\ \overline{g}_{ij} = \overline{g}_i \overline{g}_j$$

vectorii bazei covariantei și componentele covariante ale tensorului metric corespunzînd suprafeței mediane, respectiv spațiului învelitorii.

În cele ce urmează, derivata parțială a unui vector sau tensor în raport cu coordonata x^j va fi indicată printr-un indice j precedată de o virgulă; derivata covariantă spațială va fi indicată de o dublă linie verticală și derivata covariantă de suprafață de un indice grec precedat de o singură linie verticală. Ținînd seama de faptul că simbolii lui Christoffel spațiali de speța a doua Γ^k_{ij} pot fi exprimați prin intermediul mărimilor de suprafață prin relațiile [18], [19]

$$\Gamma^\omega_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} [g^{\omega\pi}\overset{(n)}{\Gamma}_{\alpha\beta,\pi} - g^{\omega\pi}(\overset{(n-1)}{b_{\beta\pi}}|_\alpha + 2\,\overset{(0)}{\Gamma^\tau_{\alpha\beta}} b_{\tau\pi}) + g^{\omega\pi}(\overset{(n-2)}{b_{\rho\pi}} b^\rho_\alpha|_\beta + \overset{(0)}{\Gamma^\rho_{\alpha\beta}} c_{\rho\pi})]\, z^n,$$

$$\Gamma^3_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} - z c_{\alpha\beta},$$

$$\Gamma^\omega_{\alpha 3} = -\sum_{n=0}^{\infty} (g^{\omega\lambda}\overset{(n)}{b}_{\alpha\lambda} - g^{\omega\lambda}\overset{(n-1)}{c}_{\alpha\lambda})\, z^n, \tag{2.2}$$ [4]

[3] Indicii greci iau valorile 1, 2 și indicii latini valorile 1,2,3.

[4] Mărimile afectate de un număr de ordine negativ vor fi considerate egale cu zero ($\overset{(-k)}{P}_{\alpha\beta} = 0$ dacă $k > 0$).

unde

$\overset{(0)}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}(x^{\omega}, 0)$ sînt simbolii lui Christoffel de suprafață de speța a doua ; $b_{\alpha\beta}$ și $c_{\alpha\beta} = b^{\lambda}_{\alpha} b_{\lambda\beta}$ reprezintă al doilea, respectiv al treilea tensor fundamental al suprafeței mediane nedeformate ;

$$\overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi} = (n+1)\, a^{\omega\rho} (b^{(n)})^{\pi}_{\rho} \tag{2.3}$$

sînt coeficienții lui z^n ai dezvoltării în serie de puteri întregi și pozitive a lui $g^{\omega\pi}$

$$g^{\omega\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi}, \tag{2.4}$$

iar [5]

$$(b^{(n)})^{\alpha}_{\beta} = b^{\lambda}_{\beta} (b^{(n-1)})^{\alpha}_{\lambda} = b^{\alpha}_{\lambda} (b^{(n-1)})^{\lambda}_{\beta},$$

$$(b^{(0)})^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad (b^{(1)})^{\alpha}_{\beta} = b^{\alpha}_{\beta} \tag{2.5}$$

(δ^{α}_{β} — simbolul lui Kronecker).

Derivatele spațiale ale unui vector spațial pot fi exprimate cu ajutorul derivatelor de suprafață astfel [18]—[19] :

$$\begin{aligned}
V_{\alpha}\|_{\beta} &= |\, V_{\alpha}\,|_{\beta} - V_3 b_{\alpha\beta} + z V_3 c_{\alpha\beta} - \sum_{n=1}^{\infty} z^n V_{\omega} [\overset{(n)}{g}{}^{\omega\pi} \overset{(0)}{\Gamma}{}_{\alpha\beta,\pi} - \\
&\quad - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\pi} (b_{\beta\tau}|_{\alpha} + 2\, \overset{(0)}{\Gamma}{}^{\tau}_{\alpha\beta} b_{\tau\pi}) + \overset{(n-2)}{g}{}^{\omega\pi} (b_{\rho\pi} b^{\rho}_{\alpha}|_{\beta} + \overset{(0)}{\Gamma}{}^{\rho}_{\alpha\beta} c_{\rho\pi})], \\
V_{\alpha}\|_{3} &= V_{\alpha,3} + V_{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} z^n (\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}), \\
V_3\|_{\alpha} &= V_{3,\alpha} + V_{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} z^n (\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda} b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda} c_{\alpha\lambda}).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

3. ECUAȚII FIZICE

Ecuațiile tensiuni-deformații și reciproc scrise pentru un corp elastic, omogen și anizotrop, sînt date de

$$\tau^{ij} = E^{ijkl} e_{kl}, \quad (e_{kl} = F_{klmn}\, \tau^{mn}), \tag{3.1}$$

unde τ^{ij} reprezintă tensorul simetric de tensiune, e_{ij} tensorul deformație și E^{ijmn}, F_{ijkl} tensorii modulelor de elasticitate ai corpului ale căror proprietăți de simetrie și omogenitate sînt date în [30]. Condițiile care definesc anizotropia de tipul simetriei elastice în raport cu suprafața $x^3 = \text{const}$ sau ortotropia sînt date în [30].

În cazul unui corp transversal izotrop avem [19],

$$F_{\alpha\beta\omega\rho} = \frac{1+\nu}{E}\left[\frac{1}{2}(g_{\alpha\omega}g_{\beta\rho} + g_{\alpha\rho}g_{\beta\omega}) - \frac{\nu}{1+\nu}\, g_{\alpha\beta}g_{\omega\rho}\right],$$

$$F_{\alpha\beta 33} = -\frac{\nu'}{E'}\, g_{\alpha\beta};\quad F_{\alpha 3\omega 3} = \frac{1}{4G'}\, g_{\alpha\omega};\quad F_{3333} = \frac{1}{E'};$$

$$E^{\omega\rho\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}(g^{\alpha\omega}g^{\beta\rho} + g^{\omega\beta}g^{\alpha\rho}) + \frac{\dfrac{\nu}{E} + \dfrac{\nu'^2}{E'}}{\dfrac{1-\nu}{E} - 2\dfrac{\nu'^2}{E'}}\, g^{\omega\rho}g^{\alpha\beta}\right] \tag{3.2}$$

şi

$$E^{\omega 3\rho 3} = G'\, g^{\omega\rho};\quad E^{\omega\rho 33} = \frac{\nu'}{\dfrac{1-\nu}{E} - 2\dfrac{\nu'^2}{E'}}\, g^{\omega\rho};\quad E^{3333} = \frac{E'(1-\nu)}{E\left(\dfrac{1-\nu}{E} - 2\dfrac{\nu'^2}{E'}\right)}$$

unde E, ν sînt modulul lui Young şi constanta lui Poisson corespunzînd suprafeţei de izotropie (suprafaţă paralelă în fiecare punct la $x^3 = \text{const}$), iar E', ν', G' modulul lui Young, constanta lui Poisson şi modulul de forfecare corespunzînd planului normal la suprafaţa de izotropie.

Tensorii E^{ijkl} şi F_{ijmn} sînt tensori spaţiali, iar componentele spaţiale pot fi exprimate prin componentele de suprafaţă, folosind relaţiile deduse de P. M. Naghdi [5]

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta\gamma\delta} &= (\lambda^{-1})^{\alpha}_{\nu}(\lambda^{-1})^{\beta}_{\rho}(\lambda^{-1})^{\gamma}_{\omega}(\lambda^{-1})^{\delta}_{\eta}\overset{(0)}{E}{}^{\nu\rho\omega\eta}, \\ E^{\alpha\beta 33} &= (\lambda^{-1})^{\alpha}_{\nu}(\lambda^{-1})^{\beta}_{\rho}\overset{(0)}{E}{}^{\nu\rho 33}, \\ F_{\alpha 3\omega 3} &= \lambda^{\nu}_{\alpha}\lambda^{\gamma}_{\omega}\overset{(0)}{F}{}_{\nu 3\gamma 3}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

unde

$$\lambda^{\alpha}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} - z\, b^{\alpha}_{\beta},$$

iar
$(\lambda^{-1})^{\alpha}_{\beta}$ reprezintă inversa lui λ^{α}_{β}, definită prin relaţiile

$$(\lambda^{-1})^{\alpha}_{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{(n)}{(b)}{}^{\alpha}_{\beta}. \tag{3.4}$$

Sub o formă echivalentă, expresiile (3.3) pot fi scrise sub forma [18]—[19]

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{(n)}{E}{}^{\alpha\beta\gamma\delta};\quad E^{\alpha\beta 33} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{(n)}{E}{}^{\alpha\beta 33},$$

$$E^{3333} = \overset{(0)}{E}{}^{3333};\quad F_{\alpha 3\omega 3} = \sum_{n=0}^{2} z^n \overset{(n)}{F}{}_{\alpha 3\omega 3}, \tag{3.5}$$

unde

$$\overset{(n)}{E}{}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \overset{(n)}{E}{}^{\alpha\beta\gamma\delta}(x^\omega);\ \overset{(n)}{E}{}^{\alpha\beta 33} = \overset{(n)}{E}{}^{\alpha\beta 33}(x^\omega),$$

$$\overset{(n)}{F}_{\alpha\beta\omega 3} = \overset{(n)}{F}_{\alpha 3\omega 3}(x^\omega). \tag{3.6}$$

În cazul corpului transversal-izotrop, expresiile (3.2) ale tensorilor modulelor de elasticitate sînt date prin relaţiile

$$\overset{(n)}{E}{}^{\omega\rho\alpha\beta} = \frac{E}{1+\nu}\sum_{p=0}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\overset{(p)}{g}{}^{\alpha\omega}\overset{(n-p)}{g}{}^{\beta\rho} + \overset{(p)}{g}{}^{\omega\beta}\overset{(n-p)}{g}{}^{\alpha\rho}\right) + \frac{\dfrac{\nu}{E}+\dfrac{\nu'^2}{E'}}{\dfrac{1-\nu}{E}-2\dfrac{\nu'^2}{E'}}\overset{(p)}{g}{}^{\omega\rho}\overset{(n-p)}{g}{}^{\alpha\beta}\right];$$

$$\overset{(n)}{E}{}^{\omega\rho 33} = \frac{\nu'}{\dfrac{1-\nu}{E}-2\dfrac{\nu'^2}{E'}}\overset{(n)}{g}{}^{\omega\rho};\ \overset{(0)}{E}{}^{3333} = \frac{E'(1-\nu)}{E\left(\dfrac{1-\nu}{E}-2\dfrac{\nu'^2}{E'}\right)};\ \overset{(n)}{P}_{\omega 3\lambda 3} = \frac{1}{4G'}\overset{(n)}{g}_{\omega\lambda}. \tag{3.7}$$

În cele ce urmează, fără menţiuni speciale, relaţiile vor fi deduse în cadrul anizotropiei de tipul simetriei elastice în raport cu suprafaţa $x^3 = 0$, celelalte cazuri de anizotropie putîndu-se deduce prin simpla particularizare a relaţiilor obţinute.

Pentru acest caz, ecuaţiile fizice sînt date de

$$\tau^{\omega\pi} = \tilde{E}^{\omega\pi\sigma\rho}e_{\sigma\rho} + \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\tau^{33},$$

$$e_{33} = \frac{1}{E^{3333}}(\tau^{33} - E^{33\sigma\rho}e_{\sigma\rho});\quad e_{\lambda 3} = 2F_{\lambda 3\omega 3}\tau^{\omega 3}, \tag{3.8}$$

unde

$$\tilde{E}^{\omega\pi\sigma\rho} = E^{\omega\pi\sigma\rho} - \frac{E^{\omega\pi 33}E^{33\sigma\rho}}{E^{3333}}. \tag{3.9}$$

4. ECUAŢIILE DE ECHILIBRU ŞI CONDIŢIILE LA LIMITĂ

Ecuaţiile de echilibru şi condiţiile la limită ale învelitorilor vor fi deduse folosind un principiu variaţional al elasticităţii tridimensionale[5]), principiu ce poate fi formulat astfel : din toate stările de tensiune posibile, numai aceea care are loc conferă funcţionalei

$$J = \int_\tau \rho\overline{H}\overline{V}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 + \int_{\Omega(\overline{P})}\overline{P}\overline{V}\,\mathrm{d}\Omega + \int\tau^{ik}\overline{g}_k m_i(\overline{V}^* - \overline{V})\,\mathrm{d}\Omega -$$

$$-\int_\tau\left\{W - \tau^{ik}\left[e_{ik} - \frac{1}{2}(V_k\|_i + V_i\|_k)\right]\right\}\sqrt{\bar{g}}\,\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \tag{4.1}[6])$$

o valoare staţionară.

[5]) În lucrările [32]–[33] principiul variaţional a lui Lagrange este folosit pentru deducerea ecuaţiilor de echilibru şi a condiţiilor la limită a plăcilor şi învelitorilor de grosime medie.

[6]) Principiul variaţional [34]–[36] constituie o generalizare a celui datorit lui E. Reissner [37]. Pentru elastodinamica tridimensională un principiu Hamilton generalizat este dat în [38].

În (4.1) au fost folosite următoarele notații: $\overline{V}$ este vectorul deplasare; W potențialul elastic pe unitatea de volum a corpului nedeformat; Ω frontiera corpului de volum τ; $\Omega_{(\overline{V})}$ porțiunea frontierei Ω pe care este prescris vectorul $\overline{V}^*$; $\Omega_{(\overline{P})}$ porțiunea frontierei Ω pe care este prescris vectorul $\overline{P}$ al forțelor de suprafață; m_i componentele vectorului-unitate al normalei interioare la frontieră; $\overline{H} = \sqrt{g}\overline{F}$, unde $\overline{F} = F^i\overline{g}_i$ este vectorul forței masice pe unitatea de masă; $g = |g_{ik}|$; ρ densitatea.

În cazul învelitorii, presupunînd $\delta\overline{H} = \delta\overline{P} = 0$, se obține din (4.1) [39]

$$\delta J = \int_\sigma \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-h/2}^{h/2} (\overline{T}_{i,i} + \rho\overline{H})\,\delta\overline{V}\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}z + \int_{\Omega(\overline{P})} \left(\overline{T}_i \frac{m_i}{\sqrt{g}} + \overline{P}\right) \delta\overline{V}\,\mathrm{d}\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega(\overline{V})} (\overline{V}^* - \overline{V})\,\delta(\tau^{ik}\overline{g}_k m_i)\,\mathrm{d}\Omega + \int_\sigma \int_{-h/2}^{h/2} (\tau^{ik} - E^{ikmn} e_{mn}) \times \tag{4.2}$$

$$\times \sqrt{\frac{g}{a}}\,\delta e_{ik}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}z + \int_\sigma \int_{-h/2}^{h/2} \left[e_{ik} - \frac{1}{2}(V_i\|_k + V_k\|_i)\right] \sqrt{\frac{g}{a}}\,\delta\tau^{ik}\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}z = 0,$$

unde $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{a}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1$ reprezintă elementul de arie al suprafeței mediane,

$$\overline{T}_i = \sqrt{g}\,\tau^{ik}\overline{g}_k = \sqrt{\tilde{a}}\,(\lambda\lambda^\rho_\alpha \tau^{i\alpha}\overline{a}_\rho + \tau^{i3}\overline{n}) \tag{4.3}$$

reprezintă vectorul de tensiune [31], [40], [41],

$$\lambda^\rho_\alpha = \delta^\rho_\alpha - z b^\rho_\alpha;\ \lambda = \sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - 2Hz + Kz^2, \tag{4.4}$$

unde H și K reprezintă curbura medie, respectiv curbura gaussiană a suprafeței mediane.

Presupunînd independentă variația deplasărilor tensiunilor și deformațiilor în interiorul și pe frontiera învelitorii și considerînd [32], [33], [41], [44]

$$\overline{V} = \sum_{i=0}^{\infty} (\overset{(i)}{V}_\beta \overline{a}^\beta + \overset{(i)}{V}_3 \overline{n})\, z^i, \tag{4.5}$$

din condiția $\delta J = 0$ obținem:

a) ecuațiile de mișcare:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\overline{T}_{i,i} + \rho\overline{H}) z^n\,\mathrm{d}z = 0\ (n = 0, 1, \ldots); \tag{4.6}^{7}$$

---

[7]) Pe lîngă momentele de ordin n ale ecuațiilor de mișcare tridimensionale (4.6) din $\delta J = 0$, rezultă de asemenea momentele de ordinul n ale ecuațiilor fizice și geometrice. Noi nu vom folosi momentele acestor din urmă ecuații, ci ecuațiile înseși (aceasta este valabil și în cadrul teoriilor dezvoltate în lucrările [32], [45]). O teorie a plăcilor bazată pe considerarea momentelor de ordinul n a ecuațiilor fundamentale ale elasticității tridimensionale este prezentată în [46], [47].

b) condiţiile naturale pe frontiera $\Omega_{(\overline{P})}$:

$$\int_{\Omega(\overline{P})} \left(\overline{T}_i \frac{m_i}{\sqrt{g}} + \overline{P} \right) \delta \overline{V} \, \mathrm{d}\Omega = 0, \tag{4.7}$$

c) condiţiile naturale pe $\Omega_{(\overline{V})}$:

$$\int_{\Omega(\overline{V})} (\overline{V}^* - \overline{V}) \delta (\tau^{ik} m_i \overline{g}_k) \, \mathrm{d}\Omega = 0. \tag{4.8}$$

Luînd în considerare (4.3), ecuaţiile (4.6) pot fi scrise sub forma [18], [19]

$$\begin{aligned}
&L^{\omega\rho}_{(0)}|_\omega - b^\rho_\omega N^\omega_{(0)} + [\lambda \lambda^\rho_\alpha \tau^{3\alpha}]^{h/2}_{-h/2} + \mathcal{F}^\rho_{(0)} = 0,\\
&N^\alpha_{(0)}|_\alpha + b_{\rho\alpha} L^{\alpha\rho}_{(0)} + [\lambda \tau^{33}]^{h/2}_{-h/2} + \mathcal{F}^3_{(0)} = 0,\\
&L^{\omega\rho}_{(1)}|_\omega - N^\rho_{(0)} + [z \lambda \lambda^\rho_\alpha \tau^{3\alpha}]^{h/2}_{-h/2} + \mathcal{F}^\rho_{(1)} = 0,\\
&N^\alpha_{(1)}|_\alpha - Q^3_{(0)} + b_{\rho\alpha} L^{\alpha\rho}_{(1)} + [z \lambda \tau^{33}]^{h/2}_{-h/2} + \mathcal{F}^3_{(1)} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&L^{\omega\rho}_{(n)}|_\omega + (n-1) b^\rho_\omega N^\omega_{(n)} - n N^\rho_{(n-1)} + [z^n \lambda \lambda^\rho_\alpha \tau^{3\alpha}]^{h/2}_{-h/2} + \mathcal{F}^\rho_{(n)} = 0,\\
&N^\alpha_{(n)}|_\alpha - n Q^3_{(n-1)} + b_{\rho\alpha} L^{\alpha\rho}_{(n)} + [z^n \lambda \tau^{33}]^{h/2}_{-h/2} + \mathcal{F}^3_{(n)} = 0,
\end{aligned} \tag{4.9}$$ [8]

unde

$$\begin{aligned}
L^{\omega\pi}_{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \lambda \lambda^\omega_\theta \tau^{\theta\pi} z^n \mathrm{d}z \,;\; N^\omega_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \lambda \tau^{\omega 3} z^n \mathrm{d}z,\\
Q^3_{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \lambda \tau^{33} z^n \mathrm{d}z,\\
\mathcal{F}^\omega_{(n)} &= \int_{-h/2}^{h/2} \rho \lambda \lambda^\omega_\alpha F^\alpha z^n \, \mathrm{d}z,\; \mathcal{F}^3_{(n)} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \lambda F^3 z^n \mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{4.10}$$

definesc momentele de ordinul n (a tensiunilor şi a forţelor masice).

Din (4.7) se obţin :

a) condiţiile pe suprafeţele de mărginire $s^\pm$ ale învelitorii [18], [19] :

$$[\lambda \tau^{3\alpha} z^n]^{h/2}_{-h/2} = p^\alpha_{(n)},\; [\lambda \tau^{33} z^n]^{h/2}_{-h/2} = p^3_{(n)}, \tag{4.11}$$

unde s-au folosit notaţiile

$$[\lambda P^\alpha z^n]^{h/2}_{-h/2} = p^\alpha_{(n)},\; [\lambda P^3 z^n]^{h/2}_{-h/2} = p^3_{(n)}; \tag{4.12}$$

pentru

$$\begin{aligned}
&n = 2t + 1 \quad (t = 0, 1, \ldots),\\
&p^\rho_{(2t+1)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} p^\rho_{(1)},\; p^3_{(2t+1)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} p^3_{(1)}.
\end{aligned}$$

---

[8]) Ecuaţiile (4.9) pot reprezenta de asemenea ecuaţiile de mişcare ale elementului tridimensional a învelitorii, prin înlocuirea în $(4.10)_4$ şi $(4.10)_5$ a componentelor F^i prin F^i f^i [48] unde f^i reprezintă vectorul acceleraţiei.

În cele ce urmează, considerăm $F^i = f^i = 0$.

și pentru

$$n = 2t, \quad (t = 0, 1, \ldots),$$

$$p^{\rho}_{(2t)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} p^{\rho}_{(0)}, \quad p^{3}_{(2t)} = \left(\frac{h}{2}\right)^{2t} p^{3}_{(0)};$$

b) condițiile naturale statice pe $C_{(\overline{P})}$:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{g_{\lambda\varphi}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\varphi}}\,[P^{\alpha} + \tau^{\pi\alpha}\nu_{\pi}]\tau_{\beta}\lambda^{\beta}_{\chi} z^{n}\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{g_{\lambda\varphi}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\varphi}}\,[P^{\alpha} + \tau^{\pi\alpha}\nu_{\pi}]\nu_{\beta}\lambda^{\beta}_{\alpha} z^{n}\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{g_{\lambda\varphi}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\varphi}}\,[P^{3} + \tau^{3\lambda}\nu_{\lambda}] z^{n}\mathrm{d}z \qquad (n = 0, 1, \ldots); \tag{4.13}$$

c) condițiile naturale geometrice pe $C_{(\overline{V})}$:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{g_{\lambda\varphi}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\varphi}}\,(V^{*}_{\alpha} - V_{\alpha})\,\nu^{\alpha} z^{n}\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{g_{\lambda\varphi}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\varphi}}\,(V^{*}_{\alpha} - V_{\alpha})\,\tau^{\alpha} z^{n}\mathrm{d}z = 0,$$

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sqrt{g_{\lambda\varphi}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\varphi}}\,(V^{*}_{3} - V_{3}) z^{n}\mathrm{d}z = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{4.14}$$

unde $\overline{\tau} = \tau_{\alpha}\overline{a}^{\alpha}$; $\overline{\nu} = \nu_{\alpha}\overline{a}^{\alpha}$ este vectorul unitar tangent, respectiv normal la curba netedă C, rezultînd din intersecția suprafeței Σ, și $s\,(z = 0)$, $x^{\alpha} = x^{\alpha}(u)$ ecuațiile parametrice ale curbei C, $\dot{x}^{\alpha} = \dfrac{\mathrm{d}x^{\alpha}}{\mathrm{d}u}$.

5. EXPRESIILE DEFORMAȚIILOR ȘI DEPLASĂRILOR

În baza ecuațiilor liniare deformații-deplasări

$$e_{ik} = \frac{1}{2}(V_i\|_k + V_k\|_i) \tag{5.1}$$

și folosind ecuațiile fizice $(3.8)_2$, $(3.8)_3$ și relațiile $(2.6)_2$, $(2.6)_3$, se deduc ecuațiile

$$V_{\alpha,\,3} = 4F_{\alpha 3\lambda 3}\,\tau^{\lambda 3} - V_{3,\,\alpha} - 2V_{\omega}\sum_{n=0}^{\infty}(\overset{(n)}{g}{}^{\omega\lambda}b_{\alpha\lambda} - \overset{(n-1)}{g}{}^{\omega\lambda}c_{\alpha\lambda})\,z^{n},$$

$$V_{3,\,3} = \frac{1}{E^{3333}}(\tau^{33} - E^{33\sigma\rho}e_{\sigma\rho}), \tag{5.2}$$

care permit obținerea componentelor vectorului $V_i(x^\alpha, x^3)$ din sistemul recurent [18], [19], [42]

$$\overset{1}{V}_\alpha = 4\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{\Lambda}(\lambda\tau^{\rho 3}) - \overset{(0)}{V}_{3,\alpha} - 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_\alpha,$$

$$2\overset{(2)}{V}_\alpha = 4(\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(1)}{\Lambda} + \overset{(1)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{\Lambda})(\lambda\overset{(0)}{\tau}^{\rho 3}) + 4\overset{(0)}{F}_{\alpha 3\rho 3}\overset{(0)}{\Lambda}(\lambda\overset{(1)}{\tau}^{\rho 3}) -$$

$$- \overset{(1)}{V}_{3,\alpha} - 2\overset{(1)}{V}_\omega b^\omega_\alpha - 2\overset{(0)}{V}_\omega c^\omega_\alpha, \ldots$$

$$n\overset{(n)}{V}_\alpha = 4\sum_{p=0}^{(n-1)}\sum_{r=0}^{(n-1)} F_{\alpha 3\mu 3}\overset{(n-p-r-1)}{\Lambda}(\lambda\overset{(r)}{\tau}^{\mu 3}) - \overset{(n-1)}{V}_{3,\alpha} - 2\sum_{p=0}^{(n-1)}\overset{(n-p-1)}{V}_\omega(g^{\omega\lambda}\overset{(p)}{b}_{\alpha\lambda} - \tag{5.3}$$

$$- g^{\omega\lambda}\overset{(p-1)}{c}_{\alpha\lambda}); \; n\overset{(n)}{V}_3 = \frac{1}{E^{3333}}\sum_{q=0}^{(n-1)}\overset{(q)}{\Lambda}(\lambda\overset{(n-1-q)}{\tau}^{33}) - \overset{(q)}{E}^{33\sigma\rho}\overset{(n-1-q)}{e}_{\sigma\rho}), \; (n=1,2,\ldots),$$

unde $\overset{(i)}{e}_{\alpha\beta}$ reprezintă componentele dezvoltării după z a lui $e_{\alpha\beta}$

$$e_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \overset{(n)}{e}_{\alpha\beta}. \tag{5.4}$$

Folosind relațiile (5.1) și (2.6), obținem pentru $\overset{(i)}{e}_{\alpha\beta}$ următoarele expresii :

$$\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(0)}{V}_\alpha|_\beta + \overset{(0)}{V}_\beta|_\alpha - 2b_{\alpha\beta}\overset{(0)}{V}_3),$$

$$\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(1)}{V}_\alpha|_\beta + \overset{(1)}{V}_\beta|_\alpha - 2\overset{(1)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(0)}{V}_3 c_{\alpha\beta} + 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_\alpha|_\beta),$$

$$\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\overset{(2)}{V}_\alpha|_\beta + \overset{(2)}{V}_\beta|_\alpha - 2\overset{(2)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(1)}{V}_3 c_{\alpha\beta} +$$

$$+ 2\overset{(1)}{V}_\omega b^\omega_\alpha|_\beta + 2\overset{(0)}{V}_\omega b^\omega_\delta b^\delta_\alpha|_\beta), \ldots \tag{5.5}$$

$$\overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\Big\langle \overset{(n)}{V}_\alpha|_\beta + \overset{(n)}{V}_\beta|_\alpha - 2\overset{(n)}{V}_3 b_{\alpha\beta} + 2\overset{(n-1)}{V}_3 c_{\alpha\beta} -$$

$$- 2\sum_{p=1}^{n}\overset{(n-p)}{V}_\omega[g^{\omega\pi}\overset{(p)}{\Gamma}{}^{(0)}_{\alpha\beta,\pi} - g^{\omega\pi}\overset{(p-1)}{(}b_{\beta\pi}|_\alpha +$$

$$+ 2\overset{(0)}{\Gamma}{}^\tau_{\alpha\beta}b_{\tau\pi}) + g^{\omega\pi}\overset{(p-2)}{(}b_{\rho\pi}b^\rho_\alpha|_\beta + \overset{(0)}{\Gamma}{}^\rho_{\alpha\beta}c_{\rho\pi})]\Big\rangle, \ldots$$

Ținînd seama de relațiile (3.9), (3.5), (3.4), ecuațiile fizice $(3.8)_1$ se scriu sub forma

$$\tau^{\omega\pi} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n} z^n \overset{(p)}{\widetilde{E}}{}^{\omega\pi\alpha\beta}\overset{(n-p)}{e}_{\alpha\beta} +$$

$$+ \frac{1}{E^{3333}}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} z^n \overset{(p)}{E}{}^{\omega\pi 33}\overset{(q)}{\Lambda}(\lambda\overset{(n-p-q)}{\tau}^{33}), \tag{5.6}$$

unde

$$\widetilde{E}^{(p)}_{\omega\pi\alpha\beta} = E^{(p)}_{\omega\pi\alpha\beta} - \frac{\sum_{r=0}^{p} E^{(r)}_{\omega\pi 33} E^{(p-r)}_{\alpha\beta 33}}{E^{3333}}, \quad \Lambda = \frac{1}{\lambda}.$$

În ceea ce privește componentele $\lambda\tau^{i3}$, acestea vor fi reprezentate printr-o dezvoltare pe grosime sub forma [18], [19], [49]

$$\lambda\tau^{i3} = \frac{p^i_{(1)}}{h} + \frac{p^i_{(0)}}{h} z + \overset{(2)}{\varphi}{}^i \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\varphi}{}^i z \left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \ldots +$$
$$+ \overset{(2n)}{\varphi}{}^i \left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \overset{(2n+1)}{\varphi}{}^i z \left(z^{2n} - \frac{h^{2n}}{2^{2n}}\right) + \ldots \tag{5.7}$$

Se observă că aceste expresii satisfac identic condițiile la limită pe suprafețele $z = \pm \frac{h}{2}$ ale învelitorii, date prin relațiile (4.11).

6. FORMULAREA PROBLEMEI ÎNVELITORILOR ELASTICE DE GROSIME ARBITRARĂ

În capitolele anterioare au fost deduse ecuațiile recurente care permit deducerea componentelor $\overset{(i)}{V}_\alpha$, $\overset{(i)}{V}_3$, $\overset{(i)}{e}_{\alpha\beta}$ $(i = 0, 1, \ldots)$. Considerînd drept necunoscute de bază funcțiile $\overset{(0)}{V}_\alpha(x^\omega)$, $\overset{(0)}{V}_3(x^\omega)$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\alpha(x^\omega)$, $\overset{(2)}{\psi}(x^\omega)$, $\overset{(3)}{\varphi}{}^\alpha(x^\omega)$, $\overset{(3)}{\psi}(x^\omega)$ [9], ..., $\overset{(n)}{\varphi}{}^\alpha(x^\omega)$, $\overset{(n)}{\psi}(x^\omega)$, ..., componentele vectorului $\overset{(i)}{V}_\alpha$, $\overset{(i)}{V}_3$ $(i = 1, 2, \ldots)$, componentele tensorului de deformație $\overset{(i)}{e}_{\alpha\beta}$ $(i = 1, 2, \ldots,)$ și componentele tensorului-tensiune pot fi exprimate prin aceste necunoscute de bază.

Relațiile (4.10), (5.6) și (5.5) permit să se exprime momentele de ordinul n prin intermediul funcțiilor $\overset{(0)}{V}_\alpha$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{(2)}{\psi}$, ..., $\overset{(n)}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{(n)}{\psi}$.

În cazul aproximației de ordinul N a dezvoltărilor (5.7) $(N = 2, 3 \ldots)$ (în acest caz $\overset{(r)}{\varphi}{}^i = 0$ pentru $r > N$), înlocuind expresia momentelor de ordin n $(n = 0, 1, \ldots, N-1)$ în ecuațiile de echilibru (4.9), se obține un sistem de 3 N ecuații cu derivate parțiale pentru cele 3 N necunoscute de bază ale problemei, $\overset{(0)}{V}_\alpha$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{(2)}{\psi}$, ..., $\overset{(N)}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{(N)}{\psi}$.

În anumite cazuri speciale, numărul necunoscutelor, respectiv al ecuațiilor, poate fi redus, exprimînd funcțiile $\overset{(2)}{\psi}, \ldots, \overset{(n+1)}{\psi}$, prin intermediul celorlalte funcții $\overset{(0)}{V}_\alpha$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\alpha$, ..., $\overset{(p)}{\varphi}{}^\alpha$. Sistemul de ecuații care permite această exprimare, dedus în lucrările [18], [19], este dat de

$$2n \overset{(2n)}{\psi} = -(\lambda\tau^{\alpha 3})\big|_\alpha - (\lambda\tau^{\alpha\varphi})\, b_{\alpha\varphi} + (\lambda\tau^{\alpha\varphi})\, c_{\alpha\varphi},$$
$$(2n+1) \overset{(2n+1)}{\psi} = -(\lambda\tau^{\alpha 3})\big|_\alpha - (\lambda\tau^{\alpha\varphi}) b_{\alpha\varphi} + (\lambda\tau^{\alpha\varphi})\, c_{\alpha\varphi}$$
$$(n = 1, 2, \ldots).$$

---

[9]) Pentru comoditatea scrierii, în cele ce urmează $\overset{(i)}{\varphi}{}^3$ se va nota cu $\overset{(i)}{\psi}$.

În acest caz, considerînd aproximația de ordinul N a dezvoltărilor $(5.7)_1$ ($N = 2, 3, \ldots$) pe baza sistemului de ecuații (6.1), funcțiile $\overset{(2)}{\psi}(x^\omega), \ldots, \overset{(N+1)}{\psi}(x^\omega)$ pot fi determinate prin intermediul funcțiilor $\overset{(0)}{V}_\delta$, $\overset{(0)}{V}_3$, $\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho, \ldots, \overset{(N)}{\varphi}{}^\rho$, care constituie în acest caz necunoscutele de bază ale problemei.

Rezultă din modul de determinare a necunoscutelor $\overset{(2)}{\psi}(x^\omega), \ldots, \overset{(N+1)}{\psi}(x^\omega)$ că ecuațiile de echilibru (4.8) indicate cu un asterisc sînt identic satisfăcute. În acest caz avem la dispoziție un număr de $(2N + 1)$ ecuații, egal cu numărul necunoscutelor menționate mai sus.

7. ECUAȚIILE TEORIEI PLĂCILOR PLANE

Considerarea suprafeței mediane drept suprafață plană conduce la anumite simplificări. Într-adevăr, în acest caz $b_{\alpha\beta} = 0$ și deci ordinea diferențierii covariante nu intervine și $E^{ijkl} = \overset{(0)}{E}{}^{ijkl}$; $F_{ijmn} = \overset{(0)}{F}_{ijmn}$ ($\overset{(n)}{E}{}^{ijkl} = \overset{(n)}{F}_{ijmn} = 0$, pentru $n \neq 0$).

Considerarea cazului plan conduce la faptul că ecuațiile și condițiile la limită naturale pot fi grupate astfel:

$$A_{(n)}\begin{cases} L^{\omega\rho}_{(n)}|_\omega - nN^\rho_{(n-1)} + p^\rho_{(n)} = 0, \\ \overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}(\overset{(n)}{V}_\alpha|_\beta + \overset{(n)}{V}_\beta|_\alpha), \\ \overset{(n)}{V}_\alpha = \dfrac{1}{n}(4F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(n-1)}{\tau}{}^{\rho 3} - \overset{(n-1)}{V}_{3,\alpha}), \\ L^{\omega\pi}_{(n)} = \hat{E}^{\omega\pi\alpha\beta}\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\left[\frac{h^{n+p+1}(1-(-1)^{n+p+1})}{(n+p+1)\,2^{n+p+1}}\overset{(p)}{e}_{\alpha\beta} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{h^{n+r+1}(1-(-1)^{n+r+1})}{(n+r+1)\,2^{n+r+1}}\overset{(r)}{\tau}{}^{33}; \end{cases}$$

$$B_{(n)}\begin{cases} N^\alpha_{(n)}|_\alpha - nQ^3_{(n-1)} + p^3_{(n)} = 0, \\ \overset{(n)}{V}_3 = \dfrac{1}{nE^{3333}}(\overset{(n-1)}{\tau}{}^{33} - E^{33\alpha\beta}\overset{(n-1)}{e}_{\alpha\beta}), \\ N^\alpha_{(n)} = \dfrac{h^{n+1}(1-(-1)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}\dfrac{p^\alpha_{(1)}}{h} + \dfrac{h^{n+2}(1-(-1)^{n+2})}{(n+2)\,2^{n+2}}\dfrac{p^\alpha_{(0)}}{h} + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h^{n+2p+1}}{2^{n+2p+1}}\left(\frac{1-(-1)^{n+2p+1}}{n+2p+1} - \frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}\right)\overset{(2p)}{\varphi}{}^\alpha + \\ \qquad + \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\frac{h^{n+2p+2}}{2^{n+2p+2}}\left(\frac{1-(-1)^{n+2p+2}}{n+2p+2} - \frac{1-(-1)^{n+2}}{n+2}\right)\overset{(2p+1)}{\varphi}{}^\alpha; \end{cases}$$

a) condiţiile la limită naturale statice :

$$A'_{(n)}\begin{cases} L^{\omega\rho}_{(n)}\nu_\rho\tau_\omega + \int_{-h/2}^{h/2} P^\chi \tau_\alpha z^n \,\mathrm{d}z = 0, \\ L^{\omega\rho}_{(n)}\nu_\rho\nu_\omega + \int_{-h/2}^{h/2} P^\chi \nu_\alpha z^n \,\mathrm{d}z = 0, \end{cases}$$

$$B'_{(n)}\left\{ N^\lambda_{(n)}\nu_\lambda + \int_{-h/2}^{h/2} P^3 z^n \,\mathrm{d}z = 0\,; \right.$$

b) condiţiile la limită naturale geometrice :

$$A''_{(n)}\begin{cases} \nu^\alpha \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{h^{n+p+1}(1-(-1)^{n+p+1})}{(n+p+1)\,2^{n+p+1}} \overset{(p)}{V}_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} V^*_\alpha \nu^\chi z^n \mathrm{d}z, \\ \tau^\alpha \sum_{p=0}^{\infty} \dfrac{h^{n+p+1}(1-(-1)^{n+p+1})}{(n+p+1)\,2^{n+p+1}} \overset{(p)}{V}_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} V^*_\alpha \tau^\chi z^n \mathrm{d}z, \end{cases}$$

$$B''_{(n)}\left\{ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{h^{n+p+1}(1-(-1)^{n+p+1})}{(n+p+1)\,2^{n+p+1}} = \int_{-h/2}^{h/2} V^*_3 z^n \mathrm{d}z. \right.$$

Grupele de ecuaţii (A_n), (B_n) împreună cu condiţiile la limită (A'_n), (B'_n) sau (A''_n), (B''_n) $(n = 0, 1, \ldots)$ se scindează în două grupe independente, şi anume (A_{2q}) ,(B_{2q+1}), la care se asociază condiţiile la limită (A'_{2q}), (B'_{2q+1}) sau (A''_{2q}), (B''_{2q+1}), $(q = 0, 1, \ldots)$ şi, respectiv, (A_{2q+1}), (B_{2q}), cu condiţiile la limită A'_{2q+1} (B'_{2q}) sau (A''_{2q+1}), (B''_{2q}), $(q = 0, 1, \ldots)$.

Primul grup de ecuaţii corespunde stării de tensiune plane generalizate, iar cel de-al doilea încovoierii transversale a plăcilor.

În cele ce urmează, în locul deplasărilor punctelor planului median $\overset{(0)}{V}_i$ vom folosi deplasările medii W_i, între care există relaţia

$$\overset{(0)}{V}_i = W_i - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{h^{2p}}{2^{2p}(2p+1)} \overset{(2p)}{V}_i,$$

unde

$$W_i = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2} V_i \mathrm{d}z.$$

În paragrafele următoare aceste ecuaţii vor fi transcrise explicit pentru cele două stări de tensiune menţionate.

8. ECUAŢIILE ÎNCOVOIERII TRANSVERSALE

Ecuaţiile şi condiţiile la limită naturale statice sau geometrice corespunzătoare acestui caz se obţin considerînd în paragraful 7 grupele de ecuaţii (A_{2r+1}), (B_{2r}) şi condiţiile la limită (A'_{2r+1}), (B'_{2r}), respectiv (A''_{2r+1}), (B''_{2r}) $(r = 0, 1, \ldots)$.

$$A_{(2r+1)}\begin{cases} L^{\omega\rho}_{(2r+1)|\omega} - (2r+1)\,N^{\rho}_{(2r)} + \left(\frac{h}{2}\right)^{2r} p^{\rho}_{(1)} = 0, \\ \overset{(2r+1)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\overset{(2r+1)}{V}_{\alpha|\beta} + \overset{(2r+1)}{V}_{\beta|\alpha}\right), \\ \overset{(2r+1)}{V}_{\alpha} = \frac{1}{(2r+1)}\left(4F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(2r)}{\tau}^{\rho 3} - \overset{(2r)}{V}_{3,\alpha}\right), \\ L^{\omega\pi}_{(2r+1)} = \tilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{h^{2r+2t+3}}{(2r+2t+3)\,2^{2r+2t+2}}\overset{(2t+1)}{e}_{\alpha\beta} + \\ \quad + \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{h^{2r+2q+3}}{(2r+2q+3)\,2^{2r+2q+2}}\overset{(2q+1)}{\tau}^{33}; \end{cases}$$

$$B_{(2r)}\begin{cases} N^{\alpha}_{(2r)|\alpha} - 2rQ^{3}_{(2r-1)} + \left(\frac{h}{2}\right)^{2r} p^{3}_{(0)} = 0, \\ \overset{(2r)}{V}_{3} = \frac{1}{2rE^{3333}}\left(\overset{(2r-1)}{\tau}^{33} - E^{33\alpha\beta}\overset{(2r-1)}{e}_{\alpha\beta}\right), \\ \overset{(0)}{V}_{3} = W - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{h^{2p}}{(2p+1)2^{2p}}\overset{(2p)}{V}_{3}, \\ N^{\alpha}_{(2r)} = \frac{h^{2r+1}}{2^{2r}(2r+1)}\frac{p^{\alpha}_{(1)}}{h} - \sum_{p=1}^{\infty}\frac{p h^{2r+2p+1}}{(2r+2p+1)(2r+1)2^{2r+2p-1}}\overset{(2p)}{\varphi}^{\alpha}; \end{cases}$$

$$A'_{(2r+1)}\begin{cases} L^{\omega\rho}_{(2r+1)}\nu_{\rho}\tau_{\omega} + \int_{-h/2}^{h/2} P^{\alpha}\tau_{\alpha}z^{2r+1}\,\mathrm{d}z = 0, \\ L^{\omega\rho}_{(2r+1)}\nu_{\rho}\nu_{\omega} + \int_{-h/2}^{h/2} P^{\alpha}\nu_{\alpha}z^{2r+1}\,\mathrm{d}z = 0, \end{cases}$$

$$B'_{(2r)}\quad \left\{ N^{\lambda}_{(2r)}\nu_{\lambda} + \int_{-h/2}^{h/2} P^{3}z^{2r}\,\mathrm{d}z = 0; \right.$$

$$A''_{(2r+1)}\begin{cases} \nu^{\alpha}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{h^{2r+2t+3}}{(2r+2t+3)\,2^{2r+2t+2}}\overset{(2t+1)}{V}_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} V^{*}_{\alpha}\nu^{\alpha}z^{2r+1}\mathrm{d}z, \\ \tau^{\alpha}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{h^{2r+2t+3}}{2^{2r+2t+2}(2r+2t+3)}\overset{(2t+1)}{V}_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} V^{*}_{\alpha}\tau^{\alpha}z^{2r+1}\mathrm{d}z, \end{cases}$$

$$B''_{(2r)}\quad \left\{ \sum_{s=0}^{\infty}\frac{h^{2r+2s+1}}{(2r+2s+1)2^{2r+2s}}\overset{(2s)}{V}_{3} = \int_{-h/2}^{h/2} V^{*}_{3}z^{2r}\,\mathrm{d}z. \right.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI KÖZPONTI KÖNYVTÁR 1848

9. ECUAȚIILE DE ÎNTINDERE. STAREA DE TENSIUNE PLANĂ GENERALIZATĂ

Ecuațiile și condițiile la limită naturale statice sau geometrice corespunzătoare acestui caz se obțin considerînd grupele de ecuații (A_{2r}), (B_{2r+1}) și condițiile la limită (A'_{2r}), (B'_{2r+1}), respectiv (A''_{2r}), (B''_{2r+1}) $(r = 0,1\ldots)$:

$A_{(2r)}$

$$
\begin{cases}
L^{\omega\rho}_{(2r)}\,|_\omega - 2rN^{\rho}_{(2r-1)} + \left(\dfrac{h}{2}\right)^{2r} p^{\rho}_{(0)} = 0, \\
\overset{(2r)}{e}_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{2}(\overset{(2r)}{V}_\alpha\,|_\beta + \overset{(2r)}{V}_\beta\,|_\alpha), \\
\overset{(2r)}{V}_\alpha = \dfrac{1}{2r}(4F_{\alpha 3\rho 3}\,\overset{(2r-1)}{\tau^{33}} - \overset{(2r-1)}{V}_{3,\alpha}), \\
\overset{(0)}{V}_\alpha = W_\alpha - \sum\limits_{p=1}^{\infty} \dfrac{h^{2p}}{(2p+1)2^{2p}}\overset{(2p)}{V}_\alpha, \\
L^{\omega\pi}_{(2r)} = \widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}\sum\limits_{t=0}^{\infty}\dfrac{h^{2r+2t+1}}{(2r+2t+1)\,2^{2r+2t}}\overset{(2t)}{e}_{\alpha\beta} + \\
\quad + \dfrac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\sum\limits_{q=0}^{\infty}\dfrac{h^{2r+2q+1}}{(2r+2q+1)\,2^{2r+2q}}\overset{(2q)}{\tau}{}^{33};
\end{cases}
$$

$B_{(2r+1)}$

$$
\begin{cases}
N^{\alpha}_{(2r+1)}\,|_\alpha - (2r+1)\,Q^{3}_{(2r)} + \left(\dfrac{h}{2}\right)^{2r} p^{3}_{(1)} = 0, \\
\overset{(2r+1)}{V}_3 = \dfrac{1}{(2r+1)\,E^{3333}}(\overset{(2r)}{\tau^{33}} - E^{33\alpha\beta}\overset{(2r)}{e}_{\alpha\beta}), \\
N^{\alpha}_{(2r+1)} = \dfrac{h^{2r+3}}{(2r+3)2^{2r+2}}\dfrac{p^{\alpha}_{(0)}}{h} - \\
\quad - \sum\limits_{p=1}^{\infty}\dfrac{p\,h^{2r+2p+3}}{(2r+2p+3)(2r+3)2^{2r+2p+1}}\overset{(2p+1)}{\psi}{}^{\alpha};
\end{cases}
$$

$A'_{(2r)}$

$$
\begin{cases}
L^{\omega\rho}_{(2r)}\,\nu_\rho\,\tau_\omega + \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} P^{\alpha}\,\tau_\alpha z^{2r}\mathrm{d}z = 0, \\
L^{\omega\rho}_{(2r)}\,\nu_\rho\nu_\omega + \displaystyle\int_{-h/2}^{k|2} P^{\alpha}_{\nu_\alpha} z^{2r}\,\mathrm{d}z = 0;
\end{cases}
$$

$B'_{(2r+1)}$

$$
\left\{ N^{\lambda}_{(2r+1)}\,\nu_\lambda + \int_{-h/2}^{h/2} P^{3} z^{2r+1}\mathrm{d}z = 0; \right.
$$

$A''_{(2r)}$

$$
\begin{cases}
\tau^{\alpha}\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty}\frac{h^{2r+2s+1}}{2^{2r+2s}(2r+2s+1)}\overset{(2s)}{V}_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} V^{*}_{\alpha}\tau^{\alpha}z^{2r}\mathrm{d}z, \\
\nu^{\alpha}\displaystyle\sum_{s=0}^{\infty}\frac{h^{2r+2s+1}}{2^{2r+2s}(2r+2s+1)}\overset{(2s)}{V}_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} V^{*}_{\alpha}\nu^{\alpha}z^{2r}\mathrm{d}z;
\end{cases}
$$

$B''_{(2r+1)}$

$$
\left\{ \sum_{q=0}^{\infty}\frac{h^{2r+2q+3}}{2^{2r+2q+2}(2r+2q+3)}\overset{(2q+1)}{V}_3 = \int_{-h/2}^{h/2} V^{*}_{3} z^{2r+1}\mathrm{d}z. \right.
$$

Aşa cum s-a arătat în paragraful 6, $\overset{(i)}{\tau}{}^{33}$ poate fi exprimat prin intermediul lui $\varphi^{\rho}(x^{\omega})$. De accea în acest caz rezultă că, în grupele de ecuaţii (B_{2r}) şi (B_{2r+1}),

$$N^{\alpha}_{(2r)}|_{\alpha} - 2rQ^{3}_{(2r-1)} + \left(\frac{h}{2}\right)^{2r} p^{3}_{(0)} = 0 \qquad (r > 0),$$

şi

$$N^{\alpha}_{(2r+1)}|_{\alpha} - (2r+1)\,Q^{3}_{(2r)} + \left(\frac{h}{2}\right)^{2r} p^{3}_{(1)} = 0 \qquad (r \geqslant 0)$$

pot fi ignorate, ele fiind identic satisfăcute.

10. ECUAŢIILE TEORIEI PLĂCILOR DE GROSIME MEDIE

Ecuaţiile teoriei plăcilor de grosime medie vor fi deduse considerînd simultan [11]—[16], [32], [33], [50]

$$\frac{kf_1^2h^2}{L^2} < 1\,; \quad \frac{f_2f_1^4h^4}{L^4} \ll 1, \tag{10.1}$$

unde L reprezintă o dimensiune caracteristică a planului median, f_1 indicele de variaţie al stării de tensiune [51], k şi f_2 — factori fizici definiţi respectiv prin maximumul rapoartelor :

$$k : \frac{c^{\omega\rho}_{\lambda\varphi}}{c^{33}_{33}}, \frac{c^{33}_{\lambda\varphi}}{c^{33}_{33}}, c^{\omega\rho}_{\alpha\beta}\,s^{\pi 3}_{\sigma 3}, c^{33}_{\alpha\beta}\,s^{\pi 3}_{\sigma 3},$$

$$f_2 : \frac{c^{\omega\rho}_{\alpha\varphi}\,c^{33}_{\sigma\pi}}{c^{33}_{33}}\,s^{\omega 3}_{\gamma 3}, \frac{c^{33}_{\alpha\varphi}c^{33}_{\pi\sigma}}{c^{33}_{33}}\,s^{\omega 3}_{\gamma 3}, c^{\lambda\varphi}_{\pi\sigma}\,c^{\omega\rho}_{\alpha\beta}\,s^{\theta 3}_{\mu 3}\,s^{\nu 3}_{\tau 3},$$

$$c^{33}_{\pi\sigma}\,c^{33}_{\alpha\beta}\,s^{\theta 3}_{\mu 3}\,s^{\nu 3}_{\tau 2}, \frac{c^{\omega\rho}_{\lambda\varphi}\,c^{\pi\sigma}_{\alpha\beta}}{(c^{33}_{33})^2}, \frac{c^{33}_{\lambda\varphi}c^{\pi\sigma}_{33}}{(c^{33}_{33})^2}, \tag{10.2}$$

unde c^{ij}_{mn} şi s^{ij}_{mn} sînt coeficienţii elastici în sistemul de coordonate rectangular cartezian, corespunzînd respectiv lui E^{ij}_{mn} şi F^{ij}_{mn}.

În acest caz este suficient a considera aproximaţia a treia a dezvoltării (5.7) :

$$\tau^{\rho 3} = \frac{p^{\rho}_{(1)}}{h} + p^{\rho}_{(0)}\frac{z}{h} + \overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right) + \overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}z\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right). \tag{10.3}$$

Din sistemul (6.1) luînd în considerare (10.3), obţinem

$$\tau^{33} = \overset{(0)}{\tau}{}^{33} + z\overset{(1)}{\tau}{}^{33} + z^2\overset{(2)}{\tau}{}^{33} + z^3\overset{(3)}{\tau}{}^{33} + z^4\overset{(4)}{\tau}{}^{33}, \tag{10.4}$$

unde

$$\overset{(0)}{\tau}{}^{33} = \frac{p^3_{(1)}}{h} + \frac{h}{8} p^\rho_{(0)}\Big|_\rho - \frac{h^4}{64}\overset{(3)}{\varphi}{}^\rho\Big|_\rho,$$

$$\overset{(1)}{\tau}{}^{33} = -\frac{1}{h} p^\rho_{(1)}\Big|_\rho + \frac{h^2}{4}\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho\Big|_\rho, \quad \overset{(2)}{\tau}{}^{33} = -\frac{1}{2h} p^\rho_{(0)}\Big|_\rho + \frac{h^2}{8}\overset{(3)}{\varphi}{}^\rho\Big|_\rho,$$

$$\overset{(3)}{\tau}{}^{33} = -\frac{1}{3}\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho\Big|_\rho, \quad \overset{(4)}{\tau}{}^{33} = -\frac{1}{4}\overset{(3)}{\varphi}{}^\rho\Big|_\rho. \tag{10.5}$$

Trebuie menționat că expresiile (10.5) pot fi obținute și prin integrarea în raport cu z pe segmentul $[0, z]$ a ecuației de echilibru punctuale

$$\tau^{3\alpha}\,|_\alpha + \tau^{33}_{,3} = 0 \tag{10.6}$$

și punerea corespunzătoare a condițiilor la limită pe planele de mărginire ale plăcii.

Singură expresia lui $\overset{(1)}{\tau}{}^{33}$ obținută astfel diferă de $(10.5)_2$, ea fiind dată prin relația

$$\overset{(1)}{\tau}{}^{33} = \frac{p_{(0)}}{h}\Big|_\alpha + \frac{h^2}{12}\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho\Big|_\rho. \tag{10.7}$$

Se poate vedea imediat că diferența $D = p^3_{(0)} + p^\rho_{(1)}\Big|_\rho - \frac{1}{6} h^3 \overset{(2)}{\varphi}{}^\rho\Big|_\rho$ dintre cele două expresii ale lui $\overset{(1)}{\tau}{}^{33}$ este identic nulă în virtutea ecuației de echilibru $N^\alpha_{(0)}\,|_\alpha + p^3_{(0)} = 0$ și a relației (10.3).

11. ECUAȚIILE ÎNCOVOIERII TRANSVERSALE A PLĂCILOR DE GROSIME MEDIE

Luînd în considerare grupele de ecuații (A_{2r+1}), (B_{2r}), $(r = 0, 1, \ldots)$ (§ 8) și folosind relațiile (10.1), (10.4), se deduc expresiile lui τ^{ij} corespunzînd acestei stări de tensiune:

$$\tau^{\rho 3} = \frac{p^\rho_{(1)}}{h} + \overset{(2)}{\varphi}{}^\rho\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right),$$

$$\tau^{33} = z\overset{(1)}{\tau}{}^{33} + z^3\overset{(3)}{\tau}{}^{33},$$

$$\tau^{\omega\pi} = \widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}(z\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + z^3\overset{(3)}{e}_{\alpha\beta}) + \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}(z\overset{(1)}{\tau}{}^{33} + z^3\overset{(3)}{\tau}{}^{33}), \tag{11.1}$$

de unde

$$L^{\omega\rho}_{(1)} = \widetilde{E}^{\omega\rho\alpha\beta}\left(\frac{h^3}{12}\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^5}{80}\overset{(3)}{e}_{\alpha\beta}\right) + \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\left(\frac{h^3}{12}\overset{(1)}{\tau}{}^{33} + \frac{h^5}{80}\overset{(3)}{\tau}{}^{33}\right),$$

$$N^\rho_{(0)} = p^\rho_{(1)} - \frac{h^3}{6}\overset{(2)}{\varphi}{}^\rho. \tag{11.2}$$

Ţinînd seama de relaţiile date în paragraful 8 şi (10.5) (vezi de asemeni [8], [52]) în ecuaţiile de echilibru

$$L^{\omega\rho}_{(1)}|_\omega - N^{\rho}_{(0)} + p^{\rho}_{(1)} = 0,$$
$$N^{\omega}_{(0)}|_\omega + p^{3}_{(0)} = 0, \tag{11.3}$$

se obţine următorul sistem de ecuaţii rezolvent, cu derivate parţiale în W şi $\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}$:

$$\widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}\left(W|_{\alpha\beta\omega} - \delta_1 \frac{h^2}{60}\frac{E^{33\sigma\rho}}{E^{3333}} W|_{\sigma\rho\alpha\beta\omega}\right) + \frac{2}{5}h^2\widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}(F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}|_{\beta\omega} +$$
$$+ F_{\beta 3\rho 3}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}|_{\alpha\omega}) - \delta_2\frac{h^2}{30}\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}|_{\rho\omega} - \frac{2}{h}\widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}(F_{\alpha 3\rho 3}p^{\rho}_{(1)}|_{\beta\omega} +$$
$$+ F_{\beta 3\rho 3}p^{\rho}_{(1)}|_{\alpha\omega}) - \frac{1}{h}\frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}p_{(0)}|_\omega - \delta_1\frac{h}{60}\frac{\widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}}{E^{3333}}p_{(0)}|_{\alpha\beta\omega} - 2\overset{(2)}{\varphi}{}^{\pi} = 0,$$
$$\frac{h^3}{6}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\alpha}|_\alpha - p^{3}_{(0)} - p^{\alpha}_{(1)}|_\alpha = 0. \tag{11.4}^{10}$$

În aceste ecuaţii, factorii δ_1 şi δ_2 au caracterul de a identifica contribuţia adusă de e_{33}, respectiv τ^{33} în ecuaţiile menţionate (aceste notaţii au aceeaşi semnificaţie şi în cazul întinderii plăcii). În cazul în care aceste contribuţii sînt luate în considerare, factorii δ_i $(i = 1, 2)$ se consideră egali cu unitatea ; în cazul ignorării uneia dintre aceste contribuţii, factorul δ_i ce identifică respectiva contribuţie se consideră nul.

12. ECUAŢIILE DE ÎNTINDERE PENTRU PLĂCILE DE GROSIME MEDIE. STAREA DE TENSIUNE PLANĂ GENERALIZATĂ

Luînd în considerare grupele de ecuaţii (A_{2r}), (B_{2r+1}) $(r = 0, 1, \ldots)$ (§ 9) şi relaţiile (10.1) — (10.4), se deduc expresiile lui τ^{ij} corespunzînd acestei stări de tensiune :

$$\tau^{\omega 3} = p^{\omega}_{(0)}\frac{z}{h} + \overset{(3)}{\varphi}{}^{\omega} z\left(z^2 - \frac{h^2}{4}\right), \tag{12.1}$$
$$\tau^{33} = \overset{(0)}{\tau}{}^{33} + z^2\overset{(2)}{\tau}{}^{33} + z^4\overset{(4)}{\tau}{}^{33},$$
$$\tau^{\omega\pi} = \widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}(\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z^2\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + z^4\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta}) + \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}(\overset{(0)}{\tau}{}^{33} + z^2\overset{(2)}{\tau}{}^{33} + z^4\overset{(4)}{\tau}{}^{33}),$$

de unde

$$L^{\omega\rho}_{(0)} = \widetilde{E}^{\omega\rho\alpha\beta}\left(h\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^3}{12}\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^5}{80}\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta}\right) + \frac{E^{\omega\pi\alpha\beta}}{E^{3333}}\left(h\overset{(0)}{\tau}{}^{33} + \frac{h^3}{12}\overset{(2)}{\tau}{}^{33} + \frac{h^5}{80}\overset{(4)}{\tau}{}^{33}\right),$$
$$L^{\omega\rho}_{(2)} = \widetilde{E}^{\omega}{}^{\alpha\beta}\left(\frac{h^3}{12}\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^5}{80}\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} + \frac{h^7}{448}\overset{(4)}{e}_{\alpha\beta}\right) + \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\left(\frac{h^3}{12}\overset{(0)}{\tau}{}^{33} + \frac{h^5}{80}\overset{(2)}{\tau}{}^{33} +\right.$$
$$\left. + \frac{h^7}{448}\overset{(4)}{\tau}{}^{33}\right), \quad N^{\rho}_{(1)} = \frac{h^2}{12}p^{\rho}_{(0)} - \frac{h^5}{120}\varphi^{\rho}. \tag{12.2}$$

---

[10]) Pentru simplificarea scrierii vom nota în locul lui W_3 şi $p^3_{(1)}$ respectiv W şi $p_{(1)}$.

Ţinînd seama de relaţiile date în paragrafele 5 şi 10 (vezi de asemenea [52]), prin satisfacerea ecuaţiilor de echilibru

$$L^{\omega\rho}_{(0)}|_{\omega} + p^{\rho}_{(0)} = 0,$$
$$L^{\omega\rho}_{(2)}|_{\omega} - 2N^{\rho}_{(1)} + \frac{h^2}{4} p^{\rho}_{(0)} = 0 \tag{12.3}$$

se obţine următorul sistem de ecuaţii rezolvent în necunoscutele de bază W_α şi $\overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}$:

$$\frac{h}{2}\widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}(W_\alpha|_{\beta\omega} + W_\beta|_{\alpha\omega}) + \delta_2 \frac{E^{\omega\pi 23}}{E^{3333}}\Big(p_{(1)}|_{\omega} + \frac{h^2}{12} p^{\rho}_{(0)}|_{\rho\omega} -$$
$$- \frac{h^5}{120}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}|_{\rho\omega}\Big) + p^{\pi}_{(0)} = 0,$$
$$\widetilde{E}^{\omega\pi\alpha\beta}\Big\{\frac{h^3}{24}(W_\alpha|_{\beta\omega} + W_\beta|_{\alpha\beta}) + \delta_1 \frac{h^5}{720}(W_\lambda|_{\gamma\alpha\beta\omega} + W_\gamma|_{\lambda\alpha\beta\omega})\frac{E^{33\lambda\gamma}}{E^{3333}} -$$
$$- \frac{h^7}{1260}(F_{\alpha 3\rho 3}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}|_{\beta\omega} + F_{\beta 3\rho 3}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}|_{\alpha\omega}) + \frac{h^4}{180}(p^{\rho}_{(0)}|_{\beta\omega}F_{\alpha 3\rho 3} +$$
$$+ p^{\rho}_{(0)}|_{\alpha\omega}F_{\beta 3\rho 3})\Big\} + \delta_2 \frac{E^{\omega\pi 33}}{E^{3333}}\Big(\frac{h^2}{12}p_{(1)}|_{\omega} + \frac{h^4}{240}p^{\rho}_{(0)}|_{\rho\omega} - \frac{h^7}{3360}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}|_{\rho\omega}\Big) +$$
$$+ \frac{h^2}{12}p^{\pi}_{(0)} + \frac{h^5}{60}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\pi} = 0. \tag{12.4}$$

13. ÎNCOVOIEREA TRANSVERSALĂ A PLĂCILOR TRANSVERSAL-IZOTROPE DE GROSIME MEDIE

În cazul corpului transversal-izotrop, în baza relaţiilor (3.2), ecuaţiile (11.4) devin

$$\overline{E}\,W\Big|_{\omega}^{\omega\rho} - \delta_1\frac{h^2}{60}\frac{\overline{E}\,E\,\nu'}{E'(1-\nu)}W\Big|_{\lambda\omega}^{\lambda\omega\rho} + \frac{\overline{E}\,h^2(1+\nu)}{10\,G'}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\omega}\Big|_{\omega}^{\rho} +$$
$$+ \frac{\overline{E}\,h^2(1-\nu)}{10\,G'}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}\Big|_{\omega}^{\omega} - \delta_2\frac{h^2}{5}\frac{\overline{E}\nu'(1+\nu)}{E'}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\sigma}\Big|_{\sigma}^{\rho} - \frac{E}{2h(1+\nu)G'}\Big(p^{\omega}_{(1)}\Big|_{\omega}^{\rho} +$$
$$+ \frac{1-\nu}{1+\nu}p^{\rho}_{(1)}\Big|_{\omega}^{\omega}\Big) + \delta_2\frac{\overline{E}\nu'(1+\nu)}{hE'}p^{\gamma}_{(1)}\Big|_{\gamma}^{\rho} - \delta_1\frac{h\overline{E}\,E}{60\,E'(1-\nu)}\Big(\frac{1-\nu}{E} -$$
$$- 2\frac{\nu'^2}{E'}\Big)p_{(0)}\Big|_{\omega}^{\omega\rho} - 2\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho} = 0; \tag{13.1}$$
$$\frac{h^3}{6}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho}|_{\rho} - p_{(0)} - p^{\alpha}_{(1)}|_{\alpha} = 0,$$

unde $\overline{E} = \dfrac{E}{1-\nu^2}$.

Ecuația $(13.1)_1$ poate fi transcrisă sub forma

$$\overline{E}\,W\Big|_{\omega}^{\omega\rho} - \delta_1\frac{h^2}{60}\frac{\overline{E}\,E\,\nu'}{E'(1-\nu)}W\Big|_{\omega\lambda}^{\omega\lambda\rho} + \frac{h^2}{10}\frac{\overline{E}\,(1-\nu)}{G'}\,\varepsilon^{\rho\gamma}\,\varepsilon_{\mu\lambda}\overset{(2)}{\varphi}{}^{\mu}\Big|_{\gamma}^{\lambda} +$$

$$+\frac{6}{5h\,(1-\nu)}\,k_0^2 p_{(0)}\Big|_{}^{\rho} + \frac{1}{5h\,(1-\nu)}\left[(7-5\nu)\frac{G}{G'} - \delta_2\frac{E\nu'}{E'}\right]p_{(1)}^{\gamma}\Big|_{\gamma}^{\rho} - \tag{13.2}$$

$$-\frac{G}{hG'}\,p_{(1)}^{\rho}\Big|_{\omega}^{\omega} - \delta_1\frac{h}{60}\,\frac{E\overline{E}\left(\dfrac{1-\nu}{E} - 2\dfrac{\nu'^2}{E'}\right)}{E'\,(1-\nu)}\,p_{(0)}\Big|_{\omega}^{\omega\rho} - 2\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho} = 0,$$

unde $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon^{\alpha\beta}$ reprezintă simbolul de permutare cu componentele definite de

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0\,; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon^{12} = -\varepsilon_{21} = -\varepsilon^{21} = 1.$$

Definind potențialul Φ prin relația

$$\overset{(2)}{\varphi}{}^{\rho} = \frac{\overline{E}}{2}\,W\Big|_{\omega}^{\omega\rho} - \delta_1\frac{h^2}{120}\frac{\overline{E}\,E\nu'}{E'\,(1-\nu)}\,W\Big|_{\lambda\omega}^{\lambda\omega\rho} + \varepsilon^{\omega\rho}\,\Phi\Big|_{\omega} + \frac{3}{5h(1-\nu)}\,k_0^2 p_{(0)}\Big|^{\rho} +$$

$$+\frac{1}{10h\,(1-\nu)}\left[(7-5\nu)\frac{G}{G'} - \delta_2\frac{E\nu'}{E'}\right]p_{(1)}^{\gamma}\Big|_{\gamma}^{\rho} - \frac{G}{2hG'}\,p_{(1)}^{\rho}\Big|_{\omega}^{\omega} -$$

$$-\delta_1\frac{h\,E\,\overline{E}}{120\,E'\,(1-\nu)}\left(\frac{1-\nu}{E} - 2\frac{\nu'^2}{E'}\right)p_{(0)}\Big|_{\varkappa}^{\alpha\rho}, \tag{13.3}$$

ecuațiile (13.1) devin

$$\frac{\overline{E}h^3}{12}\left(W - \delta_1\frac{h^2}{60}\,\frac{E\nu'}{E'\,(1-\nu)}\,W\Big|_{\lambda}^{\lambda}\right)\Big|_{\omega\pi}^{\omega\pi} - \left(p_{(0)} - \frac{h^2}{10\,(1-\nu)}\,k_0^2\,p_{(0)}\Big|_{}^{\alpha}\right)\Big|_{\alpha} -$$

$$-\left(p_{(1)}^{\alpha}\Big|_{\alpha} - \frac{h^2}{60}\,k_0^2\,p_{(1)}^{\omega}\Big|_{\omega\pi}^{\pi}\right) = 0\,; \tag{13.4}$$

$$\left(\Phi - \frac{h^2}{10}\,\frac{G}{G'}\,\Phi\Big|_{\sigma}^{\sigma}\right)\Big|_{\lambda}^{\lambda} = \frac{h}{20}\left(\frac{G}{G'}\right)^2\varepsilon_{\rho\lambda}\,p_{(1)}^{\mu}\Big|_{\omega\sigma}^{\omega\lambda\sigma}.$$

Sistemul de ecuații corespunzînd încovoierii transversale a plăcilor de grosime medie este redus astfel la ecuațiile independente $(13.4)_1$ și $(13.4)_2$, care reprezintă generalizarea celor deduse de A. E. Green [30] prin aplicarea algoritmului lui E. Reissner [28], [29], precum și a celor deduse de A.A. Haciatrian [20], [21] prin transformarea ecuațiilor deduse de S.A. Ambarțumian [10].

14. STAREA DE TENSIUNE PLANĂ GENERALIZATĂ A PLĂCILOR TRANSVERSAL-IZOTROPE DE GROSIME MEDIE

În cazul corpului transversal-izotrop, în baza relațiilor (3.2) și considerînd $\delta_2 = 1$, ecuațiile (12.4) devin

$$\frac{h}{2}\frac{E}{1+\nu}\left(W^{\pi}\Big|_{\omega}^{\omega}+\frac{1+\nu}{1-\nu}W^{\alpha}\Big|_{\alpha}^{\pi}\right)-\frac{h^5}{120}\frac{\nu' E}{E'(1-\nu)}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\rho}\Big|_{\rho}^{\pi}+$$

$$+p^{\pi}_{(0)}+\frac{h^2}{12}\frac{E\nu'}{E'(1-\nu)}p^{\rho}_{(0)}\Big|_{\rho}^{\pi}+\frac{E\nu'}{E'(1-\nu)}p_{(1)}\Big|^{\pi}=0, \tag{14.1}$$

$$-\frac{h^3}{12}G\left(W^{\pi}\Big|_{\omega}^{\omega}+\frac{1+\nu}{1-\nu}W^{\alpha}\Big|_{\alpha}^{\pi}\right)-\delta_1\frac{h^5}{360}\frac{E^2\nu'}{E'(1-\nu)^2(1+\nu)}W_{\lambda}\Big|_{\beta}^{\lambda\beta\pi}+$$

$$+\frac{h^7}{2\times 1260}\frac{G}{G'}\varepsilon^{\pi\gamma}\varepsilon_{\mu\lambda}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\mu}\Big|_{\gamma}^{\lambda}+\frac{h^7}{1-\nu}\left(\frac{G}{1260G'}+\delta_2\frac{\nu' E}{3360\,E'}\right)\overset{(3)}{\varphi}{}^{\omega}\Big|_{\omega}^{\pi}-$$

$$-\frac{h^2}{12}\frac{E\nu'}{E'(1-\nu)}p_{(1)}\Big|^{\pi}-\frac{h^4}{240}\frac{E\nu'}{E'(1-\nu)}p^{\rho}_{(0)}\Big|_{\rho}^{\pi}-\frac{h^4}{2\times 180}\frac{G}{G'}\left(p^{\pi}_{(0)}\Big|_{\omega}^{\omega}+\right.$$

$$\left.+\frac{1+\nu}{1-\nu}p^{\rho}_{(0)}\Big|_{\rho}^{\pi}\right)-\frac{h^2}{12}p^{\pi}_{(0)}-\frac{h^5}{60}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\pi}.$$

Definind potențialul Ψ prin relația

$$\frac{h^5}{60}\overset{(3)}{\varphi}{}^{\pi}=\frac{h^3 G}{21\nu'(1+\nu)}(2+\nu-\nu\nu')\left(W^{\pi}\Big|_{\omega}^{\omega}+\frac{1+\nu}{1-\nu}W^{\alpha}\Big|_{\pi}^{\pi}\right)-$$

$$-\delta_1\frac{h^5}{180}\frac{EG\nu'}{E'(1-\nu)^2}W_{\rho}\Big|_{\beta}^{\rho\beta\pi}+h^2\frac{2+\nu'-\nu\nu'}{21\,\nu'(1+\nu)}p^{\pi}_{(0)}+$$

$$+h^4\left[\left(\frac{E\nu'}{E'(1-\nu)^2}\frac{40+34\nu'-6\,\nu\nu'}{240\times 21}-\frac{(1+\nu)G}{360(1-\nu)G'}\right)p^{\rho}_{(0)}\Big|_{\rho}^{\pi}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{360}\frac{G}{G'}p^{\pi}_{(0)}\Big|_{\omega}^{\omega}\right]+h^2\frac{E\nu'}{21\,E'(1-\nu)^2}(2+\nu'-\nu\nu')\,p_{(1)}\Big|^{\pi}+$$

$$+\varepsilon^{\omega\pi}\Psi\Big|_{\omega}, \tag{14.2}$$

ecuațiile (14.1) devin

$$W^{\pi}\Big|_{\omega}^{\omega}+\frac{1+\nu}{1-\nu}W^{\alpha}\Big|_{\alpha}^{\pi}-\frac{2G\,h^2(2+\nu-\nu\nu')}{21\,E'(1-\nu)^2}W^{\rho}\Big|_{\omega\rho}^{\omega\pi}+\frac{1}{Gh}p^{\pi}_{(0)}+$$

$$+\frac{h\,\nu'}{84\,E'(1-\nu)}(13-11\nu'+7\nu-3\nu\nu')\,p^{\rho}_{(0)}\Big|_{\rho}^{\pi}+\frac{2\nu'(1+\nu)}{E'(1-\nu)h}p_{(1)}\Big|^{\pi}-$$

$$-\frac{\nu' hE}{42\times 2E'^2(1-\nu)}(2+\nu'-\nu\nu')\,p_{(1)}\Big|_{\rho}^{\rho\pi}=0, \tag{14.3}$$

$$\Psi\Big|_{\omega}^{\omega} - \frac{h^2}{42}\frac{G}{G'}\Psi\Big|_{\lambda\omega}^{\lambda\omega} + \frac{h^5}{42^2}\frac{GE}{G'}\frac{2+\nu-\nu\nu'}{\nu'(1+\nu)^2}\varepsilon_{\mu\lambda}W^{\mu}\Big|_{\omega\gamma}^{\omega\lambda\gamma} =$$

$$= \frac{h^4}{42}\frac{G}{G'}\varepsilon_{\mu\lambda}\left(\frac{\nu\nu'-\nu'-2}{21\nu'\,21\nu'(1+\nu)}p^{\mu}_{(0)}\Big|_{\gamma}^{\lambda\gamma} + \frac{h^2}{360}\frac{G}{G'}p^{\mu}_{(0)}\Big|_{\omega\gamma}^{\omega\lambda\gamma}\right).$$

Acest sistem de ecuaţii reprezintă analogul pentru cazul întinderii plăcii plane al ecuaţiilor de încovoiere Reissner-Green.

15. DISCUŢIE

Lucrarea dezvoltă o teorie a învelitorilor şi plăcilor anizotrope, ipoteza Love-Kirchhoff fiind abrogată. În mod implicit, contradicţiile introduse de aceste ipoteze sînt eliminate. Teoria este dezvoltată într-un cadru general, astfel încît ea conţine drept cazuri speciale rezultatele obţinute în cadrul altor teorii anterioare astfel:

a) ecuaţiile deduse conţin rezultatele obţinute de S.A. Ambarţumian pentru învelitorile de grosime medie în cazul $e_{33} = \tau^{33} = 0$ [12], [13] şi pentru plăcile de grosime medie în cazul $e_{33}=0$ [15], [16];

b) ecuaţiile de încovoiere ale plăcilor anizotrope deduse în paragraful 11 conţin drept caz special ecuaţiile deduse de E. Reissner [28], [29] şi generalizate de A. E. Green [30] (vezi de asemenea [31]), precum şi ecuaţiile obţinute de A. A. Haciatrian [20], [21] prin transformarea ecuaţiilor deduse de S. A. Ambarţumian [16];

c) teoria reissneriană a plăcilor elastice poate fi analizată în cadrul teoriei prezentate din alt punct de vedere decît cel întîlnit în literatura de specialitate existentă [30], [53]—[55];

d) teoria prezentată permite abordarea în mod unitar a problemei termoelastice (un caz special al acestei probleme a fost abordat în lucrările [52], [56]), a problemei geometric-neliniare [57], precum şi a problemei dinamice a învelitorilor anizotrope [58].

Este demn de remarcat faptul că, în cadrul formulării de faţă, prin alegerea deplasării transversale medii se obţine, pentru cazul încovoierii transversale, sistemul de ecuaţii (13.4). În cazul omogen corespunzător ecuaţiei $(13.4)_1$, la soluţia ecuaţiei biarmonice trebuie să se adauge soluţia ecuaţiei

$$W - \delta_1\frac{h^2}{60}\frac{E\,\nu'}{E'(1-\nu)}W\Big|_{\lambda}^{\lambda} = 0, \tag{15.1}$$

care se amortizează în interiorul domeniului plăcii (soluţie de tipul stratului-limită) şi este totdeuna unică.

În cazul în care în locul lui W se alege drept funcţie necunoscută se obţine deplasarea $\overset{(0)}{V}_3$ a punctelor planului median, în locul ecuaţiei (15.1) se obţine

$$\overset{(0)}{V}_3 + \delta_1\frac{h^2}{40}\frac{E\,\nu'}{E'(1-\nu)}\overset{(0)}{V}_3\Big|_{\lambda}^{\lambda} = 0, \tag{15.2}$$

ecuaţie identică cu cea obţinută de H. M. Muştari [50] şi care după cum a semnalat V. Manea [59], nu admite totdeauna o soluţie unică.

În cazul în care se consideră $e_{33} = 0$, ($\delta_1 = 0$), atunci $W \equiv \overset{(0)}{V}_3$, iar pe de altă parte, dispărînd termenul al doilea din ecuațiile (15.1) și (15.2), rezultă că cele două formulări se suprapun.

Această remarcă a fost făcută deoarece în cadrul a diverse teorii a plăcilor plane elastice [32], [43], [60] se obțin ecuații de tipul (15.2), care prezintă caracteristica menționată mai sus. Prin formularea dată în prezenta lucrare, această situație este înlăturată [12]). Din punctul de vedere al stării de tensiune plană generalizată, prezenta formulare are avantajul de a pune în evidență ecuațiile a căror soluție corespunde stării de tensiune marginale.

Primită la redacție la 6 aprilie 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. W. T. Koiter, *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Proc. IUTAM Symp. on the Theory of thin elastic shells, Delft, 1959, North Holland Publ. Co., 1959.
2. — *A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells*, Part. 1 : Foundation and linear theory, Technological Univ. Rept., Delft, 1959.
3. А. Л. Гольденвейзер, *Развитие теории упругих оболочек. Труды всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике*, (27 января — 3 февраля 1960 г.) Издат. Акад. наук СССР, Москва 1962.
4. P. M. Naghdi, *A survey of recent progress in the theory of elastic shells*, Appl. Mech. Reviews, **9**, *9* (1956).
5. — *Foundations of elastic shell theory*, Progr. Solid. Mech., edited by I. N. Sneddon and R. Hill, **4**, *1* (1963).
6. S. A. Ambartsumian, *Contributions to the theory of anisotropic layered shells*, Appl. Mech. Reviews, **15**, *4* (1962).
7. С. А. Амбарцумян, *Некоторые вапросы развития теории анизотропных слоистых оболочек*, Известия Акад. наук Армянской ССР, Физ. Мат. наук, **XVII**, *3* (1964).
8. Н. А. Килчевский, *Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек*, Теория пластин и оболочек, Киев, АН СССР, 1962.
9. И. И. Воровичч, *Некоторые математические проблемы теории пластин и оболочек*, Сборник 2-й Всес. Съезд, по теорет. и прикл. механ., 1964.
10. Л. Аинола, У. Нигул, *Волновые процессы деформации упругих плит и оболочек*, Изв. Акад. наук Эстонской ССР, Физ. Мат. и Техн. наук, **XIY**, *1* (1965).
11. С. А. Амбарцумян, *К расчету двухслойных ортотопных оболочек*. Изв. АН СССР, ОТН *7* (1957).
12. — *К теории изгиба анизотропных пластинок*, Изв. Акад. наук СССР, ОТН *5* (1958).
13. С. А. Амбарцумян, Д. В. Пестмалджян, *К теории октотропных оболочек и пластинок*, Изв. Акад. наук Армян. ССР, Физ. Мат. наук **12**, *1* (1959).
14. С. А. Амбарцумян, *К общей теории анизотропных оболочек*, Прикладная механ. **22**, *2* (1958).
15. — *К теории изгиба анизотропных пластинок и пологих оболочек*, Прикладная матем. и механ., **24**, *2* ((1962).
16. — *Теория анизотропных оболочек*, Физ. Мат. гиз., Москва, 1961.
17. Х. М. Муштари, И. Г. Терегулов, *Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины*, Изв. Акад. наук, СССР, Механ. и машиностроение, *6* (1959).

[12]) Evident, aceeași concluzie este valabilă și pentru ecuația obținută de H. M. Mușțari [50].

18. Л. Либреску, *К теории упругих анизотропных оболочек и пластинок*, Инженерный Журнал, *4* (1964).
19. L. Librescu, *On the theory of anisotropic elastic shells and plates*, Intern. Journal of Solids and Structures, *3* (1967).
20. А. П. Мелкониан, А. А. Хачатрян, *Об устойчивости прямоугольных трансверсально изотропных пластинок*, Приклад. механика, **II**, *2* (1966).
21. А. А. Хачатрян, *Некоторые задачи изгиба трансверсально изотропных круглых пластинок*, Инженерный журнал Механика твердого тела, *3* (1966).
22. В. В. Понятовский, *Уравнения теории анизотропных пластинок*, Исследования по упругости и пластичности, Сб. 4, Ленинград, Унив., 1965.
23. Yuan Yu Yi, *On linear equations of anisotropic elastic plates*, Quart. Appl. Marh., *22* (1965).
24. L. M. Habip, I. K. Ebcioglu, *On the equations of motion of shells in the reference state*, Ingenieur Archiv, *34*, (1965).
25. L. M. Habip, *Theory of elastic shells in the reference state*, Ingenieur Archiv, *34* (1965).
26. — *Theory of elastic plates in the reference state*, Internat. Journ. Solids and Structures, *2*, 157 (1966).
27. Л. А. Агаловян, *Применение метода асимптотического интегрирования к приближенной теории анизотропных оболочек*, Приклад. матем. и механ., **30**, *2* (1966).
28. E. Reissner, *On the theory of bending of elastic plates*, J. Math. and Phys., *23* (1944).
29. — *On bending of elastic plates*, Quart. Appl. Math., **5**, *1*, (1947).
30. A. E. Green, *On Reissner's theory of bending of elastic plates*, Quart. Appl. Math. **2**, *7* (1949).
31. A. E. Green, W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford, Univ. Press, (1953).
32. Х. М. Муштари, И. Г. Терегулов, *К теории оболочек средней толщины*, доклады Акад. наук СССР, 128, *6* (1959).
33. И. Г. Терегулов, *К теории пластин средней толщины*, Труды Конференции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961.
34. Chang Hu Hai, *On some variational principles in the theory of elasticity and plasticity*, Scientia Sinica, **4**, *1* (1955).
35. K. Washizu, *On the variational principles of elasticity and plasticity*, M.I.T., Aeroelastic Structures Res. Lab. Rech. Rept., **25**, *18* (1955).
36. И. Г. Терегулов, *К вариационным методам в нелинейной теории упругости*, Доклады Акад. наук СССР, 142, *3* (1962).
37. E. Reissner, *On a variational theorem in elasticity*, J. Math. and Phys., **29**, *90* (1950).
38. Yuan, Yu Yi, *Generalized Hamilton's principle and variational equation of motion in nonlinear elasticity theory with application to plate theory*, Journ. Acoust. Soc., Amer., **36**, 111 (1964).
39. И. Г. Терегулов, *К уточненных теорий пластин и оболочек*, Приклад. Матем и механика, **26**, *2* (1962).
40. A. E. Green, W. Zerna, *The equilibrium of thin elastic shells*, Quart. Journ. Appl. Math., **5**, *9* (1950).
41. W. Zerna, *Mathematisch strenge Theorie elastischer Schalen*, Z. Angewandte Math. Mech., *7/8* (1962).
42. D. Rüdiger, *Zur Theorie elastischer Schalen*, Ing. Archiv, *28* (1959), Festschrift R. Grammel.
43. Н. А. Килчевский, *Основы аналитической механики оболочек*, Издат. Акад. наук Украинской ССР, Киев, 1963.
44. Yuan, Yu Yi, *On linear equations of anisotropic elastic plates*, Quart. Appl. Math., *22*, 357 (1965).
45. И. Н. Векуа, *Теория тонких пологих оболочек переменной толщины мент-ниреба*, 1965.
46. R. Tiffen, *An investigation of the transverse displacement equation of elastic plate theory*, Quart. J. Mech. and Appl. Math., **14**, *59* (1961).
47. R. Tifen, P. G. Lowe, *An exact theory of plane stress*, Journ. of London Math. Soc., **40**, 72 (1965).
48. I. L. Ericksen, C. Truesdell, *Exact theory of stress and strain in rods and shells*, Arch. Ration. Mech. Analysis, *4* (1958).
49. В. В. Новожилов, П. М. Финкельштейн, *О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек*, Прикл. матем. и механ., **7**, *5* (1943).
50. Х. М. Муштари, *Теория изгиба плит средней толщины*, Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., *2* (1959).

51. А. Л. Гольденвейзер, *Теория тонких оболочек Гостехтеориздат* 1953.
52. L. Libresco, *Problema termoelastică a învelitorilor şi plăcilor abordată prin eliminarea ipotezei Love-Kirchhoff*, St. cerc. mec. apl., **2**, *21* (1966).
53. А. Л. Гольденвейзер, *К теории изгиба пластинок*, Райсснера, Изв. АН СССР, ОТН, *4* (1958).
54. Л. Я. Аинола, *Об уточненных теориях пластинок типа Райсснера. Теория оболочек и пластинок*, Издат. Акад. наук Армян. ССР, Ереван, 1964.
55. А. В. Колос, *Об области применения приближенных теорий изгиба пластин типа теории Райсснера*, Материалы К VI, Всесоюзной Конференции по теории оболочек и пластинок, Баку, 1966, Издат. „Наука".
56. L. Libresco, *On the thermoelastic problem of shells treated by eliminating the Love-Kirchholf-hypothesis. Non-classical Shell Problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, P.W.N., 1964.
57. — *О геометрическо-нелинейной теории анизотропных упругих оболочек*, Lucrare prezentată la a VI-a Conferinţă unională de teoria învelitorilor şi plăcilor, Baku, 1966.
58. — *Problema elastocinetică în teoria învelitorilor şi plăcilor elastice anizotrope* (lucrare în curs de pregătire).
59. V. Manea, *Cîteva probleme ale teoriei plăcilor plane elastice*, Edit. Academiei, 1966.
60. А. И. Лурие, *Пространственные задачи теории упругости*, Гостехиздат, 1955.

ÎN LEGĂTURĂ CU CALCULUL STRUCTURILOR FORMATE DIN ELEMENTE PREFABRICATE

de S. RĂUTU şi V. BĂNUŢ

531.2

În lucrare se prezintă calculul structurilor formate din elemente prefabricate cu considerarea deplasărilor relative dintre elemente în punctele de îmbinare.
S-a considerat că eforturile nu depăşesc limita elastică, iar deplasările relative dintre elemente sînt proporţionale cu eforturile care apar în îmbinări.
Lucrarea este alcătuită din două părţi : în prima parte sînt expuse bazele teoretice ale metodei de calcul, iar în partea a doua sînt date exemple pentru calculul static, de stabilitate şi dinamic.
Rezultatele obţinute prin exemplele tratate sînt interpretate şi comparate cu rezultatele obţinute la aceleaşi structuri, considerate ca fiind executate monolit.

Calculul structurilor formate din elemente prefabricate constituie o problemă deosebit de importantă pentru cercetătorii din domeniul construcţiilor, cu atît mai mult cu cît elementele prefabricate se utilizează pe o scară din ce în ce mai largă.

O caracteristică a acestor structuri este reprezentată de faptul că în punctele de legătură îmbinările au rigiditatea mai mică şi în anumite cazuri permit deformaţii locale. Se pune problema modului în care se va ţine seama în calcul de influenţa elementelor de legătură asupra distribuţiei eforturilor în elementele static nedeterminate, asupra deformaţiilor structurii şi asupra stabilităţii de ansamblu a structurii de rezistenţă.

Îmbinarea elementelor prefabricate se realizează cu o rigiditate mai mică decît rigiditatea fiecărui element şi, ca atare, în structură are loc o redistribuţie de eforturi.

Dacă îmbinarea este astfel executată încît nu permite nici un fel de deplasări relative între elementele prefabricate, modificarea eforturilor datorită variaţiei rigidităţii pe porţiunea în care se realizează îmbinarea poate fi neglijată. De asemenea, se poate neglija influenţa asupra stabilităţii generale a construcţieţi şi asupra comportării la acţiunea sarcinilor dinamice. În cazul în care legăturile dintre elementele prefabricate permit deplasări locale (rotiri sau translaţii pe una sau pe două direcţii în planul structurii), acestea au o influenţă hotărîtoare asupra distribuţiei de eforturi şi asupra comportării de ansamblu a construcţiei.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 27, NR. 1, P. 129–143, BUCUREŞTI, 1968

O serie de cercetători au acceptat că legăturile dintre elementele prefabricate permit deplasări relative, elastice, direct proporționale cu eforturile ce iau naștere în legăturile respective. În cazul în care deformațiile sînt mici, aproximarea relației dintre eforturi și deformații printr-o relație liniară este întotdeauna acceptabilă. Pentru acest caz, V. Fiřt [1] dă metodica de calcul a structurilor pornind de la principiile generale ale metodei deplasărilor.

În ceea ce urmează vom prezenta calculul acestor structuri prin metoda eforturilor, care prezintă o serie de avantaje în comparație cu metoda propusă de V. Fiřt.

Fie un sistem de n ori static nedeterminat, prezentînd p puncte de cedări elastice.

Cedarea elastică a fiecărei legături este dată de o relație de forma

$$\varphi_{ki} = A_k \cdot m_{ki},$$
$$u_{ki} = B_k \cdot n_{ki},$$
$$v_{ki} = C_k \cdot t_{ki},$$

unde

φ_{ki} este rotirea relativă a secțiunilor din punctul k datorită solicitării i,

u_{ki} — deplasarea relativă axială a secțiunilor din punctul k datorită solicitării i,

v_{ki} — deplasarea relativă transversală a secțiunilor din punctul k datorită solicitării i,

A_k, B_k, C_k sînt caracteristicile elastice ale legăturii dintre elementele prefabricate.

În cazul metodei eforturilor, existența unor legături elastice cu caracteristici date nu influențează asupra numărului de necunoscute, ci

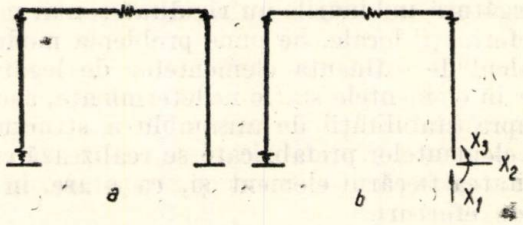


Fig. 1

are influență numai asupra mărimii deplasărilor ce intervin în ecuațiile de condiție.

Fie sistemul de trei ori static nedeterminant din figura 1*a*, avînd două legături elastice.

Sistemul de bază ales și necunoscutele rezultate sînt date în figura 1*b*.

Ecuațiile canonice ale metodei eforturilor au forma

$$\sum X_j \delta^*_{ij} + \Delta^*_{ip} = 0, \qquad (1)$$

unde

X_j este efortul necunoscut din legătură suprimată j,

δ_{ij} — deplasarea pe direcția necunoscutei i cînd pe direcția necunoscutei j acționează o sarcină egală cu unitatea,

Δ_{ip} — deplasarea pe direcția i cînd asupra sistemului de bază acționează sarcinile exterioare date.

Calculul deplasărilor elastice se poate efectua utilizînd principiul lucrului mecanic virtual, adică

$$\delta_{ij}^{*} = L_{ij} = W_{ij}, \tag{2}$$

unde

L_{ij} este lucrul mecanic al forței $X_i = 1$ parcurgînd deplasarea dată de forța $X_j = 1$,

W_{ij} — energia potențială de deformație acumulată de sistem, care este egală cu lucrul mecanic al eforturilor produse de forță $X_i = 1$ parcurgînd deformațiile elastice produse de forța $X_j = 1$.

Deci, dacă stările de tensiune i și j sînt date prin diagramele m_i, n_i, t_i și m_j, n_j, t_j, deplasarea elastică are expresia

$$\delta_{ij}^{*} = \int \frac{m_i m_j}{E I} \mathrm{d}x + \int \frac{n_i n_j}{E A} \mathrm{d}x + \int \frac{\alpha t_i t_j}{G A} \mathrm{d}x + \tag{2'}$$

$$+ \sum_{1}^{p} A_k m_{ki} m_{kj} + \sum_{1}^{p} B_k n_{ki} n_{kj} + \sum_{1}^{p} C_k t_{ki} t_{kj}$$

și analog

$$\Delta_{ip}^{*} = \int \frac{m_i M_p^0}{E I} \mathrm{d}x + \int \frac{n_i N_p^0}{E A} \mathrm{d}x + \int \frac{\alpha t_i T_p^0}{G A} \mathrm{d}x + \tag{3}$$

$$+ \sum_{1}^{p} A_k m_{ki} M_p^0 + \sum_{1}^{p} B_k n_{ki} N_p^0 + \sum_{1}^{p} C_k t_{ki} T_p^0,$$

unde M_p^0, N_p^0 și T_p^0 sînt eforturi pe sistemul de bază produse de sarcinile exterioare.

Pentru a simplifica scrierea relațiilor (2') și (3), în ceea ce urmează se neglijează influența sarcinilor axiale și a forțelor tăietoare asupra deplasărilor (cum se obișnuiește în mod curent în calculul cadrelor) și se presupune că există cedări ale îmbinărilor numai pe o singură direcție (rotire). Relațiile obținute sînt însă evident valabile și în cazul în care formula deplasărilor este completă.

Ecuațiile canonice (1) pot fi puse sub forma matriceală (4)

$$[\,\|m_i'\| \times \|A\| \times \|m_i\| + \|m_i'\| \times \|A_k\| \times \|m_i\|\,] \times \|X_i\| +$$

$$+ \|m_i'\| \times \|A\| \times \|M_p^0\| + \|m_i'\| \times \|A_k\| \times \|M_p^0\| = 0, \tag{4}$$

unde

$\|m_i\|$ este o matrice cu m linii și n coloane, n fiind gradul de nedeterminare statică a sistemului, iar m o serie de puncte caracteristice ale diagramelor de moment m_i

$\| m_i' \|$ — transpusa matricei,
$\| A \|$ — matricea flexibilităților cu m linii și n coloane care depinde de caracteristicile structurii [2],
$\| A_k \|$ — o matrice-vector (coloană) cu p elemente, p fiind numărul de legături elastice,
$\| X_i \|$ — o matrice-coloană avînd n elemente.
Diagrama finală are forma

$$\| M_p \| = \| M_p^0 \| + \| m_i \| \times \| X_i \| . \tag{5}$$

Metoda propusă o considerăm mai indicată în comparație cu metoda deplasărilor, utilizată în lucrarea [1], deoarece numărul necunoscutelor nu se mărește prin existența unor legături care permit deplasări relative între elementele structurii.

De exemplu, rezolvarea cadrului portal din figura 2 prin această metodă conduce la un număr de trei necunoscute, iar prin metoda din lucrarea [1] numărul necunoscutelor ajunge la 15.

Metoda propusă se poate aplica atît în calculul static al structurilor static nedeterminate, cît și în calculul dinamic și de stabilitate.

Valoarea coeficientului A_k acceptată de calculator depinde de modul în care se proiectează și se execută legătura dintre elementele prefabricate.

Din experiențele executate atît la noi în țară de către INCERC, cît și din experiențele efectuate în Cehoslovacia [1], rezultă că între elementele prefabricate există mici cedări ale legăturilor care duc la mici deformații locale (chiar și în cazul elementelor metalice). Experiențele efectuate la INCERC au confirmat faptul că aceste deformații sînt însoțite de redistribuții de eforturi, care, la elementele static nedeterminate, nu pot fi neglijate.

În cazul solicitării statice, redistribuția de eforturi conduce la supraîncărcarea unor secțiuni și la descărcarea altora, iar deplasările rezul-

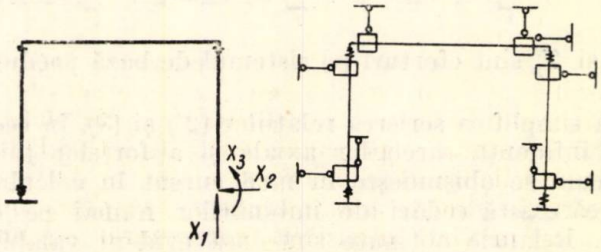


Fig. 2

tate sînt întotdeauna mai mari decît cele ale construcției cu legături care nu permit deplasări relative între elemente.

În consecință, sarcina critică se va micșora, ca și frecvența vibrațiilor proprii.

În lucrarea [1] sînt date valorile $\frac{1}{A_k}$ pentru o serie de construcții, valori obținute pe bază experimentală și teoretică variind între $(0{,}2-5{,}0) \times i$, funcție de tipul de îmbinare. Deci A_k ar rezulta egal cu

$(5{,}00-0{,}2)\times\frac{1}{i}$. După părerea noastră, valorile maxime ale coeficientului A_k sînt obținute în ipoteze mult acoperitoare și că în realitate valoarea lui A_k pentru o construcție executată acceptabil este $(0{,}01-0{,}50)\times\frac{1}{i}$.

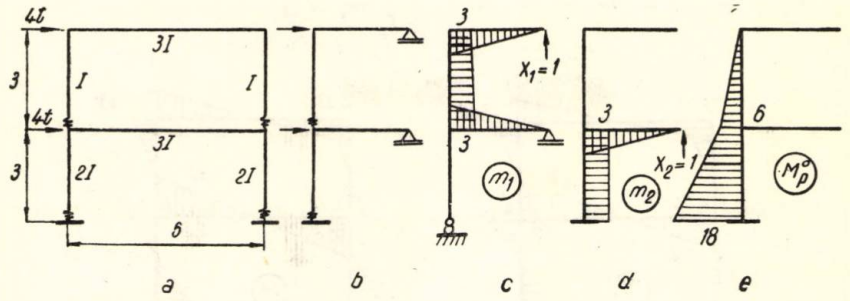


Fig. 3

Această mărime trebuie însă determinată pentru fiecare gen de construcție, prin încercări pe elemente în mărime naturală $\left(i=\frac{EI_s}{l_s}\right)$.

Calculul static al unei structuri prefabricate trebuie efectuat atît în ipoteza legăturilor rigide, cît și în ipoteza legăturilor elastice, iar fiecare secțiune trebuie dimensionată la efortul maxim rezultat din ambele ipoteze.

Pentru calculul de stabilitate este suficient rezultatul obținut în cazul legăturilor care permit deplasări relative între elemente, deoarece coeficientul de siguranță obținut este acoperitor.

La calculul dinamic trebuie acceptate ambele ipoteze (legătura rigidă și legătura elastică), mărimea frecvenței vibrațiilor proprii putînd lua orice valoare între valorile extreme, în funcție de comportarea reală a legăturii între prefabricate.

1. Pentru a exemplifica modul de aplicare a metodei în calculul static, vom rezolva un cadru cu 2 nivele (fig. 3) și un cadru cu 20 de nivele. Calculul cadrului cu 20 de nivele s-a făcut, la calculatorul CIFA—102 de la Institutul de studii și proiectări energetice (I.S.P.E.).

Structura din figura 3*a* se consideră alcătuită din două cadre prefabricate. Legăturile dintre aceste elemente se presupune că admit o deformație (rotire) maximă admisibilă, corespunzătoare unei valori $a_k = 0{,}1$, iar legăturile dintre prefabricate și fundații o deformație corespunzătoare unei valori $a_k = 0{,}05$, unde $a_k = A_k\, i_{si}$, $i_{si}=\frac{EI_{si}}{l_{si}}$.

Efectuînd un calcul obișnuit, expresiile deplasărilor elastice sînt

$$\delta_{11}=\frac{33}{EI},\qquad \delta_{22}=\frac{16{,}5}{EI},\qquad \Delta_{1p}=-\frac{27}{EI},$$

$$\delta_{12}=\frac{3}{EI},\qquad \Delta_{2p}=-\frac{54}{EI}.$$

iar diagrama finală este dată în figura 4.

Calculînd în ipoteza unor deplasări relative în legături, expresiile deplasărilor se modifică astfel:

$$\delta^*_{ij} = \delta_{ij} + A_k m_i m_j = \delta_{ij} + \frac{a_k l_i}{EI_i} m_i m_j,$$

$$\Delta^*_{ip} = \Delta_{ip} + A_k m_i M^0_k = \Delta_{ip} + \frac{a_k l_i}{EI_i} m_i M^0_p,$$

unde $A_k = \frac{a_k}{i_{si}}$.

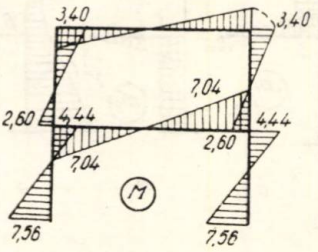


Fig. 4

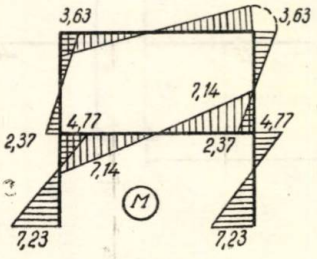


Fig. 5

Termenul al doilea din expresia deplasărilor reprezintă influența legăturii elastice.

Introducînd valorile din exemplul de mai sus, se obține

$$\delta^*_{11} = \frac{33}{EI} + \frac{0{,}1 \times 3 \times 3^2}{EI} = \frac{35{,}7}{EI}, \quad \Delta^*_{1p} = -\frac{27}{EI} - \frac{0{,}1 \times 3 \times 3 \times 6}{EI} = -\frac{32{,}4}{EI},$$

$$\delta^*_{12} = -\frac{3}{EI} = \delta_{12},$$

$$\delta^*_{22} = \frac{16{,}5}{EI} + \frac{0{,}05 \times 3 \times 3^2}{2EI} = \frac{17{,}175}{EI}, \quad \Delta^*_{2p} = -\frac{54}{EI} - \frac{0{,}05 \times 3 \times 3 \times 18}{2EI} = -\frac{58{,}05}{EI}.$$

Diagrama finală este dată în figura 5.

Analizînd diagramele finale pentru cele două cazuri, rezultă o variație a eforturilor de 4 — 8%: în legăturile care permit deplasări relative eforturile scad, iar în cele rigide eforturile cresc.

În continuare se prezintă diagramele de eforturi pentru cadrul cu 20 de nivele în ambele ipoteze de calcul (legături între elemente fără deplasări relative și cu deplasări relative caracterizate prin valoarea $A_k = \frac{0{,}1}{i_{si}}$).

Comparînd cele două diagrame de eforturi, se observă că pentru o cedare elastică foarte mică între elemente $\left(A_k = \frac{a_k}{i_{si}} = \frac{0{,}1}{i_{si}}, \text{ unde } i_{si} = \frac{EI}{3}\right)$, rezultă o scădere a eforturilor în aceste secțiuni cu 3—10%. În cazul unor legături mai slabe, eforturile scad repede în aceste secțiuni și cresc acolo

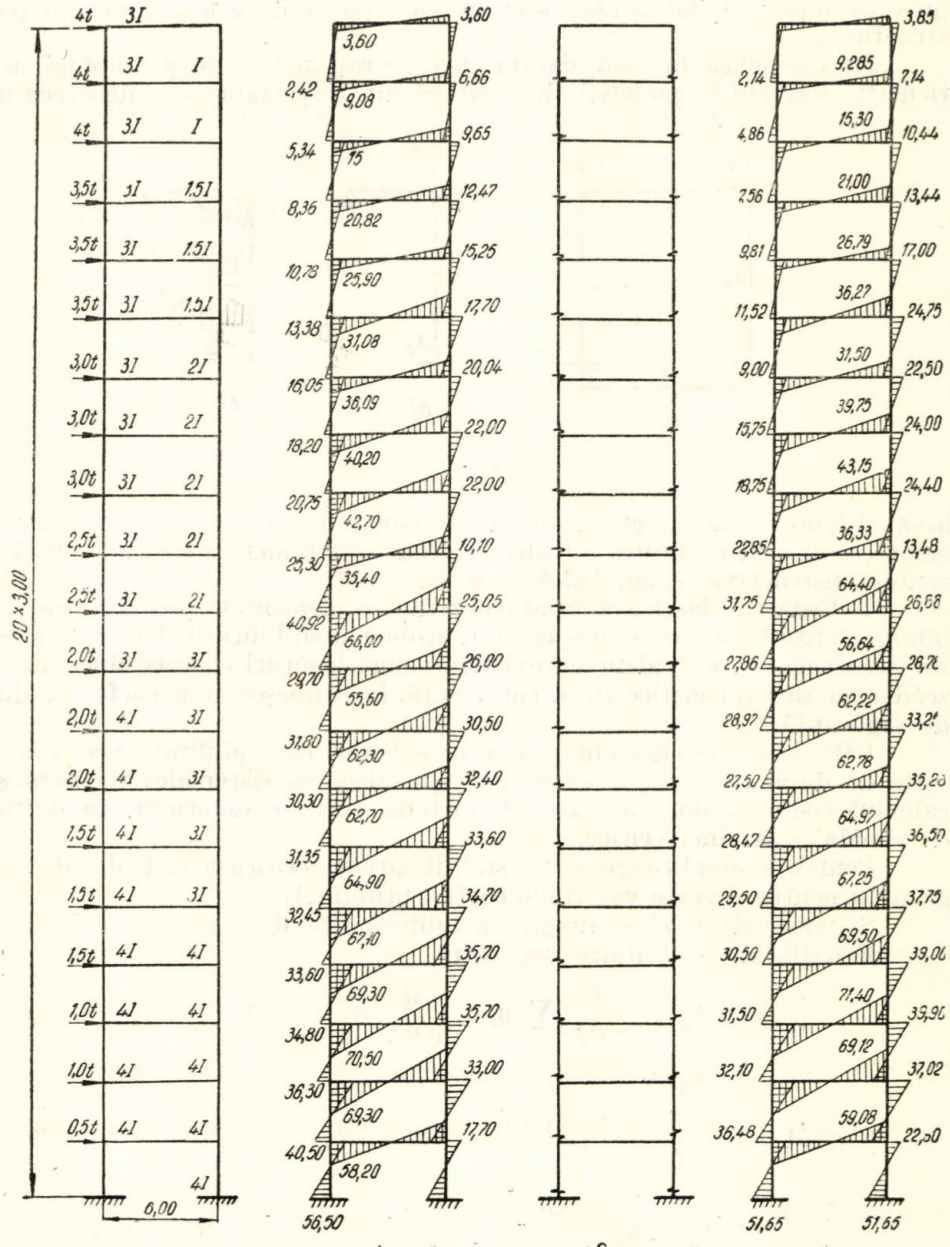


Fig. 6

unde continuitatea este asigurată. Aşadar, problema legăturii dintre elementele prefabricate trebuie analizată cu deosebită atenţie, pentru a nu provoca suprasolicitarea unor secţiuni care poate duce la compromiterea structurii.

De asemenea nu considerăm că este raţional să se presupună articulaţii perfecte în punctele de legătură dintre prefabricate, deoarece în

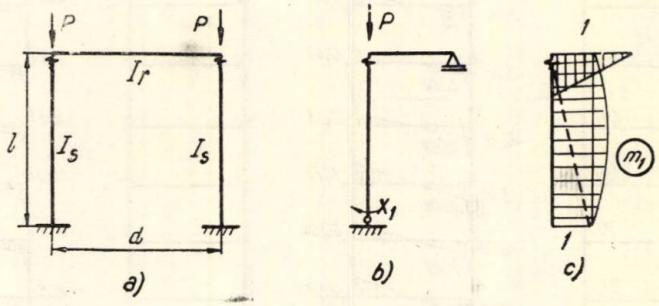


Fig. 7

această ipoteză unele secţiuni sînt dimensionate la eforturi mult superioare celor ce apar în realitate, iar alte secţiuni sînt dimensionate pe considerente constructive (cazul halelor cu un nivel).

2. Cedarea elastică a legăturilor dintre elementele prefabricate are o importanţă hotărîtoare în special în problema stabilităţii elastice a acestor structuri. Este evident că existenţa unei legături elastice duce la o scădere a sarcinii critice şi, în consecinţă, la o micşorare a coeficientului de siguranţă.

Utilizarea metodei eforturilor în calculul de stabilitate prezintă o serie de dezavantaje în ceea ce priveşte alegerea sistemelor de bază şi calculul coeficienţilor [3]. Totuşi, metoda permite determinarea destul de rapidă a sarcinei critice.

Pentru exemplificare se va stabili sarcina critică a cadrului din figura 7*a* pentru diverse valori ale coeficientului A_k.

Sistemul de bază şi diagrama unitară sînt date în figura 7*b* şi *c*. Ecuaţia de stabilitate are forma

$$\delta_{11} = \frac{l}{3EI_s} \sum \theta_i + \frac{d}{6EI_r} + A_k \,.\, 1.1,$$

$$\delta_{11} = 0.$$

Notînd $i_s = \frac{EI_s}{l}$, $\quad i_r = \frac{EI_r}{d}$, $\quad A_k = \frac{a_k}{i_s}$,

ecuaţia devine $\sum \theta_i + \frac{i_s}{2i_r} + 3a_k = 0$,

unde

$\theta_i(v)$ este o funcţie care ţine seama de influenţa forţei axiale asupra deplasărilor elastice [3],

$v = kl$ — parametru de încărcare.

Rezolvînd această ecuație pentru diverse valori ale raportului $\frac{i_r}{i_s}$ și ale coeficientului a_k, se obțin curbele de variație a parametrului critic v_{cr}, reprezentate în figura 8.

În figurile 9 și 10 se prezintă variația parametrului critic v_{1cr} pentru cadrul cu o deschidere cu riglă înclinată și pentru cadrul cu două deschideri cu riglă orizontală.

Remarcăm faptul că o cedare relativ mică a legăturilor dintre prefabricate duce la o scădere a parametrului critic cu 15—20%, ceea ce reprezintă o scădere a sarcinii critice cu 25—35 %.

3. Metoda se poate aplica și la calculul dinamic al structurilor alcătuite din elemente prefabricate.

Fie sistemul din figura 11, avînd două mase concentrate pe cei doi stîlpi. Din punct de vedere dinamic, sistemul are un singur grad de libertate.

Presupunem că îmbinările dintre stîlpi și riglă sînt realizate prin legături elastice, caracterizate prin constanta

$$\varphi_{1i} = \frac{a_{k1}}{i_s} m_{1i},$$

iar legătura dintre stîlpi și fundație reprezintă tot o încastrare elastică, caracterizată prin relația

$$\varphi_{2i} = \frac{a_{k2}}{i_s} m_{2i}.$$

Vibrația proprie a structurii va duce la o deplasare antisimetrică, iar valoarea frecvenței vibrațiilor proprii (ω) este dată de relația

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{y_{st}}}.$$

Pentru determinarea săgeții y_{st} se alege sistemul de bază din figura 11 *b*. Deplasările elastice și necunoscuta X_1 sînt:

$$EI_s\,\delta_{11}^* = \frac{l^3}{72}[19 + 18(a_{k_1} + a_{k_2})],$$

$$EI_s\,\Delta_{1p}^* = -\frac{Pl^3}{8}(1 + 2a_{k_2}),$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1p}^*}{\delta_{11}^*} = \frac{9P(1 + 2a_{k_2})}{19 + 18(a_{k_1} + a_{k_2})}.$$

$$I_r = 3I_s, \qquad i = \frac{EI}{l},$$

De remarcat faptul că X_1 este funcție de a_{k_1} și a_{k_2}. Variația necunoscutei X_1 pentru diferite valori ale coeficienților a_{k_1} și a_{k_2} este reprezentată în figura 12.

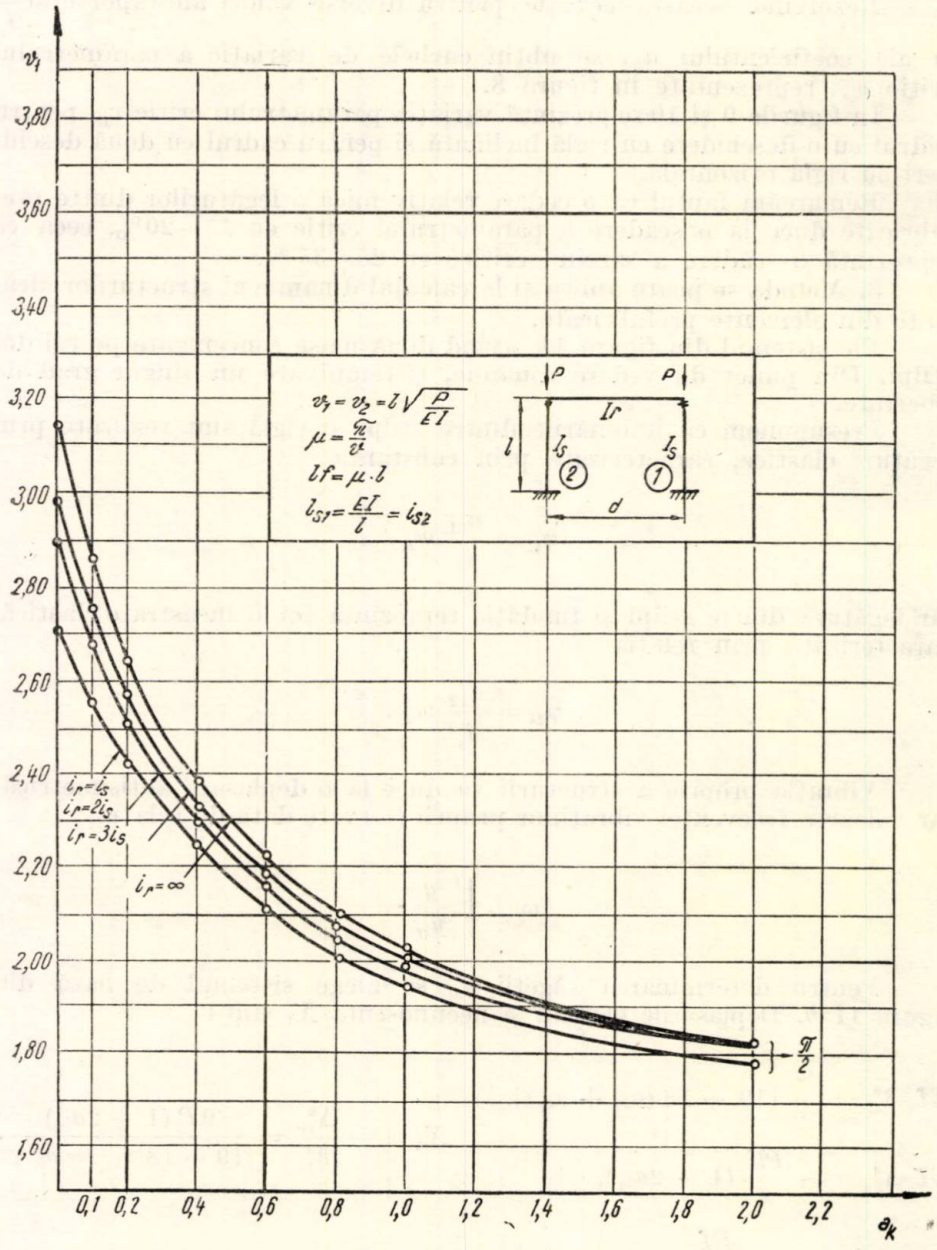


Fig. 8. — Variația parametrului critic v_1.
Stîlpi încastrați elastic în rigle. Încastrarea elastică permite numai rotirea relativă între stîlp și riglă.

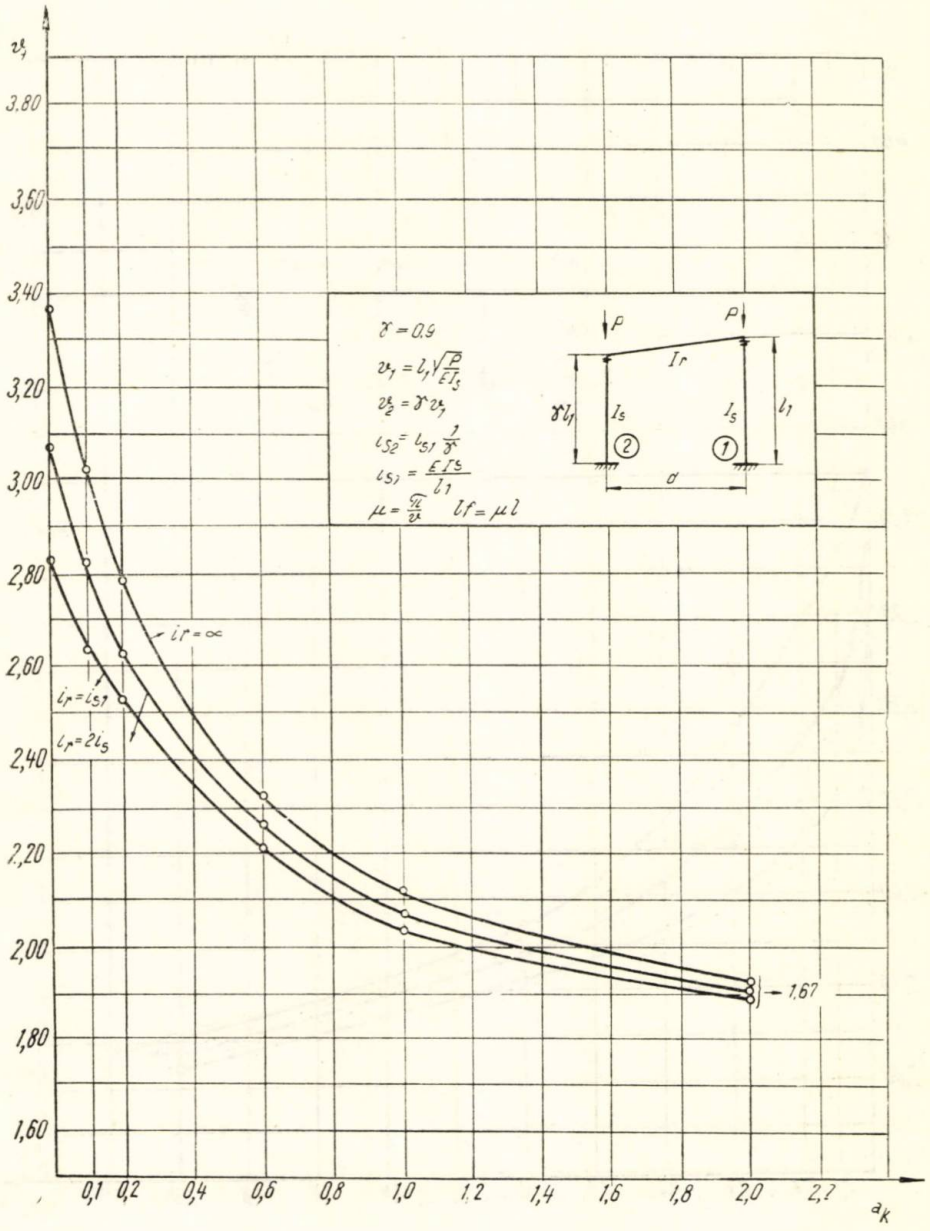


Fig. 9. — Variația parametrului critic v_1.
Stîlpi încastrați elastic în rigle. Încastrarea elastică permite numai rotirea relativă între stîlp și riglă.

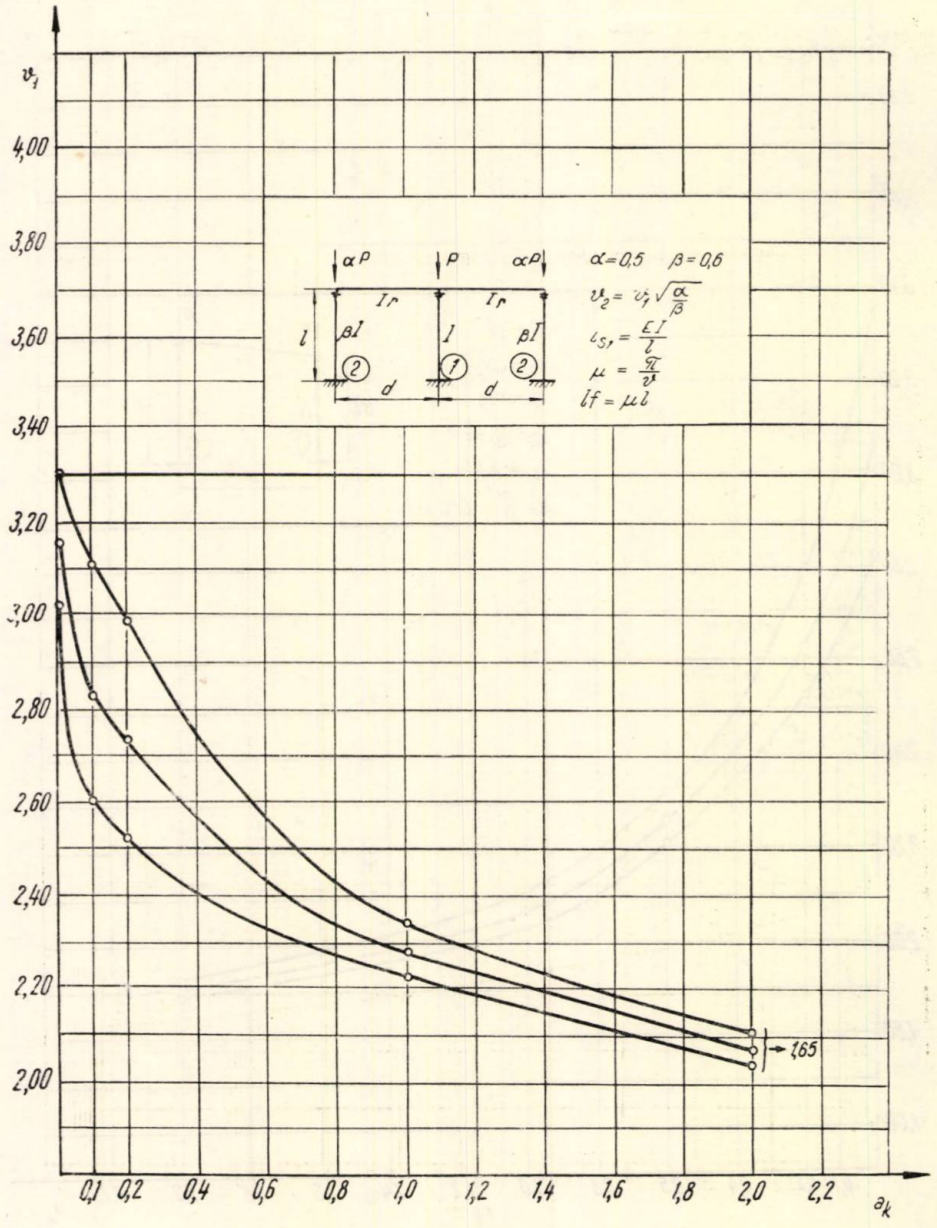


Fig. 10. — Variația parametrului critic v_1.
Stîlpi încastrați elastic în rigle. Încastrarea elastică permite numai rotirea relativă între stîlp și riglă.

Deplasarea orizontală a cadrului este obținută din relațiile

$$y_{st} = \int \frac{m_2 M_p}{EI} \mathrm{d}x = P \int \frac{m_2^2 \mathrm{d}x}{EI} + X_1 \int \frac{m_1 m_2}{EI} \mathrm{d}x +$$

$$+ a_{k_2} \frac{Pl^2}{4i_s} 2 - a_{k2} X_1 \frac{l^2}{4i_s} 2, \tag{6}$$

$$EIy_{st} = Pl^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{a_{k_2}}{2} \right) - X_1 l^3 \left(\frac{1}{4} + \frac{a_{k_2}}{2} \right). \tag{7}$$

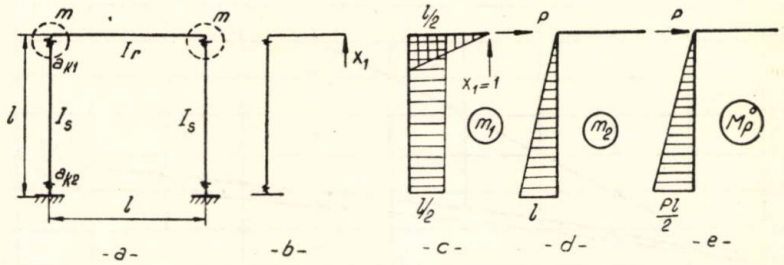


Fig. 11

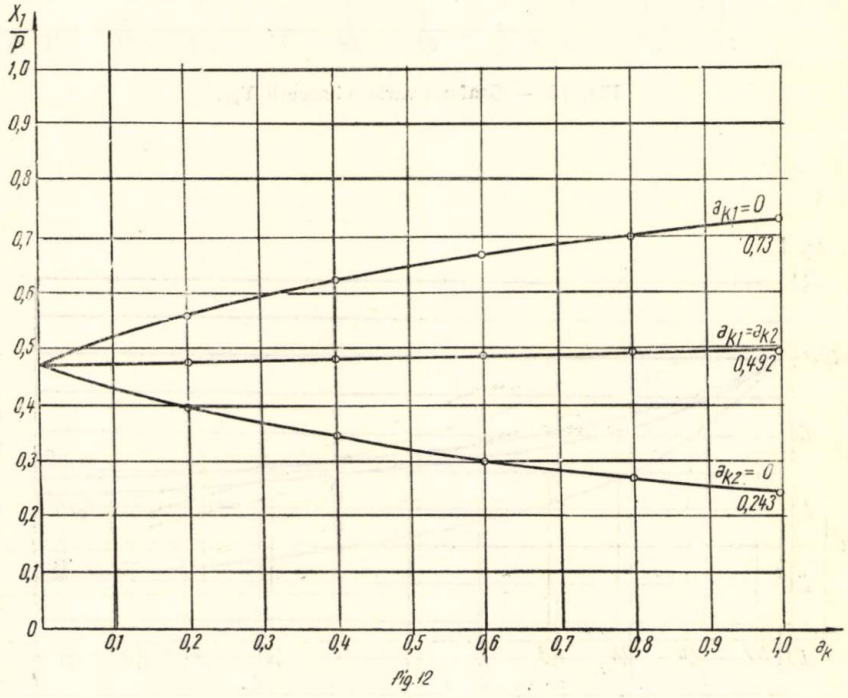


Fig. 12. — Graficul variației necunoscutei X_1.

Dînd diverse valori lui a_{k_1} și a_{k_2}, din graficul prezentat în figura 12 se obține valoarea X_1, iar din formula (7) mărimea deplasării elastice (vezi fig. 13).

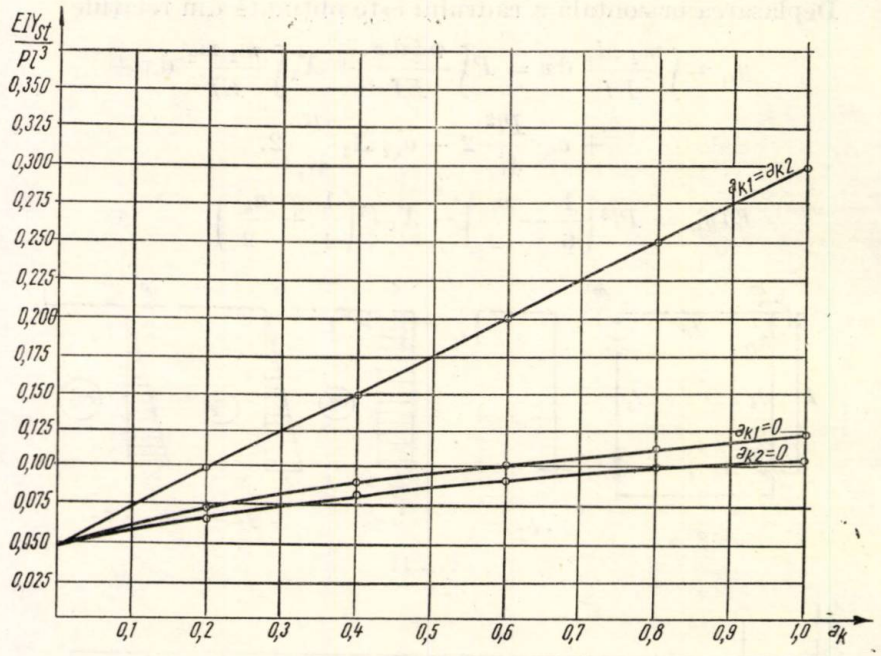


Fig. 13. — Graficul variaţiei săgeţii Y_{st}.

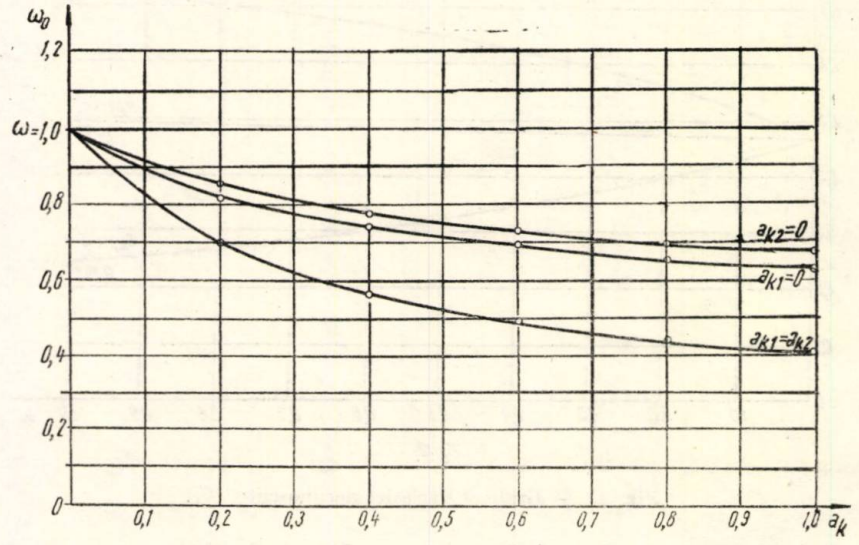


Fig. 14. — Graficul variaţiei frecvenţei vibraţiilor proprii ω_0:
ω — frecvenţa vibraţiilor proprii a sistemului cu legături perfecte;
ω_0 — frecvenţa vibraţiilor proprii a sistemului cu legături elastice.

Notînd că frecvența vibrațiilor proprii obținută în cazul legăturilor rigide ($a_{k_1} = a_{k_2} = 0$) este egală cu unitatea, din figura 14 rezultă variația frecvenței vibrațiilor proprii ale cadrului pentru diverse valori ale coeficienților a_{k_1} și a_{k_2}.

Din exemplele tratate rezultă că, în cazul construcțiilor formate din elemente prefabricate, cedarea elastică a legăturilor duce la o redistribuție de eforturi, de care trebuie ținut seama atît în calculul static, cît și în calculul dinamic și de stabilitate a structurii.

Metoda prezentată permite un calcul mai rațional al construcțiilor formate din elemente prefabricate, dînd inginerului proiectant o imagine clară asupra modului de comportare a structurii de rezistență sub sarcină.

BIBLIOGRAFIE

1. V. Fiřt, *Stabilita montovanych konstruckci*, Praha, 1964 S N T L. S Y T L
2. S. Rautu, M. Bergman, *Stabilitatea statică a sistemelor elastice*, Bucureşti, Edit. didactică, 1960.

CALCULUL DIAFRAGMELOR CU GOLURI REZEMATE ELASTIC LA SARCINI ORIZONTALE

de EINAR KEINTZEL
D. S. A. P. C., Brașov

539.4

Se dau relații pentru calculul diafragmelor cu un șir de goluri rezemate elastic (pe o fundație continuă elastică, pe o fundație întreruptă în dreptul șirului de goluri sau pe stîlpi) la sarcini orizontale, avînd o distribuție uniformă sau triunghiulară.

În majoritatea lucrărilor care tratează calculul diafragmelor cu un șir de goluri la forțe orizontale, se consideră numai cazul particular al diafragmelor rezemate pe fundații infinit rigide. În practică intervin însă și cazuri în care ipoteza simplificatoare a unei rezemări infinit rigide nu se poate aplica : în afară de diafragmele avînd fundații elastice (fig. 1 *a*) se numără aici diafragmele cu fundații întrerupte în dreptul șirului de goluri (fig. 1 *b*) și diafragmele rezemate pe stîlpi (fig. 1 *c*, *e*, *d*).

În lucrările [5], [8] se tratează unele cazuri particulare ale problemei diafragmelor rezemate elastic încărcate cu sarcini orizontale uniform distribuite. Astfel în [8] se tratează diafragmele rezemate pe stîlpi, fără a se indica însă soluția exactă a ecuației diferențiale a lunecărilor din zona șirului de goluri, rezolvarea acestei ecuații făcîndu-se numai în mod aproximativ, prin diferențe finite. În [5] se dă soluția ecuației diferențiale a lunecărilor pentru diafragme cu fundații întrerupte în dreptul șirului de goluri ; în vederea obținerii acestei soluții se neglijează însă deformațiile corespunzînd forțelor axiale din elementele verticale ale diafragmei, adică încovoierii diafragmei în ansamblu. După cum arată însă calcule comparative făcute pentru cazul particular al rezemării articulate a diafragmei, caz particular tratat în [5] și cu considerarea în calcul a deformațiilor din încovoierea diafragmei în ansamblu, neglijarea deformațiilor din încovoierea diafragmei în ansamblu este descoperitoare, lunecările maxime din buiandrugi, calculate exact, fiind sensibil mai mari decît cele obținute prin neglijarea acestor deformații.

În [9] se extind rezultatele din [5] și pentru sarcina triunghiulară și parabolică, păstrînd ipotezele de bază.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 27, NR. 1, P. 145–157, BUCUREȘTI 1968

În cele ce urmează se completează şi se generalizează relaţiile din [5], [8], [9], dînd soluţia exactă a ecuaţiei diferenţiale a lunecărilor din zona şirului de goluri atît pentru cazul distribuţiei uniforme a încărcării orizontale, cît şi pentru cazul distribuţiei triunghiulare, distribuţie ce corespunde sarcinilor seismice şi considerînd în calcul şi deformaţiile din încovoierea diafragmei în ansamblu.

1. ECUAŢIA DIFERENŢIALĂ A LUNECĂRILOR

La o diafragmă cu un şir de goluri încărcată prin sarcini orizontale, lunecarea $L(x)$, preluată de un buiandrug situat la nivelul x, se determină după [1], [2], [3], [6] în funcţie de forţa tăietoare $Q(x)$, acţionînd diafragma în ansamblu, din ecuaţia diferenţială

$$L'' - \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 L = -\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \frac{Sh}{I}\, Q, \tag{1}$$

unde

$$\alpha = H \sqrt{\frac{AG_{red}}{2ahE}\left[\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} + \frac{2c(2c-2a)}{I_1+I_2}\right]}$$ este

indicele de monolitism al diafragmei, determinat după expresia dată în [2], [3]; menţionăm că parametrul α se foloseşte şi în lucrările [1], [6], [7], în aceste lucrări indicîndu-se însă o expresie mai puţin exactă decît în [2], [3];

$$AG_{red} = \frac{1}{\frac{a^2}{3EI_b} + \frac{1{,}2}{A_bG}}$$ — rigiditatea la lunecare a fîşiei prin care se înlocuieşte, după [2], [3], zona şirului de goluri, stabilită pentru materiale elastice şi omogene; în [2], [4] se recomandă pe baza unor cercetări experimentale ca în cazul diafragmelor din beton armat să se reducă valoarea AG_{red} cu coeficientul 0,25, ţinînd cont astfel de fisurarea buiandrugilor;

A_1, A_2 — ariile secţiunilor celor două elemente verticale ale diafragmei,

I_1, I_2 — momentele de inerţie ale acestor elemente,

A_b, I_b — aria secţiunii şi momentul de inerţie al buiandrugilor între goluri,

$$S = \frac{2c}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2}}$$ — momentul static al ariei A_1 sau A_2 faţă de centrul de greutate al diafragmei,

$I = I_1 + I_2 + 2cS$ — momentul de inerţie al diafragmei,

E, G — modulul de elasticitate longitudinal şi cel transversal,

$2c$ — distanţa dintre centrele de greutate ale ariilor celor două elemente verticale ale diafragmei.

Semnificaţia notaţiilor H, h, 2 a rezultă din figura 1.

Pentru punerea condiţiilor la limită va fi util să transformăm ecuaţia (1), exprimînd lunecările $L(x)$ în funcţie de forţele axiale, în elementele verticale ale diafragmei :

$$N(x) = \frac{1}{h} \int_x^H L(u)\,du.$$

Integrînd fiecare membru al ecuaţiei (1) pe intervalul (x, H) şi introducînd

$$\int_x^H L\,du = hN,$$

$$\int_x^H L''\,du = L'(H) - L'(x) = -L'(x) = hN''$$

(din $y''(H) = 0$ rezultă $L'(H) = 0$, [6, p. 309],

$$\int_x^H Q\,du = M,$$

ecuaţia (1) devine

$$N'' - \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 N = -\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \frac{S}{I}\, M. \tag{2}$$

Notînd

$$\xi = \frac{x}{H},$$

soluţia ecuaţiei diferenţiale (2) este

$$N(\xi) = C_1 \operatorname{sh}\alpha\xi + C_2 \operatorname{ch}\alpha\xi + N_1(\xi), \tag{3}$$

Rezultă

$$L(\xi) = -h\,N'(x) = -\frac{h}{H}\,N'(\xi) =$$

$$= -C_1 \frac{\alpha h}{H} \operatorname{ch}\alpha\xi - C_2 \frac{\alpha h}{H} \operatorname{sh}\alpha\xi - \frac{h}{H}\,N_1'(\xi). \tag{4}$$

Soluţia particulară $N_1(\xi)$ se determină pentru diferite expresii ale momentelor $M(\xi)$ prin identificarea coeficienţilor unui polinom în ξ, avînd acelaşi grad ca expresia momentului $M(\xi)$.

Pentru sarcina uniform distribuită se găseşte

$$M(\xi) = M(0)\,(1 - \xi)^2,$$

$$N_1(\xi) = \frac{S}{I}\left[M(\xi) + \frac{2M(0)}{\alpha^2}\right], \tag{5}$$

$$N_1'(\xi) = -\frac{SH}{I}\,Q(\xi). \tag{6}$$

Pentru sarcina triunghiulară, avînd valoarea maximă la $\xi = 1$, se găsește

$$M(\xi) = M(0)\frac{3(1-\xi)^2-(1-\xi)^3}{2},$$

$$N_1(\xi)=\frac{S}{I}\left[M(\xi)-\frac{3M(0)\xi}{\alpha^2}\right], \tag{7}$$

$$N_1'(\xi)=-\frac{S}{I}\left[HQ(\xi)+\frac{3M(0)}{\alpha^2}\right]. \tag{8}$$

Constantele de integrare C_1, C_2 se determină din condițiile la limită.

Momentele din elementele verticale pline 1, 2 se calculează din relațiile

$$M_1(\xi) = \frac{I_1}{I_1+I_2}[M(\xi)-2cN(\xi)],$$

$$M_2(\xi) = \frac{I_2}{I_1+I_2}[M(\xi)-2cN(\xi)].$$

2. SOLUȚII ALE ECUAȚIEI DIFERENȚIALE (2)

2.1. DIAFRAGMA PE FUNDAȚIE ELASTICĂ (fig. 1 a)

Pentru tratarea acestui caz se pleacă de la forța N_0, reprezentînd rezultanta compresiunilor, respectiv a întinderilor din sarcini orizontale sub talpa fundației unei diafragme, considerată perfect rigidă. Forța N_0 se calculează în ipoteza simplificatoare a unei distribuții liniare a eforturilor sub talpa fundației, corespunzînd unei rotiri a fundației ca un corp rigid cu unghiul θ (poziția *b* din figura 2) față de poziția inițială (poziția *a* din figura 2).

Forța axială în elementele verticale ale diafragmei la nivelul încastrării în fundație fiind $N(0)$, fundația va fi solicitată în dreptul șirului de goluri de forța tăietoare $N_0-N(0)$. Această torță tăietoare va provoca o deformare a fundației în dreptul șirului de goluri cu unghiul $\Delta\theta$ (poziția *c* din figura 2). Acestei deformări îi corespund o deplasare relativă pe verticală a celor două elemente verticale ale diafragmei egală cu $2a\ \Delta\theta$ și o scădere a forței N_0 sub talpa fundației, notată cu ΔN_0. Dacă se mai notează K_z coeficientul de tasare al terenului la compresiune uniformă și A_{f1}, A_{f2} ariile celor două porțiuni ale fundației corespunzînd celor două elemente verticale ale diafragmei, între $\Delta\theta$ și ΔN_0 există relația

$$2a\Delta\theta = \frac{\Delta N_0}{K_z}\left(\frac{1}{A_{f1}}+\frac{1}{A_{f2}}\right). \tag{9}$$

Forța tăietoare preluată de fundație va fi deci în urma deformării acesteia

$$N_0-\Delta N_0-N(0)=N_0-2aK_z\Delta\theta\frac{A_{f1}A_{f2}}{A_{f1}+A_{f2}}-N(0). \tag{10}$$

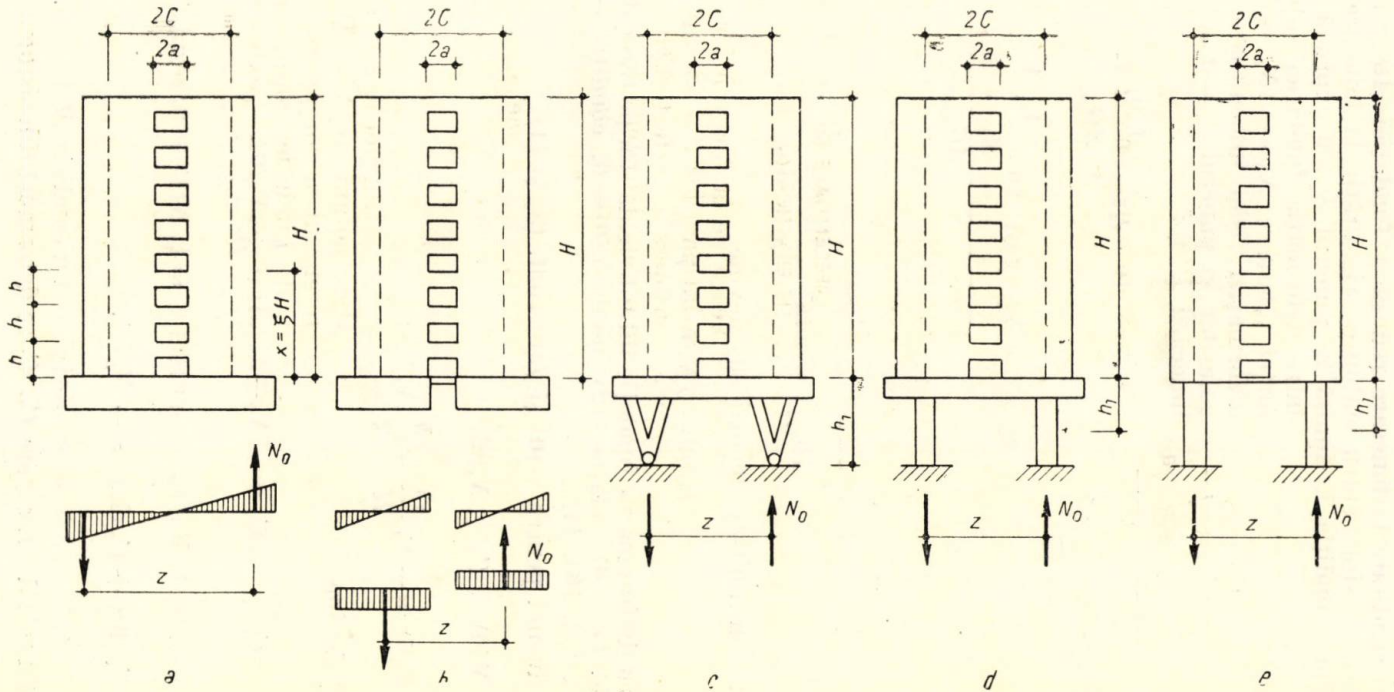


Fig. 1

La calculul deformațiilor fundației în dreptul șirului de goluri se introduce o rigiditate la lunecare redusă a fundației $AG_{red\,f}$, calculată prin formula folosită pentru stabilirea rigidității la lunecare AG_{red} a buiandrugilor. Condiția la limită în punctul $\xi = 0$ exprimă egalitatea între deformația fundației sub acțiunea forței tăietoare $N_0 - \Delta N_0 - N(0)$ și a deformației fîșiei înlocuitoare din zona golurilor în punctul $\xi = 0$ sub acțiunea lunecării $L(0)$:

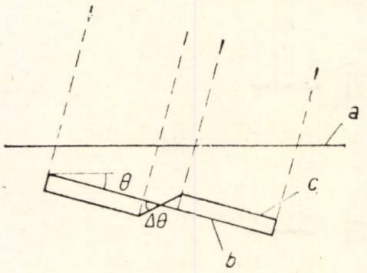


Fig. 2

$$\Delta\theta = \frac{L(0)}{AG_{red}} =$$

$$= N_0 - 2aK_z\,\Delta\theta\,\frac{A_{f1}\,A_{f2}}{A_{f1}+A_{f2}} - N(0)$$

$$\frac{}{AG_{red\,f}}.$$

Notînd

$$\lambda = \frac{AG_{red}}{AG_{red\,f} + 2aK_z\,\dfrac{A_{f1}\,A_{f2}}{A_{f1}+A_{f2}}}, \tag{11}$$

condiția de continuitate de mai sus devine

$$L(0) + \lambda N(0) = \lambda N_0. \tag{12}$$

Pentru diafragma pe fundație infinit rigidă sau pe teren de fundație infinit rigid ($\lambda = 0$), relația (12) devine $L(0) = 0$, condiție considerată în [1], [2], [3], [6], [7].

Introducînd pentru $N(0)$ și $L(0)$ conf. (3) și (4)

$$N(0) = C_2 + N_1(0),$$

$$L(0) = -C_1\,\frac{\alpha h}{H} - \frac{h}{H}\,N_1'(0);$$

relația (12) devine

$$-C_1\,\frac{\alpha h}{H} + \lambda C_2 = \lambda\,[N_0 - N_1(0)] + \frac{h}{H}\,N_1'(0). \tag{13}$$

Din condiția la limită în punctul $\xi = 1$, $N(1) = 0$, rezultă

$$C_1\,\mathrm{sh}\,\alpha + C_2\,\mathrm{ch}\,\alpha = -N_1(1). \tag{14}$$

Ecuația (14) s-ar fi putut obține și din condiția $M(1) = 0$.

Constantele de integrare C_1, C_2 se determină din sistemul de ecuații (13), (14).

2.2. DIAFRAGMA CU FUNDAȚIE ÎNTRERUPTĂ ÎN DREPTUL ȘIRULUI DE GOLURI (fig. 1b).

Notînd cu M_1 și M_2 momentele preluate de cele două fundații ale diafragmei, cu $N_0 z$ momentul preluat de cuplul forțelor N_0, definite ca la punctul 2.1, momentul M al sarcinilor orizontale față de talpa fundației este

$$M = M_1 + M_2 + N_0 z. \tag{15}$$

Deoarece între coeficientul de tasare la rotirea fundației K_θ și coeficientul de tasare la compresiune uniformă K_z există relația

$$K_\theta = 2K_z,$$

notînd cu J_1 și J_2 momentele de inerție ale celor două tălpi de fundație, condiția rotirii fundațiilor diafragmei ca un corp rigid (poziția *b* din figura 2) cu unghiul θ este

$$\theta = \frac{M_1}{2K_z J_1} = \frac{M_2}{2K_z J_2} = \frac{N_0}{zK_z}\left(\frac{1}{A_{f1}} + \frac{1}{A_{f2}}\right). \tag{16}$$

Din relațiile (15) și (16) se obține forța N_0, corespunzînd unei rotiri rigide a fundațiilor :

$$N_0 = M \frac{z \dfrac{A_{f1} A_{f2}}{A_{f1} + A_{f2}}}{z^2 \dfrac{A_{f1} A_{f2}}{A_{f1} + A_{f2}} + 2J_1 + 2J_2}. \tag{17}$$

În continuare, calculul se conduce ca la punctul 2.1. Deoarece nu există în dreptul șirului de goluri o fundație care ar putea prelua o forță tăietoare, ecuația (10) devine

$$N_0 - \Delta N_0 - N(0) = N_0 - 2aK_z \Delta\theta \frac{A_{f1} A_{f2}}{A_{f1} + A_{f2}} - N(0) = 0.$$

Introducînd

$$\Delta\theta = \frac{L(0)}{AG_{red}},$$

se regăsește ecuația (12) cu

$$\lambda = \frac{AG_{red}(A_{f1} + A_{f2})}{2aK_z A_{f1} A_{f2}}, \tag{18}$$

valoare ce se poate obține și direct din relația (11), punînd $AG_{red\,f} = 0$.

Se menționează că expresiile (11), (18) sînt aproximative, plecînd de la relații aproximative între solicitările exterioare și deformațiile terenului de fundare.

2.3. DIAFRAGME PE STÎLPI (fig. 1c, 1d, 1e)

2.3.1. Diafragme cu grindă de rigidizare (fig. 1c, 1d)

Introducînd cîte o articulaţie, în punctele de moment nul de pe stîlpi a căror poziţie h_1 se apreciază, diafragma pe stîlpi solicitată de sarcini orizontale se poate asimila cu un cadru triplu articulat, forţa N_0 în stîlpi fiind

$$N_0 = \frac{M(0) + Q(0)h_1}{z},$$

unde $M(0)$ şi $Q(0)$ reprezintă momentul şi forţa tăietoare la baza diafragmei.

Grinda de rigidizare fiind solicitată de forţa tăietoare $N_0 - N(0)$, condiţia egalităţii între deformaţia grinzii de rigidizare, avînd rigiditatea la lunecare $AG_{\text{red }f}$, şi deformaţia fîşiei înlocuitoare din zona golurilor, în punctul $\xi = 0$, devine

$$\frac{L(0)}{AG_{\text{red}}} = \frac{N_0 - N(0)}{AG_{\text{red }f}}.$$

Introducînd

$$\lambda = \frac{AG_{\text{red}}}{AG_{\text{red }f}}, \tag{19}$$

se regăseşte ecuaţia (12). În continuare, calculul se conduce ca la punctul 2.1.

Poziţia punctului de moment nul fiind apreciată în cazul stîlpilor încastraţi la bază, exactitatea calculului se poate îmbunătăţi, recalculînd valoarea h_1 pe baza rezultatelor obţinute.

Unghiul de înclinare a tangentei la deformata stîlpilor în punctul $\xi = 0$ este, conform ecuaţiei (VIII. 1′) din [6],

$$y'(0) = \frac{a}{c}\,\frac{L(0)}{AG_{\text{red}}}.$$

Dacă se notează cu h_s şi I_s înălţimea şi suma momentelor de inerţie a stîlpilor situaţi în aceeaşi parte a şirului de goluri, momentul la capătul superior şi cel inferior al acestor stîlpi va fi

$$M_s = \frac{Q(0)h_s}{2} - \frac{4EI_s}{h_s}y'(0),$$

$$M_i = \frac{Q(0)h_s}{2} + \frac{2EI_s}{h_s}y'(0),$$

iar poziţia punctului de moment nul al stîlpilor va fi

$$h_1 = h_s\,\frac{M_s}{M_s + M_i}.$$

Se consideră că efectuarea calculului în modul arătat mai sus, stabilind valoarea h_1 prin aproximații succesive, este mai avantajoasă decît introducerea valorii exacte h_1 în condiția la limită în punctul $\xi = 0$, deoarece în acest caz condiția la limită ar lua forma complicată.

$$\frac{L(0)}{AG_{red}} = \frac{\dfrac{M(0)}{z} + \dfrac{Q(0)h_s}{z}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{3EI_sL(0)}{\dfrac{c}{a}Q(0)\,AG_{red}h_s^2 - 2E\,I_sL(0)}\right] - N(0)}{AG_{red\,f}}.$$

2.3.2. Diafragme fără grindă de rigidizare (fig. 1e)

Punînd în ecuația (13) $\lambda = \infty$, se obține direct

$$C_2 = N_0 - N_1(0). \tag{20}$$

Cunoscînd C_2, din ecuația (14), se determină

$$C_1 = -\frac{C_2}{\operatorname{th}\alpha} - \frac{N_1(1)}{\operatorname{sh}\alpha}. \tag{21}$$

2.4. REZOLVAREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE (2) PRIN DIFERENȚE FINITE

Pentru cazuri de încărcare ce nu permit o exprimare ușoară a momentului $M(\xi)$ și, ca atare, o determinare ușoară a soluției particulare $N_1(\xi)$, cazuri de încărcare ce intervin, de exemplu, la repartizarea unei sarcini orizontale la mai multe diafragme cu caracteristici mecanice diferite, ecuația (2) se va rezolva prin diferențe finite [8].

Exprimată prin diferențe finite cu pasul Δx, ecuația (2) are forma

$$N^{m-1} - \left[2 + \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2\right] N^m + N^{m+1} = -\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2 \frac{S}{I} M^m, \tag{22}$$

unde N^{m-1}, N^m, N^{m+1} reprezintă valorile N în punctele consecutive $m-1$, m, $m+1$ și M^m reprezintă momentul M în punctul m.

Pentru punctul $m = 0$ ($\xi = 0$), ecuația (22) este

$$N^{-1} - \left[2 + \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2\right] N^0 + N^1 = -\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2 \frac{S}{I} M^0, \tag{23}$$

iar ecuația (12) este

$$h\frac{N^{-1} - N^1}{2\Delta x} + \lambda N^0 = \lambda N_0. \tag{24}$$

Eliminînd N^{-1} din ecuațiile (23), (24), se obține

$$-\left[2 + \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2 + 2\frac{\Delta x}{h}\lambda\right] N^0 + 2N^1 = -\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 (\Delta x)^2 \frac{S}{I} M^0 - 2\frac{\Delta x}{h}\lambda N_0. \tag{25}$$

La diafragme pe stîlpi fără grindă de rigidizare ($\lambda = \infty$), din ecuația (12) se obține după împărțire prin λ

$$N^0 = N_0. \tag{26}$$

Pentru punctul $m = n$ ($\xi = 1$), $N^n = 0$.

Valorile N^m se determină deci din sistemul de ecuații format din ecuația (25), respectiv (26), și din ecuația (22), scrisă pentru punctele $m = 1, 2, 3, \ldots, n - 1$.

3. EXEMPLE DE CALCUL

3.1. EXEMPLUL 1

Se calculează eforturile care apar într-o diafragmă rezemată pe stîlpi, avînd secțiunea din figura 3, solicitată de sarcina orizontală uniform distribuită pe înălțimea construcției $p = 1{,}0$ t/m. Construcția are parter și 16 etaje, se apreciază $h_1 = 3{,}0$ m, înălțimea unui etaj este $h = 3{,}0$ m, înălțimea buiandrugilor peste uși este 0,50 m, iar la partea inferioară diafragma este rigidizată printr-o grindă, avînd secțiunea 0,30 × 1,00 m.

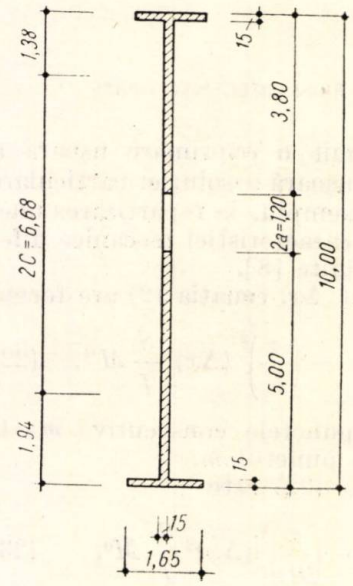


Fig. 3

Pentru diafragmă se obține:

$A_1 = 0{,}975$ m²;
$A_2 = 0{,}795$ m²,
$I_1 = 2{,}580$ m⁴,
$I_2 = 1{,}222$ m⁴,

$$S = \frac{6{,}68}{\frac{1}{0{,}975} + \frac{1}{0{,}795}} = 2{,}92 \text{ m}^3,$$

$$I = 2{,}580 + 1{,}222 + 6{,}68 \times 2{,}92 = 23{,}3 \text{ m}^4,$$
$A_b = 0{,}075$ m²,
$I_b = 0{,}00156$ m⁴,

$$AG_{\text{red}} = \frac{E}{\frac{0{,}6^2}{3 \times 0{,}00156} + \frac{1{,}2}{0{,}075 \times 0{,}4}} = \frac{E}{117} = 0{,}0085\, E.$$

Diafragma fiind din beton armat, se consideră în calcul

$$AG_{\text{red}} = \frac{0{,}25\, E}{117} = \frac{E}{468},$$

$$\alpha = 16 \times 3{,}0 \sqrt{\frac{E}{468 \times 1{,}20 \times 3{,}0\, E}\left[\frac{1}{0{,}975} + \frac{1}{0{,}795} + \frac{6{,}68 \times (6{,}68 - 1{,}20)}{2{,}580 + 1{,}222}\right]} = 4{,}0.$$

Pentru grinda de rigidizare se obține

$A_f = 0{,}30 \text{ m}^2$,

$I_f = 0{,}025 \text{ m}^4$,

$$AG_{\text{red } f} = \frac{E}{\dfrac{0{,}6^2}{3 \times 0{,}025} + \dfrac{1{,}2}{0{,}30 \times 0{,}4}} = \frac{E}{14{,}8} = 0{,}0690\, E.$$

Deoarece se consideră o rigiditate a buiandrugilor uniform distribuită, adică se consideră în punctul $\xi = 0$ un buiandrug cu rigiditatea redusă $0{,}5\ AG_{\text{red}} = 0{,}0042\ E$, se introduce în calcul

$$AG_{\text{red } f} = (0{,}0690 - 0{,}0042)\, E = 0{,}0648\, E.$$

Pentru $z = 2c$, solicitările exterioare ale diafragmei sînt

$$Q(0) = 48 \times 1 = 48\ t,$$

$$Q = Q(0)(1 - \xi),$$

$$M(0) = \frac{48^2 \times 1}{2} = 1152 \text{ tm},$$

$$N_0 = \frac{1152 + 48 \times 3{,}0}{6{,}68} = 194 \text{ t},$$

$$N_1(1) = \frac{2{,}92}{23{,}3}\left(0 + \frac{2 \times 1152}{16}\right) = 18 \text{ t},$$

$$N_1(0) = \frac{2{,}92}{23{,}3}\left(1152 + \frac{2 \times 1152}{16}\right) = 162 \text{ t},$$

$$N_1'(0) = -\frac{2{,}92 \times 48}{23{,}3} \times 48 = -288 \text{ t}.$$

Cu

$$\lambda = \frac{0{,}0085}{0{,}0648} = 0{,}131,$$

$\text{sh } 4{,}0 = 27{,}29,$

$\text{ch } 4{,}0 = 27{,}30.$

Ecuațiile (13), (14) devin

$$-\frac{4 \times 3{,}0}{48} C_1 + 0{,}131\ C_2 = 0{,}131\,(194 - 162) - \frac{3}{48} \times 288,$$

$$27{,}29\ C_1 + 27{,}30\ C_2 = -18.$$

Se obține

$$C_1 = 36{,}0,$$

$$C_2 = -36{,}7,$$

$$N(\xi) = 36{,}0 \operatorname{sh} 4\xi - 36{,}7 \operatorname{ch} 4\xi + \frac{2{,}92}{23{,}3}\left[M(\xi) + \frac{2\times 1152}{16}\right],$$

$$N(0) = -36{,}7 + 162 = 125{,}3 \text{ t},$$

$$L(\xi) = -36{,}0 \times \frac{3\times 4}{48} \operatorname{ch} 4\xi + 36{,}7 \times \frac{3\times 4}{48} \operatorname{sh} 4\xi + \frac{3}{48} \times 288\,(1-\xi).$$

În figura 4, curba *b*, s-a reprezentat valoarea $L(\xi)$.

Se observă o creștere esențială a lunecărilor $L(\xi)$ din partea inferioară a diafragmei față de cele corespunzînd unei rigidități infinite a grinzii de rigidizare, reprezentate în figura 4, curba *a*. În schimb, prin considerarea

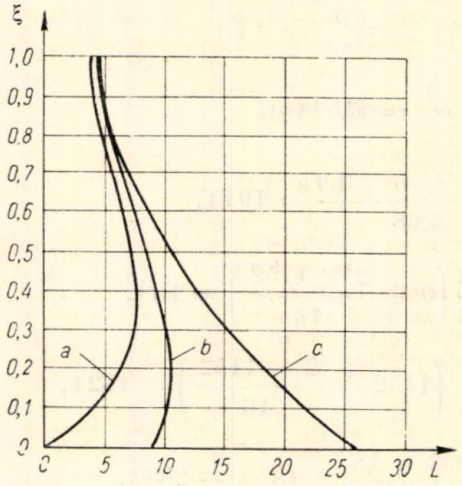


Fig. 4

elasticității grinzii de rigidizare se reduce mult forța tăietoare ce trebuie preluată de grinda de rigidizare. În cazul de față, această forță tăietoare este

$$N_0 - N(0) = 194 - 125{,}3 = 68{,}7 \text{ t}.$$

Pentru o grindă de rigidizare infinit rigidă s-ar obține, după [6],

$$L_0 = \frac{Q(0)S}{I}\,h = \frac{48 \times 2{,}92}{23{,}3} \times 3 = 18 \text{ t},$$

$$N(0) = \frac{1}{h} L_0 H \psi(0) = \frac{1}{3} \times 18\times 48\times 0{,}31 = 89 \text{ t},$$

$$N_0 - N(0) = 194 - 89 = 105 \text{ t}.$$

3.2. EXEMPLUL 2

Se recalculează exemplul 1 de calcul, considerînd diafragma fără grindă de rigidizare.

Aplicînd relaţiile (20) şi (21), se obţine

$$C_2 = 194 - 162 = 32{,}0,$$

$$C_1 = -\frac{32}{1{,}0} - \frac{18}{27{,}3} = -32{,}66,$$

$$N(\xi) = -32{,}66 \operatorname{sh} 4\xi + 32{,}00 \operatorname{ch} 4\xi + \frac{2{,}92}{23{,}3}\left[M(\xi) + \frac{2\times 1152}{16}\right],$$

$$L(\xi) = 32{,}66 \times \frac{3\times 4}{48} \operatorname{ch} 4\xi - 32{,}00 \times \frac{3\times 4}{48} \operatorname{sh} 4\xi + \frac{3}{48} \times 288(1-\xi).$$

În figura 4, curba *c*, s-a reprezentat valoarea $L(\xi)$. Se observă o creştere puternică a eforturilor din buiandrugi faţă de cazul din exemplul 1 de calcul.

Primită la redacţie la 21 aprilie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. M. Albigès, J. Goulet, *Contreventement des bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, *5* (1960).
2. M. Arcan, *O metodă de calcul al diafragmelor cu un şir de goluri*, St. cerc. mec. apl., *2* (1967).
3. — *Probleme de calcul al diafragmelor verticale de rigidizare*, Buletinul ştiinţific al Institutului de construcţii Bucureşti, *10* (1963).
4. I. Brînzan, *Unele cercetări experimentale privind realizarea îmbinărilor la diafragmele antiseismice ale clădirilor din panouri mari*. Revista constr. şi a mater. de constr., *11* (1962).
5. A. Decauchy, *Contreventement des bâtiments*, Annales de l'Institut technique du bâtiment et des travaux publics, *1* (1964).
6. M. Hangan, *Construcţii de beton armat*, Bucureşti, 1963.
7. O. Mîrşu, L. Vuc, *Metode de calcul al diafragmelor la acţiuni seismice*, Revista construcţiilor şi a materialalelor de construcţii, *6* (1963).
8. R. Rosman, *Beitrag zur statichen Berechnung im Erdgeschoss aufgelöster Windscheiden bei Hochbauten*, Der Bauingenieur, *5* (1965).
9. A. Mihalache, C. Paulet, *Calculul diafragmelor cu baza deformabilă la acţiuni seismice*, Revista constr. şi a mater. de constr., *10* (1965).

ASUPRA POSIBILITĂȚII DE ABSTRACTIZARE A SCULEI AȘCHIETOARE [1])

de ION D. LĂZĂRESCU
Institutul politehnic Cluj

621.9 : 001.24

În lucrare se prezintă posibilitatea elaborării unei scule generalizate, abstracte, a cărei particularizare să permită găsirea diferitelor scule aşchietoare întîlnite în practică. Se stabileşte geometria sculei generalizate, se determină formulele generale de calcul al parametrilor geometrici, formulele de stabilire a forţelor de aşchiere, mărimii microneregularităţilor (rugozitate) şi regimului de aşchiere. Unificarea diferitelor formule, de exemplu în cazul regimului de aşchiere, permite stabilirea unui model matematic pentru regimul optim de aşchiere, respectiv utilizarea programării liniare.

NOTAȚII

$X-X, Y-Y$ — secţiunea corespunzătoare direcţiei avansului, respectiv normală la direcţia avansului;
α — unghiul de aşezare principal (constructiv);
α_N — unghiul de aşezare principal din secţiunea normală la muchia tăişului (constructiv);
α_x, α_y — unghiul de aşezare principal din secţiunea $X-X$, respectiv $Y-Y$ (constructiv);
α_1 — unghiul de aşezare secundar (constructiv);
α_{1x}, α_{1y} — unghiul de aşezare secundar din secţiunea $X-X$, respectiv $Y-Y$ (constructiv);
α^* — unghiul de aşezare funcţional principal;
γ — unghiul de degajare principal (constructiv);
γ_x, γ_y — unghiul de degajare principal din secţiunea $X-X$, respectiv $Y-Y$ (constructiv);
γ_1 — unghiul de degajare secundar (constructiv);
γ^* — unghiul de degajare funcţional principal;

[1]) Lucrarea a fost expusă la Sesiunea ştiinţifică a Institutului politehnic Cluj din decembrie 1964.

λ — unghiul de înclinare principal (constructiv);
λ_1 — unghiul de înclinare secundar (constructiv);
λ_0 — unghiul de înclinare al tăişului de trecere (constructiv);
ω — înclinarea dinţilor frezei;
$\varkappa$ — unghiul de atac principal (constructiv);
$\varkappa_1$ — unghiul de atac secundar (constructiv);
$\varkappa_r$, $\varkappa_a$ — unghiul de atac principal în cazul avansului radial respectiv avansului axial (constructiv);
$\varkappa_{1r}$, $\varkappa_{1a}$ — unghiul de atac secundar în cazul avansului radial, respectiv avansului axial (constructiv);
$\varkappa_0$ — unghiul de atac al tăişului de trecere (constructiv);
t — adîncimea de aşchiere (la frezare : t — adîncimea principală de aşchiere; t_s — adîncimea secundară de aşchiere);
t_r, t_a — adîncimea de aşchiere în cazul avansului radial, respectiv avansului axial;
s_d — avansul pe dinte (cuţit), $\frac{\text{mm}}{\text{dinte (cuţit)}}$;
s — avansul ($s = z\ s_d$), $\frac{\text{mm}}{\text{cursă dublă}}$ sau $\frac{\text{mm}}{\text{rot}}$;
v — viteza principală de aşchiere, $\frac{\text{m}}{\text{min}}$;
w — viteza de avans ($w = ns$), $\frac{\text{mm}}{\text{min}}$;
w_r, w_a — viteza de avans radial respectiv axial;
u — viteza de aşchiere ($\overline{u} = \overline{v} + \overline{w}$);
n — turaţia, $\frac{\text{rot}}{\text{min}}$;
n_s, n_p — turaţia sculei, respectiv turaţia piesei;
v_T — viteza principală de aşchiere corespunzătoare durabilităţii T;
v_{sT}, v_{pT} — viteza principală de aşchiere pentru sculă, respectiv piesă, corespunzătoare durabilităţii T;
T — durabilitatea tăişului în minute timp de maşină;
m — exponentul duratei continue de aşchiere;
k — constantă care înglobează condiţiile în care are loc procesul de aşchiere;
b — lăţimea de aşchiere;
r — raza de rotunjire a tăişului;
D_s — diametrul sculei;
$D_{s_{\text{med}}}$ — diametrul mediu al sculei;
D_{s_i} — diametrul sculei corespunzător rîndului de cuţite i;
D_p — diametrul semifabricatului (piesei);
D_M — diametrul corespunzător punctului M (de pe sculă sau piesă);
i — numărul de rînduri de cuţite ale capului portcuţite;
z — numărul de dinţi (cuţite);
z_i — numărul de cuţite ale rîndului i de cuţite de la capul portcuţite;

p — pasul filetului;
F_z — forța principală de așchiere;
F_x — forța de avans;
F_y — forța de respingere;
F_N — forța normală ($\overline{F}_N = \overline{F}_x + \overline{F}_y$);
F_R $= \sqrt{F_z^2 + F_y^2} = F_z\sqrt{1 + k_y^2}$;
F_s — forța necesară avansului;
$F_{s_{MU}}$ — forța de avans permisă de mașina-unealtă;
F_f — forța care produce săgeata f;
f, f_{adm} — săgeata, respectiv săgeata admisibilă;
F_{fl} — forța critică de flambaj;
F_p — forța permisă de rezistența semifabricatului (piesei);
W — modulul de rezistență;
W_p — modulul de rezistență polar;
I — momentul de inerție;
M_t — momentul de răsucire;
M_i — momentul încovoietor;
M' — momentul redus;
τ_{ta} — rezistența admisibilă la răsucire;
σ_{ia} — rezistența admisibilă la încovoiere;
τ_t — efortul unitar de răsucire;
σ_r — efortul unitar la întindere;
c — coeficient de siguranță;
c_{fl} — coeficient de siguranță la flambaj;
E — modul de elasticitate;
H, B — înălțimea, respectiv lățimea corpului cuțitului;
l — lungimea în consolă a cuțitului;
l_p — lungimea semifabricatului (piesei);
k_x $= F_x/F_z$;
k_y $= F_y/F_z$;
k_s $= F_s/F_z = k_x + (1 + k_y)\mu$;
μ — coeficient de frecare;
R_{max} — înălțimea maximă a microneregularităților.

1. CONSTITUIREA SCULEI AȘCHIETOARE DIN CUȚITE ELEMENTARE

Prezentarea diferențiată a sculelor așchietoare, așa cum o face în general literatura de specialitate, îngreuiază înțelegerea imediată a acestora, fiecare sculă fiind considerată ca atare, iar elaborarea unei noi scule, speciale, ridică la început în mod artificial probleme ce par greu de rezolvat. În realitate, există o legătură strînsă între diferitele scule, fiecare avînd la bază una sau mai multe scule elementare, plasate diferit, după modul de acționare al acestora [1], [2].

Scula elementară care trebuie studiată în mod particular, toate celelalte scule fiind derivate din aceasta, o vom considera *cuțitul elementar*, care execută o mișcare rectilinie față de semifabricat (*mișcarea principală*) (fig. 1).

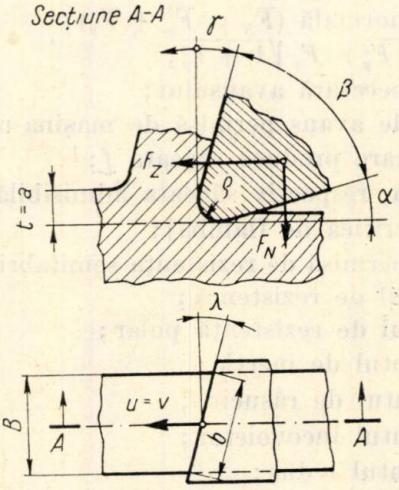


Fig. 1. — Cuțitul elementar.

Din unirea a două cuțite elementare, care formează tăișul principal și tăișul secundar, se obține *cuțitul de rabotat* (fig. 2 *a*), care execută o mișcare rectilinie orizontală (*mișcarea principală*) și o deplasare, periodică, după fiecare ciclu al mișcării principale (*mișcarea de avans*).

Cuțitul de rabotat, considerat ca atare, poate fi utilizat la strunjire (fig. 2 *b*).

Dacă se consideră mai multe cuțite de rabotat (în scopul măririi productivității muncii), așezate decalat cu avansul pe cuțit s_d, deplasîndu-se rectiliniu sau curbiliniu, se obține scula numită *broșă* (fig. 2 *c*).

Luîndu-se mai multe cuțite de rabotat, descriind o mișcare de rotație (mișcarea principală), iar semifabricatul o mișcare rectilinie (mișcarea de avans), se obține scula numită *freză* (fig. 2 *d*).

Din unirea a două cuțite de strunjit interior, la care fețele de degajare se prelungesc sub forma unor planuri înclinate elicoidale în scopul eliminării așchiilor, se obține *burghiul* cu canale elicoidale (fig. 2 *a*). Analog acestuia așchiază *lărgitorul* (fig. 2 *f*) și *alezorul*.

Scula de lamat constă din cuțite elementare de rabotat, cu mișcarea principală circulară și cu mișcarea de avans axială (fig. 2 *g*).

Mai multe cuțite pentru strunjirea interioară așezate decalat cu avansul radial de reglare, deplasîndu-se cu avansul longitudinal egal cu pasul filetului de prelucrat, constituie scula numită *tarod* (fig. 2 *h*). În cazul cînd cuțitele sînt pentru strunjirea exterioară, scula devine *filieră*.

În mod analog se petrec lucrurile și la celelalte scule așchietoare. Așadar, orice sculă nouă, specială, poate fi ușor elaborată în cazul cînd se pleacă de la cuțitul sau cuțitele elementare din care este formată, urmă-

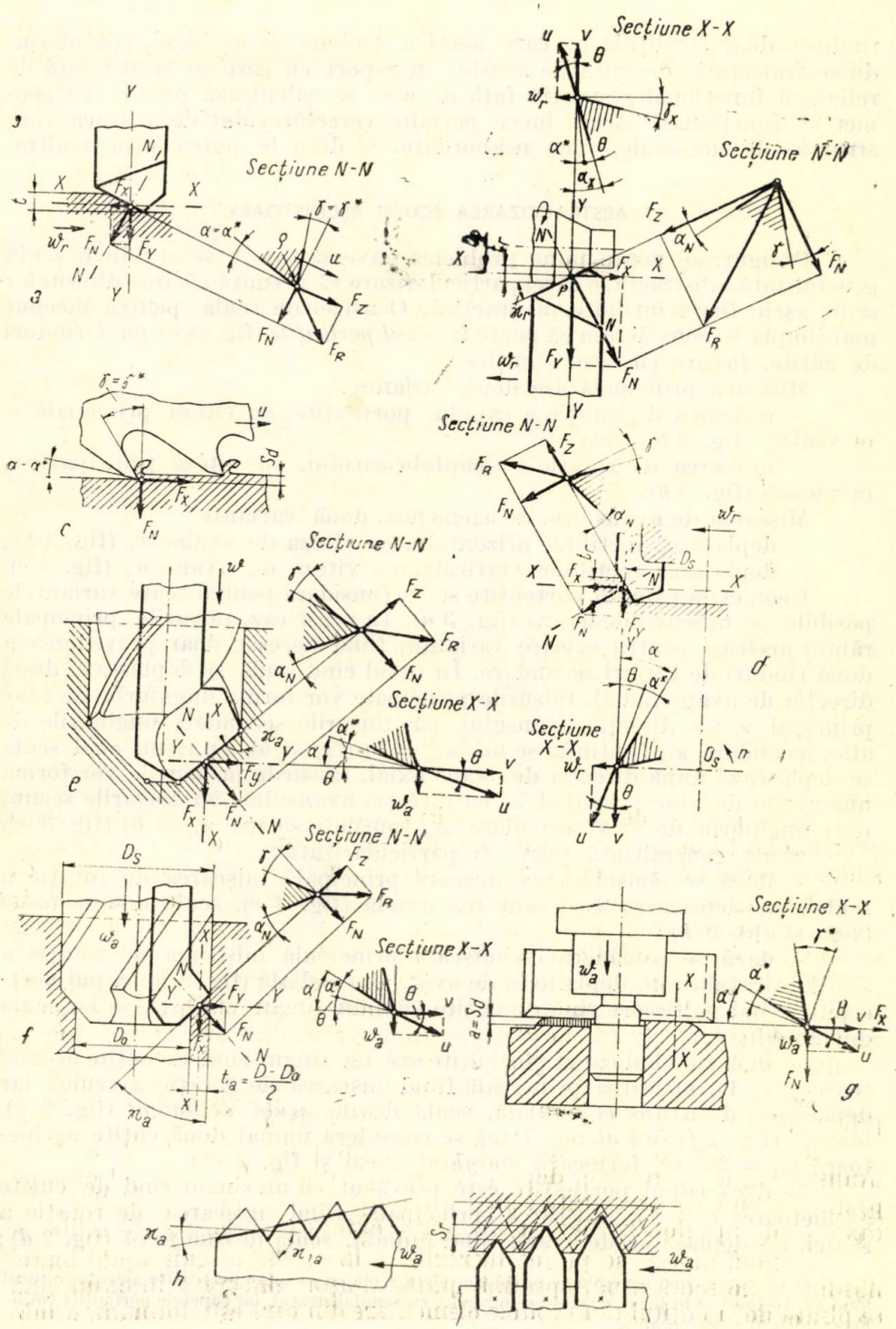


Fig. 2. — Constituirea diferitelor scule aşchietoare :

a — cuțitul de rabotat; *b* — cuțitul de strunjit; *c* — broșa; *d* — freza; *e* — burghiul (unul din tăișuri); *f* — lărgitorul; *g* — scula de lamat; *h* — tarodul.

rindu-se doar condițiile în care acestea trebuie să aşchieze, considerîndu-se traiectoria descrisă de acestea în raport cu care se ia sistemul de referință funcțional respectiv față de care se calculează parametrii geometrici funcționali. Acest lucru permite cercetătorului de a ataca construcția de noi scule, încă neabordate, și de a le putea ușor realiza.

2. ABSTRACTIZAREA SCULEI AŞCHIETOARE

Desigur, se poate pune problema inversă : de a se stabili o sculă generalizată, abstractă, a cărei particularizare să permită găsirea diferitelor scule aşchietoare întîlnite în practică. O astfel de sculă, pentru început mai simplă [2]), considerăm că poate fi *capul portcuțite* (fig. 3 *a*) cu i rînduri de cuțite, fiecare cu cîte z_i cuțite.

Mișcarea principală are două variante :

— mișcarea de rotație a capului portcuțite, cu viteza principală v_s (a sculei) (fig. 3 *b* și *c*);

— mișcarea de rotație a semifabricatului, cu viteza principală v_p (a piesei) (fig. 3 *b*).

Mișcarea de avans are, de asemenea, două variante :

— deplasarea rectilinie orizontală, cu viteza de avans w_r (fig. 3 *b*);

— deplasarea rectilinie verticală, cu viteza de avans w_a (fig. 3 *c*).

Geometria capului portcuțite se va considera pentru toate variantele posibile ale mișcării de avans (fig. 3 *a*). În acest caz, tăișurile principale rămîn aceleași pentru oricare variantă, fiind necesar doar prevederea a două rînduri de tăișuri secundare. În cazul cînd scula se deplasează după direcția de avans radial, tăișurile principale vor forma unghiurile de atac principal $\varkappa_r$ cu direcția avansului, iar tăișurile secundare unghiurile de atac secundare $\varkappa_{1r}$ (putîndu-se lua $\varkappa_{1a} = 0$) (fig. 3 *b*). În cazul cînd scula se deplasează după direcția de avans axial, tăișurile principale vor forma unghiurile de atac principal $\varkappa_a$ cu direcția avansului, iar tăișurile secundare unghiurile de atac secundare $\varkappa_{1a}$ (putîndu-se lua $\varkappa_{1r} = 0$) (fig. 3 *c*).

Scula generalizată poate fi particularizată :

— dacă se consideră ca mișcare principală mișcarea de rotație a sculei, iar deplasarea de avans cea axială (fig. 3 *c*), scula devine *tarod* (vezi și fig. 2 *h*);

— dacă se consideră ca mișcare principală mișcarea de rotație a semifabricatului, iar deplasarea de avans cea radială (fig. 3 *b*), capul portcuțite avînd pe fiecare rînd de cuțite cîte un singur cuțit ($z_i = 1$), scula devine *filieră*;

— în cazul cînd capul portcuțite are un singur rînd de cuțite aşchietoare ($i = 1$), mișcarea principală fiind mișcarea de rotație a sculei, iar deplasarea de avans cea axială, scula devine *sculă de lamat* (fig. 2 *g*), *lărgitor* (fig. 2 *f*) sau *alezor*. Dacă se consideră numai două cuțite aşchietoare ($z_1 = 2$), se formează *burghiul* (vezi și fig. 2 *e*);

— dacă capul portcuțite este prevăzut cu un singur rînd de cuțite aşchietoare ($i = 1$), mișcarea principală fiind mișcarea de rotație a sculei, iar deplasarea de avans fiind radială, scula devine *freză* (fig. 2 *d*);

[2]) O sculă și mai generală se poate considera scula cu j capete portcuțite așezate în jurul unui ax, rotindu-se în jurul acestui ax în raport cu semifabricatul, iar capetele portcuțite rotindu-se în jurul axelor proprii.

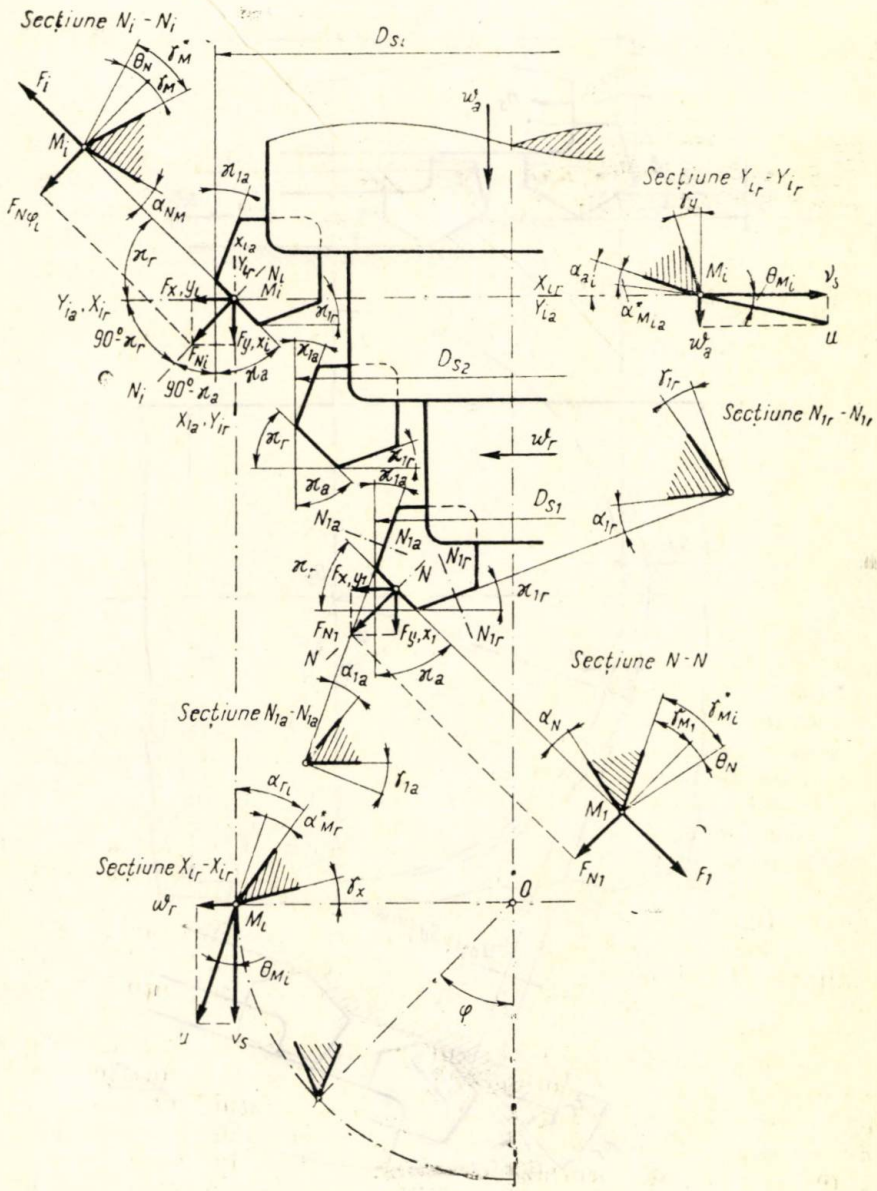


Fig. 3*a*. — Capul portcuțite (scula generalizată).

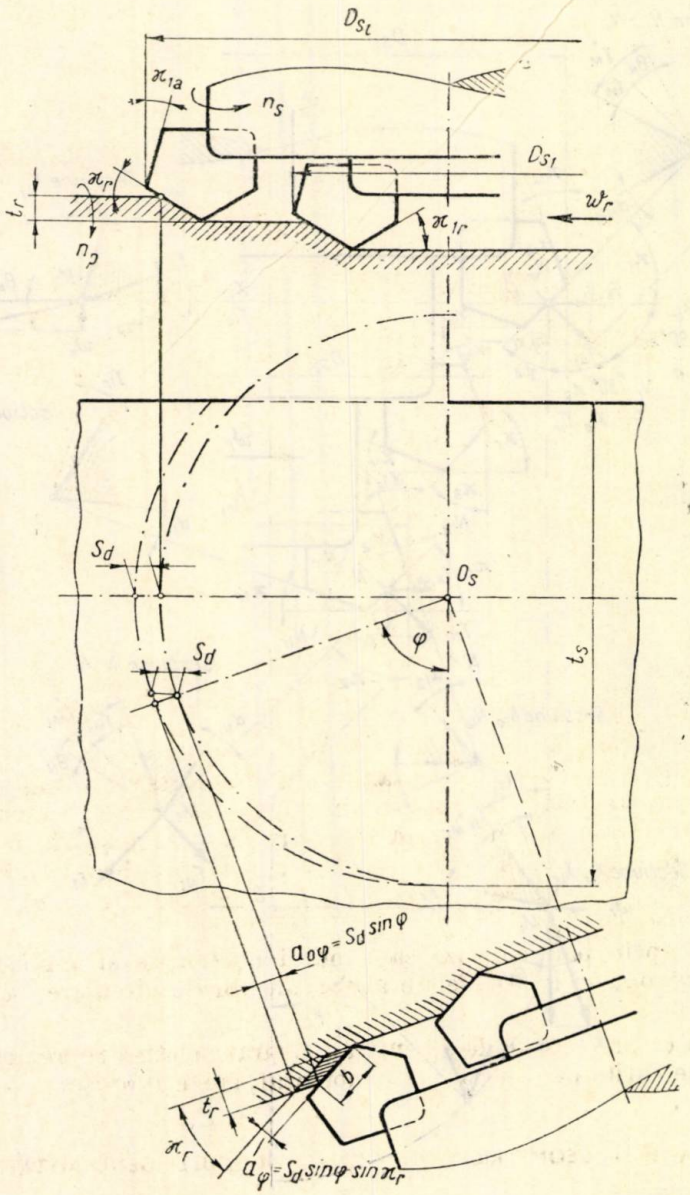


Fig. 3*b*. — Capul portcuţite cu avans radial.

— în cazul cînd capul portcuțite are un singur rînd de cuțite aşchietoare ($i = 1$) şi pe acest rînd doar un singur cuțit ($z_1 = 1$), iar mişcarea principală este mişcarea de rotaţie a semifabricatului şi deplasarea de avans este radială (orizontală), se obţine *cuțitul pentru strunjirea longitudinală* (fig. 2 *b*). În aceleaşi condiţii, dacă deplasarea de avans este axială (verticală), se obţine *cuțitul pentru strunjirea transversală*;

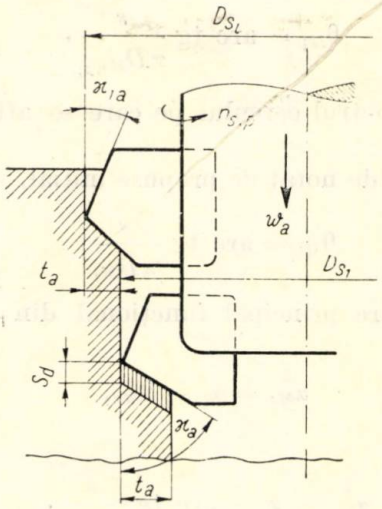


Fig. 3*c*. — Capul portcuțite cu avans axial.

— dacă capul portcuțite are pe fiecare rînd de cuțite aşchietoare doar un singur cuțit, cuțitele în ansamblu fiind aşezate rectiliniu (diametrul capului portcuțite fiind infinit de mare), iar mişcarea principală este mişcarea rectilinie a sculei (ca un caz particular al mişcării de rotaţie), se obţine *broşa* (fig. 2 *c*). În cazul cînd se consideră o broşă cu un singur cuțit aşchietor ($z_1 = 1$), se obţine *cuțitul de rabotat* (fig. 2 *a*), respectiv *cuțitul de mortezat*.

Desigur prin particularizarea capului portcuțite şi a mişcării executate, se pot obţine încă diferite alte scule (broşe circulare, scule combinate etc.).

În ceea ce priveşte sculele pentru danturat, acestea reprezintă cazuri particulare de cuțite de rabotat şi de mortezat, freze şi broşe.

3. PARAMETRII GEOMETRICI FUNCȚIONALI AI SCULEI GENERALIZATE

Parametrii geometrici funcţionali ai capului portcuțite se vor lua în raport cu tangenta la traiectoria descrisă de punctul considerat de pe muchia tăişului cuțitului constitutiv, pentru unghiul de aşezare funcţional α^*, şi în raport cu direcţia de deplasare a aşchiei faţă de muchia tăişului cuțitului constitutiv, pentru unghiul de degajare funcţional γ^*.

Direcția tangentei la traiectorie este determinată de vectorul vitezei de așchiere $\bar{u}$. Direcția acestuia rezultă din triunghiul vitezelor (fig. 3 *a*) :

$$\operatorname{tg} \theta_{M_i} = \frac{w_{r,a}}{v_{s,p}} = \frac{sn_{s,p}}{\pi D_{M_s,p_i} n_{s,p}} = \frac{s}{\pi D_{M_s,p_i}},$$

adică

$$\theta_{M_i} = \operatorname{arc\ tg} \frac{s}{\pi D_{M_s,p_i}},$$

în care D_{M_s,p_i} este diametrul cercului pe care se află punctul considerat M_i pe sculă sau piesă.

Ținîndu-se seama de notațiile propuse inițial, se poate scrie

$$\theta_{M_i} = \operatorname{arc\ tg} \frac{s}{\pi D_{M_i}}.$$

Unghiul de așezare principal funcțional din punctul M_i va avea valoarea

$$\alpha^*_{M_i} = \alpha_i - \theta_{M_i},$$

adică

$$\alpha^*_{M_i} = \alpha_i - \operatorname{arc\ tg} \frac{s}{\pi D_{M_i}}, \tag{1}$$

în care α_i este unghiul de așezare constructiv corespunzător punctului M_i.

În ceea ce privește unghiul de degajare funcțional, deoarece așchia se consideră că se deplasează în planul secant normal la muchia tăișului $N_i - N_i$ (sau apropiat de acesta), diferit de planul secant $X_{i_r} - X_{i_r}$, respectiv $X_{i_a} - X_{i_a}$, în care se află tangenta la traiectorie, iar planele secante $N_i - N_i$ și $X_{i_r} - X_{i_r}$, respectiv $X_{i_a} - X_{i_a}$, formează un diedru cu unghiul plan $(90^\circ - \varkappa_{r,a})$, rezultă

$$\operatorname{tg} \theta_{N_i} = \operatorname{tg} \theta_{M_i} \cdot \cos (90^\circ - \varkappa_{r,a}) = \operatorname{tg} \theta_{M_i} \cdot \sin \varkappa_{r,a},$$

adică

$$\theta_{N_i} = \operatorname{arc\ tg} \left(\frac{s}{\pi D_{M_i}} \sin \varkappa_{r,a} \right).$$

Rezultă pentru unghiul de degajare funcțional principal din punctul M_i

$$\gamma^*_{M_i} = \gamma_i + \operatorname{arc\ tg} \left(\frac{s}{\pi D_{M_i}} \sin \varkappa_{r,a} \right), \tag{2}$$

în care γ_i este unghiul de degajare constructiv corespunzător punctului M_i.

Relațiile (1) și (2) sînt relații generale pentru oricare caz particular de sculă așchietoare. Așa de exemplu :

a) În cazul tarodării și prelucrării filetului cu filiera, relațiile (1) și (2) devin

$$\alpha^*_{M_a} = \alpha_a - \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\pi D_{M_s}}, \tag{1a}$$

$$\gamma^*_{M_a} = \gamma_a + \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{s}{\pi D_{M_s}} \sin \varkappa_a \right), \tag{2a}$$

Dacă se consideră unghiul de așezare, în mod convențional, în același plan secant ca și unghiul de degajare, atunci (1 a) devine

$$\alpha^*_{N M_a} = \alpha_a - \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{s}{\pi D_{M_s}} \sin \varkappa_a \right).$$

b) În cazul burghierii, relațiile (1) și (2) devin

$$\alpha^*_{M_a} = \alpha_a - \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\pi D_{M_s}}, \tag{1b}$$

$$\gamma^*_{M_a} = \gamma_a + \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{s}{\pi D_{M_s}} \sin \varkappa_a \right). \tag{2b}$$

Dacă se consideră unghiul de degajare, în mod convențional, în același plan secant ca și unghiul de așezare, atunci (2b) devine

$$\gamma^*_{M_a} = \gamma_a + \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\pi D_{M_s}}.$$

c) În cazul frezării, relațiile (1) și (2) devin

$$\alpha^*_{M_r} = \alpha_r - \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\pi D_{M_s}}, \tag{1c}$$

$$\gamma^*_{M_r} = \gamma_r + \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{s}{\pi D_{M_s}} \sin \varkappa_r \right). \tag{2c}$$

d) În cazul strunjirii longitudinale, relațiile (1) și (2) devin

$$\alpha^*_{M_r} = \alpha_r - \operatorname{arc\,tg} \frac{s}{\pi D_{M_P}}, \tag{1d}$$

$$\gamma^*_{M_r} = \gamma_r + \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{s}{\pi D_{M_P}} \sin \varkappa_r \right). \tag{2d}$$

Cu totul convențional, pentru strunjire uneori literatura de specialitate consideră unghiul de așezare în același plan secant ca și unghiul

de degajare. Ca urmare, în cadrul convenției făcute, unghiul de așezare funcțional pentru strunjirea longitudinală devine

$$\alpha^*_{M_r} = \alpha_r - \text{arc tg}\left(\frac{s}{\pi D_{MP}} \sin \varkappa_r\right),$$

așa cum este dat în literatură [2, p. 38].

e) În cazul strunjirii transversale, ținînd seama că diametrul D_{MP}, pe care se găsește muchia tăișului după rotația cu unghiul oarecare φ, are valoarea

$$D_{MP} = D - 2\frac{s\varphi^\circ}{360^\circ},$$

în care D este diametrul exterior al semifabricatului, formula (1) devine

$$\alpha^*_{M\varphi a} = \alpha_a - \text{arc tg}\frac{s}{2\pi\left(\frac{D}{2} - s\frac{\varphi^\circ}{360^\circ}\right)}, \tag{1e}$$

așa cum este dată în literatură [2, p. 40].

Tot astfel formula (2) devine

$$\gamma^*_{M\varphi a} = \gamma_a + \text{arc tg}\left[\frac{s}{2\pi\left(\frac{D}{2} - s\frac{\varphi^\circ}{360^\circ}\right)} \sin \varkappa_a\right]. \tag{2e}$$

Deoarece în mod obișnuit $\varkappa_a = 90^\circ$, relația (2e) devine

$$\gamma^*_{M\varphi a} = \gamma_a + \text{arc tg}\frac{s}{2\pi\left(\frac{D}{2} - s\frac{\varphi^\circ}{360^\circ}\right)},$$

așa cum este dată în literatură [2, p. 40].

f) În cazul broșării, rabotării și mortezării, $D_s = \infty$ și, ca urmare, formulele (1) și (2) devin

$$\alpha^* = \alpha, \tag{1f}$$

$$\gamma^* = \gamma. \tag{2f}$$

Observație. Luînd în considerare valoarea pe care trebuie s-o aibă unghiul de așezare funcțional dacă se consideră că aceasta depinde în primul rînd de raportul $\frac{\rho}{a}$, relația (1) se poate scrie

$$\alpha^*_{M_i} = \alpha_i - \text{arc tg}\frac{s}{\pi D_{M_i}} = \varphi\left(\frac{\rho}{a}, k_\alpha\right), \tag{3}$$

în care

a este grosimea așchiei,

ρ — raza de ascuțire a muchiei tăișului,

k_α — coeficient care înglobează influența restului de factori asupra valorii unghiului de așezare.

În mod similar, considerîndu-se valoarea unghiului de degajare funcțional, dacă se consideră că depinde — după caz — de coeficientul de comprimare plastică, respectiv de rezistența la rupere a materialului prelucrat [2, p. 242—243] relația (2) devine

$$\gamma^*_{M_i} = \gamma_i + \text{arc tg}\left(\frac{s}{\pi D_{M_i}} \sin \varkappa_{r,a}\right) = \psi\,(k_l,\ \sigma_r;\ k_\gamma), \tag{4}$$

în care

k_l este coeficientul de comprimare plastică,

σ_r — rezistența la rupere.

k_γ — coeficient care înglobează influența restului de factori asupra valorii unghiului de degajare.

Formulele (3) și (4) permit să se determine valoarea parametrilor geometrici constructivi α_i și γ_i; pentru scula generalizată,

$$\alpha_i = \varphi\left(\frac{\rho}{a}, k_\alpha\right) + \text{arc tg}\,\frac{s}{\pi D_{M_i}}. \tag{5}$$

$$\gamma_i = \psi\,(k_l,\ \sigma_r;\ k_\gamma) - \text{arc tg}\left(\frac{s}{\pi D_{M_i}} \sin \varkappa_{r,a}\right). \tag{6}$$

4. CALCULUL PARAMETRILOR GEOMETRICI CONSTRUCTIVI AI SCULEI GENERALIZATE

4.1. CALCULUL UNGHIURILOR DE AȘEZARE α_x ȘI α_y

Se va considera mai întîi cazul sculei cu avans radial (orizontal), executat cu viteza de avans w_r (fig. 4*a*).

În sistemul de referință $x_1\ y_1\ z_1$ (considerat față de sculă), planul care trece prin fața de așezare principală, determinat de trei puncte evidente (0, 0, 0), (1, 0, — tg λ) și (0, tg α_N, + 1), are ecuația

$$x_1 \text{ tg } \alpha_N \text{ tg } \lambda - y_1 + z_1 \text{ tg } \alpha_N = 0,$$

în care $\lambda > 0$.

Dacă se ia sistemul de referință xyz, în care axa $x—x$ corespunde direcției avansului (acesta, după cum s-a anticipat, constituind un reper față de care se iau unghiurile de atac), trecerea în noul sistem de referință se face cu relațiile cunoscute:

$$x_1 = x \cos \varkappa_r - y \sin \varkappa_r,$$
$$y_1 = x \sin \varkappa_r + y \cos \varkappa_r,$$
$$z_1 = z.$$

În sistemul xyz, planul feței de așezare principală va avea ecuația

$$(\cos \varkappa_r \text{ tg } \alpha_N \text{ tg } \lambda - \sin \varkappa_r)\, x - (\sin \varkappa_r \text{ tg} \alpha_N \text{ tg } \lambda + \cos \varkappa_r)\, y + z \text{ tg } \alpha_N = 0.$$

Intersecția acestui plan cu planul xOz, adică $y = 0$, dă curba

$$(\cos \varkappa_r \text{ tg } \alpha_N \text{ tg } \lambda - \sin \varkappa_r)\, x + z \text{ tg } \alpha_N = 0.$$

Unghiul de așezare α_x va fi determinat de relația care definește coeficientul unghiular al tangentei la curba obținută anterior, în funcție de derivatele parțiale

$$\operatorname{tg} \alpha_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = -\frac{f'_z}{f'_x} = -\frac{\operatorname{tg} \alpha_N}{\cos \varkappa_r \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_r}$$

sau

$$\operatorname{ctg} \alpha_x = \sin \varkappa_r \operatorname{ctg} \alpha_N - \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda. \tag{7a}$$

Luîndu-se și intersecția planului de așezare principal cu planul yOz, adică $x = 0$, se obține

$$(\sin \varkappa_r \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r)\, y - z \operatorname{tg} \alpha_N = 0,$$

de unde, ca și anterior,

$$\operatorname{tg} \alpha_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = -\frac{f'_z}{f'_y} = -\frac{-\operatorname{tg} \alpha_N}{\sin \varkappa_r \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r}$$

sau

$$\operatorname{ctg} \alpha_y = \cos \varkappa_r \operatorname{ctg} \alpha_N + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda. \tag{8a}$$

În continuare se va lua cazul cînd scula se deplasează cu viteza de avans w_a.

Se va considera sistemul de referință $x_1 y_1 z_1$ (fig. 4*b*). Planul care trece prin fața de așezare principală, determinat de punctele (0, 0, 0), (1, 0, tgλ) și (0, tg α_N, 1), va avea ecuația pentru $\lambda > 0$

$$x_1 \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda + y_1 - z_1 \operatorname{tg} \alpha_N = 0.$$

Se ia sistemul xyz astfel ca $x - x$ să corespundă cu direcția avansului, iar $y - y$ să fie perpendicular pe avans. Trecîndu-se în sistemul de referință xyz cu relațiile

$$x_1 = x \cos \varkappa_a + y \sin \varkappa_a,$$
$$y_1 = -x \sin \varkappa_a + y \cos \varkappa_a,$$
$$z_1 = z,$$

se obține

$$(\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a)\, x + (\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a)\, y - z \operatorname{tg} \alpha_N = 0.$$

Intersecția acestui plan cu planul xOz, adică $y = 0$, dă curba

$$(\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a)\, x - z \operatorname{tg} \alpha_N = 0.$$

Unghiul de așezare α_x va fi determinat de expresia

$$\operatorname{tg} \alpha_x = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{f'_z}{f'_x} = \frac{-\operatorname{tg} \alpha_N}{\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a},$$

adică

$$\operatorname{ctg} \alpha_x = \sin \varkappa_a \operatorname{ctg} \alpha_N - \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda. \tag{7b}$$

Luîndu-se și intersecția planului de așezare principal cu planul yOz, adică $x = 0$, se obține

$$(\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a)\, y + z \operatorname{tg} \alpha_N = 0.$$

Unghiul de așezare α_y va fi dat de relația

$$\operatorname{tg} \alpha_y = \frac{dy}{dz} = -\frac{f'_z}{f'_y} = -\frac{-\operatorname{tg} \alpha_N}{\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \alpha_N \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a},$$

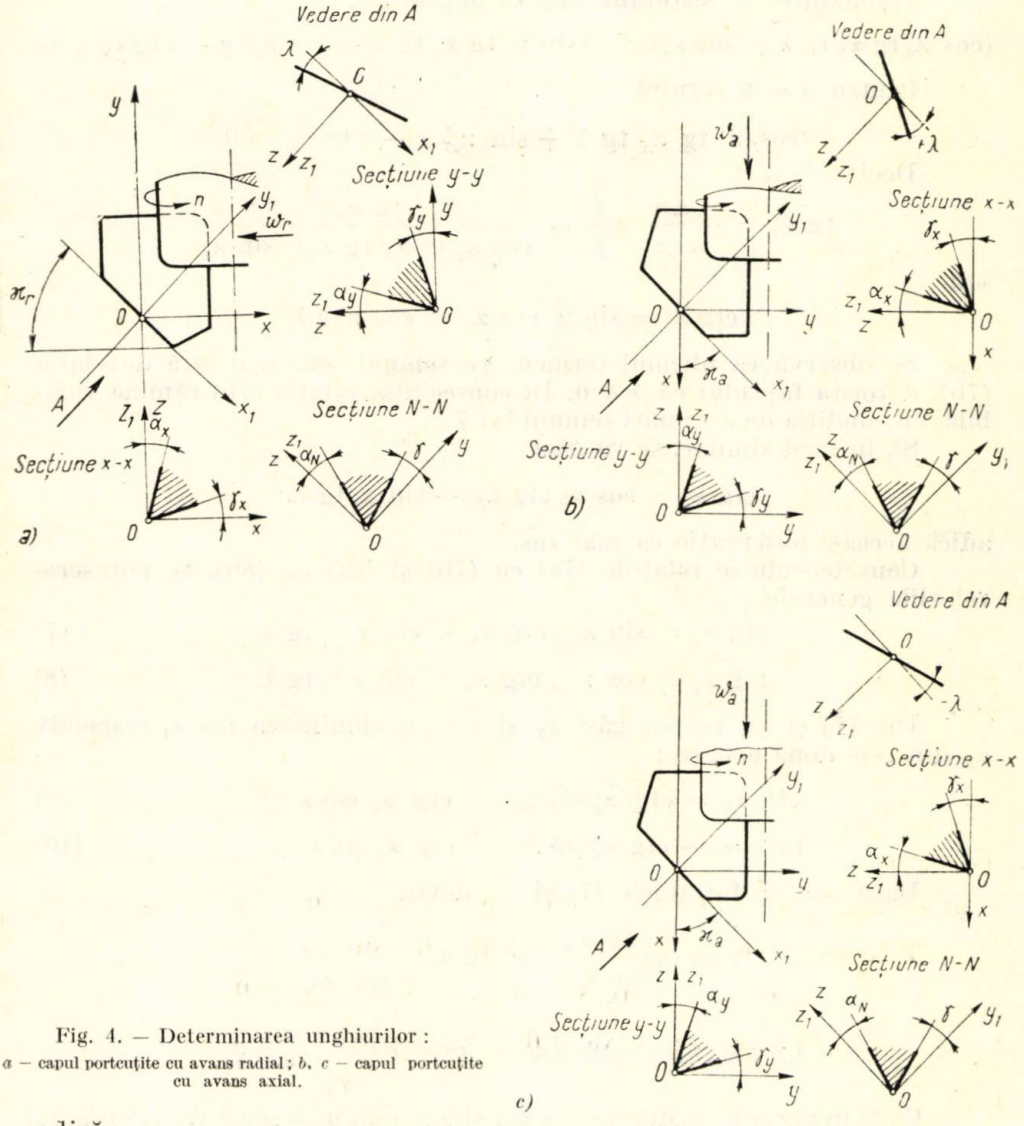


Fig. 4. — Determinarea unghiurilor :
a — capul portcuțite cu avans radial ; *b*, *c* — capul portcuțite cu avans axial.

adică

$$\operatorname{ctg} \alpha_y = \cos \varkappa_a \operatorname{ctg} \alpha_N + \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda. \qquad (8b)$$

Dacă se consideră, pentru ultimul caz, aceeași înclinare a tăișului principal ca și în cazul avansului radial, luîndu-se în considerare sensul de rotație al sculei, în această situație tăișul va avea o înclinare negativă, $\lambda < 0$ (fig. 4*c*). Planul care trece prin fața de așezare principală,

determinat de punctele (0, 0, 0), (1, 0, $-\operatorname{tg}\lambda$) și (0, $\operatorname{tg}\alpha_N$, 1), va avea ecuația

$$x_1 \operatorname{tg}\alpha_N \operatorname{tg}\lambda - y_1 + z_1 \operatorname{tg}\alpha_N = 0.$$

Trecîndu-se în sistemul xyz, se obține

$$(\cos\varkappa_a \operatorname{tg}\alpha_N \operatorname{tg}\lambda + \sin\varkappa_a)\, x + (\sin\varkappa_a \operatorname{tg}\alpha_N \operatorname{tg}\lambda - \cos\varkappa_a)\, y - z \operatorname{tg}\alpha_N = 0.$$

Pentru $y = 0$ rezultă

$$(\cos\varkappa_a \operatorname{tg}\alpha_N \operatorname{tg}\lambda + \sin\varkappa_a)\, x - z \operatorname{tg}\alpha_N = 0.$$

Deci

$$\operatorname{tg}\alpha_x = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{f'_z}{f'_x} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_N}{\cos\varkappa_a \operatorname{tg}\alpha_N \operatorname{tg}\lambda + \sin\varkappa_a}$$

sau

$$\operatorname{ctg}\alpha_x = \sin\varkappa_a \operatorname{ctg}\alpha_N + \cos\varkappa \operatorname{tg}\lambda.$$

Se observă că ultimul termen are semnul schimbat față de relația (7b), datorită faptului că $\lambda < 0$. În consecință, relația (7b) rămîne valabilă, cu condiția de a urmări semnul lui λ.

Și, în mod similar, se va găsi

$$\operatorname{ctg}\alpha_y = \cos\varkappa_a \operatorname{ctg}\alpha_N - \sin\varkappa_a \operatorname{tg}\lambda,$$

adică aceeași observație ca mai sus.

Considerîndu-se relațiile (7a) cu (7b) și (8a) cu (8b), se pot scrie relațiile generale

$$\operatorname{ctg}\alpha_x = \sin\varkappa_{r,a} \operatorname{ctg}\alpha_N - \cos\varkappa_{r,a} \operatorname{tg}\lambda, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_y = \cos\varkappa_{r,a} \operatorname{ctg}\alpha_N + \sin\varkappa_{r,a} \operatorname{tg}\lambda. \tag{8}$$

Din (7) și (8) se pot găsi α_N și λ prin eliminarea lui λ, respectiv α_N din cele două ecuații:

$$\operatorname{ctg}\alpha_N = \operatorname{ctg}\alpha_x \sin\varkappa_{r,a} + \operatorname{ctg}\alpha_y \cos\varkappa_{r,a}, \tag{9}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = -\operatorname{ctg}\alpha_x \cos\varkappa_{r,a} + \operatorname{ctg}\alpha_y \sin\varkappa_{r,a}. \tag{10}$$

Dacă $\lambda = 0$, formulele (7) și (8) devin

$$\operatorname{tg}\alpha_x = \frac{\operatorname{tg}\alpha_N}{\sin\varkappa_{r,a}} \quad \text{și} \quad \operatorname{tg}\alpha_y = \frac{\operatorname{tg}\alpha_N}{\cos\varkappa_{r,a}}.$$

4.2. CALCULUL UNGHIURILOR DE DEGAJARE γ_x ȘI γ_y

Ca și în cazul precedent, se va considera mai întîi scula deplasîndu-se cu viteza de avans w_r.

Planul care trece prin fața de degajare în reperul $x_1y_1z_1$ este determinat de trei puncte (0,0,0), (0,1, $\operatorname{tg}\gamma$) și (1,0, $-\operatorname{tg}\lambda$), avînd ecuația (fig. 4*a*)

$$x_1 \operatorname{tg}\lambda - y_1 \operatorname{tg}\gamma + z_1 = 0,$$

în care $\lambda > 0$.

În reperul xyz, ecuația devine

$$(-\cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma)\, x + (\sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma)\, y - z = 0.$$

Intersecția acestui plan cu planul $y = 0$ dă dreapta

$$(-\cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma)\, x - z = 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg} \gamma_x = -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{-\cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma}{-1},$$

adică

$$\operatorname{tg} \gamma_x = \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma - \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda. \tag{11a}$$

Considerînd și intersecția cu planul $x = 0$, se găsește

$$(\sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma)\, y - z = 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg} \gamma_y = -\frac{f'_y}{f'_z} = -\frac{\sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma}{-1},$$

adică

$$\operatorname{tg} \gamma_r = \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda. \tag{12a}$$

Luîndu-se și cazul cînd scula se deplasează cu viteza de avans w_a (fig. 4*b*), planul ce trece prin fața de degajare, determinat de punctele (0,0,0), (0,1, tg γ) și (1,0, tg λ) în reperul $x_1y_1z_1$, va avea ecuația

$$x_1 \operatorname{tg} \lambda + y_1 \operatorname{tg} \gamma - z_1 = 0,$$

în care $\lambda > 0$.

În reperul zyz, ecuația devine

$$(\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma)\, x + (\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma)\, y - z = 0.$$

Intersecția acestui plan cu planul $y = 0$ dă dreapta

$$(\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma)\, x - z = 0,$$

de unde

$$\operatorname{tg} \gamma_x = \frac{f'_x}{f'_z} = \frac{\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma}{-1},$$

$$\operatorname{tg} \gamma_x = \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma - \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda. \tag{11b}$$

Considerînd și intersecția cu planul $x = 0$, se găsește

$$(\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma)\, y - z = 0,$$

adică

$$\operatorname{tg}\gamma_y = -\frac{f'_y}{f'_z} = -\frac{\sin\varkappa_a \operatorname{tg}\lambda + \cos\varkappa_a \operatorname{tg}\gamma}{-1},$$

$$\operatorname{tg}\gamma_y = \cos\varkappa_a \operatorname{tg}\gamma + \sin\varkappa_a \operatorname{tg}\lambda. \tag{12b}$$

Considerîndu-se relațiile (11a) cu (11b) și (12a) cu (12b), se pot scrie relațiile generale

$$\operatorname{tg}\gamma_x = \sin\varkappa_{r,a} \operatorname{tg}\gamma - \cos\varkappa_{r,a} \operatorname{tg}\lambda, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_y = \cos\varkappa_{r,a} \operatorname{tg}\gamma + \sin\varkappa_{r,a} \operatorname{tg}\lambda. \tag{12}$$

Din relațiile (11) și (12), prin eliminarea lui λ, respectiv γ, se obține

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma_x \sin\varkappa_{r,a} + \operatorname{tg}\gamma_y \cos\varkappa_{r,a}, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = -\operatorname{tg}\gamma_x \cos\varkappa_{r,a} + \operatorname{tg}\gamma_y \sin\varkappa_{r,a}. \tag{14}$$

4.3. CALCULUL UNGHIULUI DE DEGAJARE SECUNDAR

Se va considera mai întîi cazul cînd scula se deplasează radial, cu viteza de avans w_r.

Anterior s-a găsit că planul feței de degajare în reperul xyz are ecuația

$$(-\cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma)\,x + (\sin\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma)\,y - z = 0.$$

Un plan $N_1 - N_1$, normal pe proiecția tăișului secundar, definit de exemplu de punctele evidente (1,0,0) și $(0, \operatorname{ctg}\varkappa_{1r}, 0)$, va avea ecuația (fig. 5*a*)

$$x \operatorname{ctg}\varkappa_{1r} + y - \operatorname{ctg}\varkappa_{1r} = 0.$$

Dacă se formează matricea cu coeficienții necunoscutelor din ecuațiile celor două plane de mai sus :

$$\left\| \begin{matrix} -\cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma & \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma & -1 \\ \operatorname{ctg}\varkappa_{1r} & 1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

atunci parametrii directori m, n și p ai dreptei definite de aceste două plane sînt determinanții de ordinul doi

$$m = \begin{vmatrix} \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$n = -\begin{vmatrix} -\cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma & -1 \\ \operatorname{ctg}\varkappa_{1r} & 0 \end{vmatrix} = -\operatorname{ctg}\varkappa_{1r},$$

$$p = \begin{vmatrix} -\cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma & \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma \\ \operatorname{ctg}\varkappa_{1r} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{ctg}\varkappa_{1r}(\sin\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda + \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma) =$$

$$= -\frac{1}{\sin\varkappa_{1r}}[\operatorname{tg}\lambda \sin(\varkappa_r + \varkappa_{1r}) + \operatorname{tg}\gamma \cos(\varkappa_r + \varkappa_{1r})].$$

Urma planului secant $N_1 - N_1$ pe planul xOy va avea ecuațiile

$$x \operatorname{ctg} \varkappa_{1r} + y - \operatorname{ctg} \varkappa_{1r} = 0,$$

$$z = 0.$$

Matricea corespunzătoare va fi

$$\left\| \begin{matrix} \operatorname{ctg} \varkappa_{1r} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

pentru care parametrii directori vor avea valorile

$$m_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$n_1 = -\begin{vmatrix} \operatorname{ctg} \varkappa_{1r} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{ctg} \varkappa_{1r},$$

$$p_1 = \begin{vmatrix} \operatorname{ctg} \varkappa_{1r} & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Unghiul dintre cele două drepte cu parametrii directori m,n,p, respectiv m_1, n_1, p_1, va fi

$$\cos \gamma_1 = \frac{mm_1 + nn_1 + pp_1}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}} =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \varkappa_{1r}}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varkappa_{1r} + \dfrac{1}{\sin^2 \varkappa_{1r}} [\operatorname{tg} \lambda \sin (\varkappa_r + \varkappa_{1r}) + \operatorname{tg} \gamma \cos (\varkappa_r + \varkappa_{1r})]^2}\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varkappa_{1r}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg} \lambda \sin (\varkappa_r + \varkappa_{1r}) + \operatorname{tg} \gamma \cos (\varkappa_r + \varkappa_{1r})]^2}}.$$

Relația obținută definește legătura dintre cosinus și tangentă, astfel încît

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \lambda \sin (\varkappa_r + \varkappa_{1r}) + \operatorname{tg} \gamma \cos (\varkappa_1 + \varkappa_{1r}). \qquad (15a)$$

În continuare, se va considera deplasarea sculei cu viteza de avans w_a (fig. 5*b*).

Anterior s-a găsit că planul feței de degajare are în acest caz ecuația

$$(\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma)\, x + (\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma)\, y - z = 0.$$

Un plan $N_1 - N_1$, normal pe proiecția tăișului secundar, definit de exemplu de punctele evidente $(-1,0,0)$ și $(0, \operatorname{ctg} \varkappa_{1a}, 0)$, va avea ecuația

$$x \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} - y + \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} = 0.$$

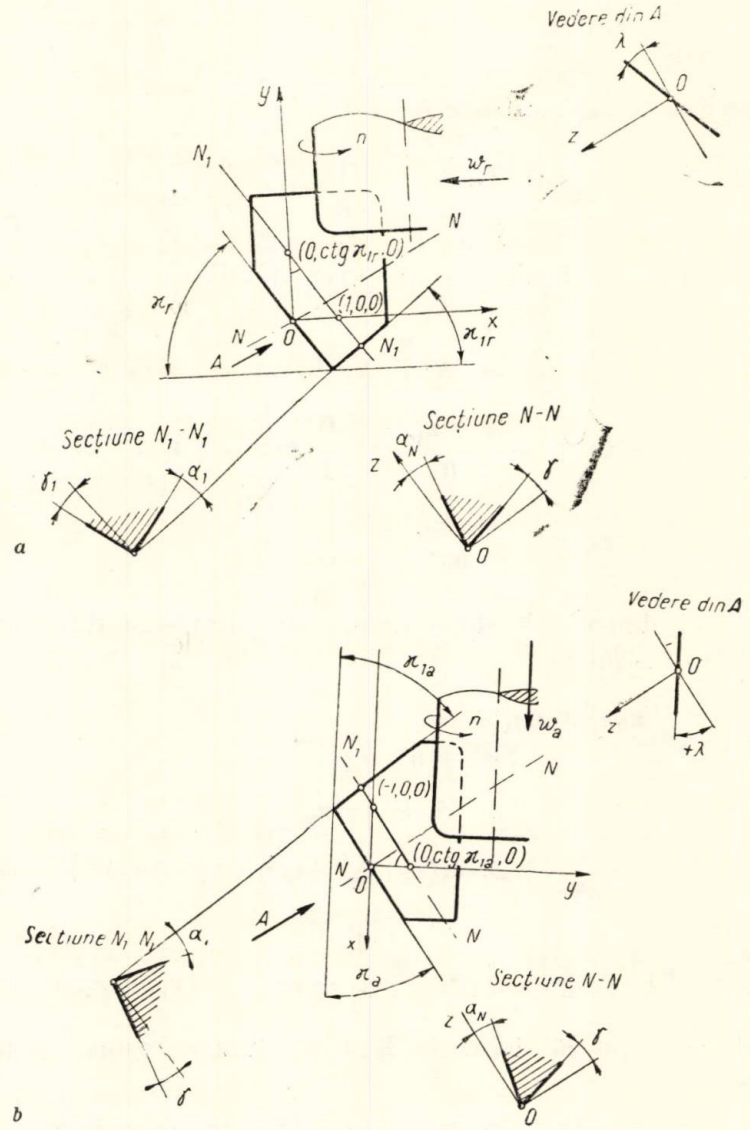


Fig. 5. — Determinarea unghiului de degajare secundar :
a — capul portcuțite cu avans radial ; *b* — capul portcuțite cu avans axial.

Dacă se formează matricea cu coeficienții necunoscutelor din ecuațiile celor două plane de mai sus

$$\left\| \begin{matrix} \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} & -1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

atunci parametrii directori m, n și p ai dreptei definite de aceste două plane sînt determinanții de ordinul doi :

$$m = \begin{vmatrix} \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$n = -\begin{vmatrix} \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} & 0 \end{vmatrix} = -\operatorname{ctg} \varkappa_{1a},$$

$$p = \begin{vmatrix} \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma \\ \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} (\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma) =$$

$$= -\frac{1}{\sin \varkappa_{1a}} \left[\operatorname{tg} \lambda \sin (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) + \operatorname{tg} \gamma \cos (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) \right].$$

Urma planului secant $N_1 - N_1$ pe planul xOy va avea ecuațiile

$$x \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} - y + \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} = 0,$$

$$z = 0.$$

Matricea corespunzătoare va fi

$$\left\| \begin{matrix} \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

pentru care parametrii directori vor avea valorile

$$m_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$n_1 = -\begin{vmatrix} \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{ctg} \varkappa_{1a},$$

$$p_1 = \begin{vmatrix} \operatorname{ctg} \varkappa_{1a} & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Unghiul dintre cele două drepte cu parametrii directori m, n, p, respectiv m_1, n_1, p_1, va fi

$$\cos \gamma_1 =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \varkappa_{1a}}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varkappa_{1a} + \dfrac{1}{\sin^2 \varkappa_{1a}} [\operatorname{tg} \lambda \sin (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) + \operatorname{tg} \gamma \cos (\varkappa_a + \varkappa_{1a})]^2} \sqrt{1 + \operatorname{ctg} \varkappa_{1a}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg} \lambda \sin (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) + \operatorname{tg} \gamma \cos (\varkappa_a + \varkappa_{1a})]^2}},$$

adică

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \lambda \sin (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) + \operatorname{tg} \gamma \cos (\varkappa_a + \varkappa_{1a}). \qquad (15b)$$

Considerîndu-se relațiile (15a) și (15b), se poate scrie relația generală

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \lambda \sin (\varkappa_{r,a} + \varkappa_{1a,r}) + \operatorname{tg} \gamma \cos (\varkappa_{r,a} + \varkappa_{1r,a}). \qquad (15)$$

4.4. CALCULUL UNGHIULUI DE ÎNCLINARE SECUNDAR

Pentru determinarea unghiului de înclinare secundar λ_1 se va proceda ca mai sus.

Mai întîi se consideră cazul cînd scula se deplasează cu viteza de avans w_r (fig. 6*a*).

Se consideră planul feței de degajare în reperul xyz:

$$(-\cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma)\, x + (\sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma)\, y - z = 0.$$

Un plan perpendicular pe xOy, cuprinzînd muchia tăișului secundar și trecînd, de exemplu, prin punctele evidente (1,0,0) și (0, — tg $\varkappa_{1r}$, 0), are ecuația

$$x \operatorname{tg} \varkappa_{1r} - y + \operatorname{tg} \varkappa_{1r} = 0.$$

Formîndu-se matricea

$$\left\| \begin{matrix} -\cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma & \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ \operatorname{tg} \varkappa_{1r} & -1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

parametrii directori ai dreptei definite de intersecția celor două plane au valoarea

$$m = \begin{vmatrix} \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

$$n = -\begin{vmatrix} -\cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ \operatorname{tg} \varkappa_{1r} & 0 \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} \varkappa_{1r},$$

$$p = \begin{vmatrix} -\cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma & \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma \\ \operatorname{tg} \varkappa_{1r} & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \varkappa_{1r} (\sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \gamma) =$$

$$= -\frac{1}{\cos \varkappa_{1r}} [\operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_r + \varkappa_{1r}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_r + \varkappa_{1r})].$$

Urma planului perpendicular pe xOy, pe acest plan, va avea ecuațiile

$$x \operatorname{tg} \varkappa_{1r} - y + \operatorname{tg} \varkappa_{1r} = 0,$$

$$z = 0.$$

Matricea corespunzătoare va fi

$$\left\| \begin{matrix} \operatorname{tg} \varkappa_{1r} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

pentru care parametrii directori vor avea valorile

$$m_1 = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$n_1 = -\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \varkappa_{1r} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}\ \varkappa_{1r},$$

$$p_1 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \varkappa_{1r} & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Unghiul dintre cele două drepte, cu parametrii directori m, n, p, respectiv m_1, n_1, p_1, va fi

$$\cos \lambda_1 =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varkappa_{1r}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varkappa_{1r} + \frac{1}{\cos^2 \varkappa_{1r}} [\operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_r + \varkappa_{1r}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_r + \varkappa_{1r})]^2}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varkappa_{1r}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_r + \varkappa_{1r}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_r + \varkappa_{1r})]^2}},$$

adică

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_r + \varkappa_{1r}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_r + \varkappa_{1r}). \qquad (16a)$$

În continuare se va considera cazul cînd scula se deplasează cu viteza de avans w_a (fig. 6*b*).

Planul feței de degajare, în reperul xyz, are ecuația

$$(\cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma)\, x + (\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma)\, y - z = 0.$$

Un plan perpendicular pe xOy, cuprinzînd muchia tăișului secundar, și trecînd, de exemplu, prin punctele evidente $(-1,0,0)$ și $(0, -\operatorname{tg} \varkappa_{1a}, 0)$ are ecuația

$$x \operatorname{tg} \varkappa_{1a} + y + \operatorname{tg} \varkappa_{1a} = 0.$$

Formîndu-se matricea

$$\begin{Vmatrix} \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ \operatorname{tg} \varkappa_{1a} & 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

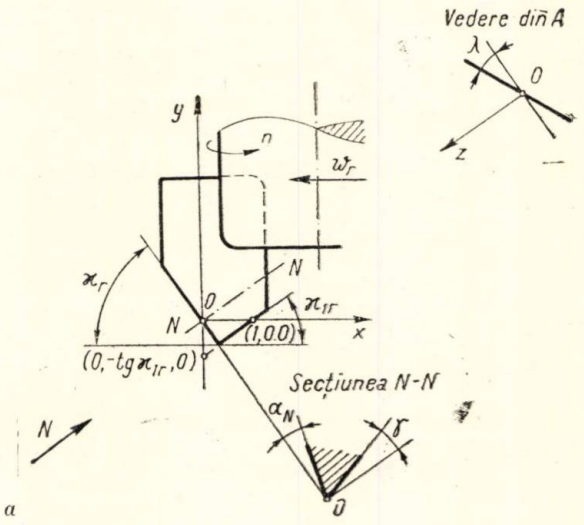
parametrii directori ai dreptei definite de intersecția celor două plane au valoarea

$$m = \begin{vmatrix} \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$n = -\begin{vmatrix} \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & -1 \\ \operatorname{tg} \varkappa_{1a} & 0 \end{vmatrix} = -\operatorname{tg}\ \varkappa_{1a},$$

$$p = \begin{vmatrix} \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma & \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma \\ \operatorname{tg} \varkappa_{1a} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda - \sin \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \varkappa_{1a} (\sin \varkappa_a \operatorname{tg} \lambda + \cos \varkappa_a \operatorname{tg} \gamma) =$$



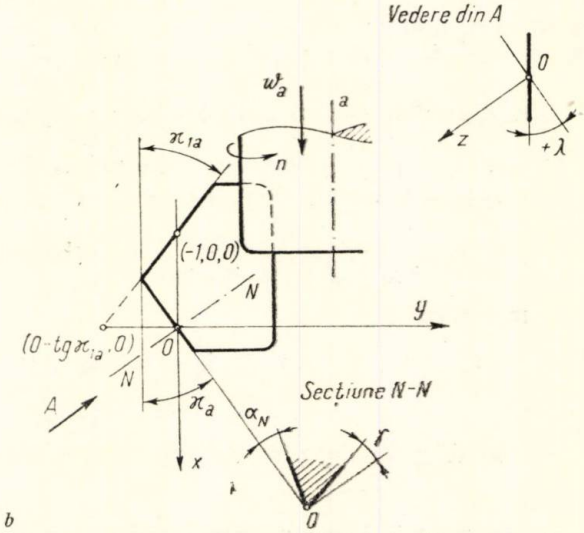


Fig. 6. — Determinarea unghiului de înclinare secundar :
a — capul portcuțite cu avans radial ; *b* — capul portcuțite cu avans axial

$$= -\frac{1}{\cos \varkappa_{1a}} [\operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_a + \varkappa_{1a})].$$

Urma planului perpendicular pe xOy pe acest plan va avea ecuațiile

$$x \operatorname{tg} \varkappa_{1a} + y + \operatorname{tg} \varkappa_{1a} = 0,$$
$$z = 0$$

Matricea corespunzătoare va fi

$$\begin{Vmatrix} \operatorname{tg} \varkappa_{1a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

pentru care parametrii directori vor avea valorile

$$m_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$n_1 = -\begin{vmatrix} \operatorname{tg} \varkappa_{1a} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{tg} \varkappa_{1a},$$

$$p_1 = \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \varkappa_{1a} & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Unghiul dintre cele două drepte, cu parametrii directori m, n, p și m_1, n_1, p_1, va fi

$$\cos \lambda_1 =$$

$$= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \varkappa_{1a}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varkappa_{1a} + \dfrac{1}{\cos^2 \varkappa_{1a}} [\operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_a + \varkappa_{1a})]^2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varkappa_{1a}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + [\operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_a + \varkappa_{1a})]^2}},$$

adică

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_a + \varkappa_{1a}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_a + \varkappa_{1a}). \qquad (16b)$$

Considerîndu-se relațiile (16a) și (16b), se poate scrie relația generală

$$\operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{tg} \gamma \sin (\varkappa_{r,a} + \varkappa_{1r,a}) - \operatorname{tg} \lambda \cos (\varkappa_{r,a} + \varkappa_{1r,a}). \qquad (16)$$

4.5. APLICAREA FORMULELOR GENERALE ÎN CAZUL DIFERITELOR SCULE

Pentru cuțitul de strung și de rabotat, formulele (7) — (16) devin (pentru $\alpha_N = \alpha$)

$$\operatorname{ctg} \alpha_x = \sin \varkappa_r \operatorname{ctg} \alpha - \cos \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda, \qquad (7c)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_y = \cos \varkappa_r \operatorname{ctg} \alpha + \sin \varkappa_r \operatorname{tg} \lambda, \qquad (8c)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} \alpha_x \sin \varkappa_r + \operatorname{ctg} \alpha_y \cos \varkappa_r, \qquad (9c)$$

$$\operatorname{tg} \lambda = -\operatorname{ctg} \alpha_x \cos \varkappa_r + \operatorname{ctg} \alpha_y \sin \varkappa_r, \qquad (10c$$

$$\operatorname{tg}\gamma_x = \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma - \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda, \tag{11c}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_y = \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma + \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda, \tag{12c}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma_x \sin\varkappa_r + \operatorname{tg}\gamma_y \cos\varkappa_r, \tag{13c}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = -\operatorname{tg}\gamma_x \cos\varkappa_r + \operatorname{tg}\gamma_y \sin\varkappa_r, \tag{14c}$$

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\lambda \sin(\varkappa_r + \varkappa_{1r}) + \operatorname{tg}\gamma \cos(\varkappa_r + \varkappa_{1r}), \tag{15c}$$

$$\operatorname{tg}\lambda_1 = \operatorname{tg}\gamma \sin(\varkappa_r + \varkappa_{1r}) - \operatorname{tg}\lambda \cos(\varkappa_r + \varkappa_{1r}). \tag{16c}$$

Pentru freză :

$$\gamma_{x_{\text{cuțit}}} = \gamma_{1_{\text{freză}}} \left| \begin{array}{l} \gamma_{y_{\text{cuțit}}} = \gamma'_{\text{freză}} = \omega \\ \alpha_{y_{\text{cuțit}}} = \alpha'_{\text{freză}} \end{array} \right| \begin{array}{l} \alpha_{\text{cuțit}} = \alpha_{N_{\text{freză}}}, \\ \gamma_{\text{cuțit}} = \gamma_{\text{freză}}. \end{array}$$

$$\alpha_{x_{\text{cuțit}}} = \alpha_{\text{freză}}$$

Ca urmare, formulele (13), (7), (11), (12), (14) devin

$$\operatorname{tg}\gamma = \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma_1 + \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\omega \tag{13d}$$

sau

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\operatorname{tg}\gamma - \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\omega}{\sin\varkappa_r}, \tag{7d}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \sin\varkappa_r \operatorname{ctg}\alpha_N - \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda,$$

adică

$$\operatorname{ctg}\alpha_N = \frac{\operatorname{ctg}\alpha + \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda}{\sin\varkappa_r},$$

iar pentru $\lambda = 0$, se obține

$$\operatorname{tg}\alpha_N = \operatorname{tg}\alpha \sin\varkappa_r,$$

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma - \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda, \tag{11d}$$

$$\operatorname{tg}\gamma' = \cos\varkappa_r \operatorname{tg}\gamma + \sin\varkappa_r \operatorname{tg}\lambda, \tag{12d}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = -\operatorname{tg}\gamma_1 \cos\varkappa_r + \operatorname{tg}\gamma' \sin\varkappa_r. \tag{14d}$$

Pentru lărgitor, relațiile (11), (12), (13), (8), (7), (9) și (14) devin :

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \cos\varkappa_a \operatorname{tg}\gamma + \sin\varkappa_a \operatorname{tg}\lambda, \tag{12e}$$

$$\operatorname{tg}\gamma' = \sin\varkappa_a \operatorname{tg}\gamma - \cos\varkappa_a \operatorname{tg}\lambda, \tag{11e}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\gamma' \sin\varkappa_a + \operatorname{tg}\gamma_1 \cos\varkappa_a, \tag{13e}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha_1 = \cos\varkappa_a \operatorname{ctg}\alpha + \sin\varkappa_a \operatorname{tg}\lambda, \tag{8e}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha' = \sin\varkappa_a \operatorname{ctg}\alpha - \cos\varkappa_a \operatorname{tg}\lambda, \tag{7e}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha' \sin\varkappa_a + \operatorname{ctg}\alpha_1 \cos\varkappa_a, \tag{9e}$$

$$\operatorname{tg}\lambda = -\operatorname{tg}\gamma' \cos\varkappa_a + \operatorname{tg}\gamma_1 \sin\varkappa_a. \tag{14e}$$

5. CALCULUL FORȚELOR DE AȘCHIERE ÎN CAZUL SCULEI GENERALIZATE

În cazul aşchierii cu scula generalizată, apar pentru un cuțit constitutiv, într-o poziție determinată de unghiul φ (fig. 3*a* și *b*), forțele F_z și $F_{N\varphi}$, în care F_z reprezintă *forța principală* de aşchiere (în cazul de față putîndu-se numi componenta tangențială) și $F_{N\varphi}$ *componenta normală*. Ultima se descompune în două componente : una după direcția avansului (orizontal sau vertical), iar alta normală la avans. Componenta după direcția avansului, F_x, se va numi *forța de avans*, iar componenta normală pe direcția avansului, F_y, *forța de respingere*.

În cazul cînd se consideră avansul orizontal, forța tangențială (medie) va avea o valoare similară forței tangențiale din cazul frezării, cu deosebirea că se va lua un diametru mediu pentru sculă, $D_{s\text{med}}$, și se va ține seama că în procesul de aşchiere intervin i rînduri de cuțite. Conform [2, p. 137], rezultă

$$F_z = C_{F_z} t^{r} \; s_d^{x_{F_z}} \; t_s^{y_{F_z}} D_{s_{\text{med}}}^{-q_{F_z}} \; z \; i \; k \; [\text{daN}]. \tag{17}$$

În cazul cînd se consideră avansul vertical, forța tangențială F_z se calculează ca în cazul burghierii, respectiv lărgirii, cu deosebirea că se ia un diametru mediu pentru sculă, $D_{s\text{med}}$, și se ține seama că în procesul de aşchiere intervin i rînduri de cuțite. Conform [2, p. 144—147], rezultă

$$F_z = C_{F_z} D_{s_{\text{med}}}^{x_{F_z}} \; s^{y_{F_z}} \; t_a^{u_{F_z}} \; z \; i \; k \; [\text{daN}]. \tag{18}$$

Considerîndu-se relațiile (17) și (18), se poate scrie relația generalizată

$$F_z = C_{F_z} D_{s_{\text{med}}}^{q_{F_z}} \; s_d^{x_{F_z}} \; t_r^{y'_{F_z}} \; t_a^{y''_{F_z}} \; t_s^{g_{F_z}} \; z \; i \; k \; [\text{daN}]. \tag{19}$$

Această relație este valabilă pentru determinarea forței principale de aşchiere pentru toate sculele aşchietoare, specificul diferitelor scule particulare punîndu-se în evidență prin schimbarea mărimii și sensului (semnului) diferiților exponenți și coeficienți. În cazul cînd una dintre mărimile s_d, t_r, t_a, t_s, z, i sau $D_{s\text{med}}$ nu participă în cazul sculei respective, exponentul acelei mărimi se va lua zero. Aşa de exemplu :

a) În cazul rabotării, mortezării și strunjirii,

$q_{F_z} = y''_{F_z} = g_{F_z} = 0$, $z = i = 1$, $s_d = \dfrac{s}{z} = s$, rezultînd

$$F_z = C_{F_z} s^{y_{F_z}} \; t_r^{y'_{F_z}} \; k \; [\text{daN}]. \tag{19a}$$

b) În cazul broșării, $q_{F_z} = y''_{F_z} = g_{F_z} = 0$, $i = 1$, $t_r = b$ (în care b este lățimea aşchiei ridicate). Rezultă

$$F_z = C_{F_z} \; s_d^{x_{F_z}} \; b^{y'_{F_z}} z \; k \; [\text{daN}], \tag{19b}$$

în care z este numărul de dinți ai broșei în contact cu materialul semifabricatului.

În cazul broșării canalelor de pană, $b = b_p$, în care b_p este lățimea canalului de pană.

În cazul broșării unei găuri canelate, $b = nb_p$, în care b_p este lățimea unei caneluri, iar n este numărul de caneluri.

În cazul broșării unei găuri cilindrice, $b \approx \pi D$, în care D este diametrul găurii broșate.

c) În cazul frezării, $y''_{F_z} = 0$, $i = 1$, $D_{s_{med}} = D_s$, deci

$$F_z = C_{F_z} D_s^{q_{F_z}} s_d^{x_{F_z}} t_r^{y'_{F_z}} t_s^{g_{F_z}} z\, k \text{ [daN]}. \tag{19c}$$

d) La burghiere, $y'_{F_z} = g_{F_z} = 0$, $z = 2 = \text{const}$, $D_{s_{med}} = D_s$, $i = 1$ și $t_a = \frac{D_s}{2}$, ca urmare $y''_{F_z} = 0$. În plus, $s_d = \frac{s}{2}$ și se poate considera avansul pe rotație în loc de avansul pe dinte. Rezultă

$$F_z = C_{F_z} D_s^{q_{F_z}} s^{x_{F_z}} k \text{ [daN]}. \tag{19d}$$

e) La lărgire și alezare, $y'_{F_z} = g_{F_z} = 0$, $D_{s_{med}} = D_s$, $i = 1$. În plus se poate lua $s_d^{x_{F_z}} z \approx s^{x_{F_z}}$ (deoarece x_{F_z} este apropiat de 1). Rezultă

$$F_z = C_{F_z} D_s^{q_{F_z}} s^{x_{F_z}} t_a^{y''_{F_z}} k \text{ [daN]}. \tag{19e}$$

f) În cazul tarodării și prelucrării cu filiera, $s = p$, $t_a = \varphi(p) = \text{const}$. p deci $y''_{F_z} = 0$, $s_d^{x_{F_z}} z \approx s^{x_{F_z}}$ și $y'_{F_z} = g_{F_z} = 0$. Rezultă

$$F_z = C_{F_z} D_{s_{med}}^{q_{F_z}} p^{x_{F_z}} i\, k \text{ [daN]}. \tag{19f}$$

în care i este numărul muchiilor care așchiază la un moment dat.

Analizîndu-se expresiile (19a) — (19f), se vede că s-au obținut formulele utilizate obișnuit pentru determinarea forței principale de așchiere. Relația (19) rămîne astfel formula generalizată pentru toate sculele așchietoare.

În ceea ce privește forța de avans și forța de respingere, se poate lua

$$F_x = k_x F_z \text{ și } F_y = k_y F_z \tag{20}$$

sau

$$F_x = C_{F_x} D_{s_{med}}^{q_{F_x}} s_d^{x_{F_x}} t_r^{y'_{F_x}} t_a^{y''_{F_x}} t_s^{g_{F_x}} z\, i\, k \text{ [daN]}, \tag{21}$$

$$F_y = C_{F_y} D_{s_{med}}^{q_{F_y}} s_d^{x_{F_y}} t_r^{y'_{F_y}} t_a^{y''_{F_y}} t_s^{g_{F_y}} z\, i\, k \text{ [daN]}. \tag{22}$$

Forța necesară avansului mașinii-unelte va avea valoarea

$$Q = F_z + (F_z + F_y)\,\mu, \tag{23}$$

în care μ este coeficientul de frecare (se poate lua $\mu \approx 0{,}1$).

Considerîndu-se valorile (20), expresia (23) devine

$$Q = F_z [k_v + (1 + k_y) \mu] = k_a F_z \tag{23a}$$

sau, ținîndu-se seama de relația (19),

$$Q = k_Q C_{F_z} D_{s_{\text{med}}}^{q_{F_z}} s_d^{x_{F_z}} t_r^{y'_{F_z}} t_a^{y''_{F_z}} t_s^{g_{F_z}} z\, i\, k \text{ [daN]}. \tag{24}$$

6. CALCULUL MĂRIMII MICRONEREGULARITĂȚILOR SUPRAFEȚEI PRELUCRATE CU SCULA GENERALIZATĂ

Mărimea microneregularităților este influențată de o serie de factori : avans, raza de rotunjire a sculei sau diametrul acesteia, unghiul de atac secundar, materialul prelucrat, viteza de așchiere, lichidul de așchiere, vibrații, geometria sculei, rugozitatea fețelor sculei, uzura sculei, spiralarea așchiei, mărimea adausului de prelucrare etc. Se poate pune

$$R_{\max} = C_R D_s^{q_R} s^{x_R} t_r^{y'_R} t_a^{y''_R} t_s^{g_R} \varkappa_{1_{r,a}}^{e_R} \alpha^{\mu_R} \delta^{\nu_R} v^{u_R} k, \tag{25}$$

în care k este o constantă ce înglobează restul factorilor care influențează asupra mărimii microneregularităților obținute la așchiere.

Prin particularizarea coeficienților și exponenților se obțin diferitele formule uzuale, mai mult sau mai puțin exacte, utilizate la calculul mărimii microneregularităților. Așa de exemplu :

— pentru frezare, $y'_R = y''_R = e_R = \mu_R = \nu_R = u_R = 0$.

Rezultă

$$R = C_R D_s^{q_R} s^{x_R} t_s^{g_R} k; \tag{25a}$$

— pentru strunjire, $D_s = 2r$ (în care r este raza de rotunjire a tăișului cuțitului), $y'_R = y''_R = g_R = e_R = \mu_R = \nu_R = u_R = 0$. Rezultă

$$R = C_R r^{q_R} s^{x_R} k; \tag{25b}$$

— pentru alezare, $q_R = y'_R = g_R = e_R = 0$. Rezultă

$$R = C_R s^{x_R} t_a^{y''_R} \alpha^{\mu_R} \delta^{\nu_R} v^{u_R} k. \tag{25c}$$

Formulele (25a) — (25c) corespund formulelor utilizate în anumite cazuri în practică.

7. STABILIREA REGIMULUI DE AȘCHIERE AL SCULEI GENERALIZATE

7.1. CALCULUL AVANSULUI

Mărimea avansului este limitată de mai mulți factori :

a) *Rezistența mecanismului de avans al mașinii-unelte.* Fie F_{m_u} forța de avans permisă de mașina-unealtă. Considerîndu-se relația (24), trebuie ca

$$Q \leqslant F_{m_u},$$

adică

$$k_Q\, C_{F_z}\, D_{s_{\text{med}}}^{q_{F_z}}\, s_d^{x_{F_z}}\, t_r^{y'_{F_z}}\, t_a^{y''_{F_z}}\, t_s^{g_{F_z}}\, z\, i\, k \leqslant F_{mu},$$

respectiv

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_{mu}}{k_Q\, C_{F_z}\, D_{s_{\text{med}}}^{q_{F_z}}\, t_r^{y'_{F_z}}\, t_a^{y''_{F_z}}\, t_s^{g_{F_z}}\, z\, i\, k}}. \tag{26}$$

De exemplu, pentru frezare, ţinîndu-se cont de (19c), se găseşte

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_{mu}}{k_Q\, C_{F_z}\, D_s^{q_{F_z}}\, t_r^{y'_{F_z}}\, t_s^{g_{R_z}}\, z\, k}}. \tag{26a}$$

Pentru burghiere, luîndu-se în considerare expresia (19d), rezultă

$$s \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_{mu}}{k_Q\, C_{F_z}\, D_s^{g_{F_z}}\, k}}. \tag{26b}$$

Pentru strunjire, conform relaţiei (19a), se găseşte

$$s \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_{mu}}{k_Q\, C_{F_z}\, t_r^{y'_{F_z}}\, k}}. \tag{26c}$$

Şi tot aşa şi pentru celelalte operaţii de aşchiere.

Formulele (26a) — (26c) obţinute corespund formulelor date în literatură.

b) *Rugozitatea admisă pentru suprafaţa aşchiată.* Considerîndu-se relaţia (25), trebuie ca

$$R_{\max} \leqslant R_{\text{adm}},$$

adică

$$C_R\, D^{q_R}\, s^{x_R}\, t_r^{y'_R}\, t_a^{y''_R}\, t_s^{g_R}\, \varkappa_{1r,a}^{e_R}\, \alpha^{\mu_R}\, \delta^{\nu_R}\, v^{u_R}\, k \leqslant R_{\text{adm}},$$

respectiv

$$s \leqslant \sqrt[x_R]{\frac{R_{\text{adm}}}{C_R\, D_s^{q_R}\, t_r^{y'_R}\, t_a^{y''_R}\, t_s^{g_R}\, \varkappa_{1r,a}^{e_R}\, \alpha^{\mu_R}\, \delta^{\nu_R}\, v^{u_R}\, k}}. \tag{27}$$

De exemplu, pentru frezare, ținîndu-se cont de relația (25a), se găsește

$$s \leqslant \sqrt[x_R]{\frac{R_{adm}}{C_R D_s^{q_R} t_s^{g_R} k}}. \tag{27a}$$

Pentru strunjire, conform relației (25b), rezultă

$$s \leqslant \sqrt[x_R]{\frac{R_{adm}}{C_R r^{g_R} k}}. \tag{27b}$$

Și tot astfel și pentru celelalte operații de așchiere.

Formulele (27a) — (27b) obținute corespund formulelor date în literatură.

c) *Rezistența și rigiditatea sculei.* În primul rînd, se va considera rezistența cuțitelor componente. Conform [2, p. 239—242], pentru cuțite drepte, se poate lua, ținîndu-se seama de relația (19),

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{\sigma_a B^2}{\xi C_{F_z} D_{s_{med}}^{q_{F_z}} t_r^{y'_{F_z}} t_a^{y''_{F_z}} t_s^{g_{F_z}} z i k}}, \tag{28}$$

în care

$$\xi = \sqrt{\varepsilon^2 + 4\nu^2},$$

$$\varepsilon = \frac{6\mu - 2k_y + 6k_x \mu q}{q},$$

$$\nu = \frac{1{,}5 + 0{,}5\,\eta_2 k_x q}{q},$$

$$q = \frac{H}{B}; \quad \mu = \frac{l}{H},$$

η_2 — coeficient numeric depinzînd de raportul H/B [3]

De exemplu, pentru cuțitul de strung, ținîndu-se cont de relația (19a), se găsește

$$s \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{\sigma_a B^2}{\xi C_{F_z} t_r^{y'_{F_z}} k}}. \tag{28a}$$

În cazul cînd capul portcuțite este fixat pe dorn și execută o mișcare de avans orizontală, dornul de fixare este solicitat la răsucire și încovoiere. Conform [2, p. 256], diametrul dornului se calculează cu formula

$$d = \sqrt[3]{\frac{10\ M'}{\sigma_{i_a}}}, \tag{29}$$

în care

$$M' = 0{,}35\ M_i + 0{,}65\ \sqrt{M_i^2 + \alpha_0^2\ M_t^2},$$

$$\alpha_0 = \frac{\sigma_{i_a}}{1{,}73\ \tau_{t_a}}.$$

Din punctul de vedere al rigidității dornului de fixare, este necesar ca

$$R = \sqrt{F_z^2 + F_y^2} = F_z\sqrt{1 + k_y^2} \leqslant F_f,$$

în care F_f este forța care produce săgeata admisibilă $f_{a\text{dm}}$.

Luînd în considerare formula (19), relația precedentă devine

$$\sqrt{1 + k_y^2}\ C_{F_z} D_{s_{\text{med}}}^{q_{F_z}}\ s_d^{x_{F_z}}\ t_r^{y'_{F_z}}\ t_a^{y''_{F_z}}\ t_s^{g_{F_z}}\ z\ i\ k \leqslant F_f,$$

adică

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_f}{\sqrt{1 + k_y^2}\ C_{F_z} D_{s_{\text{med}}}^2\ t_r^{y'_{F_z}}\ t_a^{y''_{F_z}}\ t_s^{g_{F_z}}\ z\ i\ k}}. \tag{30}$$

De exemplu, pentru freză, ținîndu-se cont de relația (19c), se găsește

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_f}{\sqrt{1 + k_y^2}\ C_{F_z} D_s^{q_{F_z}}\ t_r^{y'_{F_z}}\ t_s^{g_{F_z}}\ z\ k}}. \tag{30a}$$

Dacă capul portcuțite execută o mișcare de avans verticală, corpul sculei este solicitat la comprimare și răsucire.

Considerîndu-se solicitarea la răsucire, efortul unitar de răsucire τ_t va avea valoarea

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p}.$$

Luînd în considerare și solicitarea la comprimare — datorită faptului că ambele solicitări, comprimare și răsucire, în cazul de față sînt de același fel, se poate lua raportul eforturilor $\alpha_0 = 1$, astfel încît

$$\sigma_{\max} = 1{,}73\ \tau_t = \frac{1{,}73\ M_t}{W_p}.$$

Sau, introducîndu-se coeficientul de siguranță c,

$$\sigma_{\max} \leqslant \frac{\sigma_r}{c} = \frac{1{,}73\ M_t}{W_p}.$$

Luîndu-se în considerare expresia (19), formula anterioară devine

$$\sigma_{max} \leqslant \frac{\sigma_r}{c} = \frac{1{,}73\ C_{F_z} D_{s_{med}}^{q_{F_z}} s_d^{x_{F_z}} t_r^{\prime y_{F_z}} t_a^{\prime\prime y_{F_z}} t_s^{q_{F_z}} z\ i\ k \frac{D_{s_{med}}}{2}}{W_p},$$

adică

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{2\sigma_r W_p}{1{,}73\ C_{F_z} D_{s_{med}}^{q_{F_z}+1} t_r^{\prime y_{F_z}} t_a^{\prime\prime y_{F_z}} t_s^{q_{F_z}} z\ i\ k\ c}}. \tag{31}$$

De exemplu, pentru burghiul cu canale elicoidale, la care $W_p = 0{,}02\ D_s^3$ [4], ținîndu-se cont de relația (19d), se găsește

$$s \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{2 \times 0{,}02\ \sigma_r D_s^3}{1{,}73\ C_{F_z} D_s^{q_{F_z}} k\ c}}$$

sau

$$s \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{2 \times 0{,}02\ \sigma_r}{1{,}73\ C_{F_z} D_s^{q_{F_z}-3} k\ c}}. \tag{31a}$$

Dacă scula este solicitată la flambaj, este necesar ca forța de avans (axială) F_x să fie mai mică decît forța critică de flambaj, ceea ce se realizează prin micșorarea, respectiv limitarea avansului:

$$F_x = k_x F_z \leqslant \frac{F_{fl}}{C_{fl}}.$$

Luîndu-se în considerare formula (19), relația precedentă devine

$$k_x C_{F_z} D_{s_{med}}^{q_{F_z}} s_d^{x_{F_z}} t_r^{\prime y_{F_z}} t_a^{\prime\prime y_{F_z}} t_s^{q_{F_z}} z\ i\ k \leqslant \frac{F_{fl}}{C_{fl}},$$

adică

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_{fl}}{k_x C_{F_z} D_{s_{med}}^{q_{F_z}} t_r^{\prime y_{F_z}} t_a^{\prime\prime y_{F_z}} t_s^{q_{F_z}} z\ i\ k\ C_{fl}}}. \tag{32}$$

De exemplu, pentru burghiul cu canale elicoidale, ținîndu-se cont de relația (19d), se găsește

$$s \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_{fl}}{k_x C_{F_z} D_s^{q_{F_z}} k\ c_{fl}}}. \tag{32a}$$

Formulele (28a), (30a), (31a) și (32a) corespund formulelor date în literatură.

d) *Rezistența și rigiditatea piesei prelucrate.* În cazul cînd mișcarea principală este mișcarea de rotație a semifabricatului, acesta este solicitat la răsucire și încovoiere.

Considerîndu-se solicitarea simplă de încovoiere, forța la care rezistă semifabricatul se va calcula cu formula

$$F_p = \frac{\varepsilon \sigma_a W}{l_p},$$

în care

l_p este lungimea semifabricatului,

ε — coeficient ce depinde de felul cum este fixat semifabricatul (pentru fixarea la un capăt, $\varepsilon = 1$; pentru fixarea între vîrfuri, $\varepsilon = 4$; pentru fixarea la un capăt și sprijinirea în vîrf la celălalt capăt, $\varepsilon = \frac{16}{3}$).

Asupra semifabricatului acționează forța

$$R = \sqrt{F_z^2 + F_y^2} = F_z \sqrt{1 + k_y^2}.$$

Este necesar ca

$$R = F_z \sqrt{1 + k_y^2} \leqslant F_p,$$

adică

$$\sqrt{1 + k_y^2}\, C_{F_z} D_{s_{\text{med}}}^{q_{F_z}} s_d^{x_{F_z}} t_r^{y'_{F_z}} t_a^{y''_{F_z}} t_s^{g_{F_z}} z\, i\, k \leqslant F_p,$$

respectiv

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_p}{\sqrt{1 + k_y^2}\, C_{F_z} D_{s_{\text{med}}}^{q_{F_z}} t_r^{y'_{F_z}} t_a^{y''_{F_z}} t_s^{g_{F_z}} z\, i\, k}}. \tag{33}$$

De exemplu, pentru strunjire, ținîndu-se cont de relația (19a), se găsește

$$\leqslant s \sqrt[x_{F_z}]{\frac{F_p}{\sqrt{1 + k_y^2}\, C_{F_z} t_r^{y'_{F_z}} k}}. \tag{33a}$$

Este necesar însă și o verificare de rigiditate a semifabricatului. Dacă săgeata maximă rezultată are valoarea

$$f_{\max} = \frac{R l^3}{\varepsilon E I} = \frac{\sqrt{1 + k_y^2}\, F_z l_p^3}{\varepsilon E I},$$

în care ε este un coeficient ce depinde de felul cum este fixat semifabricatul (pentru fixarea la un capăt, $\varepsilon = 3$; pentru fixarea între vîrfuri, $\varepsilon = 48$; pentru fixarea la un capăt și sprijinirea în vîrf la celălalt capăt, $\varepsilon = 110$).
trebuie ca

$$f_{max} = \frac{\sqrt{1 + k_j^2}\, F_z\, l_p^3}{\varepsilon\, E\, I} \leqslant f_{adm},$$

adică

$$\sqrt{1 + k_y^2}\, C_{F_z} D_{s_{med}}^{q_{F_z}}\, s_d^{x_{F_z}}\, t_r^{y'_{F_z}}\, t_a^{y''_{F_z}}\, t_s^{q_{F_z}}\, z\, i\, k\, l_p^3 \leqslant \varepsilon\, E\, I\, f_{adm},$$

respectiv

$$s_d \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{\varepsilon\, E\, I\, f_{adm}}{\sqrt{1 + k_y^2}\, C_{F_z} D_{s_{med}}^{q_{F_z}}\, t_r^{y'_{F_z}}\, t_a^{y''_{F_z}}\, t_s^{q_{F_z}}\, z\, i\, k\, l_p^3}}. \tag{34}$$

De exemplu, pentru strunjire, ținîndu-se cont de relația (19a), se găsește

$$s \leqslant \sqrt[x_{F_z}]{\frac{\varepsilon\, E\, I\, f_{adm}}{\sqrt{1 + k_y^2}\, C_{F_z}\, t_r^{y'_{F_z}}\, k\, l_p^3}}. \tag{34a}$$

Formulele (33a), (34a) corespund formulelor date în literatură.

Comparîndu-se mărimile găsite cu formulele (26) — (34), se va alege valoarea cea mai mică a avansului și se va corecta, în minus, în funcție de avansul existent la mașina-unealtă.

7.2. CALCULUL VITEZEI DE AȘCHIERE

Luînd în considerare diferitii parametri ai procesului de așchiere generalizat și ținînd cont de influența acestor parametri asupra vitezei de așchiere corespunzătoare durabilității economice T, rezultă relațiile funcționale :

—în cazul mișcării de rotație a capului portcuțite și deplasării de avans orizontale [2, p. 216],

$$v_{s_T} = \frac{C_v\, D_{s_{med}}^{q_v}}{T^m\, s_t^{x_v}\, t_r^{y'_v}\, t_s^{q_v}\, z^{u_v}}\, k; \tag{35}$$

— în cazul mișcării de rotație a capului portcuțite și deplasării de avans verticale [2, p. 217],

$$v_{sT} = \frac{C_v D_{s_{med}}^{q_v}}{T^m s_d^{x_v} t_a^{y''_v} z^{u_v}} k; \tag{36}$$

— în cazul mișcării de rotație a semifabricatului și deplasării de avans orizontale [2, p. 207],

$$v_{p_T} = \frac{C_v}{T^m s_d^{x_v} t_r^{y'_v}} k. \tag{37}$$

Considerînd relațiile funcționale (34) — (37), se poate scrie relația generalizată

$$v_{s,p_T} = \frac{C_v D_{s_{med}}^{q_v}}{T^m s_d^{x_v} t_r^{y'_v} t_a^{y''_v} t_s^{g_v} z^{u_v}} k. \tag{38}$$

Relația (38) este valabilă pentru determinarea vitezei de așchiere pentru orice sculă așchietoare, specificul diferitelor scule punîndu-se în evidență prin schimbarea mărimii și sensului (semnului) diferiților exponenți și coeficienți.

În cazul cînd una dintre mărimile s_d, t_r, t_a, t_s, z sau $D_{s_{med}}$ nu participă la determinarea vitezei de așchiere, exponentul mărimii respective se va lua zero. Așa, de exemplu:

— în cazul rabotării, mortezării și strunjirii, $q_v = y''_v = g_v = u_v = 0$, $s_d = \frac{s}{z} = s$ (deoarece $z = 1$). Rezultă

$$v_{s,p_T} = \frac{C_v}{T^m s^{x_v} t_r^{y'_v}} k; \tag{38a}$$

— în cazul broșării, $q_v = y''_v = g_v = u_v = 0$; de asemenea $y'_v = 0$, deoarece adîncimea de așchiere apare numai la primul cuțit elementar (dinte). Rezultă

$$v_{s,p_T} = \frac{C_v}{T^m s_d^{x_v}} k; \tag{38b}$$

— în cazul frezării, $y''_v = 0$, $D_{s_{med}} = D_s$. Rezultă

$$v_{sT} = \frac{C_v D_s^{q_v}}{T^m s_d^{x_v} t_r^{y'_v} t_s^{g_v} z^{u_v}} k; \tag{38c}$$

— la burghiere, $y'_v = q_v = 0$; de asemenea, $z = 2 = \text{const}$ și $t_a = \frac{D_s}{2}$, ca urmare $y''_v = u_v = 0$. În plus, $s_d = \frac{s}{2}$ și se poate considera avansul pe rotație în loc de avansul pe dinte. Rezultă

$$v_{s_T} = \frac{C_v D_s^{q_v}}{T^m s^{x_v}} k; \tag{38d}$$

— la lărgire și alezare, $y'_v = g_v = 0$. În plus, se poate lua $s_d^{x_v} Z^{u_v} \approx \approx s^{x_v}$. Rezultă

$$v_{s_T} = \frac{C_v D_s^{q_v}}{T^m s^{x_v} t_a^{y''_v}} k; \tag{38e}$$

— în cazul tarodării și prelucrării cu filiera, $s = p$, $t_a = \varphi(p) = \text{const}$. p, deci $y''_v = 0$,; $s_d^{x_v} z^{u_v} \approx s^{x_v}$ și $y'_a = g_v = 0$. Rezultă

$$v_{s_1} = \frac{C_v D_s^{q_c}}{T^m p^{x_v}} k. \tag{38f}$$

Analizîndu-se expresiile (38a) — (38f), se vede că s-au obținut formulele obișnuite utilizate pentru determinarea vitezei principale. Relația (38) rămîne astfel formula generalizată pentru toate sculele aș-chietoare.

CONCLUZII

1. Din cele expuse, se vede că este posibilă abstractizarea sculei aș chietoare. Modelul prezentat constituie o variantă simplificată.

2. Ca urmare, se pot unifica diferitele formule în legătură cu stabilirea geometriei sculei, calculul forțelor, determinarea regimului optim de așchiere etc.

3. Unificarea formulelor pentru calculul regimului de așchiere (avans și viteză de așchiere) permite stabilirea unui model matematic pentru regimul de așchiere optim, respectiv utilizarea metodei programării liniare. Se pot folosi astfel mașini de calcul moderne, proprii determinării regimurilor optime de așchiere, atît în ceea ce privește automatizarea proiectării proceselor tehnologice, cît și pentru conducerea automată a desfășurării procesului tehnologic, în cazul cînd intervin abateri de la condițiile inițiale considerate.

4. Unificarea formulelor de calcul poate aduce micșorarea experimentărilor pentru stabilirea diferitilor parametri, coeficienți și exponenți, considerați pînă în prezent complet diferiți pentru diversele scule așchietoare. Aceasta micșorează volumul de muncă al cercetărilor.

5. Particularizarea capului portcuțite pentru diferitele scule uzuale permite îmbunătățirea formei formulelor funcționale existente, precum și stabilirea unor formule funcționale acolo unde acestea încă nu există.

6. Particularizarea sculei generalizate permite elaborarea de noi scule aşchietoare.

Primită la redacţie la 29 septembrie 1966.

BIBLIOGRAFIE

1. I. LĂZĂRESCU, *Calculul şi construcţia sculelor aşchietoare*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1962.
2. — *Teoria aşchierii metalelor şi proiectarea sculelor*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1964.
3. HÜTTE I., Bucureşti, Edit. A.G.I.R., 1947, p. 689, tabela 14 a.
4. M. KRONENBERG, *Der zulässige Vorschub beim Bohren und die Ausnutzung der Bohrmaschine*, Werkstattstechnik Heft *18*, 357 (1935).

CALCULUL FORȚELOR CARE ACȚIONEAZĂ ÎN PLĂCILE PLANE ASAMBLATE ÎN PUNCTE

de N. BOICU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

539.3

Există asamblări de plăci plane elastice, supuse unor stări de solicitare plană, la care forțele se transmit prin zone de asamblare de întindere mică. Pentru astfel de cazuri, în lucrare se stabilește un sistem de ecuații algebric liniar, în care necunoscutele sînt forțele de interacțiune. Se fac aplicații numerice.

Vom preciza în trei puncte conținutul lucrării de față.

1. Elementele asamblate sînt plăci plane elastice, acționate de forțe în planul lor. Forțele de asamblare se transmit între plăci prin zone locale de asamblare. Cercurile circumscrise acestor zone locale au razele mici în comparație cu distanțele dintre zonele de asamblare și cu distanțele zonelor de asamblare față de marginile plăcilor. Starea de tensiuni a fiecărei zone de asamblare are o forță rezultantă, momentul rezultant fiind nul.

Starea de tensiuni care poate exista în zonele de asamblare în dependență de însești condițiile tehnologice este foarte complexă. În prezenta lucrare vom înlocui starea reală de tensiuni printr-o stare echivalentă, ușor de prins în calcul, situație de altfel permisă în virtutea principiului enunțat la punctul următor.

2. Stările de deplasări de ansamblu ale plăcilor nu depind de distribuțiile locale de tensiuni din zonele de asamblare, ci doar de mărimile și de direcțiile forțelor rezultante ale acestor stări de tensiuni.

3. Deplasarea unui punct oarecare al unei plăci se obține prin suprapunerea efectelor forțelor care acționează în fiecare zonă de asamblare în parte. Ultima condiție va fi satisfăcută prin forma care se va adopta pentru funcțiile tensiunilor.

Există o metodă simplă de calcul a forțelor rezultante din zonele de asamblare. Această metodă necesită reducerea sistemului de forțe exterioare care acționează asupra plăcilor la o forță și un moment rezultant,

aplicate în centrul de greutate al asamblării, precum și adoptarea a două ipoteze :

a) forța rezultantă se repartizează uniform asupra tuturor zonelor de asamblare :

$$\overline{H}_i = \frac{\overline{F}}{n}, \tag{1}$$

unde vectorul $\overline{H}_i$ este forța care revine zonei notate cu litera i, iar n este numărul zonelor de asamblare, $\overline{F}$ fiind forța exterioară rezultantă ;

b) forțele care acționează în zonele de asamblare pentru transmiterea momentului exterior rezultant sînt perpendiculare pe direcțiile date de centrele zonelor și de centrul de greutate al asamblării, orientate în sensul dat de momentul transmis de asamblare, și, ca mărime, sînt proporționale cu distanțele centrelor zonelor de asamblare față de centrul de greutate al asamblării.

Prin utilizarea ipotezei b) și scrierea ecuațiilor de echilibru mecanic privitoare la momente, pentru calculul forțelor provenite din momentul exterior se obține formula

$$G_i = \frac{M \cdot \rho_i}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j^2} \cdot \bar{t}_i^2, \tag{2}$$

în care M este momentul exterior, ρ_i distanța de la centrul zonei de asamblare, notată cu litera i, la centrul de greutate al asamblării, iar $\bar{t}_i$ versorul normalei la direcția dată de centrul zonei de asamblare i și centrul de greutate al asamblării.

Forța totală, notată cu $\overline{F}_i$, se obține prin însumarea componentelor date de formulele (1) și (2) :

$$\overline{F}_i = \overline{H}_i + \overline{G}_i. \tag{3}$$

Un calcul mai precis se poate face considerînd plăcile ca fiind supuse unei stări de tensiune plană. Rezolvarea riguroasă a problemei pe această cale comportă dezvoltarea unui volum de calcul numeric foarte mare pentru fiecare caz în parte, ceea ce sub raport economic, cu puține excepții, nu este permis. Adoptînd totuși tratarea problemei ca pe o problemă plană elastică, în lucrarea de față se construiește o soluție care prezintă o operativitate a calculului acceptabilă din punct de vedere practic.

★

După cum se știe, rezolvarea problemei plane a teoriei elasticității comportă determinarea funcției tensiunilor, o funcție biarmonică plană :

$$\Delta^2 \varphi = 0 ; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta^2}. \tag{4}$$

Cu această funcție tensiunile se exprimă prin relațiile cunoscute :

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} ; \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} ;$$
$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right). \tag{5}$$

Deformațiile sînt date în funcție de tensiuni de legea lui Hooke :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\cdot\sigma_\theta);\ \gamma_{r\theta} = \frac{2(1+\mu)}{E}\cdot\tau_{r\theta},\quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r). \tag{6}$$

În vederea calculului deplasărilor scriem relațiile dintre acestea și deformații :

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r};\ \varepsilon_\theta = \frac{\partial v}{r\cdot\partial\theta} + \frac{u}{r};\ \gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{r\cdot\partial\theta}. \tag{7}$$

În relațiile de pînă acum, r și θ sînt coordonatele polare ale punctului curent, E și μ constantele elastice notate în modul consacrat, iar u și v deplasările radială, respectiv tangențială.

Pentru funcția φ alegem o reprezentare adecvată condițiilor enunțate la începutul lucrării :

$$\varphi = a\cdot\ln r + \frac{b}{r}\cdot\cos\theta + c\cdot r\cdot\theta\cdot\sin\theta + d\cdot r\cdot\ln r\cdot\cos\theta. \tag{8}$$

Termenul al treilea al funcției φ este cel introdus de Boussunesq, pentru problema acțiunii forței concentrate asupra semiplanului elastic. Prin prezența acestui termen, funcția tensiunilor este multiformă.

Cu expresia (8) și cu relațiile (5), tensiunile σ_r, σ_θ și $\tau_{r\theta}$ se găsesc de forma

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{a}{r^2} + \left(-\frac{2\cdot b}{r^3} + \frac{2\cdot c + d}{r}\right)\cdot\cos\theta,\\
\sigma_\theta &= -\frac{a}{r^2} + \left(\frac{2\cdot b}{r^3} + \frac{d}{r}\right)\cdot\sin\theta,\\
\tau_{r\theta} &= \left(-\frac{2\cdot b}{r^3} + \frac{d}{r}\right)\cdot\sin\theta.
\end{aligned} \tag{9}$$

Din primele relații (6) și (7), cu expresiile (9), se găsește relația

$$\frac{\partial u}{\partial r} = +\frac{1}{E}\cdot\left[\frac{1+\mu}{r^2}\cdot a - \frac{2(1+\mu)}{r^3}\cdot b\cdot\cos\theta + \right.$$
$$\left. + \frac{2\cdot c}{r}\cos\theta + \frac{1-\mu}{r}\cdot d\cdot\cos\theta\right], \tag{10}$$

care, prin integrare în raport cu variabila r, duce la expresia deplasării u :

$$u = -\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{a}{r} + \frac{1}{E}\left\{\frac{1+\mu}{r^2}\cdot b + [2\cdot c + (1-\mu)\cdot d]\cdot\ln r\right\}\cdot\cos\theta + f(\theta). \tag{11}$$

Funcția $f(\theta)$ este arbitrară și provine din integrarea efectuată. În mod analog, din a doua relație (7), a doua relație (6) și din relațiile (8) și (9) se obține expresia

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{E}\left[\frac{1+\mu}{r^2}\cdot b - 2\cdot c\,(\mu + \ln r) + (1-\mu)\cdot(1-\ln r)\cdot d\right] \sin\,\theta, \quad (12)$$

care, prin integrare în raport cu variabila θ, devine

$$v = \frac{1}{E}\left[\frac{1+\mu}{r^2}\cdot b - 2\cdot c\,(\mu + \ln r) + \right.$$

$$\left. + (1-\mu)\cdot(1-\ln r)\cdot d\right] \sin\theta + g(r) - \int_0^\theta f(\theta)\cdot d\theta. \quad (13)$$

Funcția $g(r)$ din ultima formulă este și ea arbitrară.

Scriind ultima ecuație (7), folosind expresiile (11) și (13) ale deplasărilor și eliminînd termenii multiformi ai funcțiilor deplasărilor, pentru funcțiile $f(\theta)$ și $g(r)$ se găsesc în final expresiile

$$f(\theta) = B\cdot\cos\theta + C\sin\theta\,;\ g(r) = A\cdot r, \quad (14)$$

în care A, B și C sînt constante arbitrare. Tot din aceleași calcule se obține o relație între coeficienții c și d:

$$d = -\frac{1-\mu}{2}\cdot c. \quad (15)$$

Vom scrie condiția ca pe cercul de rază R a găurii eforturile tangențiale să fie nule. Se ajunge la relația

$$c = -\frac{4}{(1-\mu)\cdot R^2}\cdot b, \quad (16)$$

astfel că tensiunile devin

$$\sigma_r = \frac{a}{r^2} + b\cdot\left[-\frac{2}{r^3} - \frac{8}{(1-\mu)\cdot R^2}\cdot\frac{1}{r} + \frac{2}{R^2\cdot r}\right]\cos\theta,$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a}{r^2} + b\cdot\left[\frac{2}{r^3} + \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{r}\right]\sin\,\theta, \quad (17)$$

$$\tau_{r\theta} = b\cdot\left(-\frac{2}{r^3} + \frac{2}{R^2}\cdot\frac{1}{r}\right)\sin\,\theta.$$

Termenii care conțin parametrul a reprezintă o distribuție de tensiuni cu simetrie circulară. Pe cercul cu raza R, tensiunile datorită acestui termen sînt

$$\sigma_r = \frac{a}{R^2};\ \sigma_\theta = -\frac{a}{R^2};\ \tau_{r\theta} = 0, \quad (18)$$

adică există o apăsare uniformă pe circumferință. Reținem pentru constanta a condiția ca efortul radial să fie mai mic sau egal cu cel care decurge din condiția de plasticitate a materialului mai slab :

$$a = \beta \cdot R^2 \cdot \sigma_{Rc}\,; \quad \beta < 1. \tag{19}$$

Tensiunile exprimate prin formulele (17) au o distribuție pe cercul de rază R dată de relațiile

$$\sigma_r = \frac{a}{r^2} - \frac{8}{(1-\mu)\cdot R^3} \cdot b \cos\theta\,; \quad \sigma_\theta = -\frac{a}{R^2} + \frac{4}{R^3}\, b \cdot \cos\theta\,; \quad \tau_{r\theta} = 0. \tag{20}$$

Această distribuție de tensiuni, reprezentată grafic, arată ca în figura 1. Indiferent dacă presiunea de contact este sau nu este distribuită cosinusoidal, în virtutea principiului lui de Saint-Venant menționat în prima parte a lucrării, pentru deplasările și tensiunile dintr-un punct oarecare al plăcii suficient de îndepărtat de cercul cu raza R, determinantă este mărimea forței rezultante a acestor tensiuni :

$$F = \int_0^{2\pi} \sigma_r \cdot s \cdot R \cdot \cos\theta \cdot d\theta = -\frac{8 \cdot \pi \cdot s}{(1-\mu)\cdot R^3} \cdot b. \tag{21}$$

Rezultă totodată de aici că ipoteza echivalenței stării de tensiuni, introdusă în lucrare în mod tranzitoriu nu afectează rezultatul final.

Se remarcă din forma expresiei (17) a tensiunilor că acestea scad cu distanța față de centrul cercului pe care este aplicată forța F.

Folosind expresiile (15), (16) și (14), deplasările (13) și (11) devin

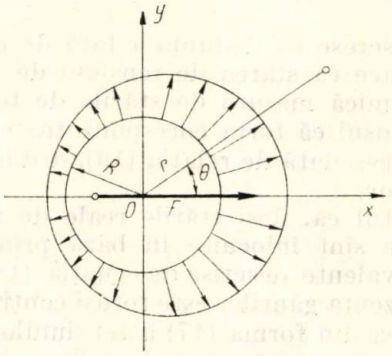


Fig. 1

$$u = -\frac{a}{r}\cdot\frac{1+\mu}{E} + \frac{b}{E}\left[\frac{1+\mu}{r^2} + 2\cdot\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\cdot R^2}\cdot\ln r\right]\cos\theta + \\ + A\cdot r + B\cdot\cos\theta - C\cdot\sin\theta,$$

$$v = \frac{b}{E}\left[\frac{1+\mu}{r^2} + \frac{2\cdot(1+\mu)^2}{(1-\mu)\cdot R^3} - 2\cdot\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\cdot R^2}\cdot\ln r\right]\sin\theta + \\ + A\cdot r + C\cdot\cos\theta - B\cdot\sin\theta. \tag{22}$$

Termenii care conţin constantele de integrare A, B şi C reprezintă două translaţii şi o rotaţie a plăcii în jurul centrului din figura 1.

Relaţiile (22) sînt valabile într-un punct oarecare al planului diferit de originea O (fig. 1). Pentru a obţine deplasările originii sistemului de coordonate, se poate construi o soluţie pentru interiorul cercului, dar aceasta ar complica foarte mult calculul, deoarece corpul elementului de asamblare nu prezintă o stare plană de tensiuni. Se poate scrie însă deplasarea acestui punct ca o medie a deplasărilor punctelor de pe circumferinţă, deoarece întinderea zonei de asamblare este mică :

$$u_0 = \frac{u(R;0) - u(R;\pi)}{2} = \frac{b}{E}\left[\frac{1+\mu}{R^2} + 2\cdot\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\cdot R^2}\cdot\ln R\right] + B, \tag{23}$$

$$v_0 = \frac{u(R;0) - v(R;\pi)}{2} = C.$$

★

Soluţia particulară a problemei plane a teoriei elasticităţii, prezentată anterior, are particularităţile necesare folosirii ei pentru determinarea forţelor de interacţiune dintre elementele de asamblare şi cele asamblate. Aceste particularităţi sînt

a) pe cercul cu raza R, tensiunile tangenţiale sînt nule. Aceasta corespunde condiţiei ca valoarea coeficientului de frecare să fie mică. În mod uzual, acest coeficient are o valoare de ordinul de mărime a 0,15, ceea ce asigură îndeplinirea condiţiei arătate. Pe acelaşi cerc, tensiunile radiale dau o forţă rezultantă care reprezintă interacţiunea elementelor asamblării ;

b) tensiunile descresc cu distanţa r faţă de centrul elementului de asamblare. Aceasta face ca starea de tensiuni de pe o gaură să nu fie influenţată decît în mică măsură de stările de tensiuni de pe celelalte găuri ale plăcii, în sensul că forţa corespunzătoare elementului respectiv de asamblare rămîne cea dată de relaţia (19), dedusă din distribuţia cosinusoidală a tensiunilor.

Se remarcă faptul că, deşi stările reale de tensiuni din cuprinsul zonelor de asamblare sînt înlocuite în baza principiului lui de Saint-Venant cu stări echivalente descrise de ecuaţia (18), efectul concentrării tensiunilor dat de prezenţa găurilor este totuşi conţinut şi de noile expresii, ceea ce se poate vedea din forma (17) a tensiunilor.

Reluînd soluţia construită, să scriem deplasările u_{ij} şi v_{ij} ale centrului elementului oarecare notat cu litera i, produse de forţa F_j, cu care elementul notat cu litera j acţionează asupra plăcii. Folosind notaţiile din figura (2) şi relaţiile (22), aceste deplasări sînt

$$\begin{aligned} u_{ij} = &-\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{a_j}{r_{ij}^2} + \frac{b_j}{E}\cdot\left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + 2\cdot\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\cdot R_j^2}\cdot\ln r_{ij}\right]\times \\ &\times\cos(\alpha_{ij}-\theta_j) + B_j\cdot\cos(\alpha_{ij}-\theta_j) + C_j\cdot\sin(\alpha_{ij}-\theta_j), \\ v_{ij} = &\frac{b_j}{E}\cdot\left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \frac{2\cdot(1+\mu)^2}{(1-\mu)\cdot R_j^2} - 2\cdot\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\cdot R_j^2}\cdot\ln r_{ij}\right]\times \\ &\times\sin(\alpha_{ij}-\theta_j) + A_j\cdot r_{ij} + C_j\cdot\cos(\alpha_{ij}-\theta_j) - B_j\sin(\alpha_{ij}-\theta_j)\cdot \end{aligned} \tag{24}$$

Deplasările aceluiași element notat cu litera i produse de forța proprie F_i se obține din formulele (23)

$$u_{ii} = \frac{b_i}{E}\left[\frac{1+\mu}{R_i^2} + 2\cdot\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\cdot R_i^2}\cdot \ln R_i\right] + \\ + B_{ij}\,;\ v_{ii} = C_i\,. \tag{25}$$

Deplasările (24) sînt scrise după modelul mișcării relative : deplasarea punctului i datorită prezenței forței F_j este egală cu deplasarea punctului j — translațiile B_j și C_j în lungul axelor de coordonate — însumată cu deplasarea relativă a punctului i în raport cu punctul j, produsă de forța F_j. Mărimile necunoscute b_j, θ_j, B_j, C_j și A_j se vor determina ulterior din condiția ca plăcile în punctele de asamblare să se deplaseze identic, astfel încît ele depind de întreaga distribuție de forțe. Acest mod de abordare a problemei este sintetic. S-ar fi putut proceda și analitic, prin scrierea potențialului total al plăcii ca sumă a potențialelor de forma (8). Această însumare este posibilă în ipoteza micilor deformații, specifică teoriei elasticității liniare, ipoteză folosită în mod curent pentru studiul deformației plăcilor în planul lor, precum și datorită formei (8), aleasă pentru funcția φ, care conduce pentru tensiuni la valori descrescătoare cu raza r față de centrele găurilor. Din potențialul total al plăcii se poate obține, pe o cale identică celei precedente, deplasarea totală a unui punct oarecare, exact în forma rezultată pe calea sintetică prezentată. Diferența dintre calea sintetică și cea analitică apare doar în legătură cu faptul că în primul caz însumarea se face asupra deplasărilor parțiale, în timp ce în cazul al doilea ea se efectuează asupra potențialelor parțiale.

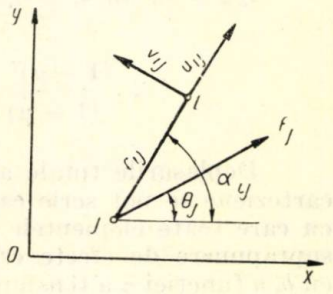


Fig. 2

Deplasările exprimate într-un sistem de coordonate carteziene conform figurii (2) se pot scrie în forma

$$\delta x_{ij} = u_{ij}\cdot\cos\alpha_{ij} - v_{ij}\sin\alpha_{ij} = -\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{a_j}{r_{ij}}\cdot\cos\alpha_{ij} + \frac{b_j}{E}\cdot\left\{\left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\cdot R_j^2}\right]\cos(2\cdot\alpha_{ij} - \theta_j) + 2\cdot\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\cdot R_j^2}\times \ln r_{ij}\cdot\cos\theta_j\right\} + \\ + \left[-\frac{b_j}{E}\cdot\frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\cdot R_j^2} + B_j\right]\cos\theta_j - C_j\cdot\sin\theta_j - A_j\, r_{ij}\sin\alpha_{ij}\,, \tag{26}$$

$$\delta y_{ij} = u_{ij}\cdot\sin\alpha_{ij} + v_{ij}\cdot\cos\alpha_{ij} = -\frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{a_j}{r_{ij}}\cdot\sin\alpha_{ij} + \frac{b_j}{E}\left\{\left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\cdot R_j^2}\right]\sin(2\cdot\alpha_{ij} - \theta_j) + 2\cdot\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\cdot R_j^2}\cdot\ln r_{ij}\cdot\sin\theta_j\right\} + \\ + \left[-\frac{(1-\mu)^2}{(1-\mu)\cdot R_j^2}\cdot\frac{b_j}{E} + B_j\right]\sin\theta_j + C_j\cos\theta_j + A_j\cdot r_{ij}\cos\alpha_{ij}\cdot$$

Deplasările elementului i produse de forța F_i în coordonate carteziene devin

$$\delta x_{ii} = u_{ii} \cos \theta_i - v_{ii} \sin \theta_i = \frac{b_i}{E}\left[\frac{1+\mu}{R_i^2} + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\,R_i^2} \ln R_i\right] \cos \theta_i + B_i \cos \theta_i - C_i \sin \theta_i, \quad (27)$$

$$\delta y_{ii} = u_{ii} \sin \theta_i + v_{ii} \cos \theta_i = \frac{b_i}{E}\left[\frac{1+\mu}{R_i^2} + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\,R_i^2} \ln R_i\right] \sin \theta_i + B_i \sin \theta_i + C_i \cos \theta_i .$$

Deplasările totale ale elementului i în lungul axelor de coordonate carteziene se pot scrie ca o însumare a deplasărilor provocate de forțele cu care toate elementele de asamblare acționează asupra plăcii. Această suprapunere de efecte este posibilă în virtutea particularității, notată cu b, a funcției φ a tensiunilor. Dacă prin n se înțelege numărul elementelor de asamblare, deplasările sînt :

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \delta x_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left\{ -\frac{1+\mu}{r_{ij}} \frac{a_j}{E} \cos \alpha_{ij} + \frac{b_j}{E}\left\{\left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\,R_j^2}\right] \cos (2\alpha_{ij} - \theta_j) + 2\,\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\,R_j^2} \ln r_{ij} \cos \theta_j \Big\} +$$

$$+ \left[-\frac{b_j}{E}\,\frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\,R_j^2} + B_j\right] \cos \theta_j - C_j \sin \theta_j - A_j\, r_{ij} \sin \alpha_{ij}\Big\} +$$

$$+ \frac{b_i}{E}\left[\frac{1+\mu}{R_i^2} + 2\,\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\,R_i^2} \ln R_i\right] \cos \theta_i + B_i \cos \theta_i - C_i \sin \theta_i , \quad (28)$$

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^{n} \delta y_{ij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} \left\{ -\frac{1+\mu}{E}\,\frac{a_j}{r_{ij}} \sin \alpha_{ij} + \frac{b_j}{E}\left\{\left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu) R_j^2}\right] \sin (2\alpha_{ij} - \theta_j) + 2\,\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\,R_j^2} \ln r_{ij} \sin \theta_j \Big\} +$$

$$+ \left[-\frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\,R_j^2}\,\frac{b_j}{E} + B_j\right] \sin \theta_j + C_j \cos \theta_j + A_j\, r_{ij} \cos \alpha_{ij}\Big\} +$$

$$+ \frac{b_i}{E}\left[\frac{1+\mu}{R_i^2} + 2\,\frac{(1-\mu)^2-4}{(1-\mu)\,R_i^2} \ln R_i\right] \sin \theta_i + B_i \sin \theta_i + C_i \cos \theta_i .$$

În expresia (26) există sumele independente de elementul i :

$$S_1 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left[-\frac{b_j}{E} \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu) R_j^2} + B_j \right] \cos \theta_j - G \sin \theta_j - A_j r_{ij} \sin \alpha_{ij} \right\},$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^{n} \left\{ \left[-\frac{b_j}{E} \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu) R_j^2} + B_j \right] \sin \theta_j + C_j \cos \theta_j + A_j r_{ij} \cos \alpha_{ij} \right\}.$$

Este ușor de arătat că aceste expresii reprezintă sumele unor deplasări de rigid ale plăcii : două translații în lungul axelor de coordonate și o rotație în jurul centrului elementului pentru fiecare element în parte. Sumele acestor deplasări de rigid se pot înlocui prin două translații și o rotație în jurul unui punct arbitrar ales, în particular acest punct putînd fi originea sistemului de coordonate din figura (2). Scriem deci

$$S_1 = G_1 - \Omega_i r_{i0} \cos \alpha_{i0} ; \; S_2 = H_1 + \Omega_i r_{i0} \cdot \sin \alpha_{i0}, \tag{29}$$

unde G_1 și H_1 sînt translațiile, Ω_i este rotația, r_{i0} distanța elementului i față de originea sistemului de coordonate, iar α_{i0} unghiul polar al direcției elementului i.

Deplasările (26) devin deci

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ -\frac{1+\mu}{E} \frac{a_j}{r_{ij}} \cos \alpha_{ij} + \frac{b_j}{E} \left\{ \left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu) R_j^2} \right] \cos (2\alpha_{ij} - \theta_j) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \frac{(1-\mu)^2 - 4}{(1-\mu) R_j^2} \ln r_{ij} \cos \theta_j \right\} \right\} + G_1 - \Omega_1 r_{i0} \cdot \cos \alpha_{i0}, \tag{30}$$

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ -\frac{1+\mu}{E} \frac{a_j}{r_{ij}} \sin \alpha_{ij} + \frac{b_j}{E} \left\{ \left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu) R_j^2} \right] \sin (2\alpha_{ij} - \theta_j) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + 2 \frac{(1-\mu)^2 - 4}{(1-\mu) R_j^2} \ln r_{ij} \sin \theta_j \right\} \right\} + H_1 + \Omega_1 r_{i0} \sin \alpha_{i0}.$$

În ultimele relații s-au folosit notațiile

$$r_{ii} = R ; \; \alpha_{ii} = \theta_i . \tag{31}$$

Formulele (28) ale deplasărilor sînt valabile pentru plăcile solicitate într-un sens (în sensul forței F_i). Plăcile solicitate în sens contrar au deplasări similare ca exprimare. Se schimbă doar semnul constantelor b_i și mărimile deplasărilor de rigid, formulele scriindu-se

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ -\frac{1+\mu}{E} \frac{a_j}{r_{ij}} \cos \alpha_{ij} - \frac{b_j}{E} \left\{ \left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu) R_j^2} \right] \cos (2\alpha_{ij} - \theta_j) + 2 \frac{(1-\mu)^2 - 4}{(1-\mu) R_j^2} \ln r_{ij} \cos \theta_j \right\} \right\} +$$

$$+ G_2 - \Omega_2 r_{i0} \cos \alpha_{i0}, \tag{32}$$

$$\delta y_i = \sum_{j=1}^{n} \left\{ -\frac{1+\mu}{E} \frac{a_j}{r_{ij}} \sin \alpha_{ij} - \frac{b_j}{E} \left\{ \left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu) R_j^2} \right] \sin (2\alpha_{ij} - \theta_j) + 2 \frac{(1-\mu)^2 - 4}{(1-\mu) R_j^2} \ln r_{ij} \sin \theta_j \right\} \right\} +$$

$$+ H_2 + \Omega_2 r_{i0} \sin \alpha_{i0}.$$

Acum, cu soluțiile (28) și (29) ale deplasărilor centrelor elementelor de asamblare, se pot scrie relațiile de legătură ale plăcilor și condițiile de echilibru mecanic; deplasarea elementului i este aceeași pentru plăcile acționate într-un sens, ca și pentru plăcile acționate în sens contrar, iar sistemul forțelor cu care elementele de asamblare acționează asupra plăcilor este în echilibru cu încărcările exterioare. Scriind că deplasările (32) și (30) sînt egale, se obține

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{E} \left\{ \left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\,R_j^2} \right] \cos(2\alpha_{ij} - \theta_j) + \right.$$

$$\left. + 2\,\frac{(1-\mu)^2 - 4}{(1-\mu)\,R_j^2} \ln r_{ij} \cos\theta_j \right\} = \frac{G_2 - G_1}{2} - \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \cdot r_{i0} \cdot \cos\alpha_{i0},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{E} \left\{ \left[\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\,R_j^2} \right] \sin(2\alpha_{ij} - \theta_j) + \right. \tag{33}$$

$$\left. + 2\,\frac{(1-\mu)^2 - 4}{(1-\mu)\,R_j^2} \ln r_{ij} \cdot \sin\theta_j \right\} = \frac{H_2 - H_1}{2} + \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2}\, r_{i0} \sin\alpha_{i0}.$$

Acestor ecuații, al căror număr este $2.n$ (dublul numărului de elemente), li se asociază cele trei ecuații de echilibru mecanic:

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = X; \quad \sum_{j=1}^{n} Y_j = Y; \quad \sum_{j=1}^{n} (-X_j y_j + Y_j x_j) = M. \tag{34}$$

Prin X_j și Y_j s-au notat componentele forței F_j după axele de coordonate carteziene: $X_j = F_j \cos\theta_j$; $Y_j = F_j \sin\theta_j$, iar x_j și y_j reprezintă coordonatele carteziene ale elementului j.

Ecuațiile (33) se scriu mai simplu dacă se introduc notațiile

$$\frac{1+\mu}{r_{ij}^2} + \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)\,R_j^2} = \gamma_{ij}; \quad 2\,\frac{(1-\mu)^2 - 4}{(1-\mu)\,R_j^2} \ln r_{ij} = \delta_{ij};$$

$$-E\,\frac{G_2 - G_1}{2}\,\frac{(1-\mu)\,R^2}{8\pi s} = G_i \quad -E\,\frac{H_2 - H_1}{2}\,\frac{(1-\mu)\,R^2}{8\pi s} = H; \tag{35}$$

$$E\,\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{2} \cdot \frac{(1-\mu)\,R^2}{8\pi s} = \Omega.$$

Grupînd ecuațiile de deplasări și cele de echilibru mecanic, obținem în final sistemul

$$\sum_{j=1}^{n} [X_j\,(\gamma_{ij} \cos 2\,\alpha_{ij} + \delta_{ij}) + Y_j \cdot \gamma_{ij} \sin 2\,\alpha_{ij}] = G - \Omega \cdot r_{i0} \cdot \cos\alpha_{i0},$$

$$\sum_{j=1}^{n} [X_j\,\gamma_{ij} \sin 2\alpha_{ij} + Y_j\,(-\gamma_{ij} \cos 2\alpha_{ij} + \delta_{ij})] = H + \Omega \cdot r_{i0} \sin\alpha_{i0}, \tag{36}$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = X; \quad \sum_{j=1}^{n} Y_j = Y; \quad \sum_{j=1}^{n} (-X_j \cdot y_j + Y_j \cdot x_j) = M,$$

adică un sistem algebric liniar cu necunoscutele X_j, Y_j, G, H și Ω în număr de $2.n + 3$, n fiind, după cum am mai spus, numărul de elemente de asamblare.

Aplicații

Am aplicat modul de calcul al forțelor de interacțiune dintre elementele de asamblare și cele asamblate stabilit în această lucrare în cazul unei dispuneri a elementelor de asamblare pe un rînd, ca în figura (3). Raza cercurilor circumscrise zonelor de asamblare am luat-o $R = 0{,}5$ cm., iar pasul $p = 5$ cm. Calculele au fost efectuate pentru 2, 3, 4, 5 și 6 elemente de asamblare. Rezultatele sînt trecute în tabela următoare. În această tabelă, mărimea momentului M se scrie în unități de forță (aceleași ca și pentru componentele X_j și Y_j ale forței) înmulțite cu centimetri.

În figura 3 sînt reprezentate componentele X_i produse de forța exterioară X, componentele Y_i produse de forța exterioară Y și compo-

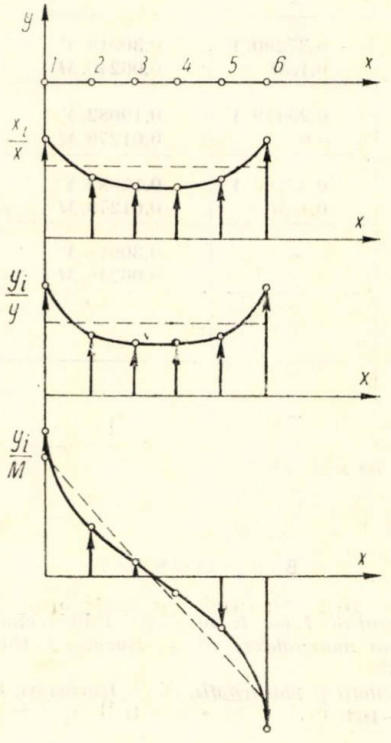


Fig. 3

nentele Y_i produse de momentul exterior M în cazul a șase elemente de asamblare. Liniile pline sînt corespunzătoare datelor conținute în tabela următoare, iar cele punctate sînt corespunzătoare calculului practic amintit la începutul lucrării.

Deoarece în toate cazurile de nedeterminare statică analizate numeric forţele maxime de interacţiune dintre elementele de asamblare şi cele asamblate sînt mai mari decît cele găsite prin metoda simplificată prezentată la început, rezultă că formulele (1), (2) şi (3) nu permit efectuarea unui calcul acoperitor.

Nr. de elemente	2	3	4	5	6
X_1	$0{,}5.X$	$0{,}36840.X$	$0{,}30338.X$	$0{,}26335.X$	$0{,}23297.X$
X_2	$0{,}5.X$	$0{,}26321.X$	$0{,}19662.X$	$0{,}16285.X$	$0{,}13934.X$
X_3	—	$0{,}36840.X$	$0{,}19662.X$	$0{,}14760.X$	$0{,}12769.X$
X_4	—	—	$0{,}30338.X$	$0{,}16285.X$	$0{,}12769.X$
X_5	—	—	—	$0{,}26335.X$	$0{,}13934.X$
X_6	—	—	—	—	$0{,}23297.X$
Y_1	$0{,}5.Y$ $-0{,}2.M$	$-0{,}37290.Y$ $-0{,}1.M$	$0{,}30918.Y$ $-0{,}06240.M$	$0{,}26957.Y$ $-0{,}04359.M$	$0{,}24196.Y$ $-0{,}03261.M$
Y_2	$0{,}5.Y$ $-0{,}2.M$	$0{,}25419.Y$ -0	$0{,}19082.Y$ $-0{,}01279.M$	$0{,}15859.Y$ $-0{,}01283.M$	$0{,}13845.M$ $-0{,}01122.M$
Y_3	— —	$0{,}37290.Y$ $+0{,}1.M$	$0{,}19082.Y$ $+0{,}01279.M$	$0{,}14368.Y$ $+0{,}00000.M$	$0{,}11959.Y$ $0{,}00329.M$
Y_4	— —	— —	$0{,}30918.Y$ $+0{,}06240.M$	$0{,}15859.Y$ $+0{,}01283.M$	$0{,}11959.Y$ $+0{,}00329.M$
Y_5	— —	— —	— —	$0{,}26957.Y$ $+0{,}04359.M$	$0{,}13845.Y$ $+0{,}01122.M$
Y_6	— —	— —	— —	— —	$0{,}24196.Y$ $+0{,}03261.M$

Primită la redacţie la 30 sept. 1966

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Manea, *Organe de maşini ed. I, vol. I*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956, p. 132—135 şi 358.
2. Gh. Buzdugan, *Rezistenţa materialelor*, ed. 1, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1964, p. 34—35.
3. I. Bezuhov, *Teoria elasticităţii şi plasticităţii*, ed. 1, Bucureşti, Edit. tehnică, 1957, p. 236—244, şi 154—164.

ECUAȚIILE DE MIȘCARE ALE SISTEMULUI DE MANEVRĂ AL INSTALAȚIILOR DE FORAJ

de VLAD ION
Institutul de petrol, gaze și geologie București

622.24

Pe baza studiului teoretic asupra proceselor dinamice ce au loc în sistemul de manevră al instalațiilor de foraj în perioada de ridicare a sarcinii, se obțin ecuațiile de mișcare ale acestuia.
Schema echivalentă propusă pentru studiul sistemului de manevră al instalațiilor de foraj cu turbotransformator se prezintă sub forma unui mecanism cu 15 mase discrete, unite între ele cu legături elastice. Garnitura de prăjini a fost considerată ca o bară elastică cu masa uniform distribuită, care se deplasează axial într-un mediu vîscos creat de fluidul de foraj.
Se obțin ecuațiile de bază ale mișcării sistemului format din 16 mase.
Aceste ecuații de mișcare ale sistemului de manevră au fost obținute ținînd seama de elasticitatea fiecărei ramuri a înfășurării cablului, de elasticitatea cuplajului principal de manevră (cuplajul tobei), precum și de variația reală a forței excitatoare în timpul ridicării sarcinii pe lungimea unui pas.
Deoarece sistemul de ecuații obținut nu se poate rezolva pe cale analitică, pentru un studiu concret al proceselor dinamice ce au loc în sistemul de manevră se poate folosi mașina electronică de calcul sau modelul pasiv al acestui mecanism ce se poate construi pe baza ecuațiilor obținute.

Dezvoltarea industriei grele constructoare de mașini și complicarea construcțiilor lor impun în mod imperios necesitatea studiului amănunțit al sistemelor mecanice, compuse din mase și verigi elastice legate între ele ca un tot unitar.

Interesul către acest gen de studii a crescut în mod deosebit ca urmare a faptului că cercetările teoretice au găsit aplicații practice. Asupra importantelor sarcini dinamice dezvoltate în mecanismele de ridicare s-a atras atenția deja de multă vreme.

Proiectarea noilor instalații de foraj cere rezolvarea alegerii raționale ale rapoartelor de transmisii și ale sarcinilor, la care ridicarea garniturii de prăjini se face utilizînd rațional puterea și într-un timp minim.

Determinarea sarcinii la capătul activ și deci a sarcinii la toba troliului în procesul de ridicare se face de obicei cu formula sarcinilor statice ale sistemului macara-geamblac.

ST. CERC. MEC. APL. TOM. 27, NR. 1, P. 209–228, BUCUREȘTI, 1968

Însă în procesul ridicării funcție de accelerația sarcinii ridicate și a proprietăților elastice ale verigilor componente, după cum au arătat studiile efectuate [3], tensiunile din cablu pot să difere foarte mult de valorile obținute printr-un calcul static ce nu ține seama de forțele dinamice suplimentare care apar în înfășurarea cablului ca urmare a proporțiilor sale elastice, a elasticității tuburilor extrase și a verigilor componente sistemului de manevră.

Regimul normal de lucru al sistemului de manevră este un regim tranzitoriu.

Determinarea sarcinilor reale în verigile sistemului de manevră în procesele tranzitorii ale mișcării lor reprezintă una dintre cele mai importante probleme ale teoriei moderne de calcul și ale construcției instalațiilor de foraj.

Mărimile forțelor elastice se pot determina cu ajutorul rezolvării ecuațiilor diferențiale ale mișcării sistemului de manevră al instalațiilor de foraj.

Scopul lucrării de față este de a scrie ecuațiile de mișcare ale sistemului de manevră al instalațiilor de foraj, prin rezolvarea cărora putem obține sarcinile dinamice dezvoltate în verigile acestui mecanism. Printre primele lucrări consacrate studiului determinării sarcinilor dinamice dezvoltate în sistemele mecanice ținînd seama de fenomenele oscilatorii merită a fi amintite lucrarea lui S. Timoșenco [10] și a lui S. D. Ponomariov [8], în care pentru prima oară sînt tratate rezultatele studiilor sarcinilor dinamice și sînt date explicațiile științifice ale cauzelor deselor defecțiuni din acea vreme ale motoarelor cu piston.

Cel mai esențial studiu, care constituie începutul teoretic pentru determinarea sarcinilor dinamice în elementele macaralelor ținînd seama de oscilațiile elastice dezvoltate în perioada de demaraj și de frînare a sarcinii, a fost disertația lui Pfleiderer [9], *Fenomenele dinamice în timpul pornirii mașinilor, și în special al mașinilor de ridicat.* În această lucrare au fost date ecuațiile diferențiale scrise în forma generală a mișcării sistemelor cu două și trei mase. Aceste ecuații sînt rezolvate pentru o schemă echivalentă cu două mase pentru începutul perioadei de pornire, precum și pentru o schemă cu trei mase, considerînd momentul motor constant.

Mai departe, o bună perioadă de vreme majoritatea lucrărilor în domeniul cercetărilor sarcinilor dinamice s-au bazat pe această lucrare a lui Pfleiderer. Principalul neajuns al acestor lucrări a fost aceea că sarcinile exterioare au fost considerate constante, iar aceasta în majoritatea cazurilor nu concordă cu realitatea.

Problemelor determinării forțelor dinamice în diversele elemente componente sistemului de manevră al instalațiilor de foraj au fost consacrate o serie de lucrări unde nu s-a ținut seama de elasticitatea a o serie de verigi, de caracterul real al variației forțelor exterioare și de caracteristica flexibilă a cuplajului principal al tobei. Din aceste motive nu s-a putut face o părere justă asupra mărimii și caracterului forțelor dinamice și deci nici a stării de solicitări la care sînt supuse diversele elemente și verigi componente ale sistemului de manevră.

Considerăm totuși necesar a face o scurtă privire asupra cîtorva lucrări mai importante care au avut ca temă tratarea studiului fenomenelor dinamice în sistemul de manevră al instalațiilor de foraj și care au fost publicate în ultima vreme.

Într-unele din aceste lucrări, problema determinării forțelor dinamice în perioada nestabilizată a mișcării se reduce la privirea sistemului de manevră ca pe un sistem rigid [6].

Astfel, în lucrarea lui V. F. Fedorov și M. M. Nikanorov [6], pentru determinarea valorii sarcinii dinamice în capătul activ al cablului s-au făcut următoarele simplificări:

1) garnitura de prăjini, înfășurarea sistemului macara-geamblac și toate verigile componente sistemului de manevră sînt considerate rigide;

2) forța dinamică se distribuie uniform în toate coardele înfășurării;

3) ridicarea garniturii se face din poziție liberă;

4) se consideră o variație liniară a vitezei de ridicare a cîrligului de foraj în perioada mișcării nestabilizate.

Ca urmare a acestor simplificări, formula obținută poate reprezenta forța dinamică în capătul activ al cablului numai aproximativ, deoarece nu ține seama de forțele suplimentare care apar datorită fenomenelor oscilatorii legate de proprietățile garniturii de prăjini, ale cuplajului cu fricțiune de la tobă și ale cablului, precum nici datorită variației caracteristicii de funcționare a motorului în timpul ridicării sarcinii pe lungimea unui pas.

Sistemul macara-geamblac al instalațiilor de foraj ca sistem cu verigi elastice a fost tratat în lucrările lui I. F. Ponomariov [7], M. S. Komarov și S. G. Kalinin [5] și S. G. Kalinin [4], în care au fost făcute o serie de ipoteze simplificatorii.

Metoda de calcul folosită de I. F. Ponomariov este foarte schematică, neținînd seama de forțele suplimentare din cablu ce apar datorită fenomenelor oscilatorii care au loc atît în garnitura de prăjini și în cablu, cît și în toate mecanismele sistemului de manevră. De asemenea nu se ține seama de variația caracteristicii forței excitatoare, a cuplajului principal al tobei, precum și al înfășurării cablului în sistemul macara-geamblac.

Primele încercări mai serioase de studiu al forțelor dinamice în sistemul de manevră ținînd seama de oscilațiile elastice reprezintă lucrările lui M. S. Komarov și S. G. Kalinin [5], [4].

În disertația sa, S. G. Kalinin [4] analizează trei aspecte ale dinamicii instalațiilor de foraj în operațiile de ridicare-coborîre:

1) ridicarea liberă din poziția de atîrnare a garniturii de prăjini;

2) ridicarea garniturii de prăjini din pene;

3) ridicarea garniturii de prăjini în momentul cînd aceasta este prinsă.

Trebuie remarcat următoarele:

a) în această lucrare nu s-a folosit corect teoria lui Relley, de reducere a masei garniturei de prăjini, deoarece aceasta nu este încastrată în partea superioară a sa, așa cum s-a presupus;

b) reducerea coeficientului de rigiditate a înfășurării cablului este incorect făcută, neținînd seama de valorile diferite ale vitezelor de mișcare a diverselor corzi ale înfășurării;

c) în lucrare, S. G. Kalinin nu ține seama de o serie de factori, printre care:

— variația reală a caracteristicii forței excitatoare;

— elasticitatea și flexibilitatea cuplajului principal al tobei;

— variația distanței dintre macara și geamblac în timpul ridicării sarcinii pe lungimea unui pas;

— legătura reciprocă ce există în mod firesc între diversele verigi;

— elasticitatea tuturor verigilor principale ale sistemului de manevră.

Analiza principalelor lucrări scrise în domeniul studiului dinamicii sistemului de manevră al instalațiilor de foraj în timpul operațiunilor de manevră arată că această problemă este nesatisfăcător rezolvată.

Majoritatea lucrărilor existente studiază numai aspecte separate, izolate ale dinamicii sau privesc sistemul de manevră ca un sistem rigid ori, în sfîrșit, sînt considerate proprietăți elastice numai a cîtorva elemente separate.

1. PREMISELE TEORETICE

Scrierea ecuațiilor de mișcare, ținînd seama de multitudinea de factori și de condițiile variabile de lucru, este foarte greoaie, reprezentînd sisteme de ecuații diferențiale foarte complicate, imposibil de rezolvat și de analizat.

Pentru exemplificarea caracteristicilor de bază ale mișcării mecanismelor se recurge de obicei la idealizarea lor, a verigilor componente, a legăturilor și a caracterului forțelor active.

În studiul sistemului de manevră al instalațiilor de foraj, noi am admis următoarele ipoteze simplificatoare de calcul :

1) sistemul de manevră într-un suficient grad de exactitate se poate considera în forma unui model mecanic compus din mase concentrate unite prin legături elastice ;

2) se consideră că legăturile elastice nu au greutate ;

3) elasticitatea axelor, transmisiilor și turlei nu se consideră în calcul, deoarece sînt mult mai rigide decît înfășurarea cablului, a garniturii de prăjini și a cuplajelor ;

4) garnitura de prăjini se consideră ca o bară elastică, omogenă, cu secțiune constantă ;

5) se presupune că garnitura de prăjini și cablul de foraj în timpul deformării se supun legii lui Hooke ;

6) rigiditatea elementelor elastice nu variază cu deformarea lor.

Avînd în vedere ipotezele simplificatoare de mai sus, se poate alcătui schema echivalentă a sistemului de manevră al instalațiilor de foraj pentru calculul fenomenelor oscilatorii.

2. SCHEMA ECHIVALENTĂ DE CALCUL A SISTEMULUI DE MANEVRĂ

Sistemul de manevră al oricărei instalații de foraj, se poate reprezenta schematic ca un sistem de mase cu cîteva grade de libertate. Structura complicată a sistemului de manevră nu permite o reprezentare simplă a schemei sale echivalente și deci nici scrierea proceselor dinamice în toate fazele mișcării sale prin ecuații de mișcare simple. De aceea este necesar a se neglija o serie de factori care influențează foarte puțin procesele dinamice ale sistemului de manevră, ceea ce permite alcătuirea unui model mecanic relativ simplu la baza căruia se poate scrie ușor sistemul de ecuații diferențiale.

În cele ce urmează vom presupune că sistemul de manevră se poate înlocui cu un model mecanic compus din mase discrete, unite prin legături

elastice. Aceasta este echivalent cu aceea că verigile elastice posedă masă atît de mică, încît se poate neglija, iar organele ce se prezintă sub formă de discuri și cilindri posedă o rigiditate infinită.

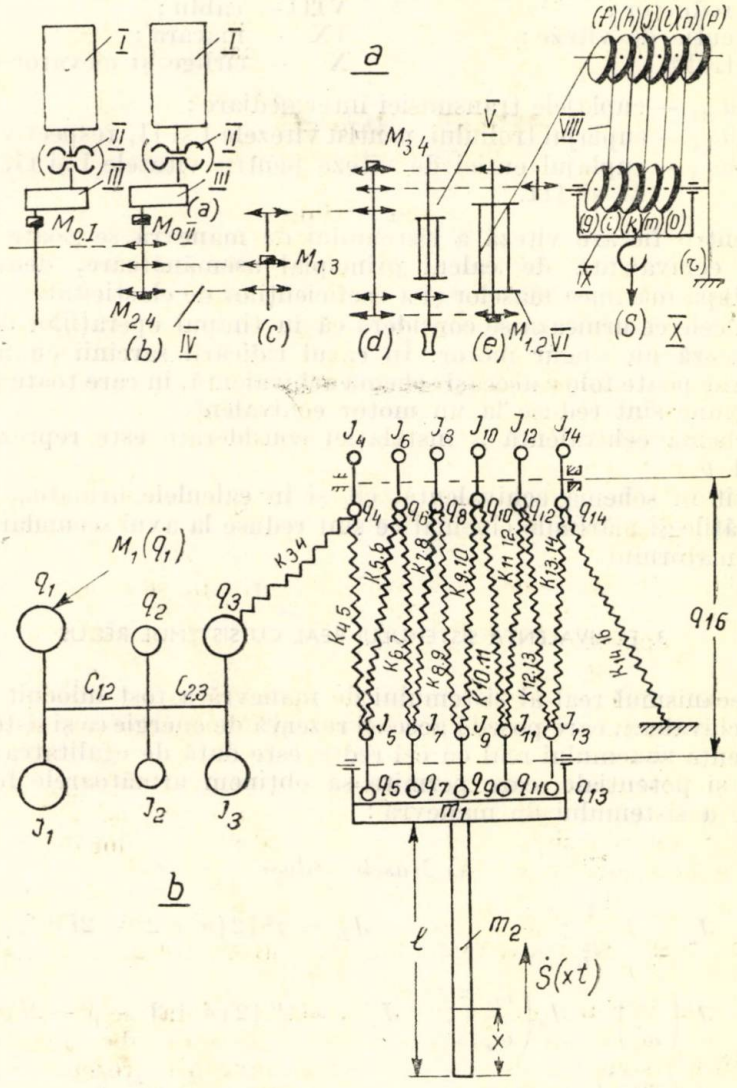


Fig. 1. — Sistemul de manevră al instalațiilor de foraj :
a — schema cinematică ; *b* — schema echivalentă.

În lucrarea de față au fost scrise ecuațiile de mișcare ale sistemului de manevră al instalațiilor de foraj acționate cu motoare diesel. Însă metoda propusă se poate folosi pentru orice tip de instalație de foraj, cu orice sistem de acționare.

În figura 1 *a* este reprezentat schematic sistemul de manevră al oricărei instalații de foraj acționate cu motoare diesel și cu turbotransformator.

Mecanismul se compune din următoarele elemente de bază:

I	— motor;	VI	— toba troliului;
II	— turbotransformator;	VII	— geamblac;
III	— reductor;	VIII	— cablu;
IV	— cutie de viteze;	IX	— macara;
V	— troliu;	X	— cîrlige și elevator

M_{01} și M_{01I} — cuplajele transmisiei intermediare;
$M_{1.2}$ și $M_{3.4}$ — cuplajul troliului pentru vitezele I și II, respectiv III, IV;
$M_{1.3}$ și $M_{2.3}$ — cuplajul cutiei de viteze pentru vitezele I și II, respectiv II și III.

Pentru fiecare viteză a sistemului de manevră se poate alcătui o schemă echivalentă de calcul principial asemănătoare, deosebindu-se numai după mărimea maselor și a coeficienților de elasticitate.

În cele ce urmează se consideră că în timpul operațiilor de ridicare funcționează un singur motor. În cazul ridicării sarcinii cu mai multe motoare se poate folosi aceeași schemă echivalentă, în care toate motoarele în funcțiune sînt reduse la un motor echivalent.

Schema echivalentă a instalației considerate este reprezentată în figura 1 *b*.

Atît în schema echivalentă, cît și în calculele următoare, masele, elasticitățile și mărimile cinematice sînt reduse la axul secundar al turbotransformatorului.

3. ECHIVALENȚA SISTEMULUI REAL CU SISTEMUL REDUS

Mecanismul real al sistemului de manevră a fost înlocuit printr-un model echivalent, care posedă aceeași rezervă de energie ca și sistemul real. Echivalența sistemului real cu cel redus este dată de egalitatea energiilor cinetice și potențiale, care permite să obținem următoarele formule de reducere a sistemului de manevră:

a) *Masele reduse*

$$J_1 = J_a + J_b \frac{1}{i_r^2}; \qquad J_{2i} = z^2 [2(n+2) - 2i]^2 J_{01},$$

$$J_2 = J_c \left(\frac{\omega_c}{\omega_a}\right)^2 + J_d \left(\frac{\omega_d}{\omega_a}\right)^2; \qquad J_{2i+1} = z^2 [2(n+2) - 1 - 2i]^2 J_{02}, \tag{1}$$

$$J_3 = J_c \left(\frac{\omega_c}{\omega_a}\right)^2; \qquad m_1 = z^2 m_m \frac{r_t^2}{R^2} \left(\frac{\omega_c}{\omega_a}\right)^2,$$

$$m_2 = z^2 m_p \frac{r_t^2}{R^2} \left(\frac{\omega_c}{\omega_a}\right)^2,$$

unde

$i = 2, 3, 4, \ldots, n,$

i_r este raportul de transmisie al reductorului,

$\omega_a, \omega_b, \omega_c, \omega_d, \omega_e$ sînt vitezele unghiulare în regim stabilizat ale axelor a, b, c, d, e,

J_a, J_b, J_c, J_d, J_e — momentele de inerție ale axelor a, b, c, d, e

n — numărul de role la macara

m_m, m_p — masa sarcinii moarte și a garniturii de prăjini,

R — raza convențională aflată pe axul de reducere,

r — raza rolelor macaralei și ale geamblacului,

r_t — raza înfășurării cablului pe tobă,

J — momentul de inerție al unei role de la macara și geamblac,

q — greutatea pe metrul liniar de cablu,

$$z = \frac{1}{2n},$$

$$J_{01} = \left(J + 2\frac{qh_0}{g}r^2\right)\left(\frac{\omega_e}{\omega_a}\right)^2 \frac{r_t^2}{R^2},$$

$$J_{02} = J\frac{r_t^2}{r^2}\left(\frac{\omega_e}{\omega_a}\right)^2.$$

b) Coeficienții de rigiditate reduși

$$C_{1\cdot 2\,(II,IV)} = \frac{C_{M0I}\cdot C_{M2\cdot 4}}{C_{M0I} + C_{M2\cdot 4}}\cdot\frac{1}{i_r^2}, \text{ pentru vitezele II și IV,}$$

$$C_{1\cdot 2\,(I,III)} = \frac{C_{M0I}\cdot C_{M1\cdot 3}\left(\frac{\omega_c}{\omega_b}\right)^2}{C_{M0I} + C_{M1\cdot 3}\left(\frac{\omega_c}{\omega_b}\right)^2}\frac{1}{i_r^2}, \text{ pentru vitezele I și III,}$$

$$C_{2\cdot 3\,(III,IV)} = C_{M3\cdot 4}\left(\frac{\omega_d}{\omega_a}\right)^2, \text{ pentru vitezele III și IV,}$$

$$C_{2\cdot 3\,(I,II)} = C_{M1\cdot 2}\left(\frac{\omega_e}{\omega_a}\right)^2, \text{ pentru vitezele I și II,}$$

$$K_{3\cdot 4} = K_{ef}\frac{r_t^2}{R^2}\left(\frac{\omega_e}{\omega_a}\right)^2, \tag{2}$$

$$K_{2i+3,2i+4} = K_{2i+4,2i+5} = Z^2(2n - 2i)^2,$$

$$K_{1\cdot 0} = z^2 K_p \frac{r_t^2}{R^2}\left(\frac{\omega_e}{\omega_a}\right)^2,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Aici s-au făcut următoarele notații :

$$K = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{K_1}{h - S(l,t)}, \qquad K_1 = \frac{A_c E_c}{1},$$

$$K_p = \frac{A_p E_p}{l},$$

$$A = z^2 A_p \frac{r_t^2}{R^2}\left(\frac{\omega_e}{\omega_a}\right)^2,$$

$$h = \frac{h_0}{z^2}\frac{R^2}{r_t^2}\cdot\left(\frac{\omega_a}{\omega_e}\right)^2,$$

$$S(x, t) = \frac{U(x, t)}{z^2}\cdot\frac{R^2}{r_t^2}\left(\frac{\omega_a}{\omega_e}\right)^2,$$

$$S(l, t) = \frac{U(l, t)}{z^2}, \frac{R^2}{r_t^2}\left(\frac{\omega_a}{\omega_e}\right)^2,$$

$C_{M_{01}}, C_{M_{24}}, C_{M13}, C_{M34}, C_{M12}$ sînt coeficienţii de rigiditate ai cuplajelor M_{01}, M_{24} M_{13}, M_{34}, M_{12},

$K_{e\cdot f}, K_p$ — coeficientul de rigiditate al capătului activ al cablului şi al garniturii de prăjini,

A_p, A_c — secţiunea transversală a garniturii de prăjini şi a cablului,

E_p, E_c — modulul de elasticitate al garniturii de prăjini şi al cablului,

l — lungimea garniturii de prăjini,

$U_{(x,t)}$ — deplasarea unei secţiuni transversale a garniturii de prăjini,

$U(x, t)$ — deplasarea părţii de sus a garniturii de prăjini,

h_0 — distanţa maximă între geamblac şi macara,

$S(x, t)$ $S(l, t)$ A şi h = mărimile reduse ale $U(x, t)$ $U(l, t)$ A_p şi h_0.

4. ECUAŢIILE DE BAZĂ ALE DINAMICII SISTEMULUI DE MANEVRĂ

Ecuaţiile de mişcare ale unui complicat sistem mecanic cu legături elastice, aşa cum este sistemul de manevră al instalaţiilor de foraj, se pot obţine cu ajutorul ecuaţiilor lui Lagrange de speţa a doua în coordonate generalizate [2], [10].

Această ecuaţie se scrie sub forma (3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial P}{\partial q_i} = Q_i, \qquad (3)$$

$$i = 1, 2, \ldots, k,$$

unde

k este numărul gradelor de libertate,

T — energia cinetică a sistemului în mişcare,

P — energia potenţială a sistemului,

Q_i — forţele generalizate ale forţelor neconservative,

q_i — coordonatele generalizate.

Poziția oricărei mase în orice moment de timp se poate determina cu ajutorul a k parametri.

Din schema considerată se vede că sistemul de manevră are cincisprezece grade de libertate, neconsiderînd garnitura de prăjini, care este un element elastic cu masa uniform distribuită. Pentru determinarea mișcării garniturii de prăjini sînt deci, necesare un număr infinit de coordonate și de aceea ea are o infinitate de grade de libertate și o infinitate de tipuri de oscilații proprii.

Mișcarea unei lungimi elementare a garniturii de prăjiini, privită ca o bară grea elastică ce se mișcă în mediu cu frecare vîscoasă, cum este fluidul de foraj, sub acțiunea forței $\psi(t)$ se determină cu ajutorul ecuației ondulațiilor oscilațiilor forțate.

În procesul operațiilor de ridicare-coborîre, garnitura de prăjini este supusă acțiunii forțelor de frecare. Această rezistență poate fi în unele cazuri neînsemnată pentru o deviație mică a sondei și unei viscozități reduse a fluidului de foraj, însă în toate cazurile se produce o amortizare treptată a amplitudinilor maxime ale oscilațiilor.

Forțele de frecare iau naștere în principal datorită a doi factori : frecarea garniturii de prăjini de pereții sondei și frecarea acesteia în masa fluidului de foraj.

Să considerăm echilibrul unei porțiuni elementare de lungime dx din garnitura de prăjini privită ca o bară omogenă, elastică, grea în mișcare nestabilizată într-un mediu vîscos sub acțiunea forței unitare $\psi(t)$.

În timpul mișcării garniturii de prăjini, în sistemul de manevră se dezvoltă oscilații mecanice longitudinale.

Astfel se obține deplasarea garniturii de prăjini ca o bară rigidă cu apariția oscilațiilor longitudinale în sistemul elastic considerat. Deplasarea longitudinală a oricărei secțiuni transversale a barei se va determina cu ecuația

$$S = U_1 + U_2,$$

unde

U_1 este deplasarea garniturii de prăjini, privită ca un solid rigid,
U_2 — deplasarea unei secțiuni transversale pentru oscilațiile longitudinale ale garniturii.

Pentru obținerea ecuației diferențiale de mișcare a porțiunii elementare din garnitura de prăjini pentru oscilațiile longitudinale punem în evidență forțele care acționează pe elementul dx :

a) forța de inerție care acționează asupra porțiunii elementare de lungime dx :

$$\frac{A\gamma_0}{g} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} dx,$$

unde

A este aria secțiunii transversale și γ_0 greutatea specifică a oțelului ;

b) forța longitudinală a deformațiilor elastice ce acționează asupra volumului elementar :

$$EA \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} dx;$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

c) forța de frecare a garniturii de prăjini de pereții sondei, care este egală cu $W(x)$ (intensitatea forței de frecare asupra unității de lungimi) și care în general depinde de coordonata x;

d) forța de frecare ce se dezvoltă în timpul mișcării volumului elementar în fluidul de foraj și care se poate considera, așa cum în general se obișnuiește, proporțională cu puterea întîi a vitezii:

$$K \frac{\partial U_2}{\partial t} \mathrm{d}x,$$

unde

K este coeficientul echivalent al frecării vîscoase, ce se determină pe baza datelor experimentale;

e) intensitatea acțiunii forței excitatoare pentru o unitate de masă a sistemului:

$$\Psi(t)\, \mathrm{d}x.$$

Pe baza principiului lui D'Alembert se obține ecuația diferențială de mișcare a volumului elementar în cazul oscilațiilor longitudinale:

$$\frac{\gamma_0 A}{g} \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \mathrm{d}x + K \frac{\partial U_2}{\partial t} \mathrm{d}x - EA \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} \mathrm{d}x + W(x)\, \mathrm{d}x = \Psi(t) \frac{\gamma_0 A}{g} \mathrm{d}x.$$

După unele transformări se obține ecuația

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + 2p \frac{\partial U_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \Psi(t) - \frac{W(x)\, g}{\gamma_0 A},$$

unde

$$2p = \frac{Kg}{\gamma_0 A}; \qquad a^2 = \frac{Eg}{\gamma_0}.$$

Această ecuație este valabilă pentru garnitura de prăjini suspendată, avînd capătul superior în nemișcare.

În acest caz, condițiile la limită sînt următoarele:

$$\text{pentru } x = 0; \qquad EA \frac{\partial U_2}{\partial x} = 0,$$

$$\text{pentru } x = 1; \qquad U_2(x, t) = 0,$$

iar condițiile inițiale:

$$\text{pentru } t = 0; \qquad U_2 = 0 \quad \text{și} \quad U_2' = 0.$$

Să scriem ecuația diferențială a garniturii de prăjini ținînd seama de deplasarea ei.

În acest caz, pentru orice secțiune $0 < x < 1$ a garniturii de prăjini e satisfăcută relația

$$S = U_1 + U_2.$$

La scrierea ecuației diferențiale a mișcării porțiunii elementare a garniturii de prăjini se va ține seama că apar forțe de inerții suplimentare,

$$\frac{\gamma_0 A}{g} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 U_1}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}x,$$

și forțele de frecare,

$$K\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}x.$$

Ecuația diferențială de mișcare, la baza principiului lui D'Alembert, folosind aceleași notații, capătă forma

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + 2p\,\frac{\partial U_2}{\partial t} - a^2\,\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = \Psi(t) - \frac{W(x)\,g}{\gamma_0 A} - \left(\frac{\mathrm{d}^2 U_1}{\mathrm{d}t^2} + 2p\,\frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t}\right).$$

Deoarece s-a notat deplasarea secțiunii pentru oscilații cu $U_2(x, t)$, iar deplasarea pentru mișcarea garniturii ca un solid rigid cu $U_1(t)$, se obține

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} + \frac{\mathrm{d}^2 U_1}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(U_1 + U_2) = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2},$$

și

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}U_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t}(U_1 + U_2) = \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}.$$

Prin urmare, ecuația diferențială de mișcare a garniturii de prăjini, considerînd oscilațiile longitudinale, va avea forma

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} + 2p\,\frac{\partial S}{\partial t} - a^2\,\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \Psi(t) - \frac{W(x)}{A\,\gamma_0}\,g, \tag{4}$$

unde $$S(x,\ t) = U_1(t) + U_2(x,\ t).$$

Mai departe, pentru simplificarea analizei vom presupune că forța de frecare a garniturii de prăjini de pereții sondei va fi uniform distribuită pe lungimea sa. Însă în general, în funcție de deviația sondei, forța de frecare poate fi distribuită și neuniform. În acest caz, expresia forței generalizate va fi mai complicată.

Deci considerăm $W(x) = W = \text{const}$.

Energia cinetică și potențială a schemei considerate se determină cu formulele

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{14} J_i \cdot \dot{q}_i^2 + \frac{1}{2}\,m_1 \dot{S}^2(l, t) + \frac{q_p}{2g} \cdot \int_0^l \dot{S}^2(x, t)\,\mathrm{d}x,$$

$$P = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} C_{i,i+1}(q_i - q_{i+1})^2 + \frac{1}{2}\sum_{V=4}^{13} F_{V,V+1} \cdot (\Delta l_{V,V+1} - 2S(l,t)] + \frac{EA}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x, \tag{5}$$

unde

q_p este greutatea pe metrul liniar a garniturii de prăjini,
$F_{v,v+1}$ — tensiunea în corzile înfășurării cablului,
$\Delta l_{v,v+1}$ — alungirea corzilor.

Pentru determinarea tensiunilor în corzile înfășurării cablului se are în vedere faptul că, în timpul ridicării sarcinii pe lungimea unui pas, lungimea acestor corzi se modifică în funcție de viteza de deplasare a cîrligului.

Notînd cu q_{0v} coordonatele generalizate, în cazul corzilor înfășurării inextensibile se obține (vezi fig. 2)

$$\Delta l_{V,V+1} = (q_V - q_{0V})\, r - (q_{V+1} - q_{0(V+1)})\, r. \tag{6}$$

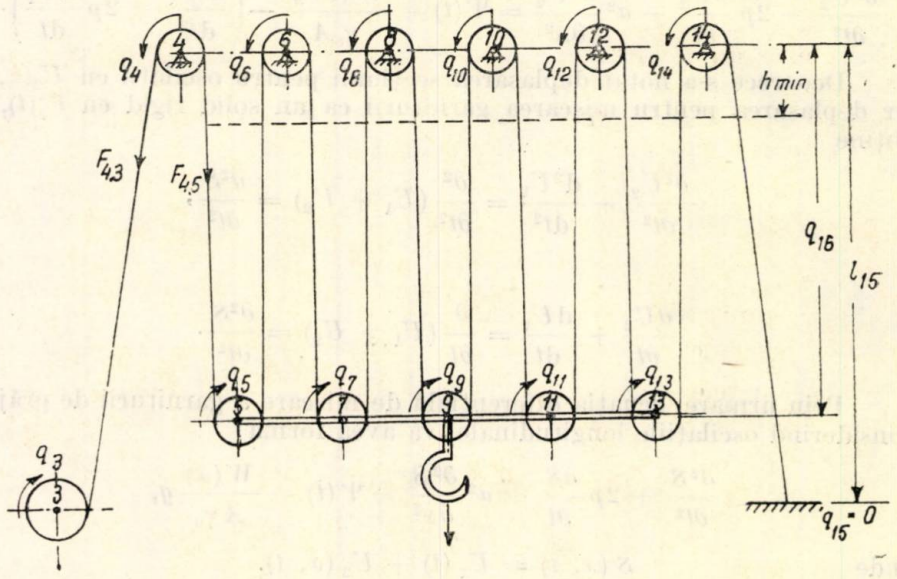


Fig. 2. — Schema sistemului macara-geamblac.

Considerînd momentele de inerție și masele reduse constante și introducînd ecuațiile (5) în ecuațiile lui Lagrange, se obțin ecuațiile de mișcare ale sistemului de manevră.

În calitate de coordonate generalizate, considerăm unghiurile absolute de rotire θ_i ale maselor discrete reduse și deplasarea unei secțiuni x a garniturii de prăjini, iar în calitate de forță excitatoare momentul la arborele secundar al turbotransformatorului $M_1(\dot{\theta}_1)$.

Considerînd forțele generalizate nule și după mici transformări, ecuațiile de mișcare se obțin sub forma

$$\begin{aligned} &J_1 \ddot{\theta}_1 + C_{1\cdot2}\,(\theta_1 - \theta_2) = M_1(\dot{\theta}_1), \\ &J_2 \ddot{\theta}_2 - C_{1\cdot2}\,(\theta_1 - \theta_2) + C_{2\cdot3}\,(\theta_2 - \theta_3) = 0, \\ &J_3 \ddot{\theta}_3 - C_{2\cdot3}\,(\theta_2 - \theta_3) + K_{3\cdot4}\, r_t^2\, [(\theta_3 - \theta_{0\cdot3}) - (\theta_4 - \theta_{0\cdot4})] = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$J_4\ddot{\theta}_4 - K_{3\cdot4}r^2\left[\frac{1}{\xi}(\theta_3-\theta_{0\cdot3})-(\theta_4-\theta_{0\cdot4})\right]+K_{4\cdot5}r^2[(\theta_4-\theta_{0\cdot4})-(\theta_5-\theta_{0\cdot5})]=0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$J_i\ddot{\theta}_i - K_{i-1,i}[(\theta_{i-1}-\theta_{0(i-1)})-(\theta_i-\theta_{0\cdot i})]+K_{i,i+1}r^2[(\theta_i-\theta_{0\cdot i})(\theta_{i+1}-\theta_{0\cdot(i+0)})]=0,$$

$$m_1\ddot{S}(l,t)+EA\left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right]_{x=l}+\sum_{j=4}^{13}K_{j,j+1}r[(\theta_j-\theta_{0\cdot j})-(\theta_{j+1}-\theta_{0\cdot(j+1)})]+m_1g=0,$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}+2p\frac{\partial S}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\psi(t),$$

$$i=5,\ 6,\ \ldots,\ 14,$$

$$\xi=\frac{r}{r_t}.$$

În sistemul de ecuații (7), coeficienții de rigiditate $C_{1\cdot2}$ și $K_{3\cdot4}$ sînt constanți, iar coeficienții $C_{2\cdot3}$ și $K_{i-1,i}$; $K_{i,i+1}$ sînt variabili.

Coeficientul de rigiditate al cuplajului de manevră în timpul cuplării variază după o lege exponențială [11] :

$$C_{2\cdot3}=C_0(1-e^{-st}), \tag{8}$$

unde

C_0 — coeficientul de rigiditate al cuplajului în perioada stabilizată a mișcării,

s — coeficient de umplere al cuplajului.

Coordonatele generalizate ale sistemului macara-geamblac în cazul cînd corzile înfășurării cablului sînt neextensibile se calculează cu formulele [11]

$$\theta_{ck}=(3n-k-1)\,\theta_0,$$
$$\theta_0=\frac{r_t}{r}\cdot\frac{\theta_{0\cdot3}}{2n}=\frac{S(l,t)}{2r}+\frac{\theta_{\cdot3}}{2}, \tag{9}$$

unde n este numărul de role ale macaralei, iar k numărul de ordine al rolei sistemului macara-geamblac.

Coeficientul de rigiditate al fiecărei corzi este în funcție de distanța dintre geamblac și macara. Această distanță, în timpul ridicării sarcinii pe lungimea unui pas, se poate determina cu relația

$$q_{16}=h-S(l,t),$$

unde h este distanța maximă dintre geamblac și macara.

Caracteristica mecanică a motorului diesel, și a grupului de forță la arborele de ieșire din turbotransformator se poate exprima cu ajutorul interdependenței

$$M=M\left(\frac{d\theta}{dt}\right),$$

unde

M este momentul înregistrat la arborele cotit al motorului sau la arborele secundar al turbotransformatorului,

$\frac{d\theta}{dt}$ — viteza unghiulară înregistrată la aceeași arbori.

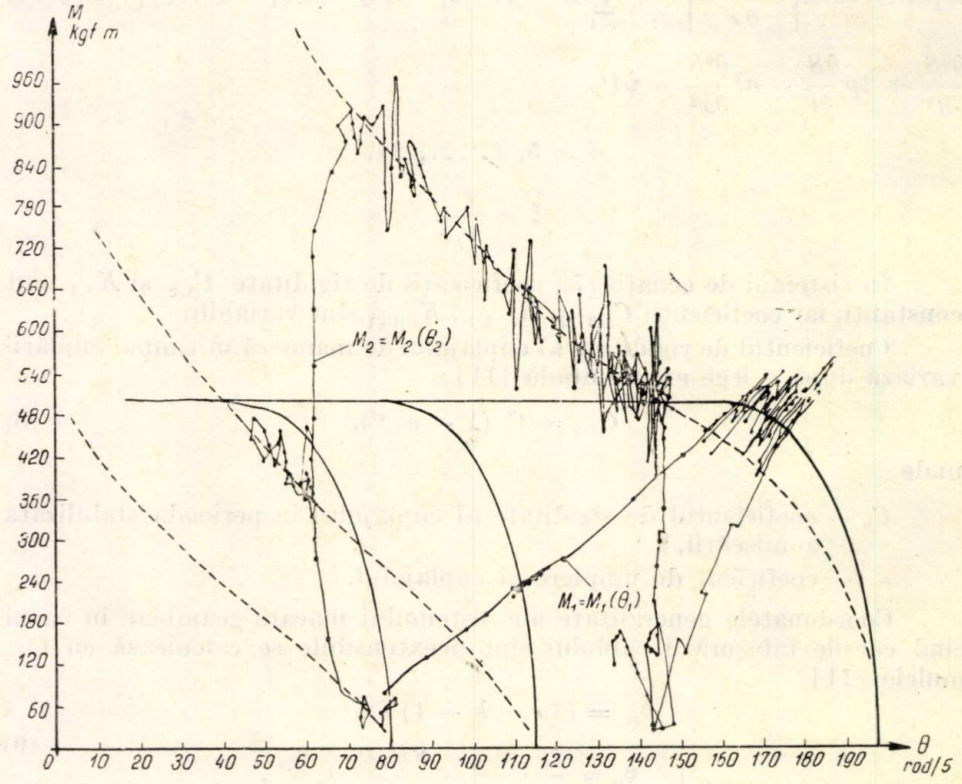


Fig. 3. — Caracteristica mecanică a grupului de forță, înregistrată la instalația de foraj *U-9D* în timpul ridicării unei garnituri de prăjini, avînd greutatea de 26 t.f., cu o viteză de 1,5 m/s.

Forma generală a caracteristicei mecanice a motorului și a turbotransformatorului este prezentată în figura 3, obținută prin înregistrarea făcută la instalația $U-9\ D$ și schematizată în figura 4.

Din aceste diagrame se vede că motorul la mers în gol (pînă la cuplarea cuplajului principal) funcționează pe cea mai de jos ramură a caracteristicii regulatoare. După cuplare, sondorul-șef mărește cantitatea de combustibil pentru alimentarea motorului pe o curbă în trepte, lucru care duce atît la creșterea turației, cît și a momentului la arborele cotit după aceeași lege în trepte.

După fiecare accelerare, motorul funcționează pe ramura corespunzătoare a caracteristicii regulatoare, pînă în momentul cînd sondorul-șef din nou mărește cantitatea de combustibil.

Variația momentului la arborele secundar al turbotransformatorului după caracterul curbelor din figurile 3 și 4 se poate exprima cu legea matematică

$$M_1 = e^{-m\frac{d\theta_1}{dt}}\left(B_1\frac{d\theta_1}{dt} + C_1\right) + \Delta M_0 \sin\left(\omega_0\frac{d\theta_1}{dt}\right), \qquad (10)$$

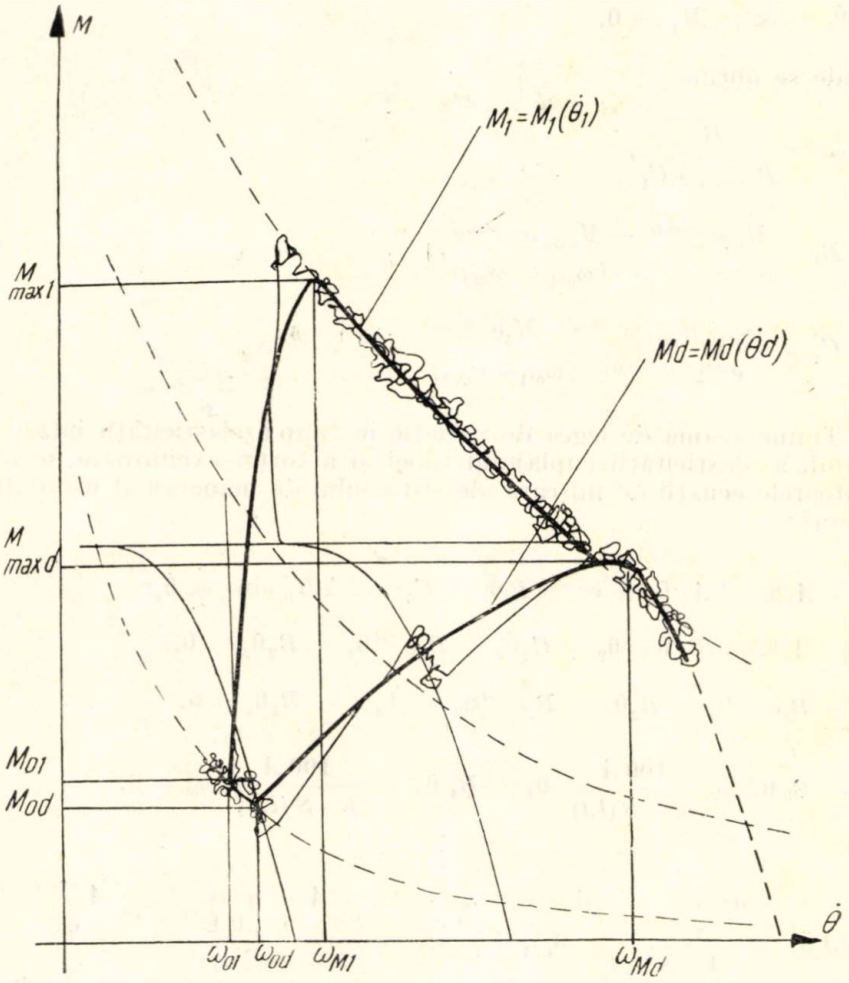


Fig. 4. — Caracteristica mecanică generală a grupurilor de forță ale instalațiilor de foraj.

unde

m, B_1, C_1 sînt coeficienți ce determină variația medie a forței excitatoare,

ΔM_0, ω_0 — amplitudinea și pulsația oscilațiilor forțate.

Coeficienții m, B_1, C_1 se determină din ecuația (10) prin satisfacerea următoarelor condiții :

$$t = 0\,;\ \dot{\theta}_1 = \omega_{01}\,;\ M_1 = M_{01},$$

$$\dot{\theta}_1 = \omega_{M1}\,;\ M_1 = M_{\max\cdot 1}\,;\ \frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}\dot{\theta}_1} = 0,$$

$$\dot{\theta}_1 \to \infty\,;\ M_1 \to 0,$$

de unde se obține

$$m = \frac{B_1}{B_1\omega_{M1} + C_1},$$

$$B_1 = \frac{M_{01}\mathrm{e}^{-m\omega_{M1}} - M_{\max}\cdot\mathrm{e}^{-m\omega_{0\cdot 1}}}{\mathrm{e}^{-m(\omega_{0\cdot 1}+\omega_{M1})}\cdot(\omega_{0\cdot 1} - \omega_{M1})}, \tag{11}$$

$$C_1 = \frac{\omega_{0\cdot 1}(M_{\max}\cdot\mathrm{e}^{-m\omega_1} - M_1\mathrm{e}^{-m\omega_{M1}})}{\mathrm{e}^{-m(\omega_{0\cdot 1}+\omega_{M1})}\cdot(\omega_{0\cdot 1} - \omega_{M1})}.$$

Ținînd seama de legea de variație în timp a elasticității înfășurării cablului, a elasticității cuplajului tobei și a forței excitatoare, se obțin următoarele ecuații de mișcare ale sistemului de manevră al instalațiilor de foraj :

$$J_1\ddot{\theta}_1 + A_1\theta_1 - A_1\,\theta_2 = \mathrm{e}^{-m\dot{\theta}_1}(B_1\dot{\theta}_1 + C_1) + \Delta M_0 \sin.\ \omega_0\,\dot{\theta}_1,$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - A_1\theta_1 - B_2\,\mathrm{e}^{-st}\theta_2 + C_2\theta_2 + B_2\mathrm{e}^{-st}\theta_3 - B_2\theta_3 = 0,$$

$$J_3\ddot{\theta}_3 + B_2\mathrm{e}^{-st}\theta_2 - B_2\theta_2 - B_2\mathrm{e}^{-st}\theta_3 + A_3\theta_3 - B_3\theta_4 = 0, \tag{12}$$

$$J_4\ddot{\theta}_4 - B_3\theta_3 + \frac{100\,A}{h - S(l,t)}\,\theta_4 + B_4\,\theta_4 - \frac{100\,A}{h - S(l,t)}\,\theta_5 = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$J_i\ddot{\theta}_i - \frac{a_{i-\frac{1}{2}[1-(-1)^i]}A}{h - S(l,t)}\,\theta_{i-1} + \frac{a_{i-\frac{1}{2}[1-(-1)^i]}A + a_{i+\frac{1}{2}[1-(-1)^i]}A}{h - S(l,t)}\,\theta_i -$$

$$- \frac{a_{i-\frac{1}{2}[1-(-1)^i](-1)^i}A}{h - S(l,t)}\,\theta_{i+1} + (-1)^i\,\frac{a_{i-\frac{1}{2}[1-(-1)^i](-1)^i}A}{h - S(l,t)}\,\theta_{13} +$$

$$+ (-1)^i\,\frac{a_{i-\frac{1}{2}[1-(-1)^i](-1)^i}A'}{h - S(l,t)}\,S(l,t) = 0,$$

$$m_1\ddot{S}(l,t) + EA\left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right]_{x=l} - \frac{100\,A'}{h - S(l,t)}\theta_4 \sum_{K=3}^{7} \frac{b_{2K-1}K_1 r}{h - S(l,t)}\theta_{2K-1} +$$

$$+ \frac{118K_1}{h - S(l,t)} S(l,t) + m_1 g = 0,$$

$$\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial t^2} + 2p\frac{\partial S(x,t)}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 S(x,t)}{\partial x^2} = \psi(t),$$

$$i = 5,\ 6,\ \ldots,\ 14.$$

În ecuațiile de mai sus s-au făcut următoarele notații :

$$A_1 = C_{1\cdot 2}$$

$B_2 = C_0 = C_{M3\cdot 4}\left(\frac{\omega_d}{\omega_a}\right)^2$, pentru vitezele III și IV,

$B_2 = C_0 = C_{M1\cdot 2}\left(\frac{\omega_e}{\omega_a}\right)^2$, pentru vitezele I și II,

$C_2 = C_{1\cdot 2} + C_0$; $A = A_c E_c r^2$,

$A_3 = C_0 + K_0 r_t^2$; $A' = A_c E_c r$,

$B_3 = K_0 r r_t$; $K_0 = \frac{A_c E_c}{l_3}\cdot\frac{r_t^2}{R^2}\left(\frac{\omega_e}{\omega_a}\right)^2$,

$B_4 = K_0 r^2$; $K_1 = A_c E_c$,

$$l_3 \approx l_{15}.$$

Coeficient	a_4	a_6	a_8	a_{10}	a_{12}	a_{14}	b_5	b_7	b_9	b_{11}	b_{13}
Valoarea	100	64	36	16	4	2	36	28	20	12	122

Ecuațiile diferențiale (12) obținute determină mișcarea sistemului de manevră al instalațiilor de foraj acționate cu motoare diesel și cu turbotransformator ca unui sistem cu multe mase și cu legături elastice sub acțiunea momentului exterior $M_1 = M_1(\dot{\theta}_1)$.

Intensitatea acțiunii forței excitatoare pentru o unitate de masă a sistemului $\psi(t)$ se poate determina cu expresia [4]

$$\psi(t) = \frac{M_1(\dot{\theta}_1)\,R}{\sum_{i=1}^{14} J_i + m_1 R^2 + m_2 R^2}. \tag{13}$$

Pentru determinarea eforturilor dinamice maxime în regim nestabilizat în oricare dintre verigile sistemului de manevră, de exemplu în garnitura de prăjini în timpul ridicării, este necesar a găsi expresia deplasării uneia din secțiunile garniturii de prăjini $S(x, t)$.

Rezolvarea sistemului de ecuații (12) se poate face în următoarele condiții inițiale : în momentul inițial la $t = 0$, cînd sistemul se află în repaus, deplasarea și viteza de deplasare a oricărei mase din sistem sînt nule, deci pentru

$$t = 0\,; \quad S(x,t) = 0\,; \quad \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = 0,$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \ldots = \theta_{14} = \theta_{15} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta_2}{\mathrm{d}t} = \omega_{0_M}, \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta_4}{\mathrm{d}t} = \ldots = \frac{\mathrm{d}\theta_{14}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Condițiile de contur ale sistemului sînt următoarele : pentru $x = 0$,

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\text{pentru } x = l, \quad m_1 \ddot{S}(l,t) + EA\left[\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}\right]_{x=l} - \frac{100\,A'}{h - S(l,t)}\,\theta_4 + \tag{15}$$

$$+ \sum_{K=3}^{7} \frac{K_1 r\, b_{2K-1}}{h - S(l,t)}\,\theta_{2K-1} + \frac{118 K_1}{h - S(l,t)}\,S(l,t) + m_1 g = 0,$$

deci în orice moment de timp la capătul liber al garniturii de prăjini (pentru $x = 0$) efortul va fi nul, iar la capătul de sus (pentru $x = l$) efortul se poate determina cu expresia (15).

Dacă în ecuațiile (12) înlocuim masa motorului și turbotransformatorului J_1 cu masa motorului J_d, precum și momentul la arborele secundar al turbotransformatorului $M_1(\dot{\theta}_1)$ cu momentul la arborele motorului $M_d(\dot{\theta}_d)$, atunci sistemul de ecuații (12) determină mișcarea sistemului acționat cu motoare diesel fără turbotransformator.

Momentul la arborele motorului se poate determina cu expresia (vezi fig. 4)

$$M_d = \lambda_1 + \lambda_2 \frac{\mathrm{d}\theta_d}{\mathrm{d}t} + \lambda_3 \left(\frac{\mathrm{d}\theta_d}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \lambda_4 \left(\frac{\mathrm{d}\theta_d}{\mathrm{d}t}\right)^3 + \Delta M_d \sin \omega_d \frac{\mathrm{d}\theta_d}{\mathrm{d}t}. \tag{16}$$

Coeficienții λ_1, λ_2, λ_3 și λ_4 se determină din următoarele condiții :

$$\dot{\theta}_d = \omega_0, \quad M_d = 0,$$

$$\dot{\theta}_d = \omega_{Md}, \quad M_d = M_{Md}\,; \quad \frac{\mathrm{d}M_d}{\mathrm{d}t} = 0,$$

$$\dot{\theta}_d = \omega_M, \quad M_d = 0.$$

Astfel, în acest caz, prima ecuație a sistemului (12) pentru instalații de foraj fără turbotransformator capătă următoarea formă :

$$J_d\ddot{\theta}_d + A_1\theta_d - A_1\theta_2 = \lambda_1 + \lambda_2\dot{\theta}_d + \lambda_3\dot{\theta}_d^2 + \lambda_4\dot{\theta}_d^3 + \Delta M_d \sin\omega_d\dot{\theta}_d, \quad (12')$$

restul de ecuații ale sistemului (12) nu se modifică.

Cele două sisteme de ecuații diferențiale (12) și (12′) au valabilitate numai în cazul cînd tot sistemul de K mase se află în mișcare. În caz contrar trebuie să ne mărginim la un număr mai mic de ecuații. De exemplu, la începutul demarajului sistemului nu toate masele încep a se mișca simultan. Astfel, mișcarea unei mase începe numai atunci cînd forța legăturii elastice respective atinge mărimea forței rezistente aplicate acestei mase.

Ecuațiile necesare în acest caz se pot obține ușor din sistemul de ecuații (12), respectiv (12′), considerînd momentele de inerție al maselor ce se află în repaus infinite de mari (ceea ce este echivalent cu încastrarea rigidă a lor).

Studiul acestor procese tranzitorii se poate face pe etape, de fiecare dată considerîndu-se sistemul cu un număr mai mic de mase, corespunzător succesiunii de începere a mișcării sistemului.

Condițiile inițiale pentru rezolvarea sistemului curent de ecuații decurg din rezolvarea sistemului precedent.

Ca rezultat al rezolvării sistemelor de ecuații (12) și (12′) se obțin mărimile cinematice și dinamice ale fiecărei verigi a sistemului de manevră. De asemenea rezolvarea ne dă posibilitatea să determinăm legea de variație a momentelor forțelor legăturilor elastice, precum și valorile lor maxime și minime.

5. CONCLUZII

1. Ecuațiile de mișcare ale sistemului de manevră al instalațiilor de foraj au fost obținute ținînd seama de forțele suplimentare din cablu care apar datorită fenomenelor oscilatorii ce au loc atît în garnitura de prăjini și în cablu, cît și în mecanismele sistemului de manevră. De asemenea s-a ținut seama de variația caracteristicii forței excitatoare, a rigidității cuplajului principal, precum și al rigidității înfășurării cablului în sistemul macara-geamblac.

2. Sistemele de ecuații diferențiale obținute sînt neliniare. Rezolvarea și analiza acestor ecuații de ordin superior nu sînt posibile pe cale analitică.

3. Pentru scopuri practice, rezolvarea acestor sisteme de ecuații diferențiale se poate face cu mașini electronice de calcul cu acțiune neîntreruptă (model activ) sau pe baza acestor ecuații se poate construi modelul pasiv al sistemului de manevră.

4. Rezolvarea exactă a acestor ecuații cu un mare număr de mărimi variabile are importanță teoretică. Pentru scopuri practice se pot folosi metode aproximative de rezolvare [11], [3].

BIBLIOGRAFIE

1. A. Bărglăzan, V. Dobîndă, *Turbotransmisiile hidraulice*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1957.
2. V. Vîlcovici, Şt. Bălan, R. Voinea, *Mecanica teoretică*, ed. 2, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.
3. I. Vlad, *Unele probleme ale cinematicii şi dinamicii sistemului de manevră al instalaţiilor de foraj*. Buletinul I.P.G.G., **XV** (1966).
4. С. Г. Калинин, *Исследование динамики буровых установок при спуско-подъемных операциях*, Диссертация, Львов, 1959.
5. М. С. Комаров, С. Г. Калинин, *Динамические нагрузки талевых систем буровых установок*, Сбрник Л.П.И., Некоторые вопросы динамики машин, *2* (1959).
6. В. Е. Феодоров, М. М. Никаноров, *Теоретические основы подъема бурового инструмента*, М.-Л., 1952.
7. И. Ф. Пономарев, *Исследование нефтепромысловых подъемников*, Диссертация, Москва, 1958.
8. С. Д. Пономарев и др., *Основы современных методов расчета на причинность в машиностроении*, М. Машгиз, 1952.
9. C. Pfleiderer, *Dinamische Vorgänge beim Anlauf von Maschinen mit besonderer Berücksichtigung von Hebmaschinen*, Dissertation, München.
10. S. Timoshenco, *Vibration problems in engineering*, D. van Nostrand Company Inc., Toronto — New York—London, 1955.
11. I. Vlad, *Sistemul de manevră al instalaţiilor de foraj privit ca un sistem elastic cu mase discrete*. Buletinul I.P.G.G., **XIV** (1966).

NOTE

APLICAŢII ALE TEORIEI DISTRIBUŢIEI LA STUDIUL VIBRAŢIILOR PLĂCILOR, SOLICITATE DE SARCINI MOBILE*)

de N. D. POPESCU
Institutul de mine Petroşeni

539.4

Folosindu-se teoria distribuţiei la studiul vibraţiilor plăcilor solicitate de sarcini mobile, se determină expresia vitezei de deplasare a sarcinilor (viteza critică) care poate provoca un fenomen similar cu fenomenul rezonanţei.

O sarcină mobilă de mărime constantă ce se deplasează cu o viteză constantă pe o placă generează în aceasta vibraţii, a căror amplitudine depinde de viteza de deplasare a sarcinii şi de caracteristicile geometrice, mecanice şi elastice ale plăcii. Pentru o anumită viteză de deplasare a sarcinii, numită viteză critică, are loc o creştere bruscă a amplitudinii vibraţiilor, care poate duce la distrugerea plăcii, fenomenul fiind deci similar cu cel al rezonanţei.

În lucrare se analizează cazul plăcilor dreptunghiulare, simplu rezemate (sau încastrate) pe contur, solicitate de o sarcină mobilă, cu masa corpului — căruia i se datoreşte sarcina — neglijabilă, stabilindu-se cu ajutorul teoriei distribuţiei expresiile vitezelor critice. Rezultatele obţinute îşi găsesc aplicare la calculul dinamic al podurilor dalate de şosea sau de cale ferată, al discurilor turbinelor cu abur sau gaze etc.

1. STABILIREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A MIŞCĂRII

Pentru stabilirea ecuaţiei diferenţiale a mişcării de vibraţie la plăci solicitate de sarcini mobile, se va folosi ecuaţia de condiţie dedusă în lucrarea [3]

$$L_e = W, \tag{1}$$

unde L_e este lucrul mecanic efectuat de către forţele exterioare care acţionează asupra plăcii (inclusiv forţele de inerţie), iar W energia potenţială de deformaţie acumulată de placă.

*) Prezentată la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, septembrie 1965.

Pentru placa reprezentată în figura 1, energia potențială de deformație W se exprimă cu ajutorul relației [1]

$$W = \frac{1}{2}\iint D\left\{\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]^2 + 2(1-\mu)\left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]\right\} dx\, dy, \tag{2}$$

unde z este săgeata plăcii, $D = \dfrac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$, iar integrala se ia pe toată suprafața plăcii.

Dacă pe contur săgețile sînt nule (de exemplu în cazul plăcii încastrate sau rezemate pe contur), integrala pe toată suprafața plăcii a termenului al doilea este egală cu zero, astfel că expresia (2) devine

$$W = \frac{1}{2}\iint D\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]^2 dx\, dy. \tag{3}$$

Expresia lucrului mecanic L_e, produs de forțele exterioare efectiv aplicate și de forțele de inerție, se scrie imediat dacă acestea sînt distribuite pe toată placa după o anumită lege. Deci, în cazul plăcii acționate de o sarcină mobilă concentrată, este necesar să se înlocuiască acțiunea acestei sarcini prin acțiunea unei sarcini distribuite, echivalente.

Dacă $A(x_0, y_0)$ este punctul de aplicație al sarcinii mobile concentrate F (fig. 2), atunci această sarcină poate fi reprezentată, cu ajutorul funcției lui Dirac, sub forma [2]

$$p_{(x,y,t)} = F\,\delta(x - x_0,\ y - y_0), \tag{4}$$

unde $0 < x < a$, $0 < y < b$, iar p este intensitatea sarcinii distribuite la un moment dat t într-un punct oarecare de pe suprafața plăcii de coordonate (x, y).

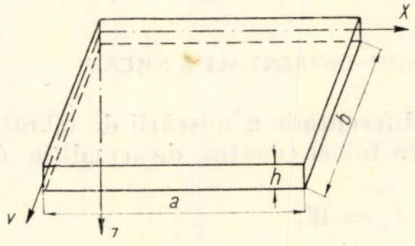


Fig. 1

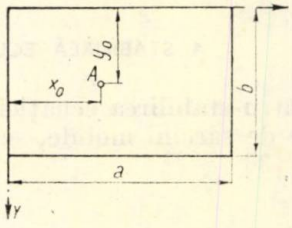


Fig. 2

Dintre multiplele proprietăți ale funcției δ, în exprimarea lucrului mecanic L_e se va folosi numai proprietatea filtrantă a acesteia, care în cazul exemplului ales se enunță în felul următor : dacă funcția $f(x, y)$

este continuă și mărginită în intervalele $(0,a)$ și $(0, b)$, pentru $0 < x_0 < a$ și $0 < y_0 < b$, se poate scrie egalitatea

$$\iint f(x, y)\ \delta(x - x_0,\ y - y_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(x_0, y_0). \tag{5}$$

Ținînd seama de expresia (4) și notînd cu m masa plăcii pe unitatea de suprafață, lucrul mecanic L_e se poate scrie sub forma

$$L_e = \frac{1}{2}\iint pz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\iint mz\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

Deci pentru o placă ce reazemă astfel încît săgețile pe contur să fie nule, acționată de o sarcină mobilă concentrată F, ecuația de condiție (1) se poate scrie sub forma

$$\iint pz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint mz\frac{\partial z^2}{\partial t^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint D\left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{7}$$

Avînd în vedere caracterul mișcării de vibrație al plăcii, se va alege pentru săgeata z următoarea expresie :

$$z = T\,X\,Y, \tag{8}$$

unde T este o funcție necunoscută ce depinde exclusiv de timp (variabila t), X o funcție ce depinde exclusiv de variabila x, iar Y o funcție ce depinde exclusiv de variabila y.

Susbstituind pe z, dat de relația (8), în ecuația (7), se obține

$$\ddot{T} + \frac{\iint D[\ddot{X}Y + X\ddot{Y}]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint m\,X^2\,Y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}\,T - \frac{\iint p\,X\,Y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint m\,X^2Y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = 0. \tag{9}$$

Făcînd notațiile

$$\left.\begin{aligned} \frac{\iint D\,[\ddot{X}Y + X\ddot{Y}]^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint m\,X^2\,Y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} &= \omega^2, \\ \frac{\iint p\,XY\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint m\,X^2\,Y^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} &= \eta, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ecuația (9) devine

$$\ddot{T} + \omega^2\,T - \eta = 0. \tag{11}$$

S-a obținut astfel ecuația diferențială a mișcării de vibrație. Rezolvarea ei, respectiv determinarea funcției T, necesită cunoașterea funcțiilor

X și Y, care, la rîndul lor, depind de condițiile de fixare a marginilor plăcii.

Odată cunoscute funcțiile T, X și Y, rezultă imediat expresia săgeții $z(x, y, t)$, de unde se obține viteza critică (adică acea viteză de deplasare a sarcinii ce produce creșterea bruscă a amplitudinii vibrațiilor), punînd condiția ca săgeata să tindă la infinit.

2. DETERMINAREA VITEZEI CRITICE PENTRU PLACA DREPTUNGHIULARĂ SIMPLU REZEMATĂ PE TOATE LATURILE

La o astfel de placă, săgețile și momentele încovoietoare fiind nule pe contur, rezultă următoarele condiții la limită :

$$\left.\begin{aligned} &\text{— pentru } x = 0 \text{ și } x = a, \quad z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \\ &\text{— pentru } y = 0 \text{ și } y = b, \quad z = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Deoarece săgeata z, dată de expresia (8), trebuie să satisfacă condițiile la limită (12) în orice moment, rezultă că și funcțiile $X_{(x)}$ și $Y_{(y)}$ trebuie să satisfacă aceste condiții la limită.

Funcțiile $X_{(x)}$ și $Y_{(y)}$, care satisfac aceste condiții, se pot pune sub forma

$$\left.\begin{aligned} X &= \sin \frac{n \pi x}{a}, \\ Y &= \sin \frac{k \pi y}{b}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

unde n și k sînt numere întregi.

Dacă sarcina mobilă F se deplasează pe placă după dreapta OB $\left(\text{de ecuație } y_0 = \alpha \frac{b}{2}\right)$ în sensul axei X (fig. 3), cu o viteză $V = \text{const}$, și se ia ca origine a timpului momentul intrării forței pe placă, rezultă că la un moment dat t coordonatele punctului de aplicare A al forței F vor fi : $x_0 = Vt$ și $y_0 = \alpha \frac{b}{2}$. În acest caz, ținînd seama de ecuațiile (13) și de relațiile (4) și (5), expresiile (10) devin

$$\omega^2 = \pi^4 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)^2 \frac{D}{m}, \tag{14}$$

$$\eta = \frac{4F}{m a b} \sin \frac{k \alpha \pi}{2} \sin \beta t, \tag{15}$$

unde :

$$\beta = \frac{n \pi V}{a}. \tag{16}$$

Întrucît ω (care este pulsația vibrațiilor proprii a plăcii) este constant, ținînd seama de relația (15), ecuația (11) se poate scrie sub forma

$$\ddot{T} + \omega^2 T = \frac{4 F \sin \frac{k \alpha \pi}{2}}{m a b} \sin \beta t. \tag{17}$$

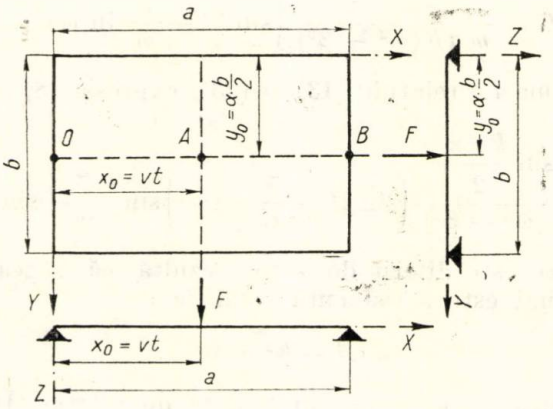


Fig. 3

Soluția generală a acestei ecuații diferențiale va fi

$$T = A \cos \omega t + B \sin \omega t + T_0, \tag{18}$$

unde T_0 este o soluție particulară de forma

$$T_0 = C \sin \beta t. \tag{19}$$

Substituind expresia (19) în ecuația (17), se obține imediat valoarea constantei C :

$$C = \frac{4 F \sin \frac{k \alpha \pi}{2}}{m a b (\omega^2 - \beta^2)}. \tag{20}$$

Soluția generală (18) se poate pune deci sub forma

$$T = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{4 F \sin \frac{k \alpha \pi}{2}}{m a b (\omega^2 - \beta^2)} \sin \beta t. \tag{21}$$

Punînd condițiile inițiale (pentru $t = 0$, $T = \dot{T} = 0$), se determină constantele A și B, ale căror valori sînt

$$\left.\begin{aligned} A &= 0, \\ B &= -\frac{4F\beta \sin \frac{k\alpha\pi}{2}}{mab\,\omega\,(\omega^2 - \beta^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Rezultă deci următoarea expresie pentru funcția T:

$$T = \frac{4F \sin \frac{k\alpha\pi}{2}}{mab\,(\omega^2 - \beta^2)} \left(\sin \beta t - \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t\right). \tag{23}$$

Ținînd seama de relațiile (13) și (23), expresia (8) a săgeții devine

$$z = \frac{4F \sin \frac{k\alpha\pi}{2}}{mab\,(\omega^2 - \beta^2)} \left(\sin \beta t - \frac{\beta}{\omega} \sin \omega t\right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b}. \tag{24}$$

Deoarece ω este diferit de zero, rezultă că săgeata z tinde la infinit atunci cînd este satisfăcută condiția

$$\omega^2 - \beta^2 = 0. \tag{25}$$

Ținînd seama de expresia lui β dată de relația (16), din ecuația de condiție (25) se obține expresia vitezei critice V_c funcție de pulsația vibrațiilor proprii ale plăcii:

$$V_c = \frac{a}{n\pi}\,\omega. \tag{26}$$

Expresia lui ω fiind dată de relația (14), viteza critică se poate scrie sub forma

$$V_c = \frac{a\pi}{n}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{D}{m}}. \tag{27}$$

Dacă în această relație se ține seama de expresia lui D și de faptul că $m = \rho h$ (unde ρ este densitatea materialului din care este confecționată placa), se obține

$$V_c = \frac{\pi a h}{2n}\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{E}{3\rho(1 - \mu^2)}}. \tag{28}$$

Se observă că cea mai mică valoare a vitezei critice se obține pentru $n = k = 1$:

$$V_{c_1} = \frac{\pi a h}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\sqrt{\frac{E}{3\rho(1 - \mu^2)}}. \tag{29}$$

Pentru plăci pătrate ($a = b$), relația (29) devine

$$V_{c_1} = \frac{\pi h}{a} \sqrt{\frac{E}{3\,\rho\,(1-\mu^2)}}. \tag{30}$$

3. DETERMINAREA VITEZELOR CRITICE PENTRU ALTE CONDIȚII DE REZEMARE PE CONTUR A PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE

Procedeul de determinare a vitezelor critice pentru alte cazuri de rezemare pe contur a plăcilor dreptunghiulare, fiind similar cu cel descris la pct. 2, în continuare se va da — pentru fiecare caz în parte — numai funcțiile $X(x)$, $Y(y)$, $T(t)$ și expresiile finale ale vitezelor critice.

3.1. PLACĂ DREPTUNGHIULARĂ ÎNCASTRATĂ PE TOATE LATURILE

Pentru placa reprezentată în figura 4, care satisface condițiile la limită

$$\left.\begin{aligned} &\text{— pentru } x = 0 \text{ și } x = a, \quad z = \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ &\text{— pentru } y = 0 \text{ și } y = b, \quad z = \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

funcțiile $X(x)$, $Y(y)$ și $T(t)$ vor avea expresiile

$$\left.\begin{aligned} X &= 2\sin^2\frac{n\,\pi\,x}{a}, \\ Y &= 2\sin^2\frac{k\,\pi\,y}{b}, \\ T &= \frac{16\,F\sin^2\dfrac{k\,\alpha\,\pi}{2}}{9\,mab\,\omega^2\,(\omega^2-4\,\beta^2)}\left(\omega^2\sin^2\beta\,t - 4\,\beta^2\sin^2\frac{\omega}{2}\,t\right), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

unde

$$\omega^2 = \frac{16\,\pi^4}{9\,a^4\,b^4}(3n^4\,b^4 + 3\,k^4\,a^4 + 2\,n^2\,k^2\,a^2\,b^2)\frac{D}{m}. \tag{33}$$

Rezultă următoarea expresie pentru viteza critică:

$$V_c = \frac{\pi\,h}{3nab^2}\sqrt{\frac{E(3n^4b^4 + 3k^4a^4 + 2n^2k^2a^2b^2)}{3\,\rho\,(1-\mu^2)}}. \tag{34}$$

Valoarea minimă a vitezei critice se obține pentru $n = k = 1$:

$$V_{c_1} = \frac{\pi\,h}{3\,ab^2}\sqrt{\frac{E(3a^4 + 3b^4 + 2a^2b^2)}{3\,\rho\,(1-\mu^2)}}. \tag{35}$$

Pentru plăci pătrate ($a = b$) relaţia (35) devine

$$V_{c_1} = \frac{\pi h}{a}\sqrt{\frac{E}{3{,}375\,\rho\,(1-\mu^2)}}. \tag{36}$$

Comparînd expresiile (30) şi (36), se constată că la plăcile simplu rezemate viteza critică este mai mare decît în cazul plăcilor încastrate pe contur.

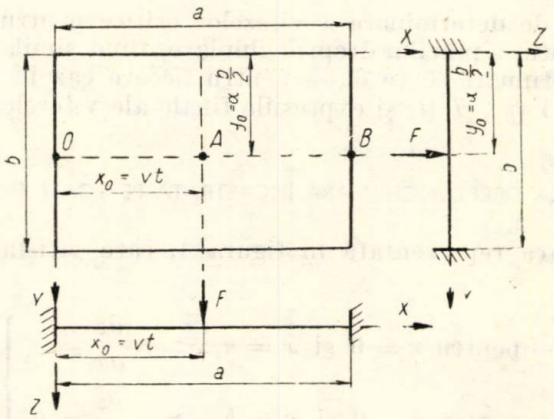


Fig. 4

3.2. PLACĂ DREPTUNGHIULARĂ CU DOUĂ LATURI ÎNCASTRATE ŞI DOUĂ SIMPLU REZEMATE

Pentru placa reprezentată în figura 5, avînd laturile paralele cu axa Y simplu rezemate, iar cele paralele cu axa X încastrate, condiţiile la limită vor fi

$$\left.\begin{aligned} &-\text{pentru } x = 0 \text{ şi } x = a, \quad z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \\ &-\text{pentru } y = 0 \text{ şi } y = b, \quad z = \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Rezultă deci următoarele expresii pentru funcţiile $X(x)$ şi $Y(y)$:

$$\left.\begin{aligned} X &= \sin\frac{n\,\pi\,x}{a}, \\ Y &= 2\sin^2\frac{k\,\pi\,y}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Dacă sarcina mobilă F se deplasează în direcţia axei X, funcţia $T(t)$ va avea expresia

$$T = \frac{8F\sin^2\dfrac{k\,\alpha\,\pi}{2}}{3\,mab\,(\omega^2-\beta^2)}\left(\sin\beta t - \frac{\beta}{\omega}\sin\omega t\right). \tag{39}$$

unde

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{3a^4b^4}\,[2a^4(n^4 + 8k^4) + n^4b^4 + 8n^2k^2a^2b^2]\frac{D}{m}. \tag{40}$$

Expresia vitezei critice va fi

$$V_c = \frac{\pi\, h}{6nab^2}\sqrt{\frac{E[2a^4(n^4 + 8k^4) + n^4b^4 + 8n^2k^2a^2b^2]}{\rho\,(1 - \mu^2)}}. \tag{41}$$

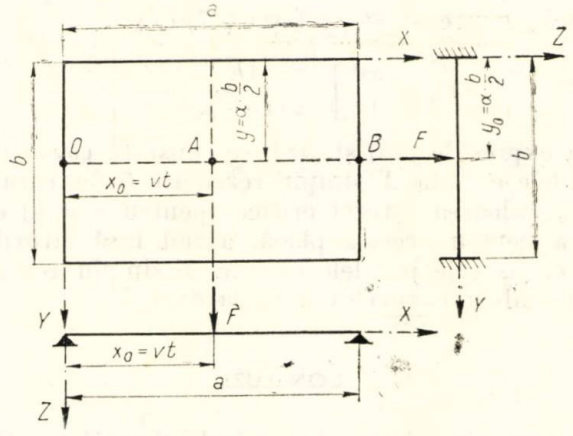


Fig. 5

Valoarea minimă a vitezei critice se obţine luînd $n = k = 1$:

$$V_{c_1} = \frac{\pi\, h}{6\,ab^2}\sqrt{\frac{E\,(18\,a^4 + b^4 + 8\,a^2b^2)}{\rho\,(1 - \mu^2)}}. \tag{42}$$

Pentru plăci pătrate ($a=b$), relaţia (42) devine

$$V_{c_1} = \frac{\pi\, h}{2a}\sqrt{\frac{3\,E}{\rho\,(1 - \mu^2)}}. \tag{43}$$

Dacă aceeaşi placă, reprezentată în figura 5, ar avea laturile paralele cu axa X simplu rezemate, iar cele paralele cu axa Y încastrate, atunci funcţiile $X(x)$, $Y(y)$ şi $T(t)$ ar avea expresiile

$$\left.\begin{aligned} X &= 2\sin^2\frac{n\,\pi\,x}{a}, \\ Y &= \sin\frac{k\,\pi\,y}{b}, \\ T &= \frac{8\,F\sin k\,\alpha\,\pi}{3\,m\,a\,b\,\omega^2\,(\omega^2 - 4\,\beta^2)}\left(\omega^2\sin^2\beta\,t - 4\,\beta^2\sin^2\frac{\omega}{2}\,t\right), \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

unde

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{3a^4b^4}\,[2b^4\,(k^4 + 8n^4) + k^4a^4 + 8n^2k^2a^2b^2]\cdot\frac{D}{m}. \tag{45}$$

Rezultă deci următoarea expresie pentru viteza critică :

$$V_c = \frac{\pi h}{12\, n\, a\, b^2} \sqrt{\frac{E\,[2b^4(k^4 + 8n^4) + k^4a^4 + 8n^2k^2a^2b^2]}{\rho\,(1 - \mu^2)}} \tag{46}$$

Valoarea minimă a vitezei critice se obține pentru $n = k = 1$:

$$V_{c_1} = \frac{\pi\, h}{12\, a\, b^2} \sqrt{\frac{E\,(18b^4 + a^4 + 8a^2b^2)}{\rho\,(1 - \mu^2)}}. \tag{47}$$

Pentru plăci pătrate ($a=b$), relația (47) devine

$$V_{c_1} = \frac{\pi\, h}{4a} \sqrt{\frac{3E}{\rho\,(1 - \mu^2)}}. \tag{48}$$

Comparînd expresiile (43) și (48), se constată că, atunci cînd placa are laturile paralele cu axa X simplu rezemate (cele paralele cu axa Y fiind încastrate), valoarea vitezei critice (pentru $a = b$) este jumătate din cea obținută pentru aceeași placă, avînd însă laturile paralele cu axa X încastrate, iar cele paralele cu axa Y simplu rezemate (sarcina deplasîndu-se în ambele cazuri în direcția axei X).

4. CONCLUZII

Folosirea teoriei distribuției la studiul vibrațiilor plăcilor solicitate de sarcini mobile, precum și o nouă variantă a metodei energetice de determinare a pulsației vibrațiilor proprii la plăci, permite stabilirea cu ușurință a ecuației diferențiale care descrie mișcarea elementelor de masă ce compun placa. Rezolvarea acestei ecuații conduce la stabilirea vitezei de deplasare a sarcinii mobile (viteza critică) care provoacă un fenomen similar cu fenomenul rezonanței.

Valoarea vitezei critice depinde de caracteristicile geometrice, mecanice și elastice ale plăcii, precum și de direcția de deplasare a sarcinii mobile. În lucrare s-au stabilit expresiile vitezelor critice pentru plăci dreptunghiulare (și pătrate) simplu rezemate sau încastrate pe contur, pentru cazul că masa corpului căruia i se datorește sarcina mobilă este neglijabilă.

Primită la redacție la 21 februarie 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Beles, P. R. Voinea, *Rezistența materialelor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1958, p. 251.
2. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum, Mechanica*, IInd, Oxford, Edit. Clarendon-Press, p. 72.
3. N. D. Popescu, *Deteminarea frecvenței vibrațiilor proprii la bare*, folosind o nouă formă a metodei energetice, Standardizarea, *2*, 86 (1965).

RECENZII

GH. VASILCA şi OLGA BIŢĂ, *Procese de lubrificaţie, frecare şi uzură la suprafeţele metalice*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1967, 417 p.

Lucrarea conţine studii de analiză şi sinteză ale unui material de cercetare teoretic şi experimental cu privire la procesele de lubrificaţie, frecare şi uzură a suprafeţelor metalice prin prisma interdependenţei factorilor acestora. Astfel, sub titlul „Factorii lubrifierii suprafeţelor" (cap. 1) este analizat fenomenul adsorbţiei lubrifianţilor şi proprietatea de viscozitate a acestora, parametrii care în lubrificaţie stau la baza formării peliculelor portante. Se stabileşte ecuaţia presiunilor, se definesc factorii celor trei regimuri de lubrificaţie (hidrodinamic, onctuos şi semifluid) şi se prezintă unele aspecte termice ale jocului în lagăre.

Problema caracteristicilor materialelor metalice importante pentru lubrificaţie (cap. 2) este tratată sub aspectul afinităţii chimice şi metalurgice, al proprietăţilor mecanice, al particularităţilor de structură şi al ponderii relative a acestor factori în procesele de frecare. Se exemplifică aceste caracteristici pentru tipurile reprezentative de structură a materialelor antifricţiune uzuale. Aspecte ale regimului hidrodinamic la cuplurile de frecare construite din materiale diferite, criteriul izotermic de caracterizare funcţională a acestora, regimurile de temperaturi ale lubrifiantului la intrarea şi ieşirea din lagăre, relaţia dintre temperatura cuzinetului şi temperatura medie a lubrifiantului, precum şi caracteristicile funcţionale experimentale pentru cuplurile formate din oţel-aliaj cu matrice moale (tip Sn-SnSb şi Pb-SnSb), cu matrice semidură (tip Cu—Pb), cu matrice complexă (tip Cu-Sn-Pb), cu matrice semidură (tip Al-Sn) şi matrice semidură cu incluziuni tari (tip Al-AlSb), sînt prezentate, sub titlul „Caracterizarea la alunecare a cuplurilor de frecare", în capitolul 3.

Aspectele frecării în lubrificaţie (cap. 4) sînt analizate din punct de vedere fizic şi cantitativ în cadrul regimului hidrodinamic, onctuos şi semifluid, oglindite în curba experimentală a lui Stribeck, dezvoltîndu-se mai ales unele criterii pentru studiul frecării, ca, de exemplu, acela al variaţiei izotermice a coeficientului de frecare experimental la lagăre, criteriul vitezei minime şi aspectul cantitativ global al frecării în regim semifluid. Pentru tipurile de structuri de aliaje antifricţiune studiate sub raportul comportării la alunecare se dau apoi caracteristicile experimentale de frecare, iar în cazul unui motor termic se prezintă rezultatele experimentale privind pierderile prin frecări.

Procesele de uzură la suprafeţele metalice (cap. 5) sînt studiate în cadrul uzurii de contact, corosive, abrazive şi prin oboseală superficială, analizîndu-se factorii care le generează, mecanismul producerii lor şi criteriile de evaluare cantitativă a acestor tipuri de uzură, relevîndu-se particularităţile metodelor de natură fizică, ale metodelor chimice şi ale celor radioactive folosite în acest scop. Rezultatele experimentale privind comportarea la uzură a diferitelor tipuri de structuri de aliaje antifricţiune şi de fonte nuanţează şi întregesc acest studiu. Un alt aspect al fenomenului de alunecare, legat de uzură, îl formează efectele proceselor de lubrificaţie asupra suprafeţelor de frecare (cap. 6). Temperatura superficială a suprafeţelor de alu-

necare în regimul hidrodinamic şi semifluid, unele caracteristici de microgeometrie a suprafeţelor în aceste regimuri, precum şi structura materialului în suprafeţele de frecare (stare contaminată şi polizată), sînt parametrii studiaţi ai acestor efecte. Rezultatul acţiunii procesului de frecare fiind formarea unei microgeometrii specifice şi afectarea, în general, a structurii din stratul superficial, se prezintă studiile experimentale efectuate în această privinţă pe mai multe cupluri de frecare. Totodată se tratează sub aceleaşi aspecte straturile superficiale metalice (de staniu şi de crom) depuse pe suprafeţele de alunecare.

Despre lubrifianţi şi aditivi (cap. 7), sub raportul compoziţiei şi naturii chimice a uleiurilor, caracterizarea acestora după criteriul viscozităţii, variaţia viscozităţii cu temperatura şi cu presiunea, onctuozitatea, aditivii şi natura acestora, criterii de alegere şi clasificarea lubrifianţilor etc., se prezintă de asemenea o analiză de bază. Procesele de rodaj la cuplurile de frecare (cap. 8), de mare importanţă teoretică şi practică în lubrificaţie, sînt tratate sub aspectele influenţei micro- şi macrogeometriei suprafeţelor, ale condiţiilor de rodaj optim, ale calităţii lubrifianţilor şi naturii aditivilor folosiţi în acest scop. Se dezvoltă pe larg rodajul chimic şi se prezintă rezultatele aplicării acestei metode în cazul motoarelor cu ardere internă.

Anexe cuprinzînd caracteristicile fizice, chimice şi mecanice ale celor mai reprezentative tipuri de aliaje pentru lagăre, precum şi ample referinţe bibliografice, întregesc materialul lucrării.

Problemele studiate sînt actuale în cercetarea ştiinţifică, deoarece aduc o contribuţie de seamă în direcţia clarificării unor procese cu o largă răspîndire în tehnică.

I. Dincă

Расчет пространственных конструкций (Calculul construcţiilor spaţiale), Выпуск X, сборник статей, издательство лит по строительству, Москва, 1965, 298 p.

Volumul cuprinde 15 lucrări, în care se tratează diferite aspecte ale calculului structurilor spaţiale de diferite tipuri.

În lucrarea *Bazele teoriei plăcilor curbe subţiri de mare flexibilitate cu simetrie axială* de S.A. Alekseev, se prezintă ecuaţiile fundamentale şi se formulează cele trei probleme de bază ale calculului structurilor specificate în titlu. Se studiază, de asemenea, aspectele particulare care apar în cazul utilizării unor materiale anizotrope. În final se dau cinci exemple de calcul.

Funcţiile de impuls de diferite grade sînt utilizate de D. V. Vainberg şi I. Z. Roitfarb în *Calculul plăcilor plane şi curbe cu parametri discreţi* pentru obţinerea modului de comportare a plăcilor plane şi curbe cu discontinuităţi geometrice şi mecanice. Sînt deduse ecuaţiile fundamentale pentru structuri de tipul planşeelor casetate, plăcilor curbe cu nervuri pe două direcţii şi structurilor prismatice. Se tratează, de asemenea, problemele privind stabilitatea acestor structuri.

E. S. Greben prezintă *Ecuaţiile fundamentale ale teoriei plăcilor plane sau cu mică curbură prevăzute cu nervuri.* Modul de aplicare a teoriei elaborate este ilustrat printr-un exemplu de calcul în care se tratează placa dreptunghiulară de beton armat rigidizată cu trei grinzi de oţel.

Studiul stării de eforturi în peretele unui puţ de mină solicitat de presiunea diferitelor straturi de pămînt este prezentat în lucrarea *Solicitarea la compresiune a unui cilindru gol de lungime infinită cu o sarcină liniară aplicată pe o zonă limitată a suprafeţei exterioare* de V. Z. Vasiliev.

Probleme privind stabilitatea structurilor spațiale sînt prezentate în lucrările *Stabilitatea cilindrului circular închis solicitat la încovoiere* de E.L. Akselrod, *Stabilitatea cilindrului circular solicitat la încovoiere sau răsucire* de S. N. Kan și *O metodă practică pentru calculul la stabilitate locală a barelor comprimate din aluminium* de V. S. Moskvitin. În prima dintre aceste lucrări, cilindrul studiat este solicitat la capete de două momente încovoietoare egale și opuse. În a doua lucrare, pe lîngă solicitarea descrisă mai sus este luată în considerație și solicitarea produsă de două momente de torsiune egale și opuse, aplicate la capetele cilindrului. Metoda aproximativă de calcul la stabilitate prezentată în a treia lucrare se bazează pe studiile experimentale efectuate de autorul ei.

V. V. Novițki și E. N. Andreeva sînt autorii lucrărilor *Rezolvarea unor probleme ale teoriei elasticității prin utilizarea metodei moiré și a analogiei lui Wieghardt* și *Determinarea deplasărilor plăcilor flexibile prin metoda moiré*. În prima dintre aceste lucrări se studiază starea de eforturi în două discuri circulare. Ambele discuri sînt solicitate de două forțe opuse aplicate pe direcția unui diametru, primul disc fiind plin, iar al doilea avînd un gol circular central.

În contribuția *Calculul plăcilor curbe cilindrice și prismatice cu ajutorul funcțiilor* W_i, I. I. Pedahovski prezintă un procedeu de integrare a sistemului de ecuații care apare în calculul structurilor menționate în titlul lucrării. Procedeul poate fi aplicat la plăcile curbe cu o singură deschidere sau continue pe mai multe deschideri, cu diferite moduri de rezemare și diferite scheme de încărcare.

Structurile spațiale oblice sînt considerate în lucrările *Calculul spațial al podurilor oblice fără antretoaze* de B. E. Ulițki și *Calculul barelor cu pereți subțiri rezemate oblic solicitate de sarcini uniform distribuite* de E. R. Golnik. În prima lucrare se studiază starea de eforturi în structurile de rezistență ale podurilor oblice pe grinzi în cazul în care grinzile longitudinale, prefabricate, sînt legate între ele prin articulații sau prin plăci monolite de beton armat.

Ecuațiile necesare pentru determinarea stării de eforturi produse de temperatură în barele cu pereți subțiri sînt stabilite în lucrarea *Eforturi din temperatură în barele cu pereți subțiri cu secțiunea deschisă* de I. V. Osetinski. O atenție specială este dată barelor cu profilul în formă de I sau U.

Studiul *Aplicarea metodei modelelor statice la calculul unor structuri spațiale din bare* de T. A. Popova conține un procedeu care permite înlocuirea calculului spațial al unei structuri spațiale printr-un calcul pe un model plan echivalent.

În ultima lucrare a culegerii, *Particularități ale calculului structurilor spațiale simetrice alcătuite din bare*, I. E. Lifșiț prezintă unele noi posibilități de simplificare a calculului structurilor spațiale prin folosirea simetriei și antisimetriei.

În totalitate, culegerea de lucrări editată sub redacția profesorilor S. A. Alekseev, V. V. Novojilov și A. A. Umanski cuprinde contribuții valoroase în domeniul teoriei structurilor spațiale, ea fiind utilă specialiștilor care se ocupă cu studierea și proiectarea unor astfel de structuri.

V. Petcu

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 27, nr. 2 1968

SUMAR

STUDII

Pag.

N. N. PATRAULEA, Consideraţii teoretice asupra efectului Coandă 245

E. MOISEI, Unele contribuţii la studiul curgerii gazelor prin canalele cu fante transversale 257

E. CARAFOLI şi ŞT. STAICU, Asupra aripii delta cu antisimetrie forţată în curent supersonic, considerînd separaţia la bordurile de atac 275

GH. MANEA, N. BOICU şi I. VOICA, Deformaţiile locale sub efectul presiunii în problema ungerii hidrodinamice 289

DAN PAVELESCU, Determinarea ponderii influenţei unora dintre factorii uzării prin analiza statistică 303

GH. VASILCA şi VETURIA RASZILLIER, Aspecte cantitative privind microgeometria specifică a suprafeţelor de frecare 315

S. RĂUTU şi V. CHIROIU, În legătură cu calculul construcţiilor de greutate minimă. . 333

EINAR KEINTZEL, Matrice de influenţă pentru calculul cadrelor etajate la forţe orizontale 349

V. VISARION şi D. DRĂGHICESCU, Un model matematic pentru calculul structurilor curbe subţiri celulare 361

GUŢU ALEXANDRU, Contribuţii la studiul grinzilor cu două reazeme elastice 375

STELIAN CETĂŢEANU, Metoda reducerii, metodă aproximativă pentru rezolvarea problemei stabilităţii plăcii plane 381

RECENZII 407

St. cerc. mec. cpl., Tom. 27, Nr. 2, P. 243—408, Bucureşti, 1968

CONSIDERAȚII TEORETICE ASUPRA EFECTULUI COANDĂ [1])

de N. N. PATRAULEA
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Se studiază aspecte tridimensionale ale jeturilor Coandă în ipoteza fluidului perfect, în coordonate curbilinii adecvate. Se arată instabilitatea scurgerii, în sensul că denivelările inițiale ale suprafeței libere se amplifică înspre aval. Se studiază în particular cazul perturbațiilor mici.

1. Ilustrul nostru compatriot Henri Coandă a observat și a studiat efectul care constă în tendința pronunțată a jeturilor relativ subțiri de a nu se dezlipi de corpurile pe care se scurg.

Explicația fenomenului poate, în esență, să fie dată de proprietățile scurgerilor potențiale ale jeturilor subțiri.

Într-adevăr, studiul variației presiunii de-a lungul jetului ne furnizează, după cum este cunoscut din teoria stratului-limită, indicații prețioase cu privire la desprinderea curentului. În special zona în care presiunea crește, în scurgerea potențială este zona probabilă de desprindere.

Să considerăm scurgerea unui jet pe un cilindru circular. Presiunile pe cilindru diferă de presiunea constantă din afara jetului, și anume este mai mică datorită „centrifugării" jetului.

Rezultă că, la distanțe suficient de mari de ajutajul de ieșire a jetului și de punctul de desprindere a jetului, presiunea, deși mai mică decît cea atmosferică, rămîne totuși constantă de-a lungul traiectoriei, ceea ce nu reprezintă o condiție de desprindere.

În punctul de desprindere (care poate fi condiționat, de exemplu, de întreruperea bruscă a suprafeței cilindrului), presiunea pe ambele fețe ale jetului devine egală cu presiunea atmosferică, ceea ce arată că într-o regiune vecină, amonte, presiunea a fost crescătoare, creșterea suferită fiind în valoare absolută egală cu depresiunea ce se formează pe cilindru departe de desprindere și de începutul jetului. Or, această depresiune este cu atît mai mică, cu cît jetul este mai subțire (înălțimea coloanei cen-

[1]) Notă comunicată la Simpozionul despre efectul Coandă, București, iunie 1967, manifestare la care a participat însuși Henri Coandă.

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. (în limba franceză) **13**, 2 (1968).

trifugate) în raport cu raza cilindrului, ceea ce pune în lumină esența fenomenului.

De altfel distanța pe cilindru pe care presiunea este crescătoare este practic foarte mică de ordinul de mărime al grosimii jetului. În această vecinătate, nedezlipirea jetului se poate pune pe seama micimii variației presiunii și a eventualei turbulențe a jetului.

Remarcăm, de asemenea, că variații ale presiunii pot avea loc pe un cilindru oarecare corespunzător variației razelor de curbură a corpului de la un punct la altul.

Faptul că variații chiar bruște ale razei de curbură, ca, de exemplu, de la o rază infinită în ajutajul jetului pînă la o rază r a cilindrului, provoacă abateri ale parametrilor de scurgere față de valorile lor asimptotice, în amonte și în aval, numai pe un interval comparabil cu grosimea jetului poate fi arătat pe baza unei teorii liniare sau, mai riguros, pentru mișcările plane pe baza rezolvării unei probleme Kirchhoff cu linii libere. În acest sens s-au făcut unele lucrări teoretice [1], [2], [3].

2. Tot ce s-a spus a privit mișcarea plană care practic poate fi asigurată de plăci marginale care să împiedice „aerisirea" suprafeței cilindrului. Neexistența limitatoarelor marginale ar însemna dispariția depresiunii pe suprafață și deci imposibilitatea de menținere a fileurilor marginale în contact cu suprafața curbă. Aerisirea se propagă treptat de la margine către centru.

În această lucrare vrem că ne ocupăm în special de problema tridimensională a efectului. Tridimensionalitatea rezultă fie din cauza lipsei limitatoarelor, fie prin faptul că jetul inițial nu are o secțiune riguros dreptunghiulară, ci partea corespunzătoare suprafeței libere prezintă ondulații.

Teoria potențială poate furniza informații importante în legătură cu efectul Coandă și la mișcări Coandă tridimensionale. Este ceea ce ne propunem să facem mai jos.

Ecuațiile generale de mișcare în forma lui Helmholtz se scriu sub formă invariantă astfel:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v^\alpha v_\alpha) + v^j\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) = X_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{2.1}$$

într-un sistem de coordonate cu metrica oarecare

$$ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k . \tag{2.2}$$

Componentele covariante ale vitezei vor fi

$$v_i = v^\alpha g_{i\alpha} , \tag{2.3}$$

unde coeficienții g_{ik} sînt în general funcții de coordonatele x_i.

Vom considera aici suprafețe cilindrice pentru care se poate alege x_2 de-a lungul generatoarelor și metrica

$$g_{ik} = 0, i \neq k ; \; g_{11} = \left(1 + \frac{x_3}{r}\right)^2 ; \quad g_{22} = g_{33} = 1, \tag{2.4}$$

unde r este raza de curbură a secțiunii normale a suprafeței cilindrice.

Componentele covariante ale vitezei vor fi

$$v_i = v^i + w_i, \tag{2.5}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= v^1 (g_{11} - 1) \approx 2v^1 \frac{x_3}{r}, \\ w_2 &= w_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

Ținînd seama de formulele (2.5), (2.6) și de faptul că $\frac{x_3}{r}$ sînt cantități mici, astfel încît să se opereze unele aproximări, se obține în loc de (2.1)

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(v^\varkappa v^\varkappa) + v^j\left(\frac{\partial v^i}{\partial x_j} - \frac{\partial v^j}{\partial x_i}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + X^i + \mathcal{F}^i, \tag{2.7}$$

unde

$$\mathcal{F}^i \approx \left(0,\ 0,\ \frac{v_1^2}{r}\right), \tag{2.8}$$

ceea ce arată că ecuațiile de mișcare sînt aceleași ca într-un sistem de coordonate carteziene dacă interpretăm termenii $\mathcal{F}^i$ drept componentele unui cîmp de forțe (cîmpul centrifugal).

În ceea ce privește ecuația de continuitate, aceasta se va scrie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v^i\sqrt{g}) = 0, \tag{2.9}$$

unde g este determinantul coeficienților metrici, adică

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{x_3}{r}. \tag{2.10}$$

Dezvoltînd (2.9), avem

$$\frac{\partial v^i}{\partial x_i} = \left(v^1 \frac{x_3}{r^2} \cdot r'_x - \frac{v^3}{r}\right)\frac{1}{1 + \dfrac{x_3}{r}}. \tag{2.11}$$

Membrul al doilea poate fi considerat aproximativ nul dacă derivatele r'_x nu au valori mari.

În ceea ce privește condiția la limită pe suprafața liberă Σ, se știe că modulul vitezei V trebuie să fie constant dacă fluidul adiacent este în repaus și deci

$$v^\varkappa v_\varkappa = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 + 4v^1\frac{x_3}{r} = \text{const} = V^2. \tag{2.12}$$

Dacă mișcarea este astfel încît coordonatele x_3 să sufere variații mici, atunci

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \tag{2.13}$$

ar putea fi de asemenea considerată constantă.

În scopul unei mai bune justificări a aproximației, este preferabil ca în loc de suprafața de scurgere să se aleagă o suprafață de coordonate apropiată de suprafața liberă, astfel ca x_3 să fie suficienți de mici, de altfel ca și termenul $4v^1 \frac{x_3}{r}$ din (2.12). Dacă h este grosimea medie a pînzei de jet, s-ar putea alege noua suprafață de coordonate la distanța h de suprafața de scurgere Σ.

3. După cum se vede, scurgerea unui jet pe un cilindru este, în esență, analogă cu scurgerea jetului pe un plan, cu condiția de a ține seama de cîmpul de forțe centrifugal, perpendicular pe plan, și a cărui intensitate depinde de raza de curbură și de componenta v^1 a vitezei.

Componenta v^1 este necunoscută, dar în cazul canalelor limitate de plăci laterale paralele componentele v^2 și v^3 sînt mici în raport cu v^1, astfel că se poate considera $v^1 \approx V = \text{const}$ pe Σ.

Dacă, în plus, scurgerea se face pe un cilindru circular, conform celor de mai sus scurgerea este analogă cu scurgerea unui jet lichid pe fața inferioară a unui plan, avînd o viteză V' convenabilă.

Pentru a stabili relațiile de analogie, vom scrie ecuația de mișcare (2.7) astfel:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_i}(\bar{v}^\alpha \bar{v}^\alpha) + \bar{v}^j\left(\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{v}^j}{\partial \bar{x}_i}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\mathcal{F}}_i, \tag{3.1}$$

unde

$$\bar{v}^i = \frac{v^i}{V}; \quad \bar{x}_i = \frac{x_i}{l}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho V^2}; \quad \bar{\mathcal{F}}_i = \frac{\mathcal{F}_i\, l}{V^2}, \tag{3.2}$$

l fiind o lungime caracteristică (de exemplu grosimea inițială a jetului într-un punct al secțiunii de ieșire).

În ecuația (3.1) s-a presupus că nu există forțe reale de masă. Ecuația analogă ecuației (3.1) pentru determinarea mișcării jetului lichid pe sub un plan va fi identică, ca și mișcările respective, dacă ne aranjăm să alegem o astfel de viteză de scurgere V' pentru lichid încît să fie îndeplinite relațiile

$$\bar{\mathcal{F}}'_i = \bar{\mathcal{F}}_i, \tag{3.3}$$

adică

$$\frac{g'l'}{V'^2} = \frac{l\bar{v}'^2}{r}, \tag{3.4}$$

unde g' este accelerația gravitației.

În particular, dacă se ia $l' = l$,

$$V' = \frac{\sqrt{g'\bar{r}'}}{\bar{v}^1}. \tag{3.5}$$

4. Să considerăm problema scurgerii unui jet fluid pe un plan astfel încît vitezele v^2 și v^3 să fie mici în raport cu viteza v^1. Pentru a concretiza, fie un ajutaj cilindric, partea superioară nefiind plană, ci avînd un profil transversal oarecare. Evident, datorită mișcării uniforme a fluidului

ideal, fără greutate, peretele superior ondulat al ajutajului poate să lipsească de la o oarecare distanță mai departe.

Să presupunem că, începînd de la o anumită abscisă x_0, pînza de jet este supusă brusc unui cîmp de forțe vertical, în sensul de la fundul canalului spre suprafața liberă a jetului. Acest fapt corespunde, după cum s-a arătat, curbării canalului inițial rectiliniu prin care se scurge un jet gazos.

Apariția cîmpului de forțe $\overline{\mathcal{F}}$ dă naștere la vîrtejuri în jet. Acestea se pot calcula pe baza teoremei care afirmă că derivata substanțială în raport cu timpul a circulației în jurul unui contur fluid este egală cu circulația forței de cîmp în jurul aceluiași contur în momentul respectiv.

Alegînd convenabil linia închisă deformabilă și pe baza ipotezei că viteza v^1 este mult mai mare decît celelalte componente, se obține cu ușurință

$$\omega_2 = \frac{g}{v^1} = \frac{v^1}{r}, \tag{4.1}$$

unde prin ω_i însemnăm componentele rotorului pe axe.

Se constată de asemenea cu ușurință că

$$\omega_1 = \omega_3 = 0 \tag{4.2}$$

în interiorul pînzei de jet, deoarece s-a presupus că mișcarea jetului înainte de apariția cîmpului de forțe a fost rectiliniu și uniform, iar cîmpul de forță nu este de natură să modifice aceste componente.

În consecință, ω_2 va fi singura componentă a rotorului. Continuitatea fluxului de vîrtej cere însă ca liniile de vîrtej transversale (după y) să se termine pe pereții laterali sau, în cazul cînd ele intersectează supra-

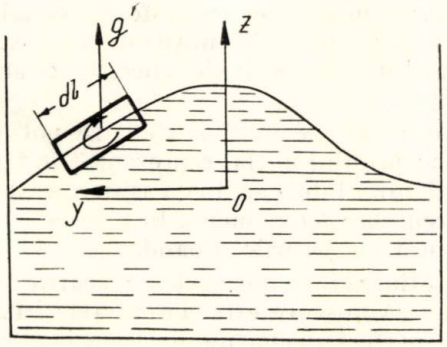


Fig. 4.1

fața liberă, să se continue înspre aval paralel cu curentul general (ω_1), la fel ca în teoria liniarizată a aripii de avion de anvergură finită. Cel mai simplu mod însă de a stabili relația pentru vîrtejurile axiale așternute pe suprafața liberă este de a aplica teorema variației circulației pe un contur ca în figura (4.1).

Dacă notăm prin ζ cota unui punct curent de pe suprafața liberă și adoptăm spre simplificare notația x, y, z în loc de x_1, x_2, x_3 și u, v, w

în loc de v^1, v^2, v^3, vom avea

$$g\frac{\partial\zeta}{\partial y}\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Omega \mathrm{d}s) = \mathrm{d}s\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}u + \frac{\partial\Omega}{\partial y}v\right), \tag{4.3}$$

unde prin Ω s-a notat circulația din jurul unității de lungime a liniei transversale a profilului suprafeței libere. Presupunînd mai departe panta $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ mică, putem lua $\mathrm{d}y \approx \mathrm{d}l$ și, neglijînd în derivata substanțială din paranteza din dreapta a ecuației (4.3) termenul înmulțit cu v, obținem relația

$$g\frac{\partial\zeta}{\partial y} = u\frac{\partial\Omega}{\partial x}. \tag{4.4}$$

Remarcăm acum că, la distanțe suficient de mari de abscisa de aplicare a forțelor, sistemul de vîrtejuri ω_2 nu induce, din motive de simetrie, viteze în planul yOz.

5. Vom regăsi relația (4.4) pe o altă cale.

În acest paragraf descriem o instalație simplă, realizată de N. Postelnicu, cu ajutorul căreia s-a putut pune în evidență caracterul jeturilor Coandă spațiale. Instalația se compune dintr-un rezervor comunicînd la partea inferioară cu un ajutaj care se continuă cu un canal inversat orizontal, din material plastic transparent.

Efectele capilare au fost prezente, dar nu au modificat în mod esențial fenomenul.

Pe fotografia din figura (5.1) se vede lateral analogul jetului Coandă bidimensional.

Jetul de apă rămîne în contact cu plafonul canalului pe o anumită distanță, cu excepția a două pelicule subțiri de apă, care se preling în jos pe pereții laterali datorită pierderii de energie în stratul-limită lateral și unor efecte capilare.

În fotografiile din figurile (5.2) și (5.3) se pot vedea lateral și de sus jetul de apă, avînd profilul inițial reprezentat în figura 5.4, și care pun în evidență tendința fluidului de a se dirija transversal către axa canalului unde jetul este mai greu. Acest fenomen a fost descris calitativ în lucrările [4], [5], [6] în legătură cu jeturile Coandă.

6. Mișcarea irotațională în jet. Dacă mișcarea în jet este irotațională, ceea ce înseamnă că mișcare este potențială și înainte de ieșirea jetului din ajutaj (fluid perfect), ecuațiile de bază pentru determinarea mișcării devin mai simple. Va fi suficient să se scrie că rotorul este nul și să se folosească ecuația de continuitate și, bineînțeles, condițiile la limită ale problemei.

În acest caz vom căuta să stabilim ecuațiile în coordonate curbilinii definite la începutul lucrării, fără a mai face analogia cu mișcarea pe un plan. Vom avea ecuațiile

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0, \tag{6.1}$$

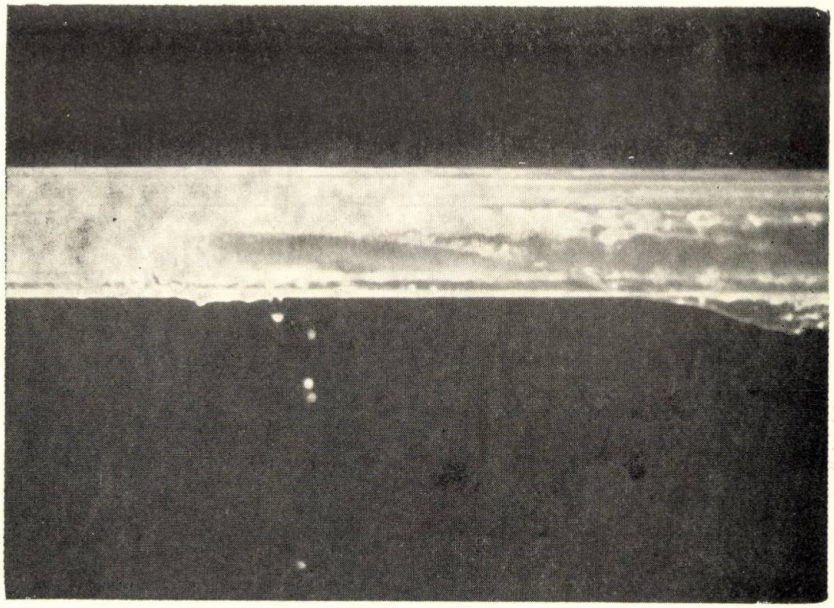


Fig. 5.1

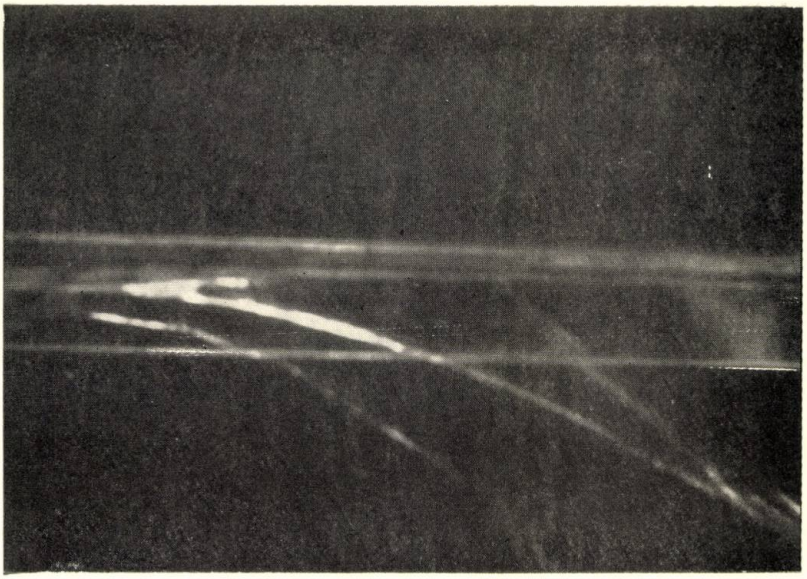


Fig. 5.2

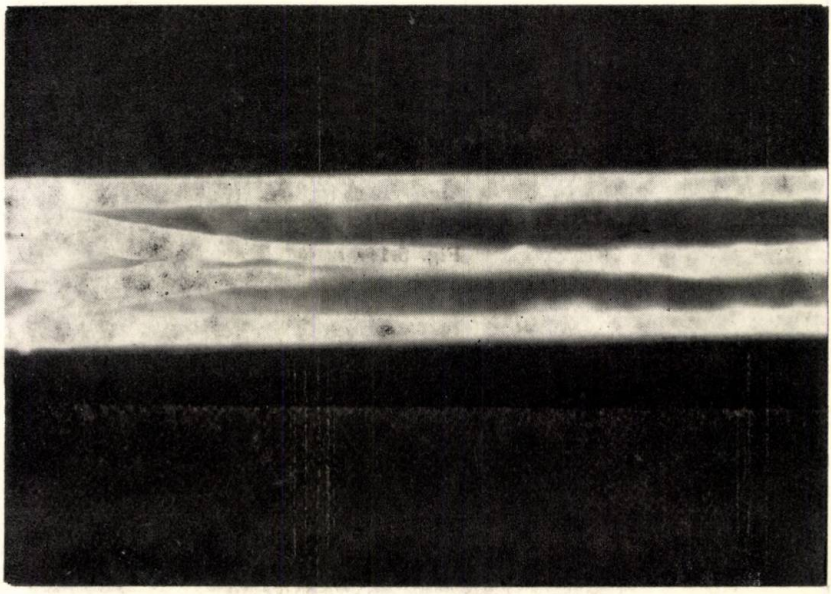


Fig. 5.3

unde v_i sînt componentele covariante ale vitezei, și ecuația continuității fluidului,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(v^i \sqrt{g}) = 0. \tag{6.2}$$

Ecuațiile (6.1) permit introducerea unui potențial al vitezelor $\varphi(x_i)$. Avem atunci

$$v^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} g^{\alpha i} \tag{6.3}$$

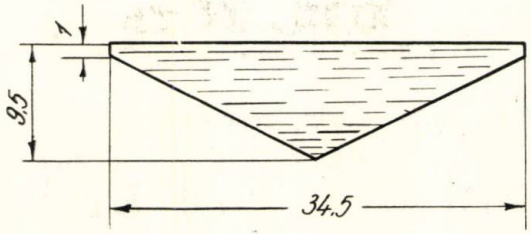


Fig. 5.4

și ecuația de continuitate (6.2) se scrie

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot g^{\alpha i} \sqrt{g}\right) = 0. \tag{6.4}$$

În afară de aceasta, φ trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = 0 \tag{6.5}$$

pe suprafața pe care se scurge jetul și

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{6.6}$$

pe anumiți pereți care limitează lateral jetul dacă acestea există. Pe suprafața liberă Σ, presupunînd că fluidul adiacent e în repaus, modulul vitezei în jet va fi constant, adică

$$v^i v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} g^{\alpha i} = \text{const} = V^2. \tag{6.7}$$

Din ecuațiile (6.4), (6.5), (6.6), (6.7) ar trebui să putem deduce mișcarea.

Dificultățile problemei constau în special în faptul că ecuația (6.7) nu e liniară, iar suprafața Σ nu e cunoscută apriori. Se pot face însă încercări de liniarizare, bazate, pe de o parte, pe faptul că 1) vitezele se abat puțin în modul de valoarea vitezei V și pe presupunerea 2) că jetul este subțire în raport cu razele de curbură ale suprafeței peste care se scurge.

Să ne ocupăm în cadrul aceleiași idei de cazul particular al suprafeței cilindrice circulare. Luăm pe suprafață coordonatele ca în prima parte a lucrării, adică abscisa curbilinie x se măsoară pe arcul de cerc al unei sec-

țiuni drepte a cilindrului, y după generatoare și z după normală. Avem atunci

$$\left.\begin{aligned} &g_{11}=\left(1+\frac{z}{r}\right)^2;\quad g_{22}=g_{33}=1,\\ &g_{ij}=0,\quad i\neq j,\\ &g^{11}=\frac{1}{\left(1+\frac{z}{r}\right)^2}\approx 1-\frac{2z}{r};\quad g^{22}=g^{33}=1;\quad g^{ij}=0,\ i\neq j,\\ &\sqrt{g}=1+\frac{z}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

Ecuațiile (6.4), (6.7) devin, respectiv

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(1-\frac{z}{r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(1+\frac{z}{r}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1+\frac{z}{r}\right)\right]=0, \tag{6.9}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\left(1-\frac{z}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=V^2. \tag{6.10}$$

Pentru liniarizare considerăm vitezele transversale (φ_y, φ_z) mici, așa încît vom pune în (6.10)

$$\varphi\ (x,\ y,\ z)=Vx+\ \Phi(x,\ y,\ z), \tag{6.11}$$

unde Φ este un potențial perturbator. Vom neglija în aceeași ecuație termenii de gradul al doilea în Φ, Φ_y, Φ_z și z. Vom avea

$$V\left(1-2\frac{z}{r}\right)+2\,\Phi_x=\text{const, pe }\Sigma, \tag{6.12}$$

sau

$$\Phi_x-V\frac{\zeta}{r}=\text{const, pe }\Sigma, \tag{6.12'}$$

ζ fiind cota unui punct al suprafeței libere. Vom scrie această ecuație sub o formă puțin diferită. În acest scop vom considera mișcarea aceleiași particule de pe Σ și, în particular, componenta sa verticală

$$\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t}=\Phi_z=(V+\Phi_x)\zeta_x+\Phi_y\zeta_y \tag{6.13}$$

și, presupunînd pantele ζ_x, ζ_y mici, vom înlocui ecuația (6.11) prin

$$\Phi_z=V\zeta_x. \tag{6.14}$$

Derivăm acum ecuația (6.12) în raport cu x și ținînd seama de (6.14), avem

$$\Phi_{xx}=\frac{1}{r}\Phi_z. \tag{6.15}$$

În plus se poate considera că această condiție (6.15) este în mod aproximativ îndeplinită la o cotă z constantă, așa încît, printr-o deplasare a originii, se poate scrie

$$\Phi_{xx} = \frac{1}{r}\,\Phi_z \text{ pentru } z = 0. \tag{6.16}$$

Tot în funcție de Φ, ecuația (6.7) se va scrie

$$\left(1 - \frac{z}{r}\right)\Phi_{xx} + \left(1 + \frac{z}{r}\right)\Phi_{yy} + \left(1 + \frac{z}{r}\right)\Phi_{zz} + \frac{\Phi_z}{r} = 0. \tag{6.17}$$

Vom arăta că termenii Φ_{xx} și $\frac{\Phi_z}{r}$ ar putea fi neglijați în raport cu ceilalți, ceea ce aduce ecuația la o formă și mai simplă.

Într-adevăr, să dezvoltăm potențialul perturbațiilor sub forma

$$\Phi = A + Bz + Cz^2 + \ldots, \tag{6.18}$$

unde A, B și C sînt funcții de x și y.

Datorită condiției (6.6) privind fundul canalului (la $z = -h$), avem

$$B - 2Ch = 0 \tag{6.19}$$

și deci

$$\Phi_z = 2C(h + z) + \ldots \tag{6.20}$$

și

$$\Phi = A + 2Chz + Cz^2 + \ldots \tag{6.21}$$

Pe de altă parte, pe baza ecuației (6.16) avem

$$A_{xx} = \frac{2Ch}{r}, \tag{6.22}$$

de unde se deduce că Φ_{xx} și $\frac{\Phi_z}{r}$ sînt de ordinul de mărime $C\frac{h}{r}$, în timp ce Φ_{zz} este de ordinul lui C.

În definitiv vom avea ecuațiile

$$\Phi_{yy} + \Phi_{zz} = 0, \tag{6.23}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ pe pereți},$$

$$\Phi_x - \frac{V\zeta}{r} = \text{const}, \quad z = 0, \tag{6.24}$$

sau, în loc de (6.24),

$$\Phi_{xx} = \frac{V}{r}\,\zeta_x = \frac{1}{r}\,\Phi_z, \quad z = 0, \tag{6.25}$$

$$\Phi_{xy} = \frac{V}{r}\,\zeta_y \quad , \quad z = 0. \tag{6.26}$$

În afară de acestea, pentru un anumit $x = x_0$ trebuie să se dea funcţiile

$$\zeta(x_0, y) = f_1(y), \tag{6.27}$$

$$\Phi_z(x_0, y, 0) = f_2(y). \tag{2.28}$$

7. Este uşor să ne dăm seama că ecuaţiile obţinute sînt echivalente cu schema turbionară dedusă în paragraful 4. Într-adevăr, derivata Φ_y este identică cu densitatea de vîrtej, în aşa fel încît ecuaţia (6.26) este echivalentă cu ecuaţia (4.4) $\left(\text{cu } g = \frac{V^2}{r} \text{ şi } u = V\right)$. Este uşor să ne asigurăm că ecuaţiile paragrafului 6 pot fi deduse din schema turbionară dată în paragraful 4 şi nu insistăm mai mult asupra acestui punct.

În vederea studierii mai concrete a caracterului evoluţiei profilului suprafeţei libere a pînzei de jet, vom deduce aici o soluţie particulară a lui Φ de forma

$$\Phi(x, y, z) = f(x) \cdot F(y, z). \tag{7.1}$$

Pentru determinarea funcţiei F avem ecuaţiile

$$F_{yy} + F_{zz} = 0. \tag{7.2}$$

Folosind ecuaţia (6.23) se deduce

$$\frac{1}{r} f(x) F_z = f''(x) F, \quad z = 0. \tag{7.3}$$

Luînd

$$f(x) = e^{\sigma x}, \tag{7.4}$$

din (7.3) se deduce

$$F_z = \sigma^2 r F. \tag{7.5}$$

Să luăm pentru F soluţia particulară

$$F = P(z) \sin(ky), \tag{7.6}$$

k fiind o constantă a cărei semnificaţie se va vedea ulterior.

Înlocuind în (7.2), obţinem că $P(z)$ trebuie să satisfacă ecuaţia

$$P'' - k^2 P = 0, \tag{7.7}$$

care are o soluţie de forma

$$P(z) = Ce^{kz}. \tag{7.8}$$

Soluţia e^{-kz} nu e acceptabilă fizic, deoarece ar însemna că perturbaţiile cresc spre fundul canalului.

Ţinînd seama de (7.6) şi (7.1), se deduce că o soluţie particulară este de forma

$$\Phi(x, y, z) = Ce^{kz} e^{\sigma x} \sin(ky), \tag{7.9}$$

iar din (7.5) rezultă

$$\sigma^2 = \frac{k}{r}, \tag{7.10}$$

așa încît

$$\Phi = Ce^{kz} \cdot e^{\sqrt{\frac{k}{r}} \cdot x} \cdot \sin(ky). \tag{7.11}$$

Din (6.25) scoatem evoluția denivelărilor:

$$\zeta = C\sqrt{kr} \cdot e^{\sqrt{\frac{k}{r}} \cdot x} \cdot \sin(ky). \tag{7.12}$$

După cum se vede, soluția particulară corespunde unui profil sinusoidal al denivelărilor. Se remarcă accentuarea exponențială a denivelărilor:

$$\frac{\zeta(x)}{\zeta(x_0)} = \exp\left\{\sqrt{\frac{k}{r}}(x - x_0)\right\}. \tag{7.13}$$

8. În cazul componentei v neneglijabile, previziunile teoretice trebuie să se bazeze pe o schemă turbionară mai generală decît aceea dată mai sus. Variația componentelor laterale v cu y face, pe de o parte, să nu mai fie constantă intensitatea cîmpului de forțe normal, iar pe de altă parte vîrtejurile libere axiale nu mai pot fi considerate paralele cu Ox. Variația cîmpului de forțe cu y face să existe vîrtejuri axiale și în interiorul jetului și nu numai pe suprafața liberă a sa.

Un caz particular interesant este acela al unui cîmp de viteze inițiale, tangente la planul analog de scurgere (vitezele u, v), cu aspect divergent. În acest caz, deoarece $u^2 + v^2$ este aproximativ constant (datorită constanței presiunii pe suprafața liberă), rezultă că pe aceeași paralelă la plan corespunzătoare unei generatoare a cilindrului, u scade cu y, și o dată cu pătratul componentei u scade și cîmpul de forțe. Acest fapt, aspectul divergent inițial al vitezelor și înclinarea vîrtejurilor axiale fac ca accentuarea în aval a denivelărilor să fie mult mai moderată.

În acest fel se explică faptul că se reușește devierea suflului unei elice cu un unghi aproape de 90° cu ajutorul unei aripi curbate de anvergură suficient de mare. Într-adevăr, datorită bordului de atac presupus rotunjit și de curbură finită, jetul se răspîndește în eventai în felul menționat mai sus (este clar că există fileuri care au chiar direcția unei generatoare a bordului de atac). Aceasta face ca jetul să nu se concentreze pe extrados către partea jetului de grosime maximă decît suficient de lent, ceea ce permite ca impulsul total al părții de jet de pe extrados să-și schimbe suficient de mult direcția.

Primită la redacție la 18 noiembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. R. A. Metral, *Sur un phénomène de déviation des veines fluides et ses applications. Effet Coanda*, Cabinet Technique du Ministère de l'Air, nov. 1938.

2. Th. E. Labrujere f. P. 5. Zanbergen, *Potential theoretical description of the flow in a jet deflected by a circular cylinder Coanda effect*, National Aero- and Astronautical Research Institute, Amsterdam, **23**, 7 (1962).

3. N. N. Patraulea, *Studii de aerodinamica hipersustentației*, Edit. Academiei R.P.R., 1962, p. 532.

4. W.E.B. Roderick, *Use of the Coanda effect for the deflection of jet sheets over smoothly curved surfaces*, Part. II, *Some Tesths with Supersonic. Over and under Expanded Jet Sheets*, UTIA TECHNICAL Note Nr. 51, sept. 1961, Institute of Aerophysics. University of Toronto.

5. A. Fernholz, *Zur Umlenkung von Freistrahlen an convex gekrümmten Wänden (Coanda-Effekt)*, Deutsche Luft und Raumfahrt, F.B. 66–21 (1966).

6. H. H. Fernholz, *Aerodynamische Hysterese, Steurschneiden und Reynolds Zahl-Einfluss bei der Strömungsumlenkung und Ablösung an stark gekrümmten Wänden (Coanda-Effekt)*, Zeitschrift für Flugwissenschaften, *4* (1967).

UNELE CONTRIBUȚII LA STUDIUL CURGERII GAZELOR PRIN CANALELE CU FANTE TRANSVERSALE

de E. MOISEI

În lucrare se prezintă o metodă de calcul a parametrilor scurgerii fluidului, sub formă de jeturi subțiri, prin fante longitudinale și transversale, practicate în pereții canalelor cu extremitatea din aval închisă.
Analiza curgerii prin canal se face în ipoteza mișcării irotaționale, axial-simetrică, și a fluidului incompresibil.
Comparativ cu studiile dezvoltate de Laakso și Taliev, valabile exclusiv pentru scurgerea prin fante longitudinale, metoda de calcul expusă se aplică scurgerii prin fante transversale, utilizate în construcția amortizoarelor de zgomote gazodinamice.
Se prezintă de asemenea un nou tip de uniformizator a debitului de fluid ce se scurge prin fantele transversale.
Cercetările experimentale efectuate pentru canalele cu fante transversale, cu și fără uniformizator de debit, au scos în evidență concordanța dintre această teorie și rezultatele practice.

1. INTRODUCERE

O dată cu efectuarea cercetărilor asupra unui nou principiu de reversare a tracțiunii motoarelor aeroreactive prin aplicarea efectului Coandă [17] a apărut noul tip de canal cu fante transversale. Ulterior, după realizarea primului amortizor de zgomot cu fante transversale și voleți depresivi [18], aceste tipuri de canale au început să capete o aplicație din ce în ce mai largă, fiind întîlnite în unități și uzine de aviație, în industria chimică și la termocentrale. Viitorul le deschide mari perspective de a fi utilizate în instalațiile de ventilație din industria siderurgică, în industria automobilistică etc.

Pînă în prezent s-au efectuat numeroase cercetări asupra curgerii prin canale cu fante longitudinale, care au căpătat o largă extindere la instalațiile de ventilație și încălzire ca distribuitoare sau colectoare de aer.

În cele ce urmează ne vom ocupa exclusiv de studiul curgerii prin canalele cu fante transversale, plecînd, totuși, de la teoria curgerii prin

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl. (în limba engleză) **13**, *2* (1968)

canalele cu fante longitudinale, care a fost verificată experimental de numeroşi cercetători.

În cazul amortizoarelor de zgomote gazodinamice, o deosebită importanţă o are cunoaşterea corelaţiilor dintre:

— parametrii geometrici şi gazodinamici;
— parametrii geometrici şi acustici;
— parametrii gazodinamici şi acustici.

În această lucrare vom încerca să stabilim corelaţia dintre parametrii geometrici ai canalului şi parametrii gazodinamici ai scurgerii prin fante.

2. NOTAŢII

A_x, A_L — aria transversală a canalului în secţiunile x şi $x = L$;
P_x, P_L — perimetrul canalului în secţiunile x şi $x = L$;
D_x, D_L — diametrul canalului, în secţiunile x şi $x = L$;
A_{ux} — aria transversală a uniformizatorului de debit, în secţiunea x;
D_{ux} — diametrul uniformizatorului de debit, în secţiunea x;
L — lungimea fantei longitudinale; distanţe dintre prima şi ultima fantă transversală;
x — un punct curent de pe axa de simetrie a canalului;
δ_x, δ_L — lăţimea fantei longitudinale, în secţiunile x şi $x = L$;
Θ_x, Θ_L — unghiul de înclinare a peretelui canalului faţă de axa de simetrie a acestuia în secţiunile x şi $x = L$;
δ_{tx}, δ_{tL} — lăţimea fantei transversale, în secţiunile x şi $x = L$;
l_{tx}, l_{tL} — lungimea fantei transversale, în secţiunile x şi $x = L$;
b_x, b_L — lăţimea panoului ce desparte două fante adiacente, în secţiunile x şi $x = L$;
n_x — numărul de fante transversale pînă în secţiunea x;
n_L — numărul total de fante transversale;
Q_x, Q_L — debitul volumetric de fluid ce curge prin canal, în secţiunile x şi $x = L$;
V_x, V_L — viteza medie de curgere prin canal, în secţiunile x şi $x = L$;
v_x, v_L — viteza medie de scurgere prin fanta longitudinală, în secţiunile x şi $x = L$;
v_{tx}, v_{tL} — viteza medie de scurgere prin fanta transversală în secţiunile x şi $x = L$;
ρ_x, ρ_L — densitatea fluidului în secţiunile x şi $x = L$;
p_x — presiunea statică din interiorul canalului în secţiunea x;
p_a — presiunea mediului ambiant;
p_f — pierderea de presiune prin frecare;
μ — coeficientul de scurgere;
λ — coeficientul de frecare.

3. ECUAŢIA GENERALĂ DE CURGERE PRIN CANALUL CU FANTĂ LONGITUDINALĂ

Considerăm un canal închis la extremitatea din aval şi prevăzut cu o fantă longitudinală (fig. 1) prin care curge un fluid de debit Q_x şi viteză V_x.

Prin închiderea canalului la extremitatea din aval, fluidul se va scurge prin fanta longitudinală cu viteza v_x, putînd fi asimilată cu o dîră continuă de surse negative, ale căror debite sînt variabile în lungul canalului.

Considerăm axa de simetrie a canalului ca axă de referinţă cu originea în planul de închidere a extremităţii din amonte a acestuia.

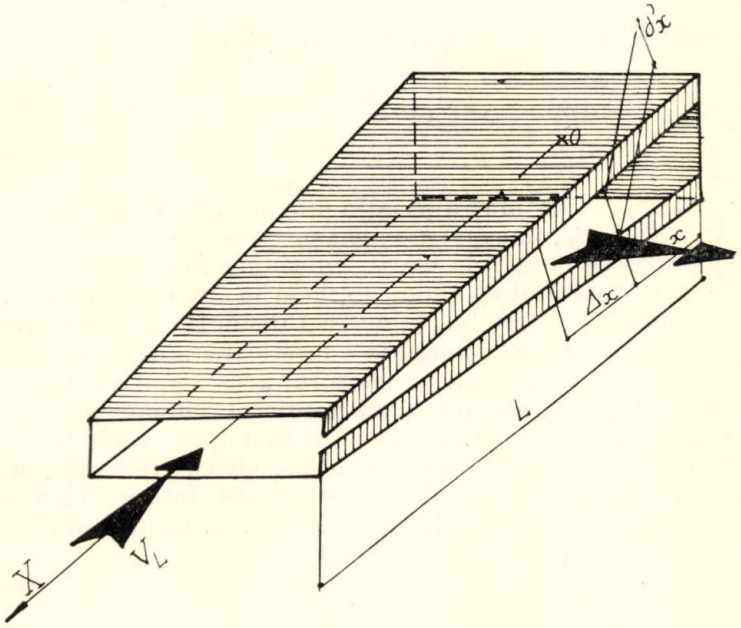


Fig. 1

Presupunem mişcarea permanentă, iar cîmpurile de viteză şi de presiune constante în secţiune

Scriind ecuaţia lui Bernoulli în secţiunea $x = 0$ şi în secţiunea x la distanţa Δx de originea axei, după V. N. Taliev [16] se obţine relaţia

$$\Delta p_x + \frac{\rho_x}{2} V_x^2 = \Delta p_a + \Delta p_f, \tag{1}$$

unde

$$\Delta p_x = p_x - p_a,$$

$$\Delta p_a = p_0 - p_a,$$

Δp_f este pierderea de presiune prin frecare pe porţiunea Δx.

Derivînd ecuaţia (1) în raport cu x şi exprimînd-o sub formă adimensională, se obţine

$$\frac{\mathrm{d}\overline{p}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} + \frac{1}{2} \frac{\rho_L V_L^2}{L\, p_a} \overline{V}_x^2 \frac{\mathrm{d}\overline{\rho}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} + \frac{\rho_L V_L^2}{p_a} \overline{\rho}_x \overline{V}_x \frac{\mathrm{d}\overline{V}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} - \frac{\mathrm{d}\overline{p}_f}{\mathrm{d}\overline{x}} = 0, \tag{2}$$

unde

$$\overline{p}_x = \frac{p_x - p_a}{p_a}; \quad \overline{V}_x = \frac{V_x}{V_L}; \quad \overline{x} = \frac{x}{L},$$

$$\overline{p}_f = \frac{p_f}{p_a}; \quad \overline{\rho}_x = \frac{\rho_x}{\rho_L}.$$

Presupunînd densitatea constantă în lungul canalului, ecuaţia (2) devine

$$\frac{d\overline{p}_x}{d\overline{x}} + \frac{\rho V_L^2}{p_a} \overline{V}_x \frac{d\overline{V}_x}{d\overline{x}} - \frac{d\overline{p}_f}{d\overline{x}} = 0. \tag{3}$$

Prin urmare, s-a obţinut o ecuaţie diferenţială liniară, avînd ca variabile pe $\overline{V}_x$, $\overline{p}_x$ şi $\overline{p}_f$, dependente atît între ele, cît şi de debitul volumetric al fluidului ce curg prin canal. Înlocuind fiecare variabilă cu expresia ei funcţie de debitul de fluid, obţinem în final o ecuaţie în debite.

În secţiunea x a canalului, la aceeaşi distanţă Δx de originea axei de referinţă, acţionează pe suprafaţa interioară a canalului presiunea statică p_x, presupusă constantă pe conturul acestuia. Pe suprafaţa exterioară a canalului acţionează presiunea mediului ambiant p_a, considerată şi aceasta constantă pe contur. În dreptul fantei, în cazul cînd cele două presiuni sînt diferite, are loc o scurgere a gazelor cu viteza v_x din interior spre exterior cînd $p_x > p_a$ sau din exterior spre interior cînd $p_x < p_a$.

Scriind ecuaţia lui Bernoulli în secţiunea x şi ţinînd cont că scurgerea are loc printr-o fantă îngustă, rezultă

$$\Delta p_x = \frac{\rho}{2\mu^2} v_x^2. \tag{4}$$

Prin elementul de fantă Δx se scurge un debit ΔQ_x cu viteza v_x. Exprimînd pe v_x funcţie de ΔQ_x şi trecînd la limită, obţinem

$$v_x = \frac{\cos \Theta_x}{\delta x} \frac{dQ_x}{dx}. \tag{5}$$

Derivînd relaţia (4) în raport cu x şi înlocuind pe v_x cu expresia din (5), avem

$$\frac{dp_x}{dx} = \frac{\rho \cos^2 \Theta_x}{\mu^2 \delta_x^2} \left[\frac{d^2 Q_x}{dx^2} - \left(\frac{d\Theta_x}{dx} \operatorname{tg} \Theta_x + \frac{1}{\delta_x} \frac{d\delta_x}{dx} \right) \frac{dQ_x}{dx} \right] \frac{dQ_x}{dx},$$

care, exprimată sub formă adimensională, devine

$$\frac{d\overline{p}_x}{d\overline{x}} = \frac{\rho_L Q_L^2}{\mu^2 \delta_L^2 L^2 p_a} \cdot \frac{\cos^2 \Theta_x}{\overline{\delta}_x^2} \left[\frac{d^2 \overline{Q}_x}{d\overline{x}^2} - \left(\frac{d\Theta_x}{d\overline{x}} \operatorname{tg} \Theta_x + \right. \right.$$
$$\left. \left. + \frac{1}{\overline{\delta}_x} \frac{d\overline{\delta}_x}{d\overline{x}} \right) \frac{d\overline{Q}_x}{d\overline{x}} \right] \frac{d\overline{Q}_x}{d\overline{x}}, \tag{6}$$

unde

$$\overline{Q}_x = \frac{Q_x}{Q_L}; \quad \overline{\delta}_x = \frac{\delta_x}{\delta_L}.$$

Pentru a exprima pe $\overline{V}_x$ funcție de $\overline{Q}_x$, scriem debitul ce curge prin canal în secțiunea x;

$$Q_x = V_x A_x.$$

Exprimată sub formă adimensională, această relație devine

$$\overline{V}_x = \frac{\overline{Q}_x}{\overline{A}_x}, \tag{7}$$

unde

$$\overline{A}_x = \frac{A_x}{A_L}.$$

În final se exprimă pierderea de presiune prin frecare funcție de debitul Q_x prin intermediul vitezei de curgere prin canal V_x, avînd

$$p_f = \int \frac{\lambda}{4} \frac{\rho}{2} V_x^2 \frac{\mathrm{d}S_x}{A_x}. \tag{8}$$

Înlocuind în (8) elementul de suprafață $\mathrm{d}S_x$ cu $P_x \mathrm{d}x$ și derivînd expresia respectivă în raport cu x, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}p_f}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda}{4} \frac{\rho}{2} V_x^2 \frac{P_x}{A_x},$$

care, scrisă sub formă adimensională, devine

$$\frac{\mathrm{d}\overline{p}_f}{\mathrm{d}\overline{x}} = \frac{\rho\lambda}{2p_a} V_L^2 \overline{L}_x \frac{\overline{Q}_x^2}{\overline{A}_x^3}, \tag{9}$$

unde

$$\overline{L}_x = \frac{LP_x}{4A_L}.$$

Introducînd expresiile (6), (7) și (9) în (3), obținem

$$\frac{\mathrm{d}^2\overline{Q}_x}{\mathrm{d}\overline{x}^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{Q}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} - \left(\frac{\mathrm{d}\Theta_x}{\mathrm{d}\overline{x}} \operatorname{tg}\Theta_x + \frac{1}{\overline{\delta}_x} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{\delta}_x}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)\left(\frac{\mathrm{d}\overline{Q}_x}{\mathrm{d}\overline{x}}\right)^2 + \\ + \frac{\alpha^2\overline{\delta}_x^2}{\overline{A}_x^2 \cos^2\Theta_x} \frac{\mathrm{d}\overline{Q}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} \overline{Q}_x - \frac{\alpha^2\overline{\delta}_x^2}{\overline{A}_y^3 \cos^2\Theta_x}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{A}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} + \frac{\lambda}{2}\overline{L}_x\right)\overline{Q}_x^2 = 0, \tag{10}$$

unde

$$\alpha = \frac{\mu\delta_L L}{A_L}.$$

Prin urmare, s-a obținut o ecuație diferențială adimensională, exprimată sub o formă mai generală decît cele cunoscute [1], [4], [7], [16].

4. ECUAȚIA DE CURGERE A GAZELOR PRIN CANALUL CU FANTE TRANSVERSALE

Spre deosebire de canalul cu fante longitudinale, acesta este format din mai multe fante transversale (fig. 2), conținute în plane normale pe axa canalului. Prin urmare, nu vom mai avea surse continue, ci surse discrete de debit q_x cu valori diferite în lungul axei x.

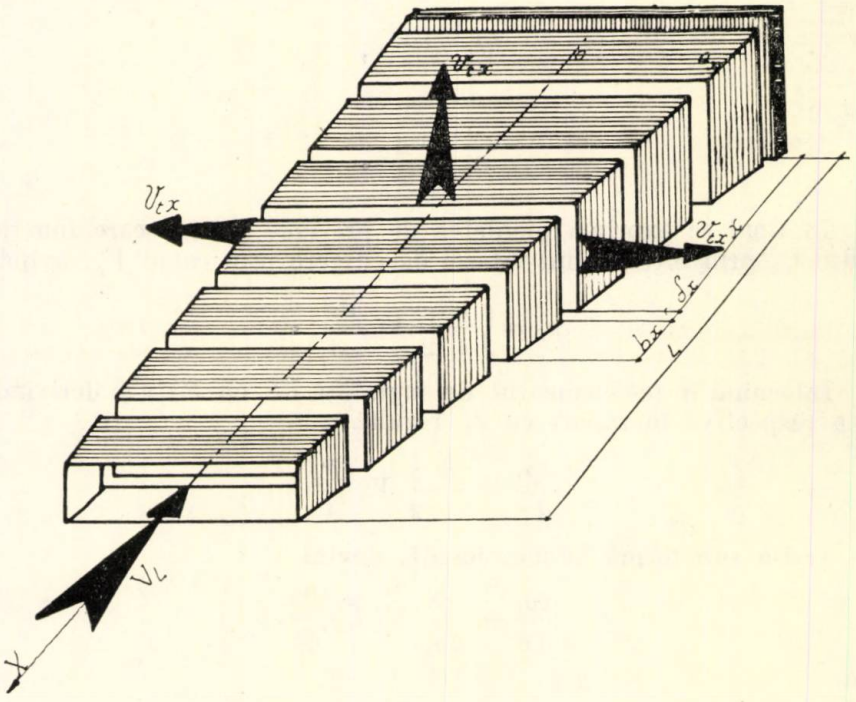


Fig. 2

În prezenta lucrare urmărim o estimare globală a fenomenului de scurgere prin fante transversale și ne interesează mai puțin aspectele aerodinamice locale. Pentru aceasta, avînd în vedere lungimea mare a canalului și a distanței mici dintre fante, putem presupune că debitul fantelor transversale variază aproximativ continuu în lungul axei x, ipoteză care, așa cum se va vedea mai tîrziu, conduce la o bună concordanță între rezultatele teoretice și cele experimentale.

În consecință, putem utiliza ecuația diferențială (10) stabilită pentru scurgerea prin fante longitudinale, în care însă, în locul parametrilor geometrici ai fantei longitudinale, îi vom introduce pe ai fantelor transversale.

Pentru stabilirea corelației dintre parametrii geometrici ai fantei longitudinale și transversale, scriem că debitul de aer ce se scurge prin

fanta longitudinală pe o porțiune $b_x + \delta_{tx}$ este egal cu debitul ce se scurge prin fanta transversală de lățime δ_{tx},

$$\int_0^{b_x+\delta_{tx}} \frac{\delta_x v_x}{\cos\Theta_x} \mathrm{d}x = \delta_{tx} l_{tx} v_{tx}, \tag{11}$$

unde am presupus că lățimea δ_{tx} a fantei transversale este constantă pe contur și că are loc o curgere simetrică, deci și v_{tx} este constant pe contur.

De asemenea, avînd în vedere că lățimea δ_{tx} a fantei transversale este mică, am considerat viteza de scurgere v_{tx} constantă pe toată lățimea acesteia.

Întrucît b_x și δ_{tx} sînt mici în comparație cu lungimea L a canalului, presupunem că lățimea δ_x a fantei longitudinale, viteza v_x de scurgere prin această fantă și unghiul Θ_x sînt constante pe această porțiune.

În acest caz, relația (11) devine

$$\frac{v_x \delta_x}{\cos\Theta_x}(b_x + \delta_{tx}) = \delta_{tx} l_{tx} v_{tx}.$$

În afară de ipotezele de mai sus, mai punem condiția ca să avem și $v_{tx} = v_x$, astfel că se obține în final o relație între parametrii geometrici ai canalelor cu fante longitudinale și transversale exprimată sub forma

$$\frac{\delta_x}{\cos\Theta_x}(b_x + \delta_{tx}) = \delta_{tx} l_{tx},$$

din care rezultă

$$\delta_x = \frac{\delta_{tx} l_{tx}}{b_x + \delta_{tx}} \cos\Theta_x. \tag{12}$$

Exprimînd relația (12) adimensional, avem

$$\bar{\delta}_x = \frac{\bar{\delta}_{tx} \bar{l}_{tx}}{\frac{\delta_L}{l_{tL}}\left(\frac{b_L}{\delta_{tL}} \bar{b}_x + \bar{\delta}_{tx}\right)} \cos\Theta_x, \tag{13}$$

unde

$$\bar{\delta}_{tx} = \frac{\delta_{tx}}{\delta_{tL}}; \quad \bar{l}_{tx} = \frac{l_{tx}}{l_{tL}}; \quad \bar{b}_x = \frac{b_x}{b_L}.$$

Introducînd această mărime în relația (10), obținem ecuația curgerii prin canalul cu fante transversale:

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{Q}_x}{\mathrm{d}\bar{x}^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{Q}_x}{\mathrm{d}\bar{x}} + \varphi_1(\bar{x})\left(\frac{\mathrm{d}\bar{Q}_x}{\mathrm{d}\bar{x}}\right)^2 + \varphi_2(\bar{x}) \frac{\mathrm{d}\bar{Q}_x}{\mathrm{d}\bar{x}} \bar{Q}_x + \varphi_3(\bar{x})\bar{Q}_x^2 = 0, \tag{14}$$

unde

$$\varphi_1(\overline{x}) = -\left(\frac{1}{\overline{\delta}_{tx}}\cdot\frac{\mathrm{d}\overline{\delta}_{tx}}{\mathrm{d}\overline{x}} + \frac{1}{\overline{l}_{tx}}\frac{\mathrm{d}\overline{l}_{tx}}{\mathrm{d}\overline{x}} - \frac{\dfrac{\mathrm{d}\overline{b}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} + \eta\dfrac{\mathrm{d}\overline{\delta}_{tx}}{\mathrm{d}\overline{x}}}{\overline{b}_x + \eta\overline{\delta}_{tx}}\right),$$

$$\varphi_2(\overline{x}) = \frac{\mu^2 L^2 l_{tL}^2}{A_L^2}\cdot\frac{\overline{\delta}_{tx}^2\,\overline{l}_{tx}^2}{\left(\dfrac{1}{\eta}\,\overline{b}_x + \overline{\delta}_{tx}\right)^2\overline{A}_x^2},$$

$$\varphi_3(\overline{x}) = -\frac{\mu^2 L^2 l_{tL}^2}{A_L^2}\cdot\frac{\overline{\delta}_{tx}^2\,l_{tx}^2}{\left(\dfrac{1}{\eta}\,\overline{b}_x + \overline{\delta}_{tx}\right)^2\overline{A}_x^3}\left(\frac{\mathrm{d}\overline{A}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} + \frac{\lambda}{2}\,\overline{L}_x\right),$$

în care s-a notat $\dfrac{\delta_{tL}}{b_L} = \eta$.

Din expresiile coeficienților se constată că aceștia nu depind direct de unghiul Θ_x, ci prin intermediul lungimii l_{tx} a fantei și aria A_x a secțiunii transversale.

Din considerații tehnologice, lățimea fantelor și distanța dintre acestea pot fi considerate constante.

În acest caz, $\overline{\delta}_{tx} = \overline{b}_x = 1$, iar coeficienții ecuației (14) devin

$$\varphi_1(\overline{x}) = -\frac{1}{l_{tx}}\frac{\mathrm{d}\overline{l}_x}{\mathrm{d}\overline{x}},$$

$$\varphi_2(\overline{x}) = \beta^2\frac{\overline{l}_{tx}^2}{A_x^2},$$

$$\varphi_3(\overline{x}) = -\beta^2\frac{\overline{l}_{tx}^2}{A_x^3}\left(\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}\overline{x}} + \frac{\lambda}{2}\,\overline{L}_x\right),$$

unde

$$\beta = \frac{\mu\eta L l_{tL}}{(1+\eta)A_L}.$$

Prin urmare, rezolvarea ecuației este mult simplificată, reducîndu-se în esență, la cunoașterea variației lungimii l_{tx} a fantelor și a ariei A_x a secțiunii transversale funcție de x.

5. CÎTEVA CAZURI PARTICULARE

Formele cele mai utilizate de canale cu fante transversale pentru amortizarea zgomotelor gazodinamice sînt: tronconice (convergente sau divergente), cilindrice și prismatice.

5.1. CANALELE TRONCONICE CU FANTE TRANSVERSALE

Exprimînd pe $\bar{l}_{tx}$, $\overline{A}_x$ și $\overline{L}_x$ pentru canalele tronconice, avem

$$\bar{l}_{tx} = 1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L,$$

$$\overline{A}_x = (1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^2,$$

$$\overline{L}_x = \frac{1}{2}\gamma(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L),$$

unde

$$\gamma = 2\frac{L}{D_L}.$$

Semnul + este pentru canalele convergente, iar semnul — pentru cele divergente.

Introducînd aceste relații în expresiile coeficienților $\varphi_1(\bar{x})$, $\varphi_2(\bar{x})$ și $\varphi_2(\bar{x})$, ecuația (14) devine

$$\frac{d^2\overline{Q}_x}{d\bar{x}^2} \cdot \frac{d\overline{Q}_x}{d\bar{x}} - \frac{(\pm)\gamma \operatorname{tg} \Theta_L}{1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L}\left(\frac{d\overline{Q}_x}{d\bar{x}}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\beta^2}{(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^2} \frac{d\overline{Q}_x}{d\bar{x}} \overline{Q}_x - \frac{2\gamma\beta^2}{(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^3}\left(\frac{\lambda}{8} \pm \operatorname{tg} \Theta_L\right) \overline{Q}_x^2 = 0. \quad (15)$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$\overline{Q}_x = C_1(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^{r_1} + C_2(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^{r_2} + C_3(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^{r_3}, \quad (16)$$

unde r_1, r_2 și r_3 sînt rădăcinile ecuației caracteristice rezultate din condiția ca

$$\overline{Q}_x = (1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^r$$

să fie o soluție a ecuației (15).

Constantele de integrare C_1, C_2 și C_3 se determină din condițiile-limită.

Cunoscîndu-se expresia debitului ce curge prin canal, se poate determina cu ușurință și expresia vitezei de scurgere prin fante.

Cu ajutorul relațiilor (5), (13) și (16) se obține

$$\bar{v}_{tx} = \pm \frac{\gamma(b_L + \delta_{tL})\operatorname{tg} \Theta_L}{L}[C_1r_1(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^{r_1-2} + C_2r_2(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^{r_2-2} +$$

$$+ C_3r_3(1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)^{r_3-2}] \sum_0^1 (1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L), \quad (17)$$

unde

$$\bar{v}_{tx} = \frac{v_{tx}}{v_{med}}; \qquad v_{med} = \frac{Q_L}{\delta_{tL} l_{tL} \sum_0^1 (1 \pm \gamma\bar{x} \operatorname{tg} \Theta_L)}.$$

Întrucît practic mărimea vitezelor de scurgere a fluidului are sens numai în dreptul fantelor, putem reveni la valoarea ei discretă înlocuind $\overline{x}$ cu $\overline{n}_x$, unde

$$\overline{n}_x = \frac{n_x}{n_L}.$$

5.2. CANALE CILINDRICE SAU PRISMATICE CU FANTE TRANSVERSALE

Datorită unei construcții simple, aceste tipuri de canale au căpătat o largă aplicare.

Menținînd ipotezele făcute la canalul tronconic și avînd în vedere că $\Theta = 0$, se poate deduce ușor ecuația curgerii prin acest tip de canal din ecuația (15), obținînd

$$\frac{d^2\overline{Q}_x}{d\overline{x}^2}\frac{d\overline{Q}_x}{d\overline{x}} + \beta\frac{d\overline{Q}_x}{d\overline{x}}\overline{Q}_x - \frac{1}{4}\lambda\gamma\beta^2\overline{Q}_x^2 = 0. \tag{18}$$

Soluția generală a acestei ecuații este

$$\overline{Q}_x = C_1 e^{r_1\overline{x}} + C_2 e^{r_2\overline{x}} + C_3 e^{r_3\overline{x}}. \tag{19}$$

Viteza de scurgere prin fante este dată de relația

$$\overline{v}_{tx} = (C_1 r_1 e^{r_1\overline{n}_x} + C_2 r_2 e^{r_2\overline{n}_x} + C_3 r_3 e^{r_3\overline{n}_x}). \tag{20}$$

Admițînd ipoteza propusă de diverși autori [1], [16] că în cazul canalelor cu diametru mare se poate neglija pierderea de presiune prin frecare, ecuația (18) devine

$$\frac{d^2\overline{Q}_x}{d\overline{x}^2} + \beta^2\overline{Q}_x = 0, \tag{21}$$

a cărei soluție generală este

$$\overline{Q}_x = C_1 e^{i\beta\overline{x}} + C_2 e^{-i\beta\overline{x}}. \tag{22}$$

Punînd condițiile ca pentru

$$\overline{x} = 0 \rightarrow \overline{Q}_x = 0,$$

$$\overline{x} = 1 \rightarrow \overline{Q}_x = 1,$$

rezultă

$$\overline{Q}_x = \frac{\sin\mu\overline{f}\overline{x}}{\sin\mu\overline{f}}, \tag{23}$$

unde s-a notat

$$\overline{f} = \frac{n_L\delta_{tL}l_{tL}}{A_L}.$$

Viteza de scurgere prin fante este dată de relația

$$\overline{v}_{tx} = \mu\overline{f}\frac{\cos\mu\overline{f}\overline{n}_x}{\sin\mu\overline{f}}, \tag{24}$$

regăsind astfel expresiile stabilite în [1], [5], [7], [16] pentru canalele cu fante longitudinale.

În unele cazuri se impune ca o parte din debitul de fluid să fie scurs prin niște fante frontale, practicate în capacul de închidere al canalului. În acest caz, condițiile limită se schimbă , devenind pentru

$$\bar{x} = 0 \rightarrow \bar{Q}_x = k,$$
$$\bar{x} = 1 \rightarrow \bar{Q}_x = 1,$$

unde $k < 1$ este raportul dintre debitul ce se scurge prin fantele frontale și debitul care intră în canal.

Determinînd constantele de integrare C_1 și C_2, relațiile (23) și (24) devin

$$\bar{Q}_x = \frac{1}{\sin \mu\bar{f}} [\sin \mu\bar{f}\bar{x} + k \sin \mu\bar{f}(1 - \bar{x})], \tag{25}$$

$$\bar{v}_{tx} = \frac{\mu\bar{f}}{\sin \mu\bar{f}} [\cos \mu\bar{f}\bar{n}_x - k \cos \mu\bar{f}(1 - \bar{n}_x)] \tag{26}$$

Analizînd relația (24), constatăm că pentru $\bar{n}_x = \frac{1}{n_L}$ și $\bar{n}_x = 1$ vitezele de scurgere raportate, corespunzătoare primei și ultimei fante, sînt date de relațiile

$$\bar{v}_{t1} = \mu\bar{f} \frac{\cos \frac{\mu\bar{f}}{n_L}}{\sin \mu\bar{f}},$$

$$\bar{v}_{tn_L} = \mu\bar{f} \frac{\cos \mu\bar{f}}{\sin \mu\bar{f}}.$$

Prin urmare, vitezele de scurgere prin fante sînt diferite în lungul canalului, fiind maximă în prima fantă și minimă în ultima.

În figura 3 se prezintă variația vitezei raportate $\bar{v}_{tx}$ de scurgere prin fante în funcție de distanța raportată $\bar{x}$ pentru diverse valori ale produsului $\mu\bar{f}$.

Din aceste diagrame se constată că pentru $\mu\bar{f} = 0$ viteza de scurgere este aceeași prin toate fantele. Această condiție-limită poate fi satisfăcută numai în cazul canalelor închise la extremitatea din aval și fără fante, ceea ce practic nu prezintă interes.

Pe măsură ce produsul $\mu\bar{f}$ crește, are loc și o creștere a vitezelor de scurgere prin fantele din porțiunea închisă a canalelor, iar vitezele de scurgere prin fantele din apropierea secțiunii de intrare a fluidului încep să scadă, astfel că pentru $\mu\bar{f} = 1{,}57$ viteza de scurgere prin ultima fantă devine nulă. Pentru valori mai mici de 1,57, vitezele de scurgere prin ultimele fante devin negative.

Prin urmare, un rol foarte mare în repartiția vitezelor de scurgere prin fante îl joacă produsul $\mu\bar{f}$, pe care îl vom numi „factor de repartiție".

Concluziile trase asupra repartiției vitezelor de scurgere prin fante funcție de valoarea factorului de repartiție sînt foarte importante pentru construcția amortizoarelor de zgomot care echipează motoarele aeroreac-

tive sau sursele similare de zgomote gazodinamice, unde prima condiție este respectarea parametrilor funcționali.

Din aceleași diagrame se constată că, pentru fanta practicată în pereții canalului la distanța $\bar{x} = 0{,}55$, viteza de scurgere prin fantă este egală cu viteza medie, indiferent de valoarea factorului de repartiție.

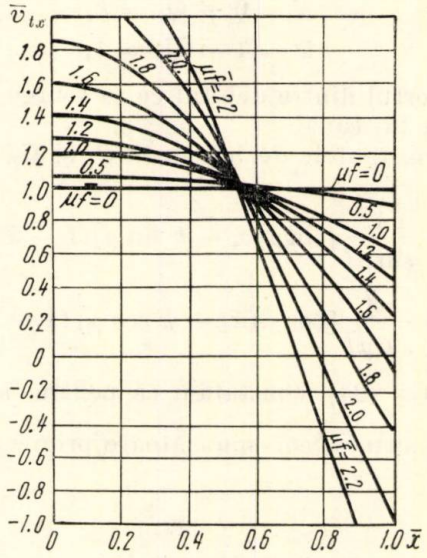


Fig. 3

Această proprietate poate fi utilizată ca o a treia condiție-limită pentru determinarea constantelor de integrare din soluția generală (19).

Din cercetările teoretice și experimentale făcute de autor și din diverse lucrări publicate [5], rezultă că volumul energiei acustice produsă de un jet depinde în principal de debitul de fluid ce trece prin fantă și de forma acesteia. Prin urmare, înseși fantele prin care se scurg debite mari de fluid pot deveni surse de zgomote gazodinamice.

Diminuarea acestor zgomote poate fi făcută prin mărirea numărului de fante sau prin utilizarea voleților depresivi, care, pe baza efectului Coandă, creează un grad mare de turbulență [19], contribuind astfel la disiparea energiei acustice.

Unele surse de zgomot , cum sînt motoarele aeroreactive, nu permit nici cea mai mică modificare a parametrilor gazodinamici ai scurgerii gazelor. În acest caz e necesar să se folosească ambele soluții care permit realizarea unor amortizoare de zgomot și nu afectează cu nimic funcționarea motorului.

Există însă și surse de zgomot la care se admite creșterea presiunii în secțiunea de eșapare a gazelor, permițînd creșterea vitezei de scurgere din ultima fantă pînă la o valoare apropiată de cea corespunzătoare limitei acustice.

În acest caz, micșorarea dimensiunilor amortizorului de zgomot se poate face prin realizarea unui canal cu debit constant prin fante, obținîn-

du-se o viteză de scurgere egală cu viteza medie și apropiată de valoarea - limită acustică.

Din studiile publicate [2], [16], [20] rezultă că uniformizarea debitelor se realizează prin variația lățimei fantelor sau a secțiunii transversale a canalului *).

Ambele căi prezintă complicații constructive mari și influențează negativ efectul de atenuare a zgomotelor. Din această cauză nu pot fi utilizate aceste metode în construcția amortizoarelor de zgomot.

În paragraful următor vom prezenta o soluție nouă de canal cu debit constant prin fante.

6. CANALUL CILINDRIC CU DEBIT CONSTANT PRIN FANTE

Presupunînd că lățimea fantei δ_{tx} și distanța b_x dintre două fante sînt constante, rezultă că $\overline{\delta}_{tx} = \overline{b}_x = 1$.

De asemenea pentru canale cilindrice lungimea este constantă, deci $\overline{l}_{tx} = 1$, iar unghiul $\Theta_x = 0$.

Exprimînd relația (5) sub formă adimensională și înlocuind pe $\overline{\delta}_x$ cu expresia (13), avem

$$\overline{v}_{tx} = \frac{d\overline{Q}_x}{d\overline{x}}. \tag{27}$$

Prin urmare, viteza de scurgere prin fantele transversale ale canalului depinde de derivata de ordinul unu al debitului de fluid care curge prin canal.

Pentru ca această viteză să fie constantă e necesar ca și derivata $\frac{d\overline{Q}_x}{d\overline{x}}$ să fie constantă, adică

$$\frac{d\overline{Q}_x}{d\overline{x}} = C_1,$$

de unde rezultă

$$\overline{Q}_x = C_1\overline{x} + C_2.$$

Determinînd constantele de integrare C_1 și C_2 din condițiile limită cunoscute, rezultă

$$\overline{Q}_x = \overline{x}; \quad \frac{d\overline{Q}_x}{d\overline{x}} = 1.$$

Introducînd aceste mărimi în ecuația diferențială (14), avem

$$\varphi_1(\overline{x}) + \overline{x}\varphi_2(\overline{x}) + \overline{x}^2\varphi_3(\overline{x}) = 0, \tag{28}$$

*) Studiile respective se referă numai la canalele cu fante longitudinale, însă aceste metode pot fi aplicate și la canalele cu fante transversale.

unde, pentru cazul analizat,

$$\varphi_1(\overline{x}) = 0$$

$$\varphi_2(\overline{x}) = \frac{\beta^2}{\overline{A}_x^2},$$

$$\varphi_3(\overline{x}) = -\frac{\beta^2}{\overline{A}_x^3}\left(\frac{d\overline{A}_x}{d\overline{x}} + \frac{1}{2}\lambda\overline{L}_x\right).$$

În final, ecuația (28) se transformă într-o ecuație diferențială de forma

$$\frac{d\overline{A}_x}{d\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}}\overline{A}_x + \frac{1}{2}\lambda\overline{L}_x = 0. \tag{29}$$

Pentru realizarea secțiunii variabile $\overline{A}_x$ introducem un corp central de revoluție în interiorul canalului (fig. 4).

În timpul curgerii fluidului prin canal, datorită prezenței corpului introdus are loc o pierdere de presiune prin frecare pe peretele interior al canalului și o pierdere de presiune prin frecare pe suprafața exterioară a corpului central, numit „uniformizator de debit".

Neglijînd pierderea de presiune datorită frecării fluidului de suprafața exterioară a uniformizatorului de debit și considerînd numai frecarea fluidului cu peretele interior al canalului, ecuația (29) devine

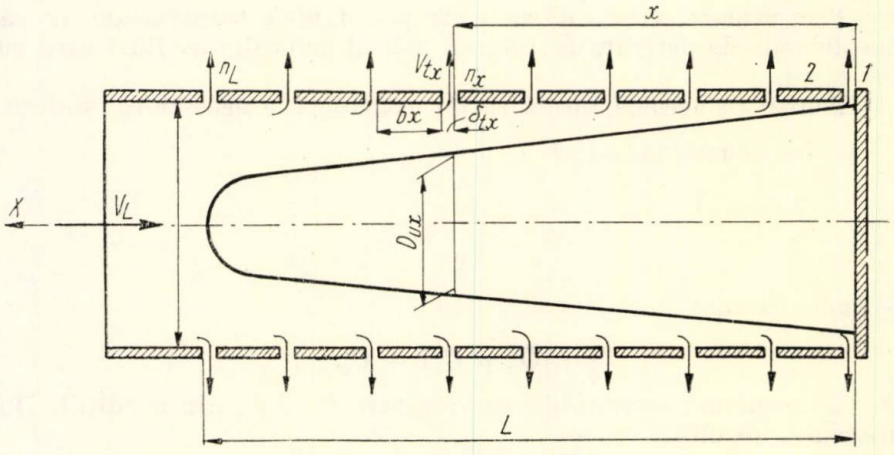


Fig. 4

$$\frac{d\overline{A}_x}{d\overline{x}} - \frac{1}{\overline{x}}\overline{A}_x + \frac{1}{2}\lambda\overline{L} = 0. \tag{30}$$

Soluția generală a ecuației (30) este

$$\overline{A}_x = \overline{x}\left(C - \frac{1}{2}\lambda\overline{L}\ln\overline{x}\right). \tag{31}$$

Determinînd constanta de integrare C din condiția ca pentru $\overline{x}=1$ să avem $\overline{A}_x = 1$, rezultă

$$\overline{A}_x = \overline{x}\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\overline{L}\ln\overline{x}\right). \tag{32}$$

Pentru determinarea diametrului raportat $\overline{D}_{ux}$ al uniformizatorului de debit exprimăm aria secțiunii raportate $\overline{A}_{ux}$ a acestuia funcție de aria secțiunii raportate a canalului:

$$\overline{A}_{ux} = 1 - \overline{A}_x,$$

din care rezultă

$$\overline{D}_{ux} = 1 - \overline{x}\left(1 - \frac{1}{2}\lambda\overline{L}\ln\overline{x}\right), \tag{33}$$

unde

$$\overline{A}_{ux} = \frac{A_{ux}}{A_L}; \quad \overline{D}_{ux} = \frac{D_{ux}}{D_L}.$$

Astfel de uniformizatoare de debit au fost aplicate la unele dintre amortizoarele de zgomote gazodinamice cu voleți depresivi construite pentru Fabrica de oxigen a Combinatului chimic Craiova. Experimentarea aerodinamică a fost făcută pe model, cu și fără uniformizator de debit, iar diagramele vitezelor de scurgere prin fante sînt date în figura 5. Din aceste diagrame se constată că rezultatele experimentale sînt foarte apropiate de cele teoretice. De altfel, pentru canalul fără uniformizator rezultatele experimentale obținute vin să confirme încă o dată justețea numeroaselor experiențe făcute pentru canale cu fante longitudinale [8], [13], [16]. Din aceleași diagrame se constată că viteza de scurgere prin prima fantă $\left(\overline{n}_x = \frac{1}{n_L}\right)$ este cu 30% mai mare ca cea medie. Aceasta înseamnă că pentru o viteză medie apropiată de viteza-limită acustică (80—90 m/s), în cazul canalului fără uniformizator, viteza prin prima fantă poate atinge valori de peste 110 m/s. La astfel de viteze de scurgere, fanta devine o puternică sursă de zgomot, cu un nivel sonor de peste 115 dB. Frecvența la care se obține acest nivel de zgomot depinde în principiu de lățimea și de forma fantei, precum și de viteza de scurgere.

Evitarea acestei situații impune, așa cum s-a arătat și mai înainte, mărirea numărului de fante, deci creșterea lungimii canalului.

Crearea unor debite constante prin fante a căror mărime se apropie de limita acustică permite realizarea unor amortizoare de zgomot de dimensiuni mici chiar pentru debite mari de gaze, reducîndu-se aproximativ cu 50% lungimea acestora.

Pe lîngă posibilitatea reducerii dimensiunilor, această soluție, constînd dintr-un corp central de secțiune mare, permite tratarea fonică a acestuia cu vată minerală, vată de sticlă sau șpan. De asemenea uniformizatorul de debit poate fi prevăzut cu rezonatori tip Helmholtz, acordați pe anumite benzi de frecvență. În acest fel se pot obține creșteri

importante ale eficacității acustice ale amortizoarelor de zgomot. Pe modelul experimentat aerodinamic s-au făcut și măsurători asupra eficienței acustice a uniformizatorului de debit tratat fonic. Ca material fono-

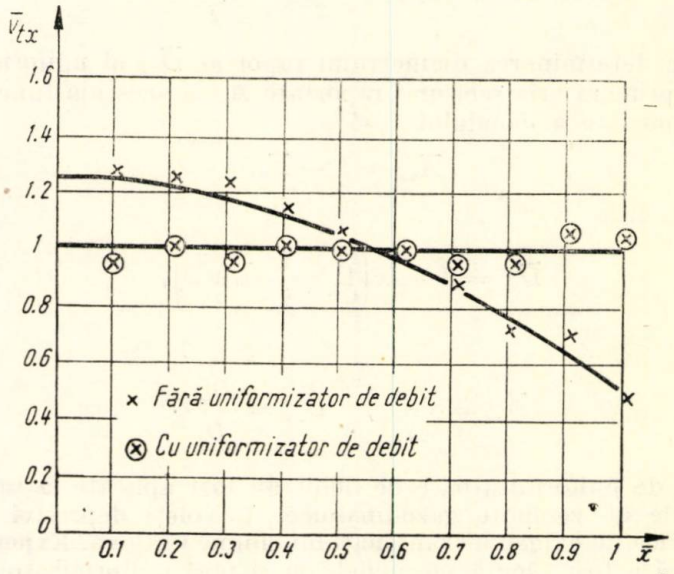


Fig. 5

absorbant s-a utilizat vată minerală, acoperită cu tablă perforată. Rezultatele măsurătorilor făcute de Institutul de cercetări pentru protecția muncii sînt reprezentate prin diagrama din figura 6.

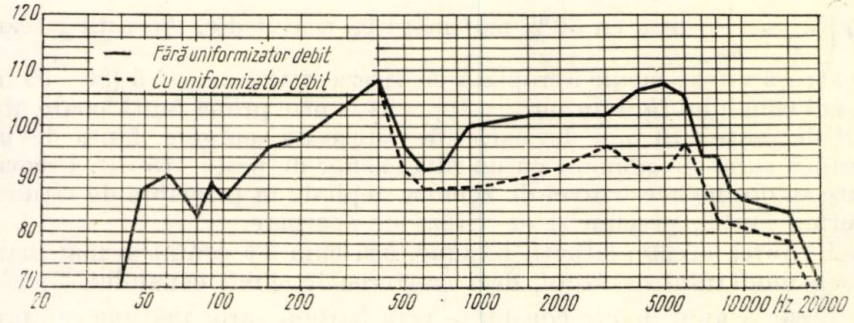


Fig. 6

Din diagramă se constată că atenuarea începe să aibă loc de la frecvența de 400 Hz și crește pe măsură ce crește frecvența, astfel că de la 1 000 Hz în sus nivelul atenuat este de peste 10 dB.

Faptul că atenuarea începe de la 400 Hz și că valoarea maximă nu depășește 14 dB se datorește diametrului și lungimii mici a uniformizatorului de debit.

Practic, diametrele interioare ale amortizoarelor de zgomot sînt de peste 500 mm, ajungînd în unele cazuri și la doi metri. Creșterea diametrului interior al canalului permite realizarea uniformizatorului de debit cu un diametru mare, ceea ce favorizează atenuarea zgomotului și la frecvențe joase, mergînd chiar sub 100 Hz, iar la frecvențe înalte atenuarea crește și mai mult, putînd ajunge la peste 10 dB pe metru liniar.

Această soluție poate fi aplicată cu succes și la canalele cu fante longitudinale din instalațiile de ventilație și de încălzire, făcîndu-le mult mai silențioase și de gabarit mai mic.

Primită la redacție la 26 iulie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. K. K. Baulin, *Isledovaniia ravnomernoi razdaci vozduha iz priamih truboprovod*, Otoplenie i ventiliațiia, *7* (1934).
2. — *O ravnomernoi razdace vozduha iz truboprovod*, Otoplenie i ventiliațiia, *5* (1937).
3. E. Carafoli, *Aerodinamica*, București, Edit. tehnică, 1951.
4. H. Gref, *Untersuchungen über die Strömung bei einem Absaugrohr mit einem in Richtung der Rohrachse verlaufenden Spalt*, Schiffstech Br., *3* (1955).
5. C. M. Harris, *Handbook of Noise Control*, New York, Ed. Mc. Graw-Hill, 1957.
6. G. P. Ivantov, *Teoria respredelitelinîh kanalov*, Spravocinik constructora pelei ONTI, 1935.
7. H. Laakso, *Be- und Entluftung von Laboratorien in der Chemischen Industrie*, Gesundheits-Ingenieur, *9* (1959).
8. H. Laakso, *Expérience allemande de construction et de technique et éléments de base de distributions d'air à haute et basse pression*, Chauffage, ventilation, conditionnement, n° *2* (1964).
9. B. Regenscheit, *Die Luftbewegung in Klimatisierten Räumen*, Kältetechnik, *1* (1959).
10. I. A. Sepelev, *Rascet priamougolinîh vozduho provodov raznomernoi razdaci po metodu injiner K. K. Baulina*, Otoplenie i ventiliațiia, *4*, *5* (1935).
11. S. Schattulat, *Ausblasen von Luft aus einem längs zur Verteilkanalachse angeordneten Schlitzauslass*, Heizung—Lüftung— Haustechnik, *6*, *10* (1958).
12. N. N. Patraulea, *Studii de aeromecanica hipersustentației*, Edit. Acad. R. P. R., 1962.
13. V. N. Taliev, *Rasciot vozduhoprovodov s neprerivnoi i ravnomernoi razdacei vozduha*, Otoplenie i ventiliațiia, *4*, *5* (1940).
14. — *Pritocinîe ventilationnîe vozduhoraspredeliteli (teoriia, rascet i regulirovanie)*, Stroizdat, 1951.
15. — *Aerodinamica ventiliației*, Stroizdat, 1954.
16. — *Aerodinamica ventiliației*, Stroizdat, 1963.
17. T. C. Teodorescu, *Cercetări asupra reversării tracțiunii motoarelor turboreactoare cu ajutorul efectului Coandă*, Revista transporturilor **7**, *9* (1960).
18. T. C. Teodorescu, E. Moisei. Brevet românesc nr. 42.718 din 24 noiembrie 1961.
19. T. C. Teodorescu, *Contribuții la studiul efectului Coandă și al aplicațiilor sale practice (teză de doctorat)*, I.P.B., 1962.
20. V. Voicu, *Probleme noi în proiectarea instalațiilor de încălzire și ventilare*, București, Edit. tehnică, 1964.

ASUPRA ARIPII DELTA CU ANTISIMETRIE FORȚATĂ ÎN CURENT SUPERSONIC, CONSIDERÎND SEPARAȚIA LA BORDURILE DE ATAC

de E. CARAFOLI și ȘT. STAICU

Institutul de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România
Institutul Politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej" București

Lucrarea de față studiază scurgerea în regim supersonic în jurul aripii delta subțiri avînd incidența α egală și de semn contrar pe cele două jumătăți ale sale, luînd însă în considerație separația curentului la bordurile de atac subsonice. Ca și la aripa delta subțire cu incidență constantă, în cazul de față curentul se separă în jurul bordurilor, creînd un strat de vîrtejuri care se situează pe extradosul aripii, transformîndu-se în două nuclee concentrate de vîrtejuri de aceeași intensitate și același semn, avînd însă o poziție antisimetrică față de axa de simetrie a aripii. Vom admite că efectul desprinderii curentului și formarea celor două vîrtejuri creează un cîmp de viteze verticale, care vor modifica scurgerea în așa fel ca presiunile pe aripă să fie finite la bordurile de atac. Cîmpul acestor viteze verticale, variabile pe toată suprafața aripii, conduce la un sistem de trei aripi componente fictive, prin a căror superpoziție se obține o aripă rezultantă fictivă care este echivalentă cu aripa reală, avînd aceleași proprietăți aerodinamice. În modul acesta, mișcarea rezultantă fiind conică, putem calcula cu ușurință presiunile pe aripă și caracteristicile aerodinamice.

1. CALCULUL VITEZELOR DE PERTURBAȚIE

În prezenta lucrare vom studia scurgerea supersonică în jurul aripii delta subțiri avînd incidențele antisimetrice și luînd în considerație separația curentului la bordurile de atac subsonice în ipoteza unei viteze verticale variabile pe toată suprafața aripii.

Ca și la aripa delta subțire plană cu incidență constantă [1], în cazul de față curentul se separă la bordurile de atac, creînd cîte un strat de vîrtejuri care se așază deasupra și dedesubtul aripii, producînd o mișcare antisimetrică. Stratul de vîrtejuri, fiind suficient de subțire, poate fi considerat ca o pînză de vîrtejuri care se înfășoară sub forma unui cornet compus dintr-un nucleu concentrat; acesta conține cea mai mare parte a intensității turbionare a cornetului, restul regăsindu-se într-o pînză margi-

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl. (în limba engleză) **13**, 2 (1968)

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 2, 1968, P. 275–287

nală care unește bordul de atac cu nucleul de vîrtej concentrat. Astfel cîmpul scurgerii este modificat de existența celor două nuclee de vîrtejuri avînd aceeași intensitate și același semn, situate antisimetric în raport cu axa de simetrie (fig. 1) la abscisa c și la ordonata t.

Făcînd aceste considerații, scurgerea în jurul aripii rămîne mai departe conică și se poate trata utilizînd metodele din teoria mișcărilor conice [2].

Dacă aripa este zveltă, avem posibilitatea de a aplica metoda lui Mangler și Smith [5]. În cazul general vom folosi metoda practică din lucrările anterioare. Pentru aceasta vom admite că efectul desprinderii curentului la bordurile de atac ale aripii și formarea nucleelor antisimetrice creează un cîmp complex de viteze verticale și longitudinale, care vor aduce modificări asupra cîmpului scurgerii, realizînd viteze finite la bordurile de atac.

În ceea ce privește vitezele longitudinale de perturbație se poate admite că efectul acestora va fi înlocuit prin acela al unei distribuții corespunzătoare a vitezelor verticale. Vom considera în acest sens o distribuție antisimetrică a vitezelor sau a incidențelor, așa încît să corespundă cazului real al unei aripi delta subțiri fictive cu incidență variabilă, diferită pe cele două fețe ale sale datorită separației curentului la borduri.

Într-o lucrare anterioară [3] am considerat o aripă delta antisimetrică (cu antisimetrie forțată), făcînd ipoteza simplificatoare că pe inter-

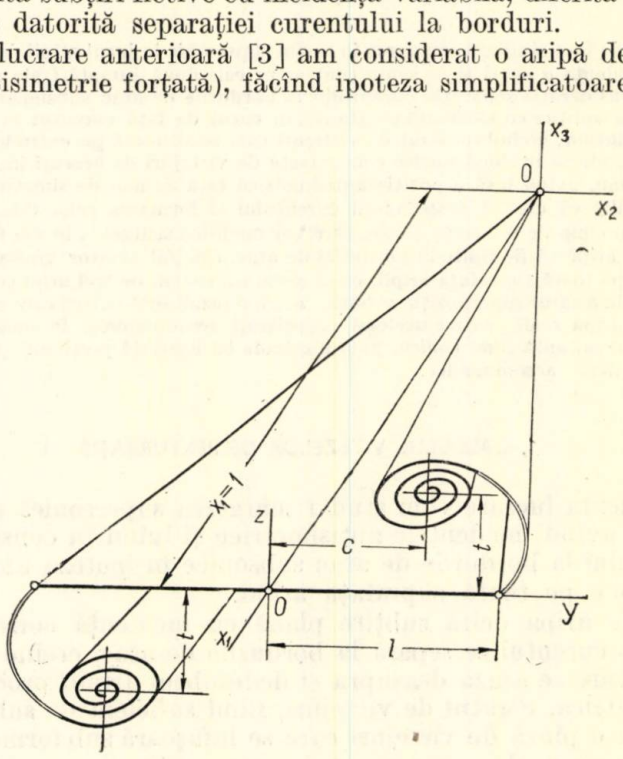


Fig. 1

valul ($y = -s$, $y = 0$), respectiv ($y = 0$, $y = s$), viteza verticală este considerată constantă și egală cu $w_0 = -\alpha_0 U_\infty$, respectiv $-w_0$(fig. 1). În realitate însă, din cauza antisimetriei, vitezele verticale adiționale

create de nucleele de vîrtejuri scad către mijlocul aripii, devenind egale cu zero pe axa de simetrie Ox_1. În felul acesta, efectele celor două vîrtejuri se anulează pe linia centrală, unde va rămîne viteza corespunzătoare incidenţei aripii reale, $w = -\alpha U_\infty$. În această ipoteză, vom considera o anumită variaţie a vitezei verticale începînd de la mijlocul aripii, cu $w = -\alpha U_\infty$, pînă la $y = s$, în loc de viteză verticală constantă.

Vom nota mai departe

$$w'_u = -\alpha'_u U_\infty, \; w'_l = -\alpha'_l U_\infty, \; (w_0 = -\alpha_0 U_\infty, \; w_1 = -\alpha_1 U_\infty), \quad (1)$$

vitezele verticale şi incidenţele w'_u, α'_u pe faţa superioară, respectiv w'_l, α'_l pe cea inferioară a aripii fictive subţiri. Pentru a studia cu uşurinţă mişcarea prin metoda mişcărilor conice [2], vom descompune aripa corespunzătoare distribuţiei de viteze verticale de mai sus în trei aripi componente, ca în cazurile precedente [1], [3], [11]:

1) aripa subţire, avînd variaţia de incidenţă antisimetrică convenabil aleasă pentru a respecta oarecum sensul fenomenului modificării presiunii şi al vitezelor verticale pe suprafaţa aripii în apropierea bordului de atac. Se obţine în acest sens o aripă subţire fictivă cu vitezele finite la bordurile de atac, dar egale şi de sens contrar pe cele două feţe, superioară şi inferioară, ceea ce nu corespunde cu indicaţiile experimentale;

2) aripa de grosime simetrică, avînd panta egală şi de acelaşi sens cu incidenţa primei aripi. Această aripă, combinată cu cea de la (1), va avea presiunile diferite pe cele două feţe, cum se întîmplă şi în realitate, dar viteza verticală pe intrados devine egală cu zero;

3) aripa a treia va avea grosimea simetrică cu panta variabilă şi antisimetrică, însă astfel încît, combinată cu cea din (2), să se obţină o pantă medie nulă, corespunzătoare unei aripi reale subţiri. Prin suprapunerea celor trei aripi componente, vom obţine aripa rezultantă fictivă, echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa delta cu separaţia curentului.

Examinînd fenomenul real al desprinderii curentului la borduri, vom căuta să alegem o distribuţie antisimetrică adecvată a vitezelor sau a incidenţelor.

În continuare vom determina pentru cele trei aripi componente antisimetrice, vitezele axiale de perturbaţie fiind necesare pentru calculul distribuţiei de presiuni şi al caracteristicilor aerodinamice ale aripii delta subţiri reale, avînd incidenţa antisimetrică: $+\alpha$ pe partea dreaptă şi $-\alpha$ pe partea stîngă. Mai întîi vom considera planul fizic Oyz normal pe direcţia curentului neperturbat U_∞, avînd coordonatele

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \; z = \frac{x_3}{x_1}, \quad (2)$$

şi planul auxiliar obţinut printr-o transformare analogă cu cea dată de Busemann (fig. 2):

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \; \zeta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2}, \quad (x = \eta + i\zeta), \quad (3)$$

ca plan de lucru, avînd proprietatea de a păstra urma aripii ($\eta = y$, $\zeta = \zeta = 0$) în mărime adevărată. După cum se știe, în acest plan vitezele de perturbație u, v și w sînt funcții armonice și li se pot asocia funcțiile

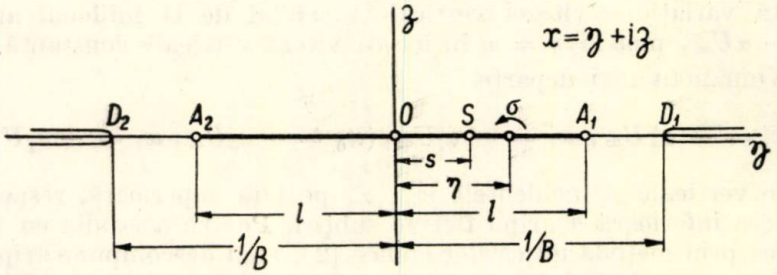


Fig. 2

conjugate respective u', v', w', astfel încît să obținem funcțiile analitice $\mathcal{U} = u + iu'$, $\mathcal{V} = v + iv'$, $\mathcal{W} = w + iw'$ de variabilă complexă

$$x = \eta + i\zeta. \tag{4}$$

1.1. ARIPA SUBȚIRE ANTISIMETRICĂ

Vom considera viteza verticală de pe această aripă, ca urmare a efectului celor două nuclee de vîrtejuri, variabilă în mod diferit pe intervalele ($\eta = 0$, $\eta = s$) și ($\eta = s$, $\eta = l$). Variația vitezelor verticale adiționale w' pe o jumătate de aripă se obține cu ajutorul unei distribuții de surse de intensitate q' situate pe suprafața aripii, pe baza relației

$$q' = \frac{\eta}{\sqrt{1 - B^2\eta^2}} \frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}\eta}, \tag{5}$$

dedusă din teoria mișcărilor conice [2] în cazul aripilor cu incidență variabilă. Pentru realizarea vitezelor verticale propuse vom admite o distribuție liniară de singularități (surse), plasată pe urma aripii din planul $x = \eta + i\zeta$, de intensitate

$$q' = \pm p_0 \frac{\eta}{l}, \tag{6}$$

pe intervalele ($\eta = -s$, $\eta = 0$), respectiv ($\eta = 0$, $\eta = s$), și

$$q' = \pm q_0 \left(1 - \frac{\eta}{l}\right), \tag{7}$$

pe intervalele (s, l) respectiv ($-l$, $-s$), obținînd în felul acesta viteza w_0 în punctul $\eta = s$ și w_1 la bordul din dreapta al aripii.

Ținînd seama de aceste repartiții de surse date de (6) și (7) și aplicînd formulele stabilite în teoria mișcărilor conice [2], viteza axială de

perturbație pentru aripa componentă subțire va fi dată de expresia

$$\mathcal{U}_l = \frac{Ax}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi}\frac{p_0}{l}\int_0^s \eta\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}} - \right.$$

$$\left. - \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta + x)}}\right]d\eta + \frac{2}{\pi}\frac{q_0}{l}\int_s^l (l-\eta)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}} - \right.$$

$$\left. - \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta + x)}}\right]d\eta, \tag{8}$$

care, după efectuarea calculelor, devine

$$\mathcal{U}_l = \frac{Ax}{\sqrt{l^2 - x^2}} - \frac{q_0}{\pi}\left[(s-x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2 - sx}{l(s-x)} - \right.$$

$$\left. - (s+x)\left(1 - \frac{s-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s+x)} + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\cos^{-1}\frac{s}{l}\right] +$$

$$+ \frac{p_0}{\pi}\left[(s-x)\cosh^{-1}\frac{l^2 - sx}{l(s-x)} - (s+x)\cosh^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s+x)} + 2x\cosh^{-1}\frac{l}{x}\right], \tag{9}$$

contribuția unei surse elementare $dq'(\eta)$ în expresia vitezei axiale de perturbație fiind

$$d\mathcal{U} = dq'\cosh^{1}\sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}}. \tag{10}$$

1.2 ARIPA DE GROSIME SIMETRICĂ CU PANTA EGALĂ CU INCIDENȚA PRIMEI ARIPI SUBȚIRI

Introducerea celei de-a doua aripi, de grosime simetrică, este necesară pentru a înlătura vîrfurile accentuate de presiuni pe partea inferioară a aripii, unde repartiția presiunilor, obținută prin suprapunerea cu prima aripă componentă, va fi diferită de cea de pe extrados. Urmînd metoda generală a mișcărilor conice [2] pentru o aripă de grosime simetrică cu variația de pantă dată de aceleași distribuții de surse (6) și (7), vom scrie pentru viteza axială de perturbație următoarea expresie:

$$\mathcal{U}_t = \frac{2}{\pi}\frac{p_0}{l}\int_0^s \eta\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1-Bx)}{2B(\eta - x)}} - \right.$$

$$\left. - \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1+Bx)}{2B(\eta + x)}}\right]d\eta +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\frac{q_0}{l}\int_s^l (l-\eta)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1-Bx)}{2B(\eta - x)}} - \right.$$

$$\left. - \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1+Bx)}{2B(\eta + x)}}\right]d\eta \pm L, \tag{11}$$

care, în urma efectuării calculelor, devine

$$\mathcal{U}_t = \frac{q_0}{\pi}\left[(l-x)\left(1-\frac{l+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \right.$$
$$-(l+x)\left(1-\frac{l-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)} -$$
$$-(s-x)\left(1-\frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1-B^2sx}{B(s-x)}+(s+x)\left(1-\frac{s-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{1+B^2sx}{B(s+x)}-$$
$$\left.-\frac{1}{Bl}(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs)\,x\sqrt{1-B^2x^2}\right]+$$
$$+\frac{p_0}{\pi}\left[(s-x)\cosh^{-1}\frac{1-B^2sx}{B(s-x)}-\right.$$
$$\left.-(s+x)\cosh^{-1}\frac{1+B^2sx}{B(s+x)}+2x\cosh^{-1}\frac{1}{Bx}\right]\pm L, \qquad (12)$$

unde termenul L reprezintă contribuţia bordului de atac al aripii de grosime simetrică avînd panta $\gamma_1 = \alpha_1$.

1.3. ARIPA DE GROSIME SIMETRICĂ COMPENSATOARE DE PANTĂ

Prin introducerea efectului aripii de la punctul (2), aripa rezultantă a devenit aripă groasă. Vom putea compensa acest lucru punîndu-ne în acord cu rezultatele experimentale introducînd pe suprafaţa aripii o nouă distribuţie de surse de formă oarecare, care va readuce aripa la o grosime medie nulă. Variaţia vitezelor verticale w'' date de aceste surse, care va prezenta neapărat la bordul aripii viteza $-w_1$, respectiv panta $\gamma_1 = -\alpha_1$, va corespunde cu o „aripă compensatoare de pantă" de grosime simetrică. Ea are rolul de a anula panta şi efectul $\pm L$ al său de la extremitatea aripii (2). Distribuţia de surse q'' pe care o vom introduce va trebui să creeze în acelaşi timp pe intradosul părţii din dreapta a aripii o distribuţie de presiuni fără vîrfuri accentuate, aproximativ liniară, cu excepţia regiunii din apropierea bordului de atac. De aceea, pentru simplificare vom alege următoarea expresie a distribuţiei de surse:

$$q'' = \pm k_0\eta(1+k_1\eta), \qquad (13)$$

considerată egală şi de semn contrar pentru punctele simetrice faţă de axa Ox_1 a aripii.

Am obţinut astfel ca cele două „aripi groase" să formeze una singură, avînd panta variabilă în aşa fel ca cea medie să fie nulă.

Pentru această aripă compensatoare, expresia vitezei axiale de perturbaţie $\mathcal{U}_c$ va fi, analog cu (11), următoarea:

$$\mathcal{U}_c = \frac{2}{\pi}k_0\int_0^l \eta(1+k_1\eta)\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1-Bx)}{2B(\eta-x)}} - \right.$$
$$\left.-\cosh^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1+Bx)}{2B(\eta+x)}}\right]d\eta \mp L, \qquad (14)$$

care în urma efectuării calculelor devine

$$\mathcal{U}_c = \frac{k_0}{2\pi B^2}\left[B^2(l^2-x^2)\left(\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\sin^{-1} BlBx\sqrt{1-B^2x^2}\right] + \frac{k_0k_1}{3\pi B^3}\left[B^3(l^3-x^3)\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \right.$$

$$- B^3(l^3+x^3)\cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)} + 2B^3x^3\cosh^{-1}\frac{1}{Bx} +$$

$$\left. + 2(1-\sqrt{1-B^2l^2})Bx\sqrt{1-B^2x^2}\right] \mp L. \tag{15}$$

Prin suprapunerea celor trei aripi componente se obține aripa fictivă rezultantă, echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa reală, pentru care viteza axială de perturbație are expresia

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_l + \mathcal{U}_t + \mathcal{U}_c, \tag{16}$$

care va fi antisimetrică față de axa de simetrie Ox_1 și continuă în originea O. Să observăm că viteza $\mathcal{U}_l$ pe extrados este egală și de semn contrar cu cea de pe intrados, deoarece corespunde aripii subțiri, considerațiile fiind făcute separat pentru partea din dreapta, respectiv stînga a aripii.

2. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Pentru determinarea constantelor p_0 și q_0 vom porni de la relațiile (5), (6) și (7) și vom pune condițiile la limită în punctele $\eta = 0$, $\eta = s$ și $\eta = l$ pentru viteza verticală w' a primei aripi componente și vom obține

$$w_0 - w = \frac{p_0}{l}\int_0^s \sqrt{1-B^2\eta^2}\,\mathrm{d}\eta, \tag{17}$$

$$w_1 - w_0 = q_0\int_s^l \left(1-\frac{\eta}{l}\right)\frac{\sqrt{1-B^2\eta^2}}{\eta}\,\mathrm{d}\eta. \tag{17'}$$

De aici deducem primele relații între p_0, q_0, w_0 și w_1:

$$2Bl(w_0 - w) = p_0(Bs\sqrt{1-B^2s^2} + \sin^{-1}Bs), \tag{18}$$

$$2Bl(w_1 - w_0) = q_0\left[Bl(\sqrt{1-B^2l^2} - \sqrt{1-B^2s^2}) - \right.$$

$$- B(l-s)\sqrt{1-B^2s^2} +$$

$$\left. + 2Bl\left(\cosh^{-1}\frac{1}{Bs} - \cosh^{-1}\frac{1}{Bl}\right) + \sin^{-1}Bs - \sin^{-1}Bl\right], \tag{18'}$$

unde w_0 reprezintă viteza verticală în punctul $\eta = s$, iar w_1 cea de la bordul de atac.

Pe de altă parte însă, viteza verticală medie w sau incidența α pentru jumătatea din dreapta a aripii, egală cu cea a primei aripi componente și cu cea a aripii rezultante fictive, se obține pornind de la relația

$$\int_0^l w'_u \, \mathrm{d}\eta = -\int_0^l w'_l \, \mathrm{d}\eta = wl, \tag{19}$$

care s-a dedus făcînd observația că cele două aripi componente de grosime simetrică se compensează reciproc.

Relația se poate pune mai departe sub forma

$$w'\eta\Big|_0^s + w'\eta\Big|_s^l - \int_0^s \eta \mathrm{d}w' - \int_s^l \eta \mathrm{d}w' = wl, \tag{20}$$

care, după efectuarea calculelor, devine

$$2Bl\,(w_1 - w) = \frac{2}{3Bl}\, p_0 \left(1 - (1 - B^2 s^2)^{3/2}\right) +$$

$$+ q_0 \left[Bl\sqrt{1 - B^2 l^2} - Bs\sqrt{1 - B^2 s^2} + \sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3Bl}\left((1 - B^2 l^2)^{3/2} - (1 - B^2 s^2)^{3/2}\right)\right]. \tag{21}$$

Constanta A, care apare în expresia (9), o vom determina luînd în considerație variația vitezei verticale a primei aripi componente de la un punct de pe ea pînă la unul de viteză verticală nulă (de pe conul Mach), așa cum se procedează în teoria aripilor [2]. Ca și în lucrările anterioare [1], [3], vom considera pentru simplificare că sursa distribuită liniar pe jumătatea din dreapta a aripii este concentrată în punctul de abscisă $y = s'$, avînd intensitatea egală cu Q_0.

Procedînd astfel, vom putea scrie relația

$$\mathrm{Im} \int_{\text{aripă } (0,\, l)}^{\text{cercul MACH } (1/B,\, \infty)} \frac{\sqrt{1 - B^2 x^2}}{x} \, \mathrm{d}\mathcal{U}'_l = w_1, \tag{22}$$

unde $\mathcal{U}'_l$ reprezintă viteza axială de perturbație în cazul simplificat al unei surse concentrate situată în $y = s'$ pe aripa subțire, avînd expresia

$$\mathcal{U}'_l = \frac{Ax}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} Q_0 \left[\cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l + s')(l - x)}{2\,l(s' - x)}} - \right.$$

$$\left. - \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l + s')(l + x)}{2\,l(s' + x)}} \right]. \tag{23}$$

Prin efectuarea integralei pe axa absciselor ($\vartheta = 0$) între limitele l și $1/B$, rezultă pentru constanta A expresia

$$A = \frac{2l}{\pi}\left[w_1 + \frac{Q_0}{s'}\left(\sqrt{1 - B^2 s'^2} - \sqrt{1 - \frac{s'^2}{l^2}}\right)\right], \tag{24}$$

în care s' şi Q_0 sînt daţi de relaţiile

$$\frac{s'}{l} = \frac{1}{3} \frac{q_0\left(1-\frac{s}{l}\right)^2\left(1+2\,\frac{s}{l}\right)+p_0\,\frac{s^3}{l^3}}{q_0\left(1-\frac{s}{l}\right)^2+p_0\,\frac{s^2}{l^2}}, \tag{25}$$

$$Q_0 = \frac{1}{2l}[q_0(l-s)^2 + p_0 s^2]. \tag{25'}$$

Datorită separaţiei curentului la bordurile de atac şi ca urmare a prezenţei vîrtejurilor pe extrados, impunem condiţia ca viteza să fie finită la bordurile subsonice, anulînd constanta A dată de (24), şi vom obţine

$$p_0\,\frac{s^2}{l^2} + q_0\left(1-\frac{s}{l}\right)^2 = -\frac{2\,w_1\,\frac{s'}{l}}{\sqrt{1-B^2 s'^2}-\sqrt{1-\frac{s'^2}{l^2}}}. \tag{26}$$

Mai departe se observă că expresia vitezei axiale $\mathcal{U}_c$, dată de (14), conţine constantele k_0 şi k_1 care urmează a fi determinate. Ţinînd seama de rolul celei de-a treia aripi componente, care va trebui să aibă panta medie $-w$, şi luînd în consideraţie relaţia

$$q'' = \frac{\eta}{\sqrt{1-B^2\eta^2}}\,\frac{\mathrm{d}w''}{\mathrm{d}\eta}, \tag{27}$$

similară cu (5), putem scrie asemănător cu (19)

$$\int_0^l w''\mathrm{d}\eta = w''\eta\Big|_0^l - \int_0^l \eta\mathrm{d}w'' = -wl, \tag{28}$$

din care deducem

$$k_0\left[\frac{1}{3B^2}\left(1-(1-B^2l^2)^{3/2}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{k_1}{8B^3}\left(\sin^{-1}Bl + Bl\sqrt{1-B^2l^2} - 2\,Bl\,(1-B^2\,l^2)^{3/2}\right)\right] = l(w-w_1). \tag{29}$$

Vom remarca în continuare că ecuaţiile (18), (18') (21) şi (22) constituie sistemul pentru determinarea constantelor p_0, q_0, w_0, w_1. Astfel, din (18), (18') şi (21) deducem

$$\frac{p_0}{q_0} = 2\left[B(l-s)\sqrt{1-B^2s^2} + \sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + \right.$$
$$\left.+\frac{1}{3\,Bl}\left((1-B^2l^2)^{3/2} - (1-B^2s^2)^{3/2}\right)+\right. \tag{30}$$

$$+ Bl\left(\cosh^{-1}\frac{1}{Bl} - \cosh^{-1}\frac{1}{Bs}\right)\Bigg]\Bigg[Bs\sqrt{1-B^2s^2} +$$

$$+ \sin^{-1}Bs - \frac{1}{3\,Bl}\left(1-(1-B^2s^2)^{3/2}\right)\Bigg]^{-1},$$

iar din (21), (25) și (26) obținem a doua relație, care, împreună cu (30), va da expresiile pentru q_0 și p_0. Înlocuind în (29) pe w_1 din (21) și considerînd pentru k_1 valoarea

$$k_1 = -\frac{1}{2l}, \tag{31}$$

vom obține pentru k_0 expresia

$$k_0 = -8B^2l\left\{\frac{2}{Bl}p_0\left(1-(1-B^2s^2)^{3/2}\right)+3q_0\left[Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+\frac{2}{3\,Bl}\left((1-B^2l^2)^{3/2}-(1-B^2s^2)^{3/2}\right)\right]\right\}\times$$

$$\times\left[2\,Bl\left(8-5(1-B^2l^2)^{3/2}\right)-3\left(\sin^{-1}Bl+Bl\sqrt{1-B^2l^2}\right)\right]^{-1}. \tag{32}$$

3. DISTRIBUȚIA DE PRESIUNI ȘI CALCULUL CARACTERISTICILOR AERODINAMICE

Am arătat mai sus că viteza axială de perturbație pe aripa reală rezultă prin superpoziția celor trei aripi fictive componente, obținîndu-se formula (16).

Pentru calculul distribuției de presiuni (fig. 3) se va considera viteza axială totală dată de (16):

$$C_p = -2\frac{u}{U_\infty} = -\frac{2}{U_\infty}\operatorname{Re}\mathcal{U}. \tag{33}$$

Mai departe, calculul coeficientului de portanță pentru jumătatea din dreapta a aripii îl vom face observînd că aripile de grosime simetrică nu dau portanță. Astfel, coeficientul de portanță va fi dat numai de aripa *portantă subțire*.

$$C_z = \frac{4}{lU_\infty}\int_0^l u_l\,dy. \tag{34}$$

Introducînd pe $u_l = \operatorname{Re}\mathcal{U}_l$ din (9), vom obține următoarea expresie a coeficientului de portanță pentru jumătatea din dreapta a aripii:

$$C_z = \frac{4\,l}{\pi U_\infty}\left\{p_0\left[1-\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)^{1/2}+\frac{s^2}{l^2}\cosh^{-1}\frac{l}{s}\right]+\right.$$

$$\left.+q_0\left[\left(1-\frac{1}{3}\frac{s}{l}\right)\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)^{1/2}-\frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{s}{l}-\frac{s^2}{l^2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{s}{l}\right)\cosh^{-1}\frac{l}{s}\right]\right\}. \tag{35}$$

Coeficientul momentului de ruliu

$$HC_m = \frac{8}{3lU_\infty}\int_0^l u_l y\,dy, \tag{36}$$

după efectuarea calculelor, devine

$$HC_m = \frac{l^2}{3U_\infty}\left\{\frac{4}{3}p_0\left[1-\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)^{3/2}\right]+\frac{1}{2}q_0\left[\left(\frac{8}{3}\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)-\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{s}{l}\left(1-2\frac{s^2}{l^2}\right)\right)\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)^{1/2}-\cos^{-1}\frac{s}{l}\right]\right\}, \tag{37}$$

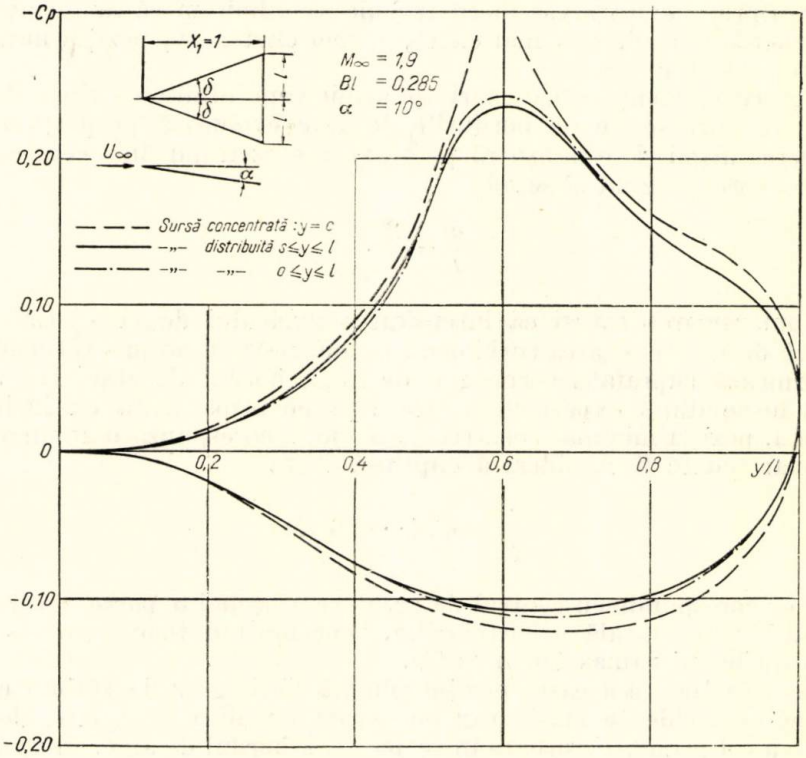


Fig. 3

unde H reprezintă o lungime de referință care poate fi egală cu unitatea

Pentru definirea parametrului $\frac{s}{l}$ care intră în expresiile de mai sus și care determină limitele distribuției de surse, vom remarca mai întîi că poziția de maxim a distribuției de presiuni coincide cu abscisa $y = c$ a centrului nucleului de vîrtej, așa cum se constată de altfel și din experiențe. Însă, făcînd calculul pe baza distribuției de surse dată de (6) și (7), se constată că vîrful depresiunilor de pe extradosul aripii coincide

aproximativ cu abscisa centrului de greutate al intensității surselor definite de (7). În acest mod putem deduce relația dintre s și c sub forma

$$c = s + \frac{1}{3}(l - s), \quad \left(\frac{s}{l} = 1{,}5\,\frac{c}{l} - 0{,}5\right). \tag{38}$$

Mai departe, pentru definirea poziției centrului nucleului de vîrtej vom urma un raționament simplu care să conducă la un rezultat apropiat de realitate. Astfel, spre exemplu, vom observa că pentru incidențele mici vîrtejurile desprinse la bordurile de atac, în formă de cornet, ar putea fi considerate ca lipite de suprafața superioară a aripii. Acest lucru ar duce, oricît de mică ar fi intensitatea vîrtejurilor, la viteze locale foarte mari, incompatibile cu efectele reale ale separației curentului la borduri. Spre a evita acest lucru trebuie să admitem că la incidențe α foarte mici ale aripii, sau, mai exact, atunci cînd $\alpha \to 0$, poziția nucleului de vîrtej va fi $c = l$.

Pentru incidențele mai mari ale aripii vom admite că firele de vîrtejuri care pornesc de pe bordurile de atac evoluează proporțional cu deschiderea aripii și se înfășoară pe o axă reprezentînd linia centrelor de greutate, corespunzînd abscisei

$$\frac{c}{l} = \frac{2}{3}. \tag{39}$$

Vom remarca totuși că intensitatea nucleului de vîrtej este ceva mai mică decît intensitatea turbionară totală, restul fiind în stratul subțire care formează suprafața cornetului de lîngă bordul de atac. De aceea, orientîndu-ne după experiențele efectuate pe aripa delta cu incidență constantă, poziția minimă a centrului vîrtejului corespunzătoare unor incidențe mari poate fi considerată cuprinsă între

$$\frac{c}{l} \cong 0{,}5\,l \cdots 0{,}6\,l, \tag{40}$$

ceea ce ar corespunde cu centrul de greutate a numai o parte din intensitatea turbionară totală a vîrtejurilor, reprezentînd tocmai intensitatea reală a nucleului rămas (circa 80%).

Ceea ce face ca această poziție minimă să fie greu de stabilit este și faptul că la incidențe mari apar nuclee de vîrtejuri interioare, de sens contrar cu cel principal, situate între acesta și bordul de atac. Între aceste limite, ținînd seama și de rezultatele experimentale obținute de diverși autori pe aripa delta plană cu incidență constantă, vom admite pentru poziția nucleului de vîrtej aceeași formulă aproximativă ca pentru aripa plană [11], și anume

$$\frac{c}{l} \cong \frac{1}{1 + 1{,}7(\alpha)^{1/2}}. \tag{41}$$

Pe baza acestei formule și a formulei (38), din care deducem pe s, am calculat presiunile, portanța unei jumătăți de aripă și momentul în jurul axei Ox_1.

Se constată că curbele de portanţă şi de moment de ruliu se suprapun peste cele calculate în [3] ,într-o altă ipoteză asupra vitezelor verticale. Distribuţia de presiuni însă este oarecum modificată, dar foarte puţin, faţă de cea determinată anterior în [3] la aceeaşi incidenţă (fig. 3). După cum se vede, o modificare a vitezei verticale în sensul unei mai mari apropieri de realitate nu modifică sensibil repartiţia de presiuni. Rezultă că ipoteza simplificatoare pe care o facem în ceea ce priveşte distribuţia de viteze verticale poate fi considerată ca o bună aproximaţie. În schimb însă, condiţia vitezei finite la bordurile de atac şi localizarea influenţei cornetelor de vîrtejuri la extrados, iar pe intrados considerînd o variaţie lentă a presiunii, constituie tocmai parametrii principali ai problemei. Făcînd în rezultatele de mai sus $p_0 = 0$, vom obţine cazul cînd viteza verticală este constantă [3] între $y = 0$ şi $y = s$.

Primită la redacţie la 31 octombrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, Şt. Staicu, *Asupra teoriei aripii delta subţiri cu separaţia curentului la bordurile de atac*. St. cerc. mec. apl. *4* (1966).
2. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1956.
3. E. Carafoli, Şt. Staicu, *Antisymmetrical thin delta wing with flow separation at the leading edges*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **XI**, *6* (1966).
4. M. Roy, *Sur la théorie de l'aile delta, tourbillons d'apex et nappes en cornets*. C. R. Ac. Sc., R. A. *56* (1957).
5. K. W. Mangler, J. H. Smith, *A Theory of the Flow Past a Slender Delta Wing with Leading Edge Separation*, Proc. Roi. Soc., May 1959.
6. D. Küchemann, *A Non-Linear Litting-Surface Theory for Wings of Small Aspect-Ratio With Edge Separation*, R.A.E., Rep. 2540, April, 1955.
7. L. C. Squire, *The Estimation of the Non-Linear Lift of Delta Wings at Supersonic Speeds*, Journ. R.A.S., Aug. 1963.
8. W. H. Michael, *Flow Studies en Flate-Plate Delta Wings at Supersonic Speed*, NACA TN 3472, July 1955.
9. P. Germain, *La théorie des mouvements homogènes et son application au calcul de certaines ailes delta en régime supersonique*, R. A. *7* (1949).
10. R. Legendre, *Nappes de tourbillons déferlant des bords d'attaque des ailes en delta*, ONERA, Commun. présenté au Symposium IUTAM, Ann-Arbor, 6—10 Juillet, 1964.
11. E. Carafoli, Şt. Staicu, *Sur un modèle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaque*, Paris, Journal de Mécanique, **6**, *2*, (1967).

DEFORMAȚIILE LOCALE SUB EFECTUL PRESIUNII ÎN PROBLEMA UNGERII HIDRODINAMICE

de GH. MANEA,
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

N. BOICU
Comitetul de Stat al Apelor

și I. VOICA
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

621.81

Stabilindu-se legătura dintre procesele hidrodinamice din pelicula de lubrifiant și deformațiile elastice locale[1]) ale cuzineților sub efectul presiunii, se deduce o relație general-valabilă pentru cuzineții din materiale cu modul de elasticitate redus. Se indică totodată o metodă de calcul prin recurență pentru determinarea presiunii din film cu considerarea acestor deformații.

1. PRECIZAREA PROBLEMEI

În cadrul investigațiilor teoretice și experimentale asupra proceselor complexe ale ungerii în regim hidrodinamic — staționar, turbulent, cu sarcină constantă sau variabilă — a fost analizată aproape totdeauna și poziția fusului în cuzinet, cu implicații reciproce asupra elementelor de bază — portanță, debit de lubrifiant, regim termic — și asupra aspectelor de stabilitate.

Înălțimea variabilă h a peliculei de lubrifiant a fost considerată aproape exclusiv, ca fiind determinată de geometria suprafețelor corpurilor fus-cuzinet, privite ca *rigide*. Au fost date soluții valabile pentru forme oarecare și a fost analizată influența asperităților de suprafață.

În cele ce urmează se abordează studiul efectului deformațiilor elastice *locale*, produse de însăși repartiția presiunilor hidrodinamice. Dacă în cazul metalelor acest efect ar putea fi considerat ca minor în cadrul ansamblului de fenomene, utilizarea pentru cuzineți a materialelor cu modul de elasticitate redus, de exemplu a materialelor plastice, impune o aprofundare a problemei, cu atît mai mult cu cît cercetări anterioare au arătat deosebiri importante, de exemplu, în repartiția temperaturii în filmul de lubrifiant de-a lungul zonei portante [1], [2].

[1]) Prin deformație locală, în lucrare se înțelege deformația totală a punctului considerat.

2. RELAȚII GENERALE DE BAZĂ

Notînd, conform figurii 1, prin

r_f, r_c — raza fusului, respectiv a cuzinetului,
V — viteza periferică a fusului față de cuzinet,
e — excentricitatea absolută,
h — înălțimea variabilă a peliculei de lubrifiant,
η — viscozitatea lubrifiantului,

cu ipotezele uzuale, ecuația de bază a lui Reynolds, adaptată la fusul cilindric cu secțiune circulară, exprimată în coordonate cilindrice (r — raza, α — unghiul de poziție, z — coordonata în lungul axei fusului), are forma

$$\frac{\partial}{r_f \cdot \partial\alpha}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{r_f \cdot \partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6V\frac{\partial h}{r_f \cdot \partial\alpha}. \tag{1}$$

Pentru suprafețele considerate rigide, înălțimea variabilă h din această relație se confundă cu înălțimea geometrică h_g din figură.

În cazul de față însă, grosimea locală a peliculei de lubrifiant se compune din înălțimea h'_g dată de geometria suprafețelor în poziția lor deplasată din cauza deformațiilor elastice, cumulată cu deplasările locale elastice ale suprafeței fusului și cuzinetului, h_{e_f}, respectiv h_{e_c} :

$$h = h'_g + h_{e_f} + h_{e_c}. \tag{2}$$

Prin aceasta devine evidentă de la început complexitatea problemei. Exprimarea deplasărilor elastice locale ale suprafeței fusului, respectiv cuzinetului, în interdependența lor cu procesele hidrodinamice din pelicula

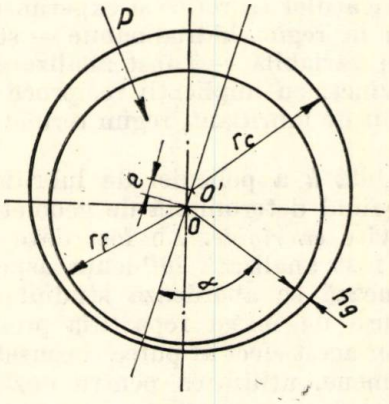


Fig. 1

de lubrifiant implică considerarea simultană a ecuației lui Reynolds și a ecuațiilor teoriei elasticității, cu îndeplinirea condițiilor la limită aferente atît pentru fus, cît și pentru cuzinet.

În ipoteza liniarității dependenței dintre eforturi unitare și deplasări specifice, deplasările elastice ale unui punct din interiorul fusului,

respectiv al cuzinetului $u_{f,c}$, $v_{f,c}$, $w_{f,c}$, după cele trei direcţii r, α şi z sînt date de cîte trei funcţii armonice Γ, χ şi Ω prin relaţiile

$$\left.\begin{aligned} u_{f,c} &= r\frac{\partial^2\Gamma_{f,c}}{\partial z^2} + \frac{\partial\chi_{f,c}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega_{f,c}}{\partial r}, \\ v_{f,c} &= \frac{1}{r}\frac{\partial\chi_{f,c}}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Omega_{f,c}}{\partial r}, \\ w_{f,c} &= -r\frac{\partial^2\Gamma_{f,c}}{\partial r\cdot\partial z} - v_{f,c}\frac{\partial\Gamma}{\partial z} + \frac{\partial\Omega_{f,c}}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Tensiunile $\sigma_{f,c}$ şi $\tau_{f,c}$ sînt exprimate prin ecuaţiile

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{r_{f,c}} &= \lambda_{f,c}\cdot\Delta_{f,c} + 2G_{f,c}\frac{\partial u_{f,c}}{\partial r}, \\ \sigma_{\alpha_{f,c}} &= \lambda_{f,c}\cdot\Delta_{f,c} + 2G_{f,c}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_{f,c}}{\partial\alpha} + \frac{u_{f,c}}{r}\right), \\ \sigma_{z_{f,c}} &= \lambda_{f,c}\cdot\Delta_{f,c} + 2G_{f,c}\frac{\partial w_{f,c}}{\partial z}, \\ \tau_{r\alpha_{f,c}} &= G_{f,c}\left(\frac{\partial v_{f,c}}{\partial r} - \frac{v_{f,c}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_{f,c}}{\partial\alpha}\right), \\ \tau_{rz_{f,c}} &= G_{f,c}\left(\frac{\partial u_{f,c}}{\partial z} + \frac{\partial w_{f,c}}{\partial r}\right), \\ \tau_{\alpha z_{f,c}} &= G_{f,c}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_{f,c}}{\partial\alpha} + \frac{\partial v_{f,c}}{\partial z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

În ecuaţiile (3) şi (4) $G_{f,c}$ reprezintă modulul de elasticitate transversal, iar $\lambda_{f,c}$ şi $v_{f,c}$ sînt constante elastice pentru fus, respectiv cuzinet.

Este de remarcat că:

a) pe una şi aceeaşi direcţie radială dată de un unghi α, tensiunile radiale σ_{r_f} şi σ_{r_c} pe suprafaţa exterioară a fusului, respectiv interioară a cuzinetului, devin egale cu presiunea locală p din film, deci şi egale între ele,

$$\sigma_{r_{f,c}} = p(\alpha, z), \tag{5}$$

natural în măsura acceptării presiunii constante pe rază, cum este uzual în teoria hidrodinamică a ungerii:

b) liniaritatea dependenţei dintre eforturi unitare şi deplasări pentru materialele plastice reprezentînd o aproximaţie, urmează a se considera în calcule valori medii E şi G;

c) abaterile grosimii de lubrifiant datorite deformaţiilor elastice locale faţă de grosimea „geometrică" h'_g sînt date de valorile deplasărilor radiale locale $u_{f,c}$:

$$h_{ef,c} = u_{f,c}. \tag{6}$$

Integrînd sistemul de ecuații (1)—(6) și determinînd constantele de integrare din condițiile la limită ale problemei elastice pentru fus și cuzinet și ale problemei hidrodinamice pentru pelicula de lubrifiant, se poate obține soluția problemei elastohidrodinamice a lagărelor radiale.

Experiența rezolvării unor probleme mai simple, cum sînt cele de teorie a elasticității, arată că soluția poate fi construită într-un caz dat, în care este posibilă dezvoltarea calculelor numerice, dar cu un volum de calcul atît de mare încît devine necesară construirea de analogii și folosirea mașinilor electronice.

3. PROBLEMA PLANĂ

3.1. Pentru fusul cu lungimea infinită, ecuația (1) ia forma aparent simplă

$$\frac{\partial p}{\partial \alpha} = \frac{6\eta V r_f}{h^2} + \frac{c_1}{h^3}, \tag{7}$$

în care C_1 reprezintă o constantă dată de condițiile geometrice și funcționale. Ecuațiile teoriei elasticității se transpun în forma valabilă pentru problema plană. Introducînd funcția biarmonică Φ a tensiunilor

$$\Delta^2 \cdot \Phi_{f,c} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \right)^2 \Phi_{f,c} = 0, \tag{8}$$

acestea iau forma

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{r_{f,c}} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_{f,c}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi_{f,c}}{\partial \alpha^2}, \\ \sigma_{\alpha_{f,c}} &= \frac{\partial^2 \Phi_{f,c}}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\alpha_{f,c}} &= -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi_{f,c}}{\partial \alpha} \right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Deplasările se determină folosind expresiile derivatelor parțiale ale lor în funcție de deplasările specifice

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{r_{f,c}} &= \frac{\partial u_{f,c}}{\partial r}, \\ \varepsilon_{\alpha_{f,c}} &= \frac{u_{f,c}}{r} + \frac{\partial v_{f,c}}{r \cdot \partial \alpha}, \\ \gamma_{r\alpha_{f,c}} &= \frac{\partial u_{f,c}}{r \cdot \partial \alpha} + \frac{\partial v_{f,c}}{\partial r} - \frac{v_{f,c}}{r} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

și legea lui Hooke pentru problema plană :

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{r_{f,c}} &= \frac{\sigma_{r_{f,c}} - \mu_{f,c}\sigma_{\alpha_{f,c}}}{E_{f,c}}; & \varepsilon_{\alpha_{f,c}} &= \frac{\sigma_{\alpha_{f,c}} - \mu_{f,c}\sigma_{r_{f,c}}}{E_{f,c}}, \\ \gamma_{r\alpha_{f,c}} &= \frac{\tau_{r\alpha_{f,c}}}{G_{f,c}}; & G_{f,c} &= \frac{E_{f,c}}{2(1+\mu_{f,c})}, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$E_{f,c}$ reprezentînd modulele de elasticitate pentru materialul fusului respectiv al cuzinetului, iar $\mu_{f,c}$ coeficienții lui Poisson.

3.2. În cazul cuplului de material fus din oțel, cuzinet din materialul plastic, raportul dintre modulele de elasticitate pentru materiale plastice (de exemplu poliamidă) și oțel fiind de ordinul 1/100, sînt pe departe preponderente deplasările datorite deformațiilor locale ale *cuzinetului*

Rezolvînd ecuația (8) prin metoda Fourier, se obține soluția generală

$$\begin{aligned} \Phi_c = {} & a_0 + b_0 \ln r + (c_0 + d_0 \ln r) r^2 + (A \cos\alpha + B \sin\alpha) r\alpha + \\ & + \left(a_1 + b_1 r^2 + \frac{c_1}{r^2} + d_1 \ln r\right) r \cos\alpha + \left(e_1 + f_1 r^2 + \frac{g_1}{r^2} + h_1 \ln r\right) r \sin\alpha + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} [(a_n + b_n r^2 + c_n r^{-2n} + d_n r^{2(-n+1)}) r_n \cos n\alpha + \\ & + (e_n + f_n r^2 + g_n r^{-2n} + h_n r^{2(-n+1)}) r^n \sin n\alpha], \end{aligned} \tag{12}$$

în care a_j, $b_j \cdots g_j$, h_j, A și B sînt constante ce urmează a fi determinate ($j = 0, 1, \cdots, n$).

Prin înlocuirea acestei soluții în relațiile (9), expresiile tensiunilor iau forma unor serii corespunzătoare seriei funcției lor de bază, după cum urmează :

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{r_c} = {} & \frac{b_0}{r^2} + 2c_0 + d_0(1 + 2\ln r) + \left(2b_1 r - \frac{2c_1}{r^3} + \frac{d_1 + 2B}{r}\right)\cos\alpha + \\ & + \left(2f_1 r - \frac{2g_1}{r^3} + \frac{h_1}{r} - \frac{2A}{r}\right)\sin\alpha + \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(n-n^2)a_n r^{n-2} - (n^2 - n - 2)b_n r^n - (n^2+n)c_n r^{-(n+2)} - \\ & - (n^2 + n - 2)d_n r^{-n}] \cos n\alpha + [(n - n^2)e_n r^{n-2} - (n^2 - n - \\ & - 2)f_n r^n - (n^2+n)g_n r^{-(n+2)} - (n^2 + n - 2)h_n r^{-n}] \sin n\alpha\}, \\ \sigma_{\alpha c} = {} & -\frac{b_0}{r^2} + 2c_0 + (3 + 2\ln r)d_0 + \left(6b_1 r + \frac{2c_1}{r^3} + \frac{d_1}{r}\right)\cos\alpha + \\ & + \left(6f_1 r + \frac{2g_1}{r^3} + \frac{h_1}{r}\right)\sin\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \{[n(n-1)a_n r^{n-2} + \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
&+(n+2)(n+1)b_n r^n + n(n+1)c_n r^{-(n+2)} + \\
&+(n-2)(n-1)d_n r^{-n}]\cos n\alpha + [n(n-1)e_n r^{n-2} + \\
&+(n+2)(n+1)f_n r^n + n(n+1)g_n r^{-(n+2)} + \\
&+(n-2)(n-1)h_n r^{-n}]\sin n\alpha\},
\end{aligned}
\tag{13}
$$

$$
\tau_{r\alpha_c} = \left(2b_1 r - \frac{2c_1}{r^3} + \frac{d_1}{r}\right)\sin\alpha - \left(2f_1 r - \frac{2g_1}{r^3} + \frac{h_1}{r}\right)\cos\alpha +
$$

$$
+ \sum_{n=2}^{\infty} \{[n(n-1)a_n r^{n-2} + n(n+1)b_n r^n - n(n+1)c_n r^{-(n-2)} -
$$

$$
- n(n-1)d_n r^{-n}]\sin n\alpha - [n(n-1)e_n r^{n-2} + n(n+1)f_n r^n -
$$

$$
- n(n+1)g_n r^{-(n+2)} - n(n-1)h_n r^{-n}]\cos n\alpha\}.
$$

Se introduc expresiile (13) pentru tensiunile σ_{r_c}, σ_{α_c} și $\tau_{r\alpha_c}$ în relațiile (11) și apoi rezultatele în sistemul (10), valabil pentru deplasări. Integrînd acest ultim sistem de ecuații diferențiale, se obțin în final expresiile deplasărilor în forma

$$
\begin{aligned}
E_c u_c = &-\frac{1+\mu_c}{r} b_0 + 2(1-\mu_c)c_0 r + \left[(1-3\mu_c)b_1 r^2 + \frac{1+\mu_c}{r^2} c_1 + \right. \\
&\left. + \frac{4+(1-\mu_c)^2}{1-\mu_c} d_1 \ln r\right]\cos\alpha + \left[(1-3\mu_c)f_1 r^2 + \frac{1+\mu_c}{r^2} g_1 - \right. \\
&\left. - \frac{4+(1-\mu_c)^2}{1-\mu_c} h_1 \ln r\right]\sin\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \{\{-n(1+\mu_c)a_n r^{n-1} - \\
&- [n(1+\mu_c) - 2(1-\mu_c)]b_n r^{n+1} + n(1+\mu_c)c_n r^{-(n-1)} + \\
&[+n(1+\mu_c) + 2(1-\mu_c)]d_n r^{-(n-1)}\}\cos n\alpha + \\
&+ \{-n(1+\mu_c)e_n r^{n-1} - [n(1+\mu_c) - 2(1-\mu_c)]f_n r^{n+1} + \\
&+ n(1+\mu_c)g_n r^{-(n-1)} + [n(1+\mu_c) + 2(1-\mu_c)]h_n r^{-(n-1)}\} \times \\
&\times \sin n\alpha\} + \mathcal{C}\cos\alpha + \mathcal{D}\sin\alpha,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E_c v_c = &\left[(5+\mu_c)b_1 r^2 + \frac{1+\mu_c}{r^2} c_1 - \frac{4\mu_c + (1+\mu_c)^2}{1-\mu_c} d_1 + \right. \\
&\left. + \frac{4+(1-\mu_c)^2}{1-\mu_c} d_1 \ln r\right]\sin\alpha - \left[(5+\mu_c)f_1 r^2 + \frac{1+\mu_c}{r^2} g_1 + \right. \\
&\left. + \frac{4\mu_c + (1-\mu_c)^2}{1-\mu_c} h_1 - \frac{4+(1-\mu_c)^2}{1-\mu_c} h_1 \ln r\right]\cos\alpha + \\
&+ \sum_{n=2}^{\infty} \{\{n(1+\mu_c)a_n r^{n-1} + [n(1+\mu_c) + 4]b_n r^{n+1} +
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&+ n(1+\mu_c)\, c_n r^{-(n-1)} + [n(1+\mu_c)-4]\, d_n r^{-(n-1)}\} \sin n\alpha - \\
&- \{n(1+\mu_c)\, e_n r^{n-1} + [n(1+\mu_c)+4] f_n r^{n+1} + \\
&+ n(1+\mu_c)\, g_n r^{-(n-1)} + [n(1+\mu_c)-4]\, h_n r^{-(n+1)}\} \cos n\alpha - \\
&- \mathcal{C} \sin\alpha + \mathcal{D} \cos\alpha + \mathcal{F} r.
\end{aligned}
\right\}
$$

Prin condiția de uniformitate a deplasărilor impusă la efectuarea integrării de mai sus, expresiile tensiunilor iau forma

$$
\left.
\begin{aligned}
\sigma_{r_c} &= \frac{b_0}{r^2} + 2c_0 + \left(2b_1 r - \frac{2c_1}{r^3} + \frac{3+\mu_c}{1-\mu_c}\frac{d_1}{r}\right)\cos\alpha + \\
&+ \left(2f_1 r + \frac{2g_1}{r} - \frac{3+\mu_c}{1-\mu_c}\frac{h_1}{r}\right)\sin\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \{[-n(n-1)a_n r^{n-2} - \\
&- (n-2)(n+1)\, b_n r^n - n(n+1)\, c_n r^{-(n+2)} - \\
&- (n+2)(n+1)\, d_n r^{-n}] \cos n\alpha + [-n(n-1)\, e_n r^{n-2} - \\
&- (n-2)(n+1) f_n r^n - n(n+1)\, g_n\, r^{-(n+2)} - (n+2) \times \\
&\times (n+1)\, h_n r^{-n}] \sin n\alpha\}, \\
\sigma_{a_c} &= -\frac{b_0}{r^2} + 2c_0 + \left(6b_1 r + \frac{2c_1}{r^3} + \frac{d_1}{r}\right)\cos\alpha + \\
&+ \left(6f_1 r + \frac{2g_1}{r^3} + \frac{h_1}{r}\right)\sin\alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \{[n(n-1)\, a_n r^{n-2} + \\
&+ (n+1)(n+2)\, b_n r^n + n(n+1)\, c_n r^{-(n+2)} + \\
&+ (n-1)(n-2)\, d_n r^{-n}] \cos n\alpha + [n(n-1)\, e_n r^{n-2} + \\
&+ (n+1)(n+2) f_n r^n + n(n+1)\, g_n r^{-(n+2)} + \\
&+ (n-1)(n-2) f_n r^{-n}] \sin n\alpha\}, \\
\tau_{r\alpha_c} &= \sum_{n=2}^{\infty} \{[n(n-1)\, a_n r^{n-2} + n(n+1)\, b_n r^n - \\
&- n(n+1)\, c_n r^{-(n+2)} - n(n-1)\, d_n r^{-n}] \sin n\alpha - \\
&- [n(n-1)\, e_n r^{n-2} + n(n+1) f_n r^n - n(n+1)\, g_n r^{-(n+2)} - \\
&- n(n-1)\, h_n r^{-n}] \cos n\alpha\} + \left(2b_1 r - \frac{2c}{r^3} + \frac{d_1}{r}\right)\sin\alpha - \\
&- \left(2f_1 r - \frac{2g_1}{r^3} + \frac{h_1}{r}\right)\cos\alpha.
\end{aligned}
\right\} \qquad (15)
$$

Distribuția de presiuni în interiorul peliculei de lubrifiant, orice formă ar avea, în problema hidroelastică poate fi exprimată printr-o serie Fourier de forma

$$p(\alpha) = -\sum_{n=0}^{\infty} A_n^* \cos n\alpha - \sum_{n=0}^{\infty} B_n^* \sin n\alpha. \tag{16}$$

Condițiile la limită ale problemei hidroelastice pe fața *interioară* a cuzinetului, considerînd simultan procesele hidrodinamice și cele elastice, sînt

$$r = r_f + h; \qquad \sigma_{r_c} = -p(\alpha); \qquad \tau_{r\alpha_c} = \tau_0, \tag{17}$$

înțelegînd prin τ_0 efortul unitar tangențial din fluid pe suprafața cuzinetului. Complicațiile analitice devin cu atît mai mari cu cît eforturile unitare tangențiale în masa de fluid sînt dependente de viscozitate, de asemenea variabilă. Se observă însă că, din punctul de vedere al *deformațiilor elastice* și ținînd seama de faptul că raportul dintre eforturile unitare tangențiale și cele radiale sînt de ordinul de mărime al coeficientului de frecare fluidă, efectul primelor încărcări poate fi desconsiderat. Pe de altă parte, înlocuind prima condiție la limită prin $r = r_c$, se face o eroare mai mică decît $\Psi = \frac{\Delta r}{r}$, adică de ordinul miimilor. În acest sens, în cazul de față rămînem foarte apropiați de realitate, acceptînd drept condiții la limită pe fața interioară a cuzinetului

$$r = r_c; \qquad \sigma_{r_c} = -p(\alpha); \qquad \tau_{r\alpha_c} = 0, \tag{17'}$$

care, împreună cu relațiile (13), (15) și (16), duc la ecuațiile

$$\frac{b_0}{r^2} + 2c_0 = \mathcal{A}_0.$$

$$2b_1 r_c - \frac{2c_1}{r_c^3} + \frac{3+\mu_c}{1-\mu_c} \cdot \frac{d_1}{r_c} = \mathcal{A}_1,$$

$$2\bar{b}_1 r_c - \frac{2c_1}{r_c^3} + \frac{d_1}{r_c} = 0,$$

$$2f_1 r_c - \frac{2g_1}{r_c^3} - \frac{3+\mu_c}{1-\mu_c} \cdot \frac{h_1}{r_c} = \mathcal{B}_1,$$

$$2f_1 r_c - \frac{2g_1}{r_c^3} + \frac{h_1}{r_c} = 0,$$

$$\begin{aligned} &-n(n-1)a_n r_c^{n-2} - (n-2)(n+1)b_n r_c^n - n(n+1)c_n r_c^{-(n+2)} - \\ &\quad -(n+2)(n-1)d_n r_c^{-n} = \mathcal{A}_n, \\ &n(n-1)a_n r_c^{n-2} + n(n+1)\bar{b}_n r_c^n - n(n+1)c_n r_c^{-(n+2)} - \\ &\quad -n(n-1)d_n r_c^{-n} = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

$$-n(n-1)e_n r_c^{n-2} - (n-2)(n+1)f_n r_c^n - n(n+1)g_n r_c^{-(n+2)} -$$
$$-(n+2)(n-1)h_n r_c^{-n} = \mathcal{B}_n,$$
$$n(n-1)e_n r_c^{n-2} + n(n+1)f_n r_c^n - n(n+1)g_n r_c^{-n} -$$
$$-n(n-1)h_n r_c^{-n} = 0.$$

Pe fața *exterioară* a cuzinetului, condițiile la limită devin cele ale unei probleme de elasticitate.

Bucșa cilindrică din material plastic este introdusă în corpul metalic al cuzinetului, considerat „relativ rigid" ca și arborele, astfel încît deplasarea ei radială este împiedicată.

Notînd cu s grosimea pereților bucșei, condițiile la limită pe fața ei exterioară devin

$$r = r_c + s\,; \qquad \tau_{r\alpha_c} = 0\,; \qquad u_c = 0 \tag{19}$$

sau

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1+\mu_c}{r_c+s} b_0 + 2(1-\mu_c)(r_c+s)c_0 = 0,\\
&(1-3\mu_c) b_1 (r_c+s)^2 + \frac{1+\mu_c}{(r_c+s)^2} c_1 - \frac{(1-\mu_c)^2+4}{1-\mu_c} d_1 \ln(r_c+s) = -\mathcal{C},\\
&2b_1(r_c+s) - \frac{2c_1}{(r_c+s)^3} + \frac{d_1}{r_c+s} = 0,\\
&(1-3\mu_c) f_1 (r_c+s)^2 + \frac{1+\mu_c}{(r_c+s)^2} g_1 - \frac{(1-\mu_c)^2+4}{1-\mu_c} h_1 \ln(r_c+s) = -\mathcal{D},\\
&2f_1(r_c+s) - \frac{2g_1}{(r_c+s)^3} + \frac{h_1}{r_c+s} = 0,\\
&-n(1+\mu_c) a_n (r_c+s)^{n-1} - [n(1+\mu_c) - 2(1-\mu_c)] b_n (r_c+s)^{n+1} +\\
&\quad + n(1+\mu_c) c_n (r_c+s)^{-(n-1)} +\\
&\quad + [n(1+\mu_c) + 2(1-\mu_c)] d_n (r_c+s)^{-(n-1)} = 0\\
&n(n-1) a_n (r_c+s)^{n-2} + n(n+1) b_n (r_c+s)^n -\\
&\quad - n(n+1) c_n (r_c+s)^{-(n+2)} - n(n-1) d_n (r_c+s)^{-n} = 0,\\
&-n(1+\mu_c) e_n (r_c+s)^{n-1} - [n(1+\mu_c) - 2(1-\mu_c)] f_n (r_c+s)^{n+1} +\\
&\quad + n(1+\mu_c) g_n (r_c+s)^{-(n-1)} +\\
&\quad + [n(1+\mu_c) + 2(1-\mu_c)] h_n (r_c+s)^{-(n-1)} = 0,\\
&n(n-1) e_n (r_c+s)^{n-2} + n(n+1) f_n (r_c+s)^n -\\
&\quad - n(n+1) g_n (r_c+s)^{-(n+2)} - n(n-1) h_n (r_c+s)^{-n} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Așa cum se constată, chiar în ipoteza cunoașterii repartiției presiunii în pelicula de lubrifiant de-a lungul zonei portante, calculul pentru

determinarea deplasărilor radiale u_c ale feței interioare a bucșei este extrem de laborios. Or, în cazul hidroelastic, funcția presiunilor (16), poziția fusului în cuzinet și deci însuși h_g sînt necunoscute anticipat.

Problema se poate rezolva printr-un procedeu de recurență.

Luînd în ajutor ecuația (7), în ipoteza *indeformabilității* fusului și a corpului cuzinetului, se dezvoltă funcția presiunilor în seria Fourier dată de relația (16). Din ecuațiile (18) și (20) se determină constantele de integrare ale funcției biarmonice Φ_c a tensiunilor, iar din prima relație (14) se obține deplasarea radială u_c pe fața interioară a bucșei. Folosind mai departe succesiv condițiile (6) și (2), rezultă în prima aproximație făcută înălțimea totală a peliculei h, cu care se repetă calculul pentru o a doua aproximație ș.a.m.d.

4. SIMPLIFICĂRI VALABILE PENTRU CUZINEȚI DIN MATERIALE PLASTICE FIXAȚI ÎN CUZINEȚI METALICI „RELATIV RIGIZI"

Deplasarea radială a unui punct P din interiorul peretelui bucșei poate fi exprimată, cu o aproximație dependentă de raportul dintre distanța k de la suprafața interioară și raza r_c a bucșei (fig. 2), după cum urmează :

$$u_c(r_c + k, \alpha, z) \cong u_c(r_c, \alpha, z) + k \frac{\partial u_c(r, \alpha, z)}{\partial r}. \tag{21}$$

Întrucît $\frac{\partial u_c}{\partial r} \cong \varepsilon_{r_c}$, care, conform legii lui Hooke pentru problema spațială a elasticității, este

$$\varepsilon_{r_c} = \frac{\sigma_{r_c} - \mu_c(\sigma_{\alpha_c} + \sigma_{z_c})}{E_c}, \tag{22}$$

devine

$$u_c(r_c + k, \alpha, z) \cong u_c(r_c, \alpha, z) + k \frac{\sigma_{r_c} - \mu_c(\sigma_{\alpha_c} + \sigma_{z_c})}{E_c}. \tag{23}$$

Pentru un cuzinet din material plastic în carcasă metalică, deci cu deplasarea împiedicată pe suprafața exterioară, supus unei presiuni interioare, tensiunile σ_{α_c}, și σ_{z_c} sînt mici în raport cu tensiunile σ_{r_c}, importanța lor scăzînd cu atît mai mult cu cît în relația (22) valorile aferente sînt multiplicate cu coeficientul de contracție transversală μ_c. O exemplificare într-un caz numeric conține figura 3.

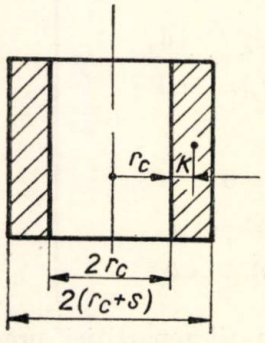


Fig. 2

Ca urmare, pentru deplasarea punctului curent de pe suprafața exterioară a bucșei, devenind $k = s$, se poate scrie foarte apropiat de realitate

$$u_s(r_c + s, \alpha, z) \cong u_c(r_c, \alpha, z) + s \frac{\sigma_{r_c}}{E_c} \tag{24}$$

sau, cum $\sigma_{r_c} = -p(\alpha, z)$,

$$u_c(r_c + s, \alpha, z) \cong u_c(r_c, \alpha, z) - \frac{s}{E_c} p(\alpha, z). \tag{25}$$

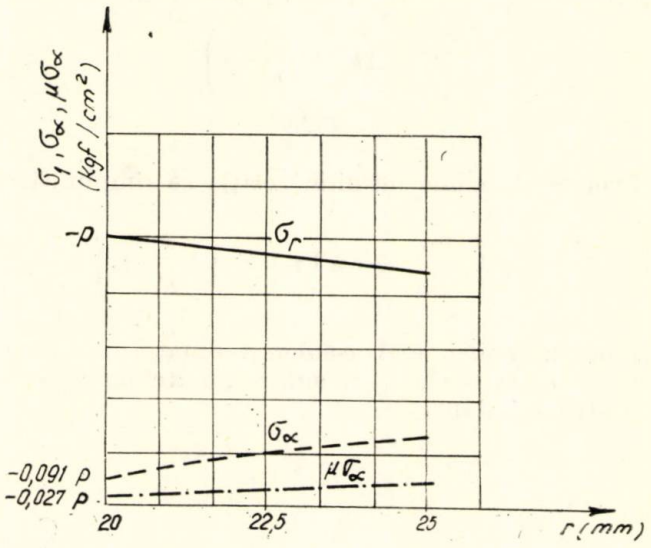


Fig. 3

Condiția de împiedicare a deplasării la exteriorul bucșei se exprimă însă prin

$$u_c(r_c + s, \alpha, z) = 0,$$

de unde rezultă pentru punctele de pe suprafața interioară a ei

$$u_c(r_c, \alpha, z) = \frac{s}{E_c} p(\alpha, z), \tag{26}$$

respectiv

$$h_{c_c}(\alpha, z) = \frac{s}{E_c} p(\alpha, z). \tag{26'}$$

În acest caz, în consecință, deplasările elastice sînt, foarte apropiat de realitate, proporționale cu presiunea din filmul de lubrifiant. Ernst Wenger, în lucrarea [3], folosește această proporționalitate a deformațiilor cu efortul unitar specific pe baza legii restrînse a lui Hooke, presupunînd o repartiție cosinusoidală a sarcinii pentru stabilirea jocului radial necesar, fără însă a face vreo legătură cu legile teoriei elasticității și cu presiunile date de teoria hidrodinamică a lubrificației.

În forma generală, ecuația problemei hidroelastice devine astfel

$$\frac{\partial}{r_c^2 \cdot \partial\alpha}\left[\frac{\left(h_0' + \frac{s}{E_c}p\right)^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial\alpha}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\left(h_0' + \frac{s}{E_c}p\right)^3}{\eta}\frac{\partial p}{\partial z}\right] = 6V\frac{\partial\left(h_0' + \frac{s}{E_c}p\right)}{r \cdot \partial\alpha}. \tag{27}$$

Pentru fusul cu lungime infinită, relația se simplifică, luînd forma

$$\left(h_0' + \frac{s}{E_c}p\right)^3 \frac{\partial p}{\partial\alpha} = 6\eta V r_c\left(h_0' + \frac{s}{E_c}p\right) + C_1. \tag{28}$$

Dificultățile integrării unei asemenea ecuații sînt cu mult sporite față de cele ale integrării relației uzuale a lui Reynolds, chiar dacă s-ar admite viscozitatea constantă.

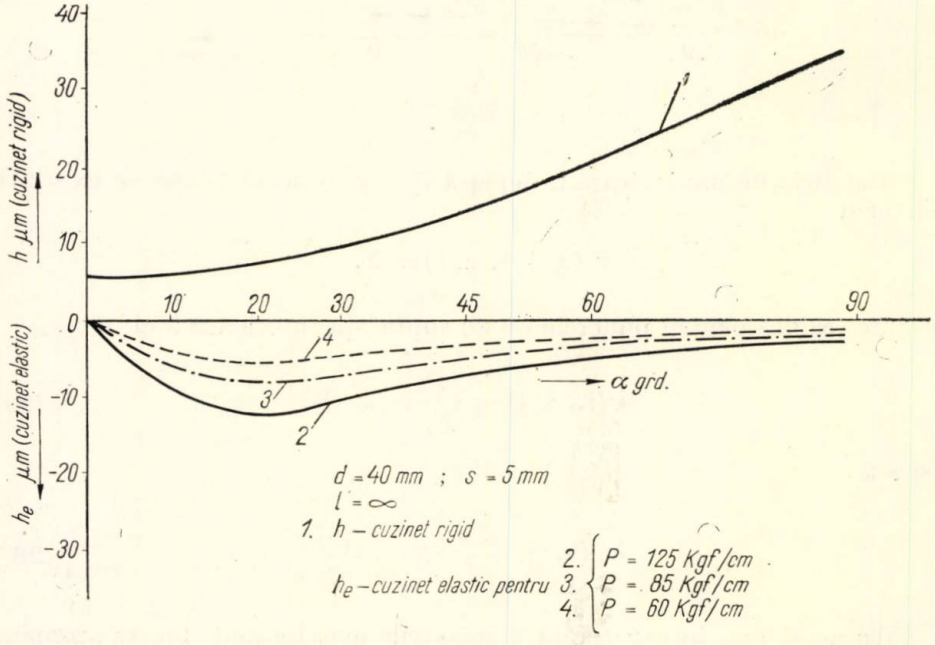
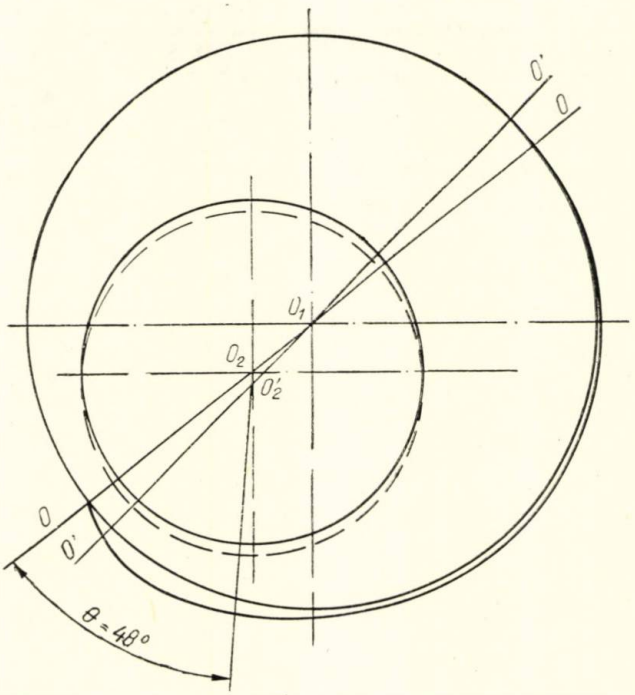


Fig. 4

Din acest motiv, metoda de recurență propusă mai sus apare mai indicată în acest caz.

În figura 4 sînt reprezentate deformațiile elastice ale cuzinetului din poliamidă, calculate pentru trei valori de încărcare în condiții date și

considerînd lungimea zonei portante egală cu 180°. Se observă că acestea pot fi mai mici decît înălțimea geometrică *inițială* h_0 sau o pot chiar depăși local.



O_1 = centrul cuzinetului
O_2 = centrul deplasat al fusului (cuzinet rigid)
O'_2 = centrul deplasat al fusului (cuzinet elastic)

Jocul fus-cuzinet și deformațiile elastice locale sînt mărite de 2000 de ori. Diametrele și distanța O_1O_2 nu sînt reprezentate la scară.
Deplasarea centrului fusului, $O_2O'_2 = 1{,}6\,\mu m$
Grosimea cuzinetului elastic: $s = 1\,mm$

Fig. 5

Datorită acestor deformații, deplasarea centrului fusului față de cel al cuzinetului nu mai este identică cu cea din cazul fus-cuzinet rigid: se remarcă o abatere unghiulară și o deplasare pe direcția verticală, în sensul că fusul se adîncește în cuzinet. Urmarea este o strangulare posibilă a înălțimii minime inițiale cu repercusiuni defavorabile pentru funcționare (fig. 5).

În realitate, efectul este diminuat prin trecerea lină de la partea deformată spre cea nedeformată a cuzinetului în zona de ieșire.

Primită la redacție la 24 octombrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Manea, N. Boicu, M. Pascovici, *Aspecte termice ale cuzineților pentru lagăre, îndeosebi din materiale plastice,* Bulet. Inst. polit. București, XXVIII-5, 61 (1966).
2. Gh. Manea, M. Pascovici, *Particularități ale cuzineților din poliamide cu privire la efectul tehnologiei de fabricație și la comportarea termică a lor sub aspectul cîmpului de temperatură în film,* St. cerc. mec. apl., **23**, 6, 1395 (1966).
3. E. Wenger, *Bestimmung des Lagerspiels von Kunstharzpreßstofflagern unter Berücksichtigung der Verformbarkeit des Werkstoffes,* Stahl und Eisen, **84**, 3, 153 (1964).
4. A. Gray și G. B. Mathews, *Funcțiile Bessel și aplicațiile lor în fizică,* București, Edit. tehnică, 1958.
5. M. Filonenco-Borodici, *Teoria elasticității,* București, 1952, Edit. tehnică.

DETERMINAREA PONDERII INFLUENȚEI UNORA DINTRE FACTORII UZĂRII PRIN ANALIZA STATISTICĂ

de DAN PAVELESCU
Centrul de mecanică a solidelor
Academiei Republicii Socialiste România

539.6 :621

Date fiind părerile diferite exprimate în literatura de specialitate privind ordinea factorilor uzării și totodată evoluția aleatorie a acestui fenomen, în lucrare se urmărește punerea în evidență a ponderii influenței unor factori principali ai uzării, utilizînd două metode statistice moderne : analiza dispersiei vitezei de uzare pe baza metodei planului de experiențe și metoda statistică a corelației multiple. De asemenea, față de multitudinea formulelor empirice existente, se urmărește modul de obținere printr-o metodă statistică a unei relații de dependență a vitezei de uzare de factorii : sarcina specifică, viscozitatea, duritatea și viteza relativă de alunecare pentru un anumit interval de valori și cuplă de frecare cu contact liniar (suprafață plană-suprafață cilindrică).

1. PRIVIND INFLUENȚA FACTORILOR UZĂRII

Rezultatele obținute experimental în diferite lucrări [1]—[4] și presupunînd existența unor condiții normale de interacțiune, au indicat următoarea ordine a factorilor care pot influența în mod deosebit evoluția uzării prin prisma vitezei de uzare în cazul frecării-limită și mixtă de alunecare : geometria și tipul cuplei de frecare, mediul — îndeosebi prezența unor aditivi chimici activi, presiunea specifică, starea de suprafață — și condițiile locale ale suprafeței de frecare : temperatură, natura materialelor cuplei, duritatea, viteza de alunecare etc.

Intervenția factorilor generează fenomenele tranzitorii ale frecării și uzării, fluctuații ale vitezei de uzare și coeficientului de frecare etc. și erori, influențînd reproductibilitatea și deci precizia.

În legătură cu aceasta, pe baza studiilor cuprinse în lucrările menționate, se fac următoarele aprecieri :

— *Geometria și tipul cuplei de frecare* pot conduce, prin schimbarea suprafeței de contact în timpul frecării, la modificarea sarcinii

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. (în limba engleză) **13**, *2* (1968)

specifice, a regimului de ungere şi, în cele din urmă, la variaţia vitezei de uzare după o lege statistică; la situaţiile unor fluctuaţii mari ale valorilor vitezei de uzare se poate ajunge şi în cazul unei cuple de frecare corect aleasă dacă raportul durităţilor favorizează uzare suprafeţelor şi crearea „panei de ulei". Prin schimbarea regimului de ungere, erorile respective pot trece din sistematice în întîmplătoare (de exemplu apariţii neregulate ale regimului hidrodinamic).

— Un anumit *regim de sarcină şi de temperatură* poate duce, în mişcarea alternativă, la variaţia vitezei de uzare de-a lungul unei curse; anumite sisteme mecanice care conţin cuple de frecare corect alese pot favoriza, totuşi, apariţia mişcării sacadate şi fluctuaţii ale forţei de frecare şi ale vitezei de uzare.

— *Variaţia stării de suprafaţă* (microgeometriei şi straturilor superficiale), distrugerea şi refacerea ei funcţie de factorii mecanici şi chimici [5] contribuie la variaţia vitezei de uzare; de asemenea menţionăm urma de contact şi trecerea ei în cursul procesului de frecare prin forme neregulate, situaţie care produce fluctuaţii ale temperaturii de suprafaţă şi ale uzării chiar în cazul existenţei condiţiilor normale (geometrie, duritate etc.).

— *Prelucrarea şi finisarea suprafeţelor* conduce la variaţii importante ale microgeometriei pe aceeaşi suprafaţă şi de la o epruvetă la alta, cu influenţă în perioada uzării iniţiale şi chiar după rodaj. În cazul mişcării sacadate, variaţiile de rugozitate limitează precizia prin prisma variaţiei amplitudinei *stick-slip*-ului.

— *Natura materialelor şi structura lor* intervin de asemenea în evoluţia uzării şi a vitezei de uzare. Se constată că nu în toate cazurile transformările din stratul de suprafaţă sînt întovărăşite de transformarea structurală pe o anumită adîncime.

Modificarea unei componente (de exemplu la bronzuri) conduce la schimbarea comportării la uzare, privită prin prisma apariţiei sau amplificării regimului de fluctuaţii (fig. 1).

Fluctuaţiile uzării sînt produse şi de structura neomogenă în stratul superficial (de exemplu eutectoidul alternînd cu zone de duritate mai mică; vezi fig. 2).

S-a constatat, de asemenea, uneori, atît importante fluctuaţii de structură şi de compoziţie la aceeaşi şarjă a unor epruvete de fontă de ghidaje şi pentru segmenţi, cît şi, desigur, fluctuaţii ale caracteristicilor mecanice; apare deci imperios necesitatea selectării probelor.

— Prezenţa diferită a *aditivilor chimici* poate contribui, după cum s-a arătat [5], atît la varierea vitezei de uzare, cît şi la atenuarea fluctuaţiei uzării şi temperaturii, de asemenea la modificări în variaţia aleatorie a elementelor *stick-slip*-ului [4]. Influenţa temperaturii asupra proprietăţii de ungere a unor uleiuri poate fi limitată de prezenţa unor aditivi.

— Cu *creşterea sarcinii* în condiţii de extremă presiune, influenţa acesteia devine preponderentă prin reducerea filmului de lubrifiant şi prin trecerea în regim de deformaţii plastice a microrugozităţilor. În condiţiile mişcării sacadate, chiar cînd regimul de frecare nu este de extremă presiune, sarcina devine un factor principal alături de rugozitate şi de viscozitate [5].

— *Influenţa vitezei de alunecare* apare evidentă prin intermediul variaţiei forţei de frecare, cu pondere mai mare în mişcare alternativă şi sacadată.

— *Fluctuațiile în condițiile mișcării sacadate.* Pe baza înregistrărilor oscilografice s-a constatat [5] o variație aleatorie a forței de frecare și existența suprapunerii mai multor surse de fluctuație ($\sigma_{exp} > \sigma_{\bar{x}}$), distribuția fiind normală (Gauss-Laplace).

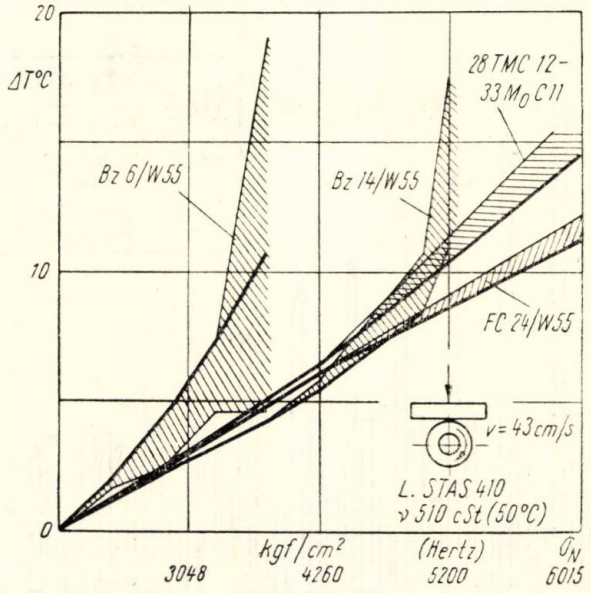


Fig. 1. — Diagrama diferenței de temperatură ΔT, sarcina specifică σ_N pentru diferite cuple de frecare: două bronzuri pe oțel; două oțeluri de cimentare; fontă-oțel; $\Delta T°C = T_2$ (temperatura medie a suprafeței metalice a plăcii plane) — T_1 (temperatura medie a uleiului din cuvă) cu instalația [2].

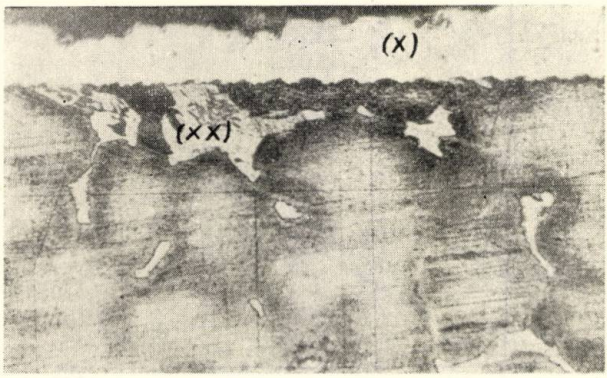


Fig. 2. — Bucșe de *Bz* 9 + 1% In (turnată, secționată, 250 ×); *x*-aliaj de protejare a suprafeței; *xx*-eutectoidul nu apare continuu la suprafața de frecare.

Menționăm că în lucrările de specialitate apar păreri diferite privind ordinea și deci ponderea factorilor uzării.

2. STABILITATEA PONDERII INFLUENȚEI FACTORILOR PRIN ANALIZĂ STATISTICĂ

Complexitatea fenomenului, interacțiunea factorilor, existența mai multor procese aleatorii, impun o prelucrare statistică a observațiilor experimentale pentru stabilirea ponderii factorilor. S-a ales cupla de fre-

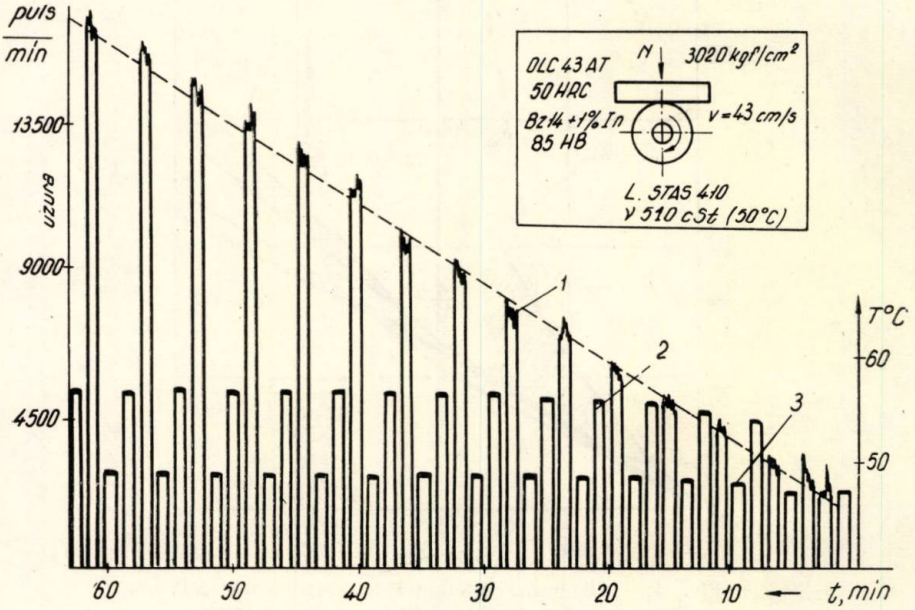


Fig. 3. — Diagrama evoluției uzării (*1*) (puls/min) temperaturii medii a piesei cu suprafață plană (*2*) și temperaturii medii a uleiului (*3*).

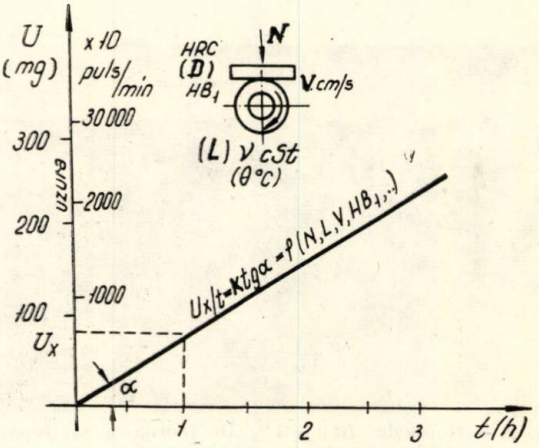


Fig. 3*a*. — Schița dependenței vitezei de uzare de sarcină, viscozitate, viteză și duritate.

care tip II-1-c (bucșă pe placă plană), ținînd seama și de constatarea făcută [2] privind alura curbei de uzură la extremă presiune a suprafe-

țelor rectificate, care permite caracterizarea evoluției uzării prin viteze de uzare $U^* = U_x/h$ (fig. 3 *a*).

Dintre multitudinea factorilor menționați au fost aleși următorii: viscozitatea lubrifiantului (ν), sarcina specifică (σ_N), duritatea medie (D) a suprafeței piesei de duritate mică, viteza relativă de alunecare (V).

Se urmărește stabilirea dependenței vitezei de uzare de acești factori.

2.1. SISTEM CU 2^4 COMBINAȚII

Pentru analiza statistică s-a ales un sistem cu 2^4 combinații pe baza metodei „planului de experiențe", datorită lui sir R. Fisher [7], stabilindu-se metodica și analiza dispersiei, ținînd seama de [8]—[10]; s-a considerat intervalul de valori

— $\nu_1 = 100$ cSt și $\nu_2 = 18$ cSt, respectiv $\theta_1 = 49°C$ și $\theta_2 = 80°C$, ulei STAS 410, neaditivat;

— $\sigma_{N_1} = 1\,971$ kgf/cm² și $\sigma_{N_2} = 2\,730$ kgf/cm²;

— $D_1 = 60$ HB și $D_2 = 80$ HB pentru Bz 9 + 1% I_n (față de 33MoC11, 60HRC) [2];

— $v_1 = 0{,}435$ cm/s și $V_2 = 0{,}205$ cm/s.

Pentru simplificare, metoda statistică presupunînd însumări pe linii, coloane între grupe de combinații etc., s-au adoptat următoarele notații:

— combinațiile factorilor: ν_i; σ_{Nj}; V_k; $D_f \rightarrow Y_{ijkf}$;

— sumele pe linii: $Y.. k_f$ sau pe coloane $Y_{ij}..$;

— totalul sumelor pe linii sau coloane $Y....$

Astfel, în cadrul celor 2^4 combinații admise, valorile respective (medii) ale vitezelor de uzare (mg/h) obținute experimental cu instalația din lucrarea (2) sînt date în tabela 1 [3].

Tabela 1

D	σ_N / V	ν_1		ν_2		$\sum Y_{ijkf}$ 1,2
		1	2	1	2	
1	1	Y_{1111} 18,2	Y_{1211} 35,5	Y_{2111} 29,4	Y_{2211} 60,5	$Y..11$ 143,6
	2	Y_{1121} 17,3	Y_{1221} 34,2	Y_{2121} 28,6	Y_{2221} 55,8	$Y..21$ 135,9
2	1	Y_{1112} 16,5	Y_{1212} 31,4	Y_{2112} 27,5	Y_{2212} 53,1	$Y..12$ 128,5
	2	Y_{1122} 15,9	Y_{1222} 30,0	Y_{2122} 26,7	Y_{2222} 49,9	$Y..22$ 122,5
$\sum Y_{ijkf}$ 1,2		$Y_{11}..$ 67,9	$Y_{12}..$ 131,1	$Y_{21}..$ 112,2	$Y_{22}..$ 219,3	$Y....$ 530,5

[2]) Pentru 33MoCM, microduritatea medie (kgf/mm²) = 1 164,9 (P = 50g): pentru Bz9: eutectoid $H_1 = 48{,}3$ kgf/mm²) ($P = 20$g); dendrite primare: $H_2 = 30$kgf/mm²; de asemenea temperatura influențează prin prisma viscozității.

[3]) Valorile s-au obținut cu abaterea medie pătratică de 8%.

Pentru calculele necesare analizei dispersiei se determină :

— factorul de corecție $\frac{(\Sigma Y)^2}{n} = \frac{Y_{\ldots}^2}{16} = 17589{,}39$;

— sumele între două linii (de forma)

$$Y_{..11} + Y_{..21} = Y_{...1} ;$$

— sumele între două coloane (de forma)

$$Y_{11..} + Y_{12..} = Y_{1...}$$

De asemenea, toate sumele necesare funcție de combinațiile factorilor au fost grupate în nouă tabele, și anume (tabela 2)[4].

Tabela 2

Tabele	Factorii	Sumele :			
2.1	$\nu \times V$	$Y_{1 \cdot 1 \cdot}$	$Y_{2 \cdot 1 \cdot}$	$Y_{1 \cdot 2 \cdot}$	$Y_{2 \cdot 2 \cdot}$
2.2	$\nu \times D$	$Y_{1 \cdot \cdot 1}$	$Y_{2 \cdot \cdot 1}$	$Y_{1 \cdot \cdot 2}$	$Y_{2 \cdot \cdot 2}$
2.3	$\sigma_N \times V$	$Y_{\cdot 11 \cdot}$	$Y_{\cdot 21 \cdot}$	$Y_{\cdot 12 \cdot}$	$Y_{\cdot 22 \cdot}$
2.4	$\sigma_N \times D$	$Y_{\cdot 1 \cdot 1}$	$Y_{\cdot 2 \cdot 1}$	$Y_{\cdot 1 \cdot 2}$	$Y_{\cdot 2 \cdot 2}$
2.5	$\nu \times \sigma_N \times V$	$Y_{111 \cdot}$	$Y_{121 \cdot}$	$Y_{211 \cdot}$	$Y_{221 \cdot}$
2.6	$\nu \times \sigma_N \times D$	$Y_{11 \cdot 1}$	$Y_{21 \cdot 1}$	$Y_{11 \cdot 2}$	$Y_{21 \cdot 2}$
2.7	$\nu \times V \times D$	$Y_{1 \cdot 11}$	$Y_{2 \cdot 11}$	$Y_{1 \cdot 12}$	$Y_{1 \cdot 22}$
2.8	$\sigma_N \times V \times D$	$Y_{\cdot 111}$	$Y_{\cdot 121}$	$Y_{\cdot 112}$	$Y_{\cdot 122}$
2.9	$\nu \times \sigma_N \times V \times D$	$Y'^2_{11} \ldots$	$Y'^2_{12} \ldots$	$Y'^2_{21} \ldots$	$Y'^2_{22} \ldots$

Ultima tabelă (2.9) conține sumele pe coloane ale pătratelor tuturor observațiilor.

Pentru cei patru factori, abaterile sînt determinate cu ajutorul sumelor pătratelor pe liniile sau coloanele respective, scăzîndu-se factorul de corecție, ca, de exemplu, pentru ν :

$$\frac{Y_{1\ldots}^2 + Y_{2\ldots}^2}{8} - \frac{Y_{\ldots}^2}{16} .$$

De asemenea, abaterile combinațiilor de cîte doi factori se obțin cu sumele pătratelor din tabelele 2.1—2.4, ca, de exemplu, pentru $\nu \times \sigma_N$:

$$\frac{Y_{11..}^2 + Y_{12..}^2 + Y_{21..}^2 + Y_{22..}^2}{4} + \frac{Y_{\ldots}^2}{16} - \frac{Y_{1\ldots}^2 + Y_{2\ldots}^2}{8} +$$

$$+ \frac{Y_{\cdot 1..}^2 + Y_{\cdot 2..}^2}{8} ,$$ ultimii doi termeni provenind din determinarea anterioară.

În cazul abaterilor pentru combinațiile de cîte trei factori se utilizează tabelele 2.5—2.8.

[4] Tabela 2 reprezintă centralizarea celor 9 tabele.

În sfîrșit, pentru combinația $\nu \times \sigma_N \times V \times D$ se calculează sumele $Y'^2_{11} .. + Y'^2_{12} .. + Y'^2_{21} .. + Y'^2_{22} ..$ și sumele obținute anterior pentru combinațiile de 1, 2 și 3 factori (după scheme similare).

Ținînd seama de gradul de libertate $h = n - 1$ și din împărțirea cu gradele de libertate a tuturor abaterilor asupra vitezei de uzare corespunzătoare factorilor (ν, σ_N etc.) și corelațiilor ($\nu \times \sigma_N$), ($\sigma_N \times V$) etc. ($\nu \times \sigma_N \times V$) etc., se obțin următoarele valori ale dispersiilor vitezei de uzare corespunzătoare factorilor respectivi și corelațiilor acestora (tabela 3):

Tabela 3

Factorii	Sume de pătrate	Gradele de libertate	Dispersia
ν	97,26	1	97,26
σ_N	1 812,63	1	1 812,63
V	11,73	1	11,73
D	50,73	1	50,73
$\nu \times \sigma_N$	120,45	1	
$\nu \times V$	1,76	1	
$\nu \times D$	2,05	1	
$\sigma_N \times V$	3,51	1	
$\sigma_N \times D$	13,54	1	
$V \times D$	0,22	1	
$\nu \times \sigma_N \times V$	1,62	1	
$\nu \times \sigma_N \times D$	1,14	1	
$\nu \times V \times D$	0,08	1	
$\sigma_N \times V \times D$	14624,68	1	
$\nu \times \sigma_N \times V \times D$ (diferența)	14759,66	1	
Total	31501,06	15	2100,07

În cazul considerat, analiza dispersiilor cu ajutorul tabelelor testului „F" [11] arată că valorile rapoartelor T/ν, T/σ_N etc. pentru gradele de libertate respective sînt mai mici decît valorile tabelare, efectele din tabela 3 fiind deci semnificative.

Această metodă de analiză statistică oferă indicații calitative, indicînd următoarea ordine a factorilor uzării la E.P. în cazul cuplei II-1-c (pentru intervalul de valori experimentate menționat): sarcina specifică, viscozitatea lubrifiantului, duritatea suprafeței (bucșei) și viteza relativă de alunecare.

2.2. CU PRIVIRE LA RELAȚIILE DE DEPENDENȚĂ A VITEZEI DE UZARE DE PRINCIPALII FACTORI

În literatura de specialitate, relațiile de dependență ale vitezei de uzare sînt numeroase, mergînd de la forme simple (dependența de presiunea de curgere a materialului, duritatea materialului mai moale și un coeficient K) pînă la forme complexe (cu mulți factori și coeficienți).

În general, aceste relații nu sînt demonstrate analitic.

Pentru a se obține și alte indicații de dependență de natură cantitativă și a se obține o relație a vitezei de uzare, s-a utilizat metoda statistică-matematică a corelației multiple (pentru aceeași cuplă de frecare și factorii menționați).

În cazul *distribuției normale* a valorilor experimentale ale vitezei de uzare, într-un anumit domeniu de valori ale factorilor, ținînd seama de [11], [12], se admite ecuația generală de regresie de forma

$$U_x^* = a_0 + a_1\sigma_N + a_2\nu_L + a_3 V + a_4 D + a_{11}\sigma_N^2 + a_{22}\nu_L^2, \quad (1)$$

în care se presupune o dependență de gradul unu și doi a vitezei de uzare de factorii σ_N și ν_L și dependența liniară pentru V și D.

De asemenea, în domeniul respectiv, presupunînd lipsa unei interdependențe între factori, sînt nuli coeficienții a_{12}, a_{13}, a_{14} etc.

Pentru exprimarea în unități adimensionale pe baza valorilor dispersiilor, se obțin valorile

$$n_1 = 3{,}67\,;\ \nu_1 = 1{,}72\,;\ v_1 = 2{,}67\,;\ d_1 = 4{,}26,$$

$$n_2 = 5{,}08\,;\ \nu_2 = 0{,}31\,;\ v_2 = 1{,}26\ \ d_2 = 5{,}27.$$

Conform schemelor din tabela 4, se scrie sistemul de șapte ecuații (tabela 5).

Tabela 4

	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_{11}	a_{22}	U_x^*
	1	n	l	v	d	n^2	l^2	U_X
1	$\Sigma 1$	Σn	Σl	Σv	Σd	Σn^2	Σl^2	$\Sigma\ U$
n	Σn	Σn^2	Σnl	Σnv	Σnd	Σn^3	Σnl^2	ΣnU
l	Σl	Σln	Σl^2	Σlv	Σld	Σln^2	Σl^3	ΣlU
v	Σv	Σvn	Σvl	Σv^2	Σvd	Σvn^2	Σvl^2	ΣvU
d	Σd	Σdn	Σdl	Σdv	Σd^2	Σdn^2	Σdl^2	ΣdU
n^2	Σn^2	Σn^3	$\Sigma n^2 l$	$\Sigma n^2 v$	$\Sigma n^2 d$	Σn^4	$\Sigma n^2 l^2$	$\Sigma n^2 U$
l^2	Σl^2	$\Sigma l^2 n$	Σl^3	$\Sigma l^2 v$	$\Sigma l^2 d$	$\Sigma l^2 n^2$	Σl^4	$\Sigma l^2 U$

Tabela 5

$$\begin{aligned}
16a_0 + 70\ a_1 + 16{,}24a_2 + 31{,}44a_3 + 79{,}44a_4 + 314{,}20a_{11} + 24{,}44a_{12} &= 530{,}50\\
70a_0 + 314{,}2\ a_1 + 71{,}05a_2 + 137{,}55a_3 + 347{,}55a_4 + 1144{,}24a_{11} + 106{,}92a_{12} &= 2441{,}00\\
16{,}24a_0 + 71{,}05a_1 + 24{,}44a_2 + 31{,}91a_3 + 80{,}63a_4 + 318{,}96a_{11} + 40{,}96a_{12} &= 445{,}05\\
31{,}44a_0 + 137{,}55a_1 + 31{,}91a_2 + 69{,}73a_3 + 156{,}10a_4 + 617{,}40a_{11} + 48{,}04a_{12} &= 1052{,}09\\
79{,}44a_0 + 347{,}55a_1 + 80{,}63a_2 + 156{,}10a_3 + 402{,}37a_3 + 1560{,}04a_{11} + 121{,}28a_{12} &= 2613{,}84\\
314{,}20a_0 + 1444{,}24a_1 + 318{,}96a_2 + 617{,}40a_3 + 1560{,}04a_4 + 6779{,}28a_{11} + 479{,}88a_{12} &= 11468{,}31\\
24{,}44a_0 + 106{,}92a_1 + 40{,}96a_2 + 48{,}04a_3 + 121{,}28a_4 + 479{,}88a_{11} + 70{,}08a_{12} &= 566{,}48
\end{aligned}$$

Prin rezolvarea sistemului, de asemenea rezolvînd și sistemul de șase ecuații — în cazul în care se admite dependența de gradul doi nu-

mai pentru sarcina specifică (fig.4) — , precum și sistemul de cinci ecuații, în care se admite numai dependența de gradul unu, se obțin valorile

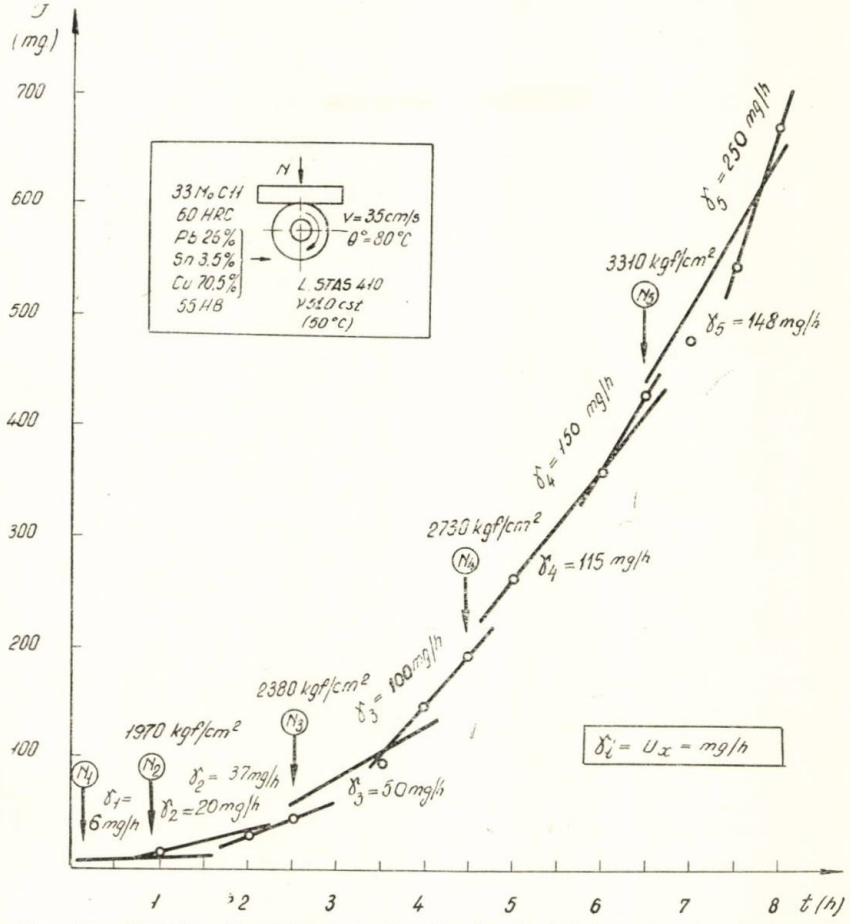


Fig. 4. — Variația vitezei de uzare funcție de sarcină la un cuplu de frecare tip II-I-c (*Bc* —01)

coeficienților a și , revenind la unitățile de măsură respective, se obțin cele trei relații:

$$U_x^* \cong 602{,}753 + 0{,}01186\ \sigma_N - 39{,}359\ \nu_L + 7{,}442\ V - 0{,}179\ D + \\ + 35{,}10^{-7}\ \sigma_N^2 + 0{,}3327\ \nu_L^2\ , \qquad (2)$$

$$U_x^* \cong = 7{,}902 + 0{,}0118\ \sigma_N - 0{,}202\ \nu_L + 7{,}442\ V - 0{,}179\ D + \\ + 35{,}10^{-7}\ \sigma_N^2\ , \qquad (3)$$

$$U_x^* = -\ 10{,}8165 + 0{,}0281\ \sigma_N - 0{,}2024\ \nu_L + 7{,}442\ V - 0{,}1787\ D. \qquad (4)$$

Operînd în cele trei relații cu valorile factorilor pentru cele 16 combinații, se obțin *valorile calculate* ale vitezei de uzare, prezentate în figura 5.

Ținînd seama de distribuția abaterilor procentuale, pentru un anumit interval mai mare este mai adecvată relația (2); pentru un interval mai restrîns al valorilor, în special privind σ_N și ν_L, este corespunzătoare

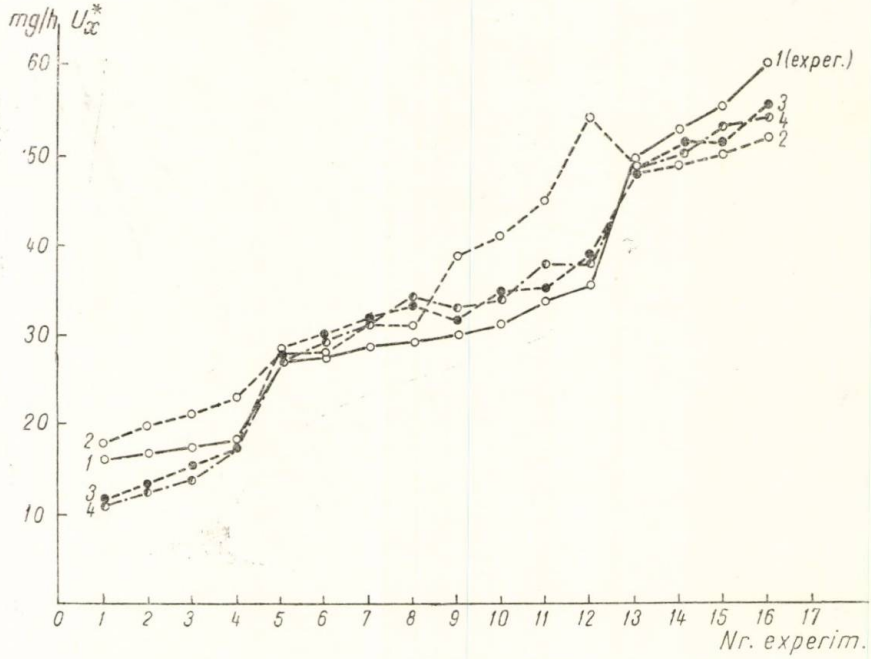


Fig. 5. — Variația valorilor U_x determinate experimental (1) și calculate cu cele trei relații (2), (3) și (4).

relația care presupune dependența de gradul unu. De remarcat că relația în unități adimensionale

$$U_x^* \approx -10{,}8165 + 15{,}0977\, n - 11{,}7046\, \nu + 1{,}2143\, r - 2{,}5275\, d \quad (5)$$

indică o ordine a influenței factorilor similară celei rezultate din analiza statistică de la paragraful precedent. Rezultă o influență dublă a durității față de viteză; de aproximativ 1,3x a sarcinii specifice față de viscozitate și de aproximativ 12 x față de viteza de alunecare.

Abaterile medii pătratice ale valorilor determinate experimental (U_{exp}) față de cele calculate (U_c), ținînd seama de gradul de libertate diferit, sînt

$$\sigma^2_{(2)} = 9{,}16\,; \quad \sigma^2_{(3)} = 4{,}01\,; \quad \sigma^2_{(4)} = 3{,}93.$$

Folosind testul F [11] în cazul dispersiilor apropiate $\sigma^2_{(3)}$ și $\sigma^2_{(4)}$, găsim ipoteza H (egalitatea celor două dispersii) cu o probabilitate mare și se preferă astfel $\sigma^2_{(4)}$ și relația de calcul respectivă (variația liniară) (4).

În acest caz, eroarea maximă admisă este

$$\varepsilon = \pm t_q\ (0{,}01)\frac{\sigma^2_{(4)}}{\sqrt{16}} \approx 3 \text{ mg/h} \quad (6)$$

pentru probabilitatea $P = 0{,}995$ şi $t_q = 3{,}106$ din tabela funcţiei S. Se constată că în 9 din 16 combinaţii valorile calculate faţă de cele experimentale prezintă o eroare mai mică; de asemenea că în 7 din 16 combinaţii, şi anume din poziţiile extreme ale figurii 5, eroarea este mai mare, situaţie care restrînge domeniul de valabilitate al relaţiei.

În concluzie, în cazul unei cuple de frecare prezentate (II—1—c), metoda de studiu statistic al influenţei principalilor factori asupra vitezei de uzare a permis să se indice o ordine a factorilor şi o pondere a influenţei, conducînd şi la o relaţie aproximativă a vitezei de uzare pentru un anumit interval şi cuplă de frecare.

În afară de aspectul practic se pun astfel în evidenţă şi dificultăţile care apar prin prisma corespondentului fizic în cazul determinării relaţiilor vitezei de uzare.

Primită de redacţie la 29 septembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pavelescu, I. Iliuc, S. Barbul, *Étude d'une méthode radioactive pour l'estimation des qualités lubrifiantes des huiles à additifs*, Acta IMEKO, Budapest, 1961, 24—RU—152, p. 1—14.
2. D. Pavelescu, I. Iliuc, *Apparatus for determining the Antiwear properties of Oils and Materials*, Wear, *8*, 133—142 (1965).
3. Д. Павелеску, *Исследования по износу и смазке с помощью радиоактивных изотопов*, ИСРС, *2*, 9—24 (1961).
4. D. Pavelescu, *Dependence of the friction regime and on the stick slip on the main wear factors*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **13**, *1* (1967).
5. — *Aspects of Wear evolution related to the statistical character of the radioactive isotope measuring technics*, Rev. Roum. Sci, Techn.-Méc. Appl., **10**, *6*, 1403—1420 (1965).
6. — *On the dependence of the initial Wear on the mechanical and chemical factor in the case of semifluid or boundary sliding friction*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **10**, *3*, 721—740 (1965).
7. R. Fischer, *The Place of the Design of Experiments in the Logic of Scientific Inference*, p. 13—19. *Le plan d'expériences*, Colloque Internat. Paris, 29 Août — 6 Sept. 1962, Paris, Ed. C.N.R.S., 1963.
8. * * * *Friction and Lubrication of Machine Tool Slideways*, PERA Rep. 59, 1958.
9. O. Kempthore, *The Design and Analysis of Experiments*, Ed. John Wiley-Sons, Canada, 1952, p. 38—65; 248, 252—267.
10. C. Pompily, G. Dall' Aglio, *Piano degli esperimenti*, Roma. Edit. Scientifiche Einaudi, Serie di Statistica, p. 96—130.
11. N. Rancu, I. Tövissi, *Statistica matematică cu aplicaţii în producţie*, Edit. Acad. R.P.R., 1963, p. 697—758.
12. I. Văduva, *Consideraţii teoretice de statistică matematică. Noţiuni de analiza regresiei şi corelaţiei*, anexa, St. cerc. mec. apl., *5*, 1195—1201 (1966).

ASPECTE CANTITATIVE PRIVIND MICROGEOMETRIA SPECIFICĂ A SUPRAFEȚELOR DE FRECARE

de GH. VASILCA și VETURIA RASZILLIER
Institutul de mecanică a fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Se arată că în cazul aliajului γ-Sn 83 portanța Abbott și distribuția numărului de contacte a profilului rezultat din așchiere prezintă proprietățile unei funcții de repartiție normală ca în cazul oțelului. Analizat din acest punct de vedere, se arată că și profilul microgeometriei specifice a acestui aliaj prezintă proprietăți asemănătoare, ceea ce permite o caracterizare cantitativă destul de bună a acestuia. Se determină și se interpretează unii dintre parametrii cantitativi mai importanți ai profilului microgeometriei specifice în cazul materialului Y-Sn 83.

În procesele de lubrificație, chiar în regimuri hidrodinamice, contactele directe dintre suprafețele de alunecare nu pot fi evitate, cel puțin în perioadele de pornire și de oprire a cuplului de frecare. Sub acțiunea presiunilor și a forțelor tangențiale, aceste contacte, care se produc la început la nivelul vîrfurilor asperităților suprafețelor, suferă deformații plastice, forfecări și influențe termice [1]. Unul dintre efectele acestor factori este modificarea rugozității inițiale a suprafețelor. Încercări mai extinse în această direcție, cu cupluri de frecare construite din materiale metalice folosite în mod curent la lagărele mașinilor, au arătat că aceste modificări au un caracter specific naturii materialelor și stării structurale a suprafețelor. Indiferent de rugozitatea inițială, după terminarea rodajului rezultă deci pe suprafețele de alunecare o microgeometrie specifică [2].

Astfel de microgeometrii prezintă însă particularitatea că forma și dimensiunile vîrfurilor și ale adînciturilor nu sînt strict regulate pe toată întinderea suprafețelor în direcția mișcării și perpendicular pe aceasta. Imposibilitatea practică de a evita pătrunderea în lubrifiant a unor particule dure și a particulelor proprii de uzură se traduce prin apariția pe suprafețele de frecare a unor adînciturі dispuse în direcția mișcării, cunoscute sub numele de rizuri, de formă, mărime și distanță între ele

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl. (în limba germană) **13**, 2 (1968).

variabile. De asemenea se constată pe aceste suprafețe abateri de nivel, denumite ondulații. Unele aspecte calitative în legătură cu astfel de modificări ale suprafețelor au fost puse în evidență în lucrări anterioare, mai ales prin imagini fotografice [3]. Ținînd seama că procesul de alunecare se desfășoară în timp în mod preponderent cu suprafețele avînd microgeometria specifică, unele aspecte cantitative ale acesteia, redate în lucrarea de față, ar putea prezenta interes. De altfel au fost deja efectuate [4] și sînt încă în curs cercetări de lubrificație hidrodinamică teoretică și experimentală, luînd în considerare nu suprafețele ideal netede, ci stări ale acestora cu abateri avînd forme cu caracter de periodicitate, prezentînd o exprimare matematică simplă sau o dezvoltare în serie convenabilă. Cunoașterea formei și a unora dintre parametrii cantitativi ai microgeometriei specifice ar putea fi apoi utilă și în legătură cu stabilirea parametrilor corespunzători ai microgeometriei de prelucrare din considerentele de economia fabricației cuplurilor de frecare.

Pentru studiul de față s-a luat în considerare microgeometria de prelucrare și cea specifică a suprafeței active a unui lagăr cilindric din aliajul Y — Sn 83 (echivalent WM 80), care a lucrat în pereche cu un fus din oțel avînd suprafața durificată. Acest lagăr a funcționat timp de 43 de ore în regim hidrodinamic la sarcini pînă la $p_m = 328$ kgf/cm^2, cu viteze pînă la $V = 12$ m/s și la temperaturi medii ale lagărului, în zona presiunilor maxime, pînă la $t_c = 80°C$. Jocul relativ la montaj a fost $\psi = 1{,}25\%$, iar lubrifiantul folosit ulei tip 305 STAS ($\sim 5°E$ la $50°C$).

Drept microgeometrie de prelucrare s-a considerat aceea a unei porțiuni din zona descărcată a suprafeței active, care practic nu a fost afectată de procesul de alunecare, iar drept microgeometrie specifică aceea a porțiunii situate în zona grosimii minime a filmului de lubrifiant, în care efectul acțiunii acestui proces a fost o modificare totală a rugozității inițiale de prelucrare.

În figura 1 se prezintă imaginea fotografică a microgeometriei de prelucrare pe o lungime în direcția axială a lagărului de circa 3 mm, iar în figura 2 microgeometria specifică pe aceeași lungime. În mod calitativ, modificarea microgeometriei de prelucrare prin procesul de alunecare apare din aceste fotografii evidentă.

Unele aspecte cantitative ale acestei modificări care pot prezenta interes mai deosebit în lubrificație sînt studiate în cele ce urmează, luînd în considerare profilogramele acestor microgeometrii. Pentru microgeometria specifică, profilograma corespunzătoare figurii 2 este arătată în figura 8 *a*, iar pentru cea de prelucrare, corespunzătoare unei lungimi de $\sim 0{,}4$ mm în direcție axială din suprafața redată în figura 1, profilograma se vede în figura 3 *a*. Profilogramele sînt ridicate cu ajutorul aparatului Talysurf 3.

Dintre parametrii cantitativi ai microgeometriei specifice, înălțimea maximă a asperităților R_{max} poate fi citită direct pe profilogramă, iar valoarea medie (aritmetică) a neregularităților, corespunzătoare lungimii de referință admise, o indică aparatul de măsură, de asemenea direct. Acești parametri, împreună cu forma profilului, formînd etaloanele de rugozitate, uneori standardizate, pot prezenta interes pentru prelucrarea suprafețelor de frecare, cum se va arăta mai jos. Forma profilului putînd fi valorificată în acest caz numai prin compararea vizuală a suprafeței

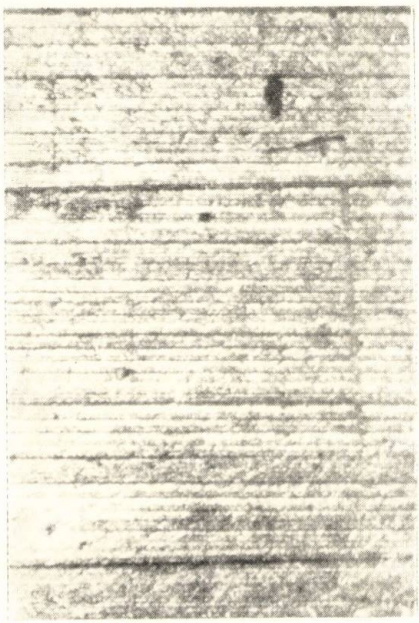


Fig. 1. — Microgeometria de prelucrare la aliajul Y-Sn 83 (100 : 1).

Fig. 2. — Microgeometria specifică la aliajul Y-Sn 83, care a funcţionat în pereche cu un fus din oţel durificat (100 : 1).

prelucrate cu cea etalon, microgeometria obținută este, evident, susceptibilă de a prezenta abateri de formă. Folosirea în aceste condiții a înălțimii maxime a asperităților R_{max} și a abaterii medii R_a în tratarea problemei lubrificației cu suprafețe neideal netede ar putea constitui în consecință numai un progres parțial în această direcție.

Pe de altă parte, numai din parametrii R_{max}, R_a și forma profilului utilizabilă în mod comparativ, deci mai mult calitativ, nu reiese dacă trecerea microgeometriei de prelucrare într-una specifică are la bază vreun criteriu bine stabilit sau dacă această modificare se produce fără nici o legitate. Apare imediat că pentru această analiză trebuie examinați și alți parametri, care să exprime în mod cantitativ mai complet forma profilului. Unul dintre aceștia este ceea ce se numește portanța profilului după Abbott. Prin aceasta se înțelege [5], în cadrul unei lungimi de referință, lungimea plinului profilului după o linie paralelă cu linia medie a profilului și situată la o distanță oarecare față de aceasta din urmă. Portanța profilului este semnificativă pentru lubrificație, deoarece este o măsură a mărimii suprafeței contactelor (ariei reale de contact) în punctele de atingere a două suprafețe conjugate sub o sarcină dată. Pentru lubrificație mai apare important în ce măsură lungimea liniei portanței prezintă întreruperi, spațiile generate de aceste întreruperi constituind pungi minuscule, rezerve de lubrifiant în suprafețele de alunecare. Aceste întreruperi pot fi exprimate prin numărul de contacte aflat pe o lungime dată de portanță.

În legătură cu portanța profilului s-a constatat [6] că funcția care exprimă variația acesteia cu înălțimea asperităților se bucură de proprietățile unei funcții de repartiție. Mai mult, variația portanței în cazul unui profil de rugozitate rezultat la oțel printr-un proces de prelucrare prin așchiere prezintă caracterul unei repartiții normale. Portanța fiind alcătuită din elemente de contact ale asperităților, se poate admite că funcția care exprimă variația numărului de contacte cu înălțimea asperităților are de asemenea proprietățile unei funcții de repartiție normală. Portanța și numărul de contacte ale unui profil rezultat din prelucrarea prin așchiere au deci la bază o lege și, în consecință, funcția care redă variația lor poate fi exprimată printr-o relație cantitativă, desigur specifică naturii și structurii materialului respectiv. Caracterul de funcții de repartiție normală a expresiilor acestor doi parametri constituie un criteriu la care poate fi raportată modificarea, printr-un proces oarecare, a profilului rezultat dintr-o prelucrare prin așchiere. În lubrificație, modificarea microgeometriei de prelucrare se produce, făcînd abstracție de deformările plastice datorite presiunilor, prin uzură, care este de naturi diferite [7]. Dintre acestea uzura abrazivă se aseamănă în mare măsură cu un proces de prelucrare prin așchiere. Funcțiile portanței și ale numărului de contacte ale unui profil modificat printr-un proces de uzură abrazivă ar trebui deci să aibă proprietăți asemănătoare cu cele ale funcțiilor de repartiție normală. Procesele de uzură de altă natură, ca, de exemplu, ale uzurii corosive, adezive, prin oboseală superficială etc., care acționează totdeauna concomitent cu cele de uzură abrazivă, pot însă influența caracterul de repartiție normală a modificării, imprimat de către acest din urmă tip de uzură. Aici mai trebuie menționat că, după operația de rodaj, profilul microgeometriei specifice rezultat din toate aceste procese de

BIBLIOTECA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

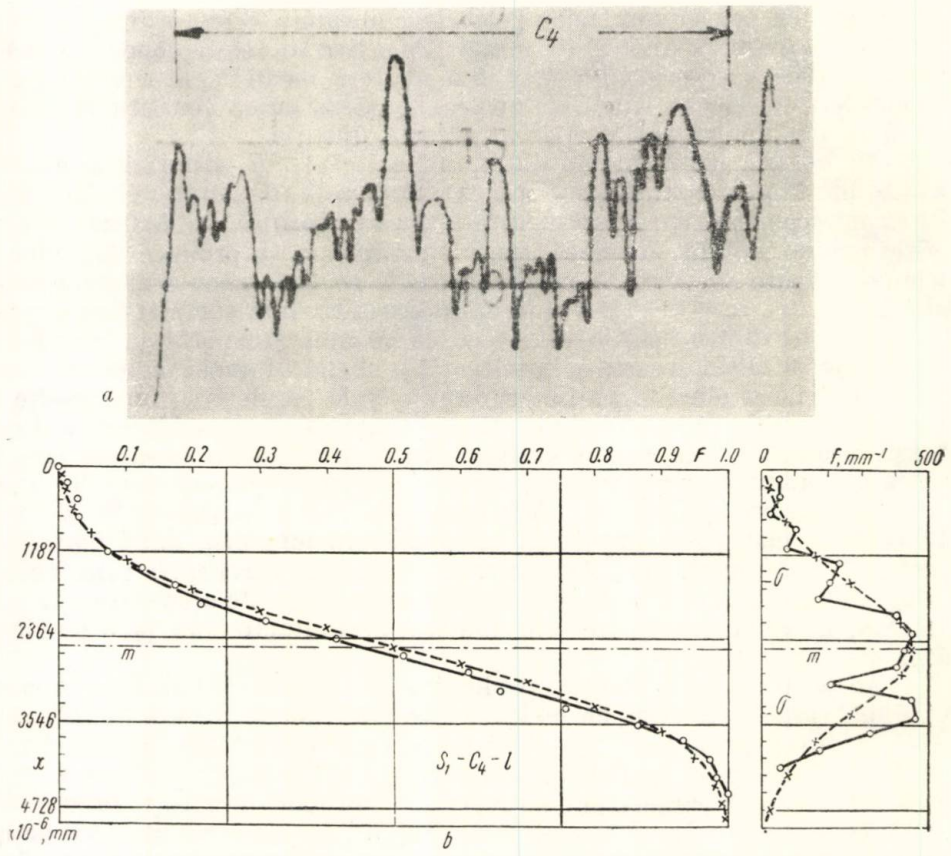
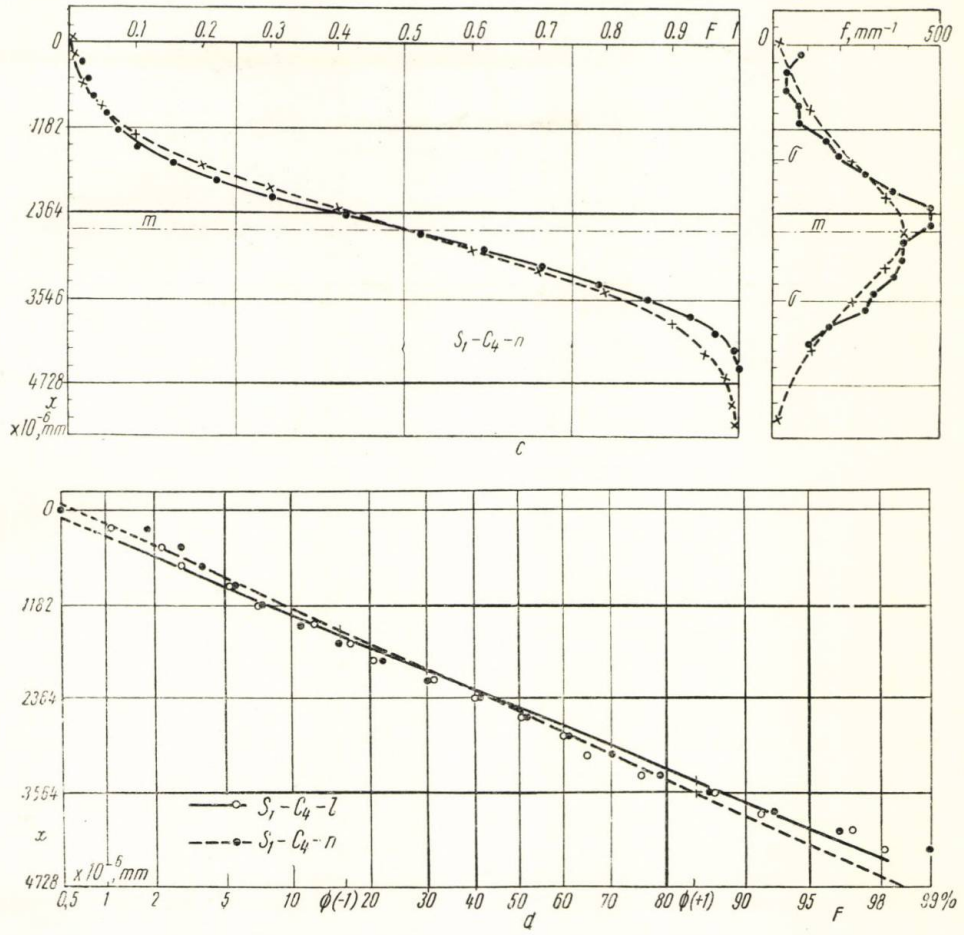


Fig. 3. — Microgeometria de prelucrare c_4 din fig. 1 : a — profilograma ; b — $F(x)$, $f(x)$ pentru portanță ; c — $F(x)$, $f(x)$ pentru numărul de contacte ; d — $F(x)$ liniar ; —— profil real ; - - - profil aproximat normal.

uzură se menține pe toată viața lagărului dacă condițiile de funcționare rămîn neschimbate. Prin uzura cu timpul, acest profil se deplasează paralel cu linia lui medie către interiorul masei materialului peretelui care constituie suprafața de alunecare.

Pentru tratarea problemei prin prisma caracterului de repartiție normală prezentat de portanță și de numărul de contacte, mai trebuie ținut seama de încă un efect al acțiunii factorilor foarte complecși de uzură, și anume de aspectul neregulat al profilului microgeometriei de prelucrare modificate, neregularitate care lipsește la profilul nemodificat. O neregularitate de acest fel prezintă și profilograma din figura 8 a, din care se poate vedea totuși că ea poate fi împărțită în sectoare b_1, b_2 etc., în interiorul cărora forma profilului posedă un specific de un anumit fel. Astfel, de exemplu, în sectorul b_2 forma profilului este relativ regulată și are cea mai redusă înălțime maximă R_{max} a asperităților. În sectorul b_1 R_{max} este mai mare, forma profilului avînd de asemenea un caracter destul de regulat. Sectorul b_3 se caracterizează prin prezența unui riz adînc, iar în sectorul b_4 apare consecutiv un adînc și un vîrf de ondulație de suprafață.



Evident că sînt posibile şi alte secţionări, grupînd aceste elemente ale profilului într-alte moduri, numărul acestora putînd fi mare, însă practic totuşi limitat.

În legătură cu aceste aspecte se pot pune unele probleme, ca, de exemplu, ce elemente caracteristice reprezintă fiecare dintre aceste sectoare în cadrul a ceea ce s-a definit mai sus ca microgeometrie specifică, dacă astfel de sectoare au în suprafaţa de alunecare caracter de periodicitate, ce lungime din suprafaţă trebuie să aibă pentru a reda elemente caracteristice pentru ansamblul microgeometriei specifice etc.

Admiţînd că microgeometria specifică reflectă în întregime proprietăţile materialului, s-ar putea considera că toate cele patru forme sau combinaţii de forme ale profilului obţinute prin sectorizarea de mai sus, precum şi altele, redau limite între care variază diferiţi parametri ai profilului. Astfel, de exemplu, sectorul b_2 arată cea mai fină microgeometrie care poate rezulta în condiţiile cuplului format din aliajul Y—Sn 83 cu fusul din oţel durificat. Pentru ca această porţiune de profil să fie repre-

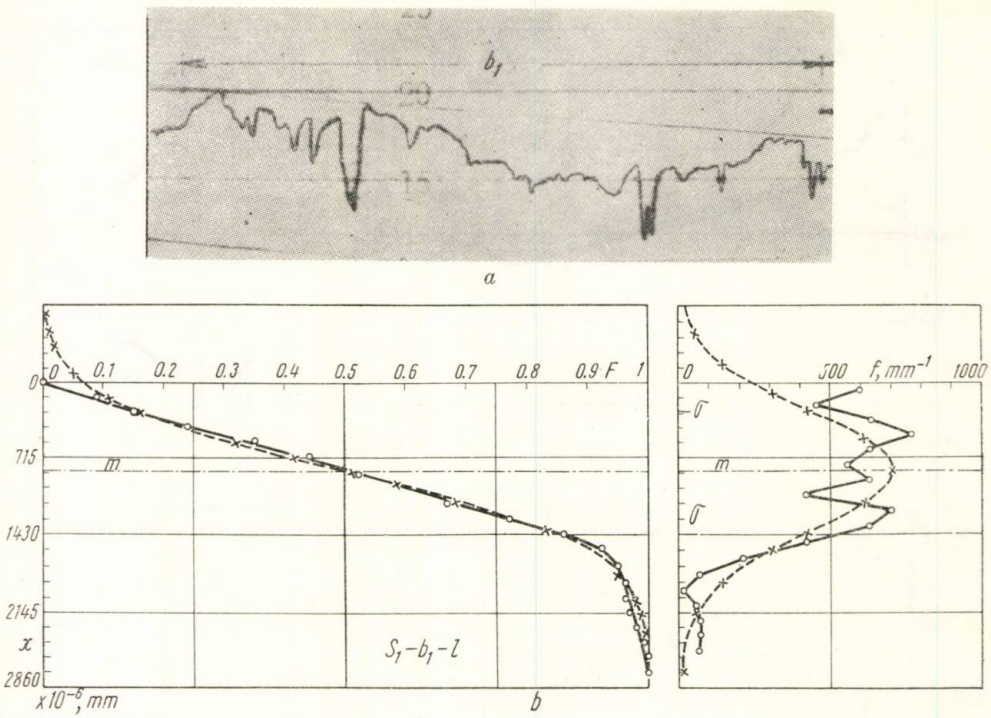
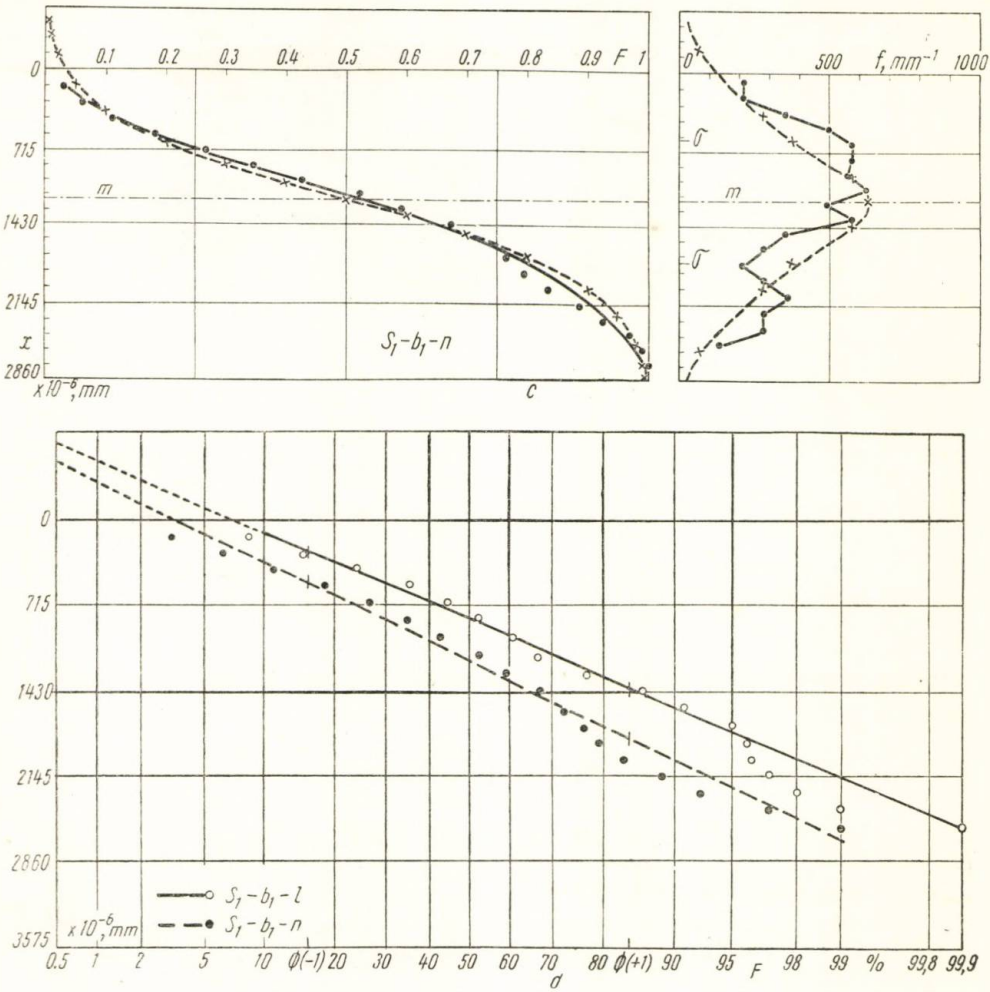


Fig. 4. — Microgeometria specifică b_1: a — profilograma; b — $F(x)$, $f(x)$ pentru portanță; c — $F(x)$, $f(x)$ pentru numărul de contacte; d — $F(x)$ liniar; —— profil real; — — — profil aproximat normal.

zentativă, trebuie să aibă o anumită extindere pe suprafață. Limita inferioară a acestei extinderi ar putea fi luată cea corespunzătoare pasului de avans la prelucrarea prin strunjire, care în cazul de față (fig. 1) este de 0,06 mm pe rotație. Lungimea sectorului b_2 fiind de 0,5 mm, deci mult mai mare decît 0,06 mm, forma profilului redat poate fi considerată reprezentativă. Sectorul b_4 redînd o ondulație completă, profilul redat pe această lungime este de asemenea reprezentativ. O alternare pe suprafață cu caracter periodic a sectoarelor alcătuite după criteriile de mai sus nu a putut fi constatată.

Se va examina acum caracterul modificării prin uzură a microgeometriei de prelucrare în cazul aliajului Y—Sn 83, luînd ca referință parametrii funcției de repartiție normală pentru portanță și pentru numărul de contacte. În acest scop, pentru profilul microgeometriei de prelucrare figura 3 *a*, s-a construit grafic curba portanței în funcție de înălțimea asperităților x. Portanța s-a exprimat sub formă adimensională, prin împărțirea valorii funcție de punct l la valoarea maximă a acesteia L (egală cu lungimea de referință a profilului), și s-a notat cu F (fig. 3 *b*). Sub această formă, portanța variază între limitele $0 < F(x) < 1$, ceea ce, împreună cu aspectul monoton nedescrescător al variației redat de grafic (fig. 3*b*), arată că îndeplinește condiția unei funcții de repartiție [8]. Reprezentînd $F(x)$ grafic pe hîrtie de probabilitate normală [9], se poate constata situarea punctelor respective destul de bine pe o dreaptă (fig. 3 *d*), ceea



ce arată de asemenea caracterul de funcție de repartiție normală a portanței $F(x)$ și în cazul profilului de așchiere a aliajului Y—Sn 83. Dreapta trasată reprezintă portanța profilului normal care aproximează profilul real arătat în figura 3 *a*. Aproximarea s-a făcut în cazul de față grafic. Intersecția acestei drepte cu linia $\Phi = 50\%$ (corespunzătoare la $F(x) = 0{,}5$) determină poziția liniei medii m a profilului normal, iar intersecția cu liniile corespunzătoare la $\Phi(-1) = 15{,}87$ % și $\Phi(+1) = 84{,}13\%$ dă valoarea abaterii medii pătratice $|\sigma_{\Phi(-1)}| = |\sigma_{\Phi(+1)}|$ a acestui profil, Φ fiind funcția lui Laplace corespunzătoare mediei $\overline{m} = 0$ și $\sigma = 1$ [8]. Cu ajutorul lui σ și a poziției liniei medii a profilului s-a construit apoi curba densității de probabilitate $f(x)$ a profilului normal (fig. 3 *b*), a cărei expresie este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\overline{m})^2}{2\sigma^2}}$$

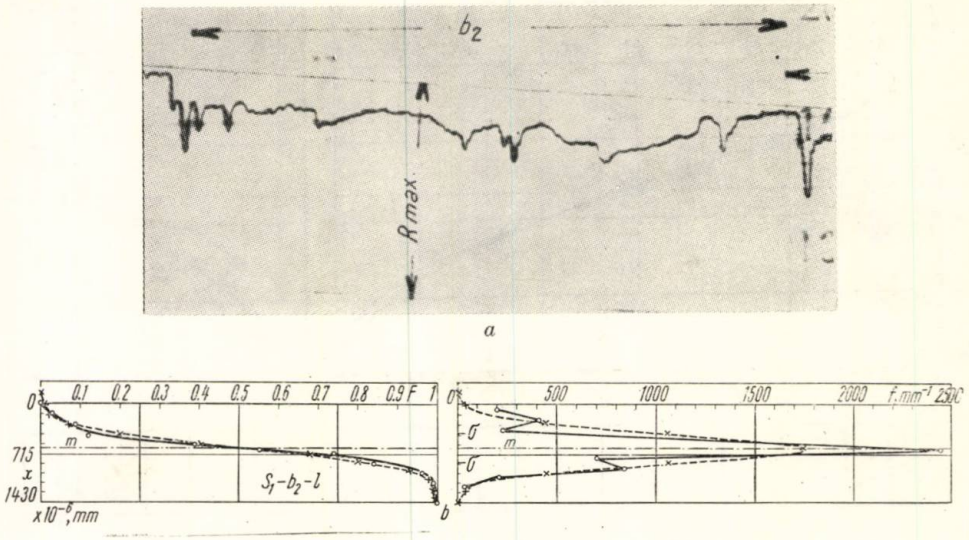


Fig. 5. — Microgeometria specifică b_2: a — profilograma; b — $F(x)$, $f(x)$ pentru portanță; c — $F(x)$, $f(x)$ pentru numărul de contacte; d — $F(x)$ liniar; —— profil real; — — — profil aproximat normal.

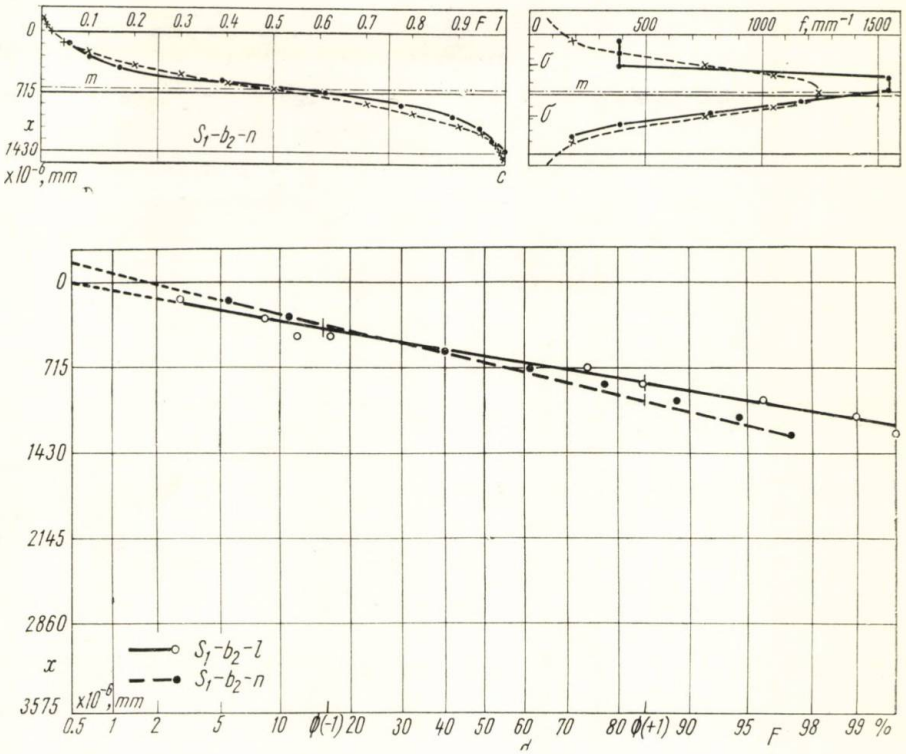
și în funcție de care portanța $F(x)$ a aceluiași profil normal este dată de relația cantitativă

$$F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x,$$

în care $\overline{m}$ este media variabilei aleatorii, iar în cazul de față ordonata poziției liniei medii m. Ținînd seama de această ultimă relație, s-a calculat tabelar densitatea de probabilitate $f(x)$ pentru portanța profilului real și s-a reprezentat grafic în figura 3 b. De asemenea s-a transpus grafic și $F(x)$ a profilului normal după dreptele (pentru portanță și pentru numărul de contacte) din figura 3 d, în care scop aceste drepte au fost prelungite către stînga pînă la valoarea $F(x) = 0{,}5\,\%$. Trebuie menționat că și poziția liniei medii m a profilului real poate fi determinată din condiția ca suma pătratelor abaterilor acestui profil să fie minimă. În mod analog au fost determinate curbele $F(x)$ și $f(x)$ pentru profilul real, precum și $F(x)$, σ, $f(x)$ și poziția liniei medii m a profilului aproximat normal, corespunzătoare numărului de contacte a profilului din figura 1 și reprezentate grafic în figurile 3c și d. Funcția de repartiție $F(x)$ s-a calculat raportînd numărul de întreruperi n a portanței la suma N a tuturor întreruperilor de acest fel în cadrul aceleiași lungimi de referință L a profilului.

Pentru profilul microgeometriei specifice au fost determinate aceleași elemente pentru fiecare sector de profil în parte și apoi pentru lungimea totală a acestuia, parametrii respectivi fiind reprezentați grafic în figurile 4—8.

La toate profilele studiate s-a măsurat apoi valoarea maximă a asperităților R_{max} și s-a determinat abaterea medie (aritmetică) R_a. Acest



ultim parametru s-a determinat prin planimetrare din graficele care reprezintă $F(x)$ al portanței, ținînd seama de egalitatea

$$R_a = \frac{1}{L}\int |y| \, dl = \left(\int_0^{\bar{m}} F(x)\, dx + \int_{\bar{m}}^{\bar{x}} (1 - F(x))\, dx\right)_L,$$

în care $|y|$ reprezintă ordonatele profilului real în valoarea absolută față de linia medie m, iar $\bar{x}$ valoarea maximă a lui x la profilul real.

Funcția $F(x)$ pentru portanță mai permite determinarea a încă unui parametru cantitativ al profilului, important pentru lubrificație, și anume a spațiului format de golurile dintre asperități. Volumul de lubrifiant care umple aceste goluri constituie o rezervă de această substanță în suprafața de frecare. Secțiunea acestor goluri pe lungimea de referință L a profilului se exprimă ușor cu ajutorul relației

$$S_g = L\int_0^{R_{\max}} (1 - F(x))\, dx,$$

integrala reprezentînd suprafața situată deasupra curbei $F(x)$ — portanță, ce poate fi determinată de asemenea și prin planimetrare. Pentru scopuri comparative, acest parametru este mai ușor folosit sub forma S_g/L, adică secțiunea golurilor pe unitate de lungime de referință a profilului.

Valorile obținute pentru $R_{\max}$, R_a, σ, S_g/L și poziția liniei medii m a profilului sînt arătate în tabela de mai jos.

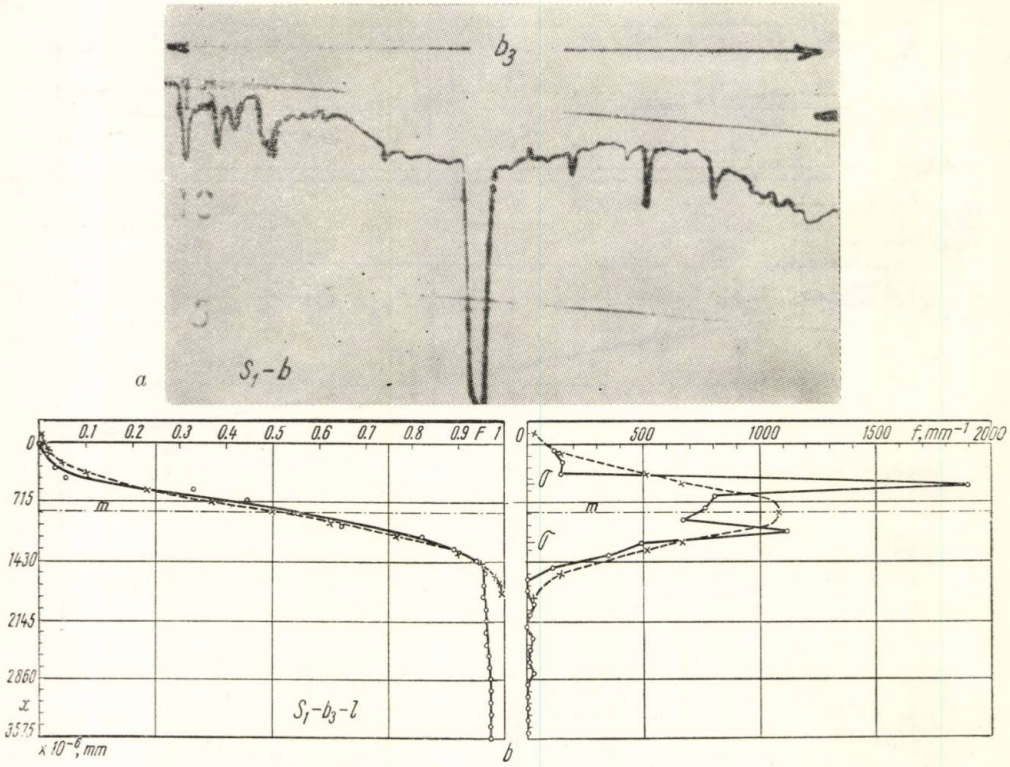
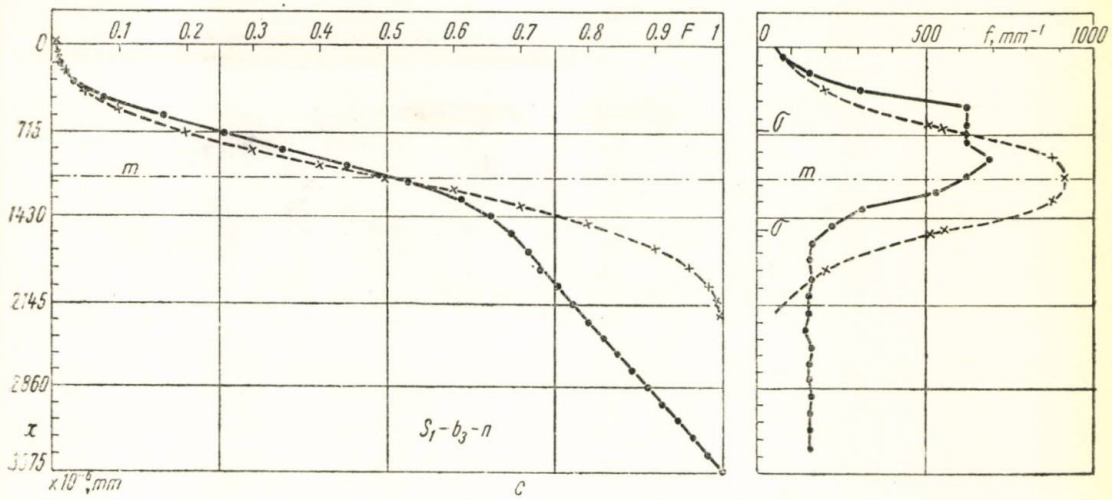
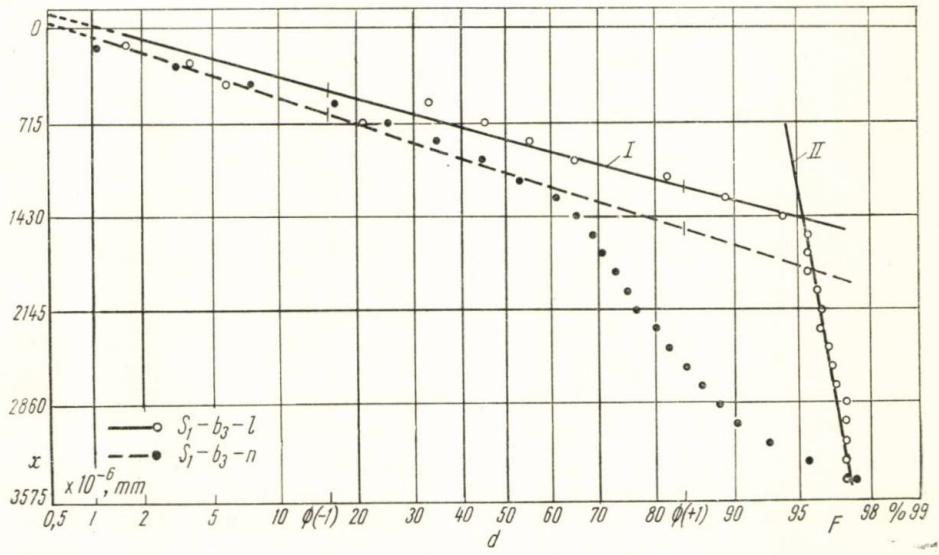


Fig. 6. — Microgeometria specifică b_3: *a* — profilograma; *b* — $F(x)$, $f(x)$ pentru portanţă; *c* — $F(x)$, $f(x)$ pentru numărul de contacte; *d* — $F(x)$ liniar; —— profil real; — — — profil aproximat normal.

Profilul	R_{max}	R_a	σ	S_g/L	Poziţia liniei medii m
	× 10^{-3} mm		× 10^{-6} mm		× 10^{-6}mm
$S_1 - c_4 - l$	4,16	0,710	902,73	2470	2491,71
$S_1 - c_4 - n$		—	1018,85	—	2591,04
$S_1 - b_1 - l$	2,66	0,414	569,14	836	840,84
$S_1 - b_1 - n$		—	642,01	—	1184,04
$S_1 - b_2 - l$	1,06	0,167	228,80	486	623,48
$S_1 - b_2 - n$		—	320,32	—	669,24
$S_1 - b_3 - l$	3,53	0,346	366,08	892	837,98
$S_1 - b_3 - n$	(1,56*)	—	437,58	—	1101,10
$S_1 - b_4 - l$	3,56	0,652	935,30	1120	1043,90
$S_1 - b_4 - n$		—	1043,98	—	1633,06
$S_1 - b - l$	3,56	0,436	519,95	831	843,70
$S_1 - b - n$			593,45	—	1224,08

* Fără riz.





În toate aceste construcții grafice s-a lucrat cu înălțimea asperităților la mărirea 21150 : 1 pentru microgeometria de prelucrare și cu mărirea 35000 : 1 pentru microgeometria specifică, în direcția lungimii profilului mărirea fiind în primul caz 423 : 1, iar în al doilea 700 : 1. Aceste măriri au fost obținute prin proiectarea profilogramelor, măsurarea portanței profilului astfel mărit putîndu-se face cu eroarea de $\pm 0{,}5$ mm.

Aceste grafice și date arată, de exemplu, că în cazul aliajului Y — Sn 83 portanța profilului de prelucrare (fig. 3 *b*) prezintă o acoperire mai bună cu cea a profilului aproximat normal la nivelul vîrfurilor asperităților decît la cel al celor mai mari adîncituri. Cercetări care sînt în curs urmează să stabilească dacă aceasta constituie o particularitate a naturii și a componenței structurale a acestui material, adică a specificului său

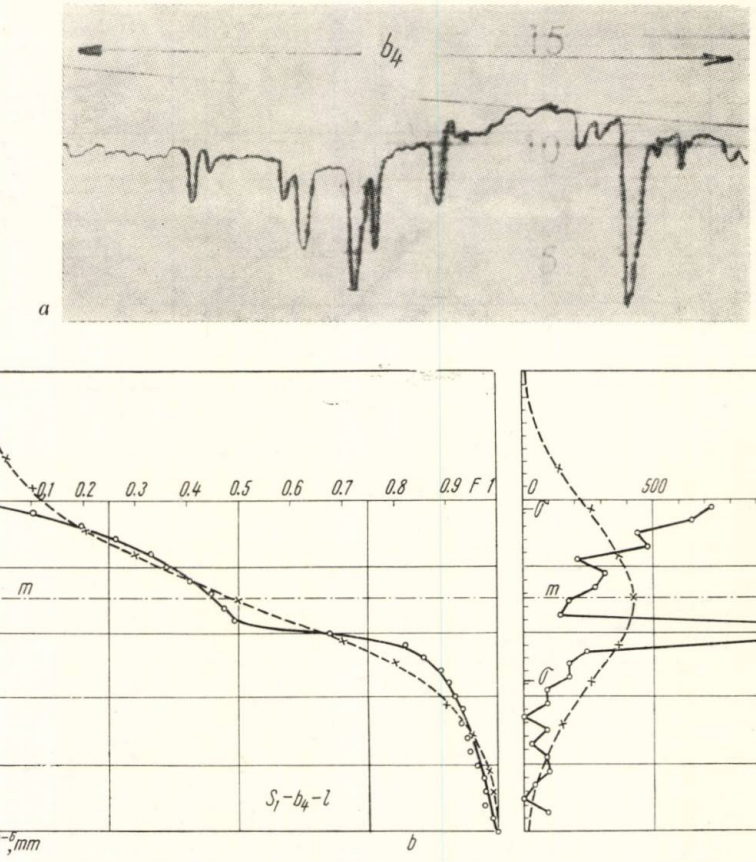
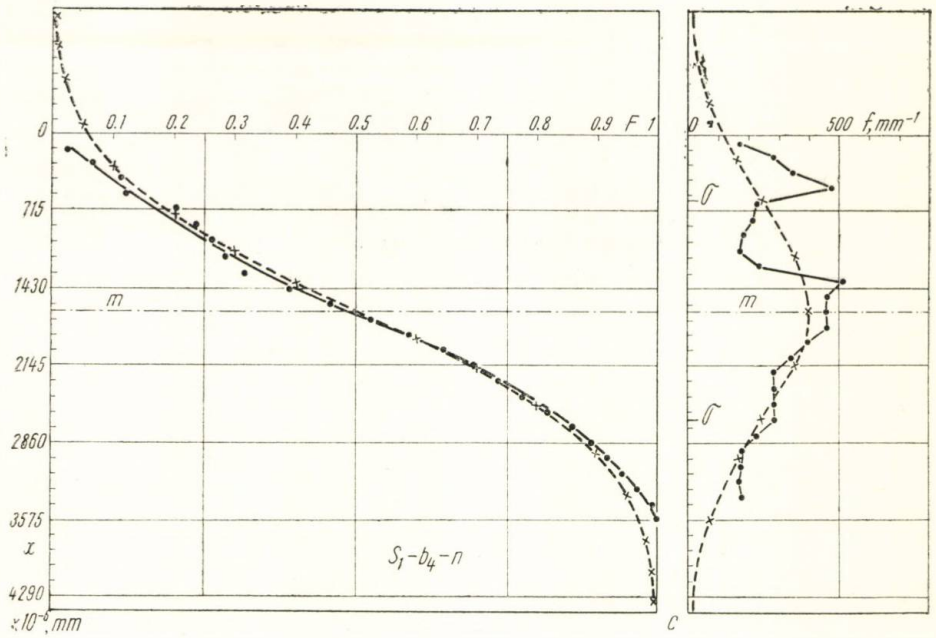
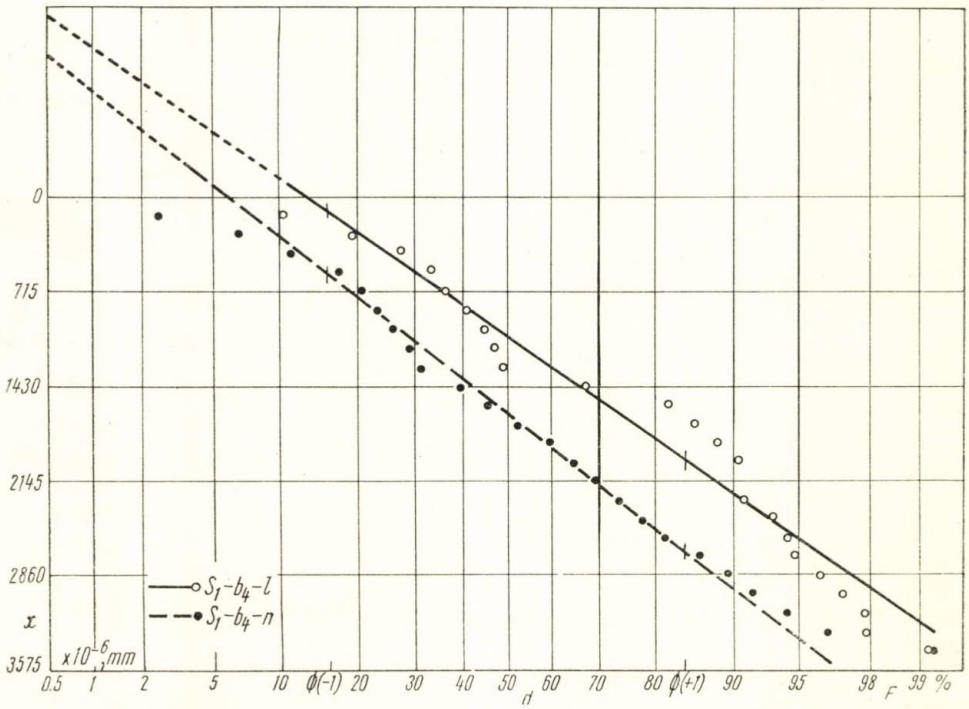


Fig. 7. — Microgeometria specifică b_4: a — profilograma; b — $F(x)$, $f(x)$ pentru portanță; c — $F(x)$, $f(x)$ pentru numărul de contacte; d — $F(x)$ liniar; —— profil real; — — — profil aproximat normal.

de așchiere. Aceasta se reflectă evident și în poziția relativă a curbelor densității de probabilitate $f(x)$, punctele lui $f(x)$ pentru profilul real situîndu-se mai complet de o parte și de alta a lui $f(x)$ pentru profilul aproximat normal în zona vîrfurilor asperităților. Pentru funcția de repartiție $F(x)$ a numărului de contacte, figura 3 d arată că este valabilă aceeași observație. De asemenea poate fi remarcat că $f(x)$ pentru portanță și pentru numărul de contacte cu parametrii caracteristici: poziția liniei medii a profilului m, σ și $f(x)$, au valori destul de apropiate, ceea ce poate constitui un indiciu în legătură cu interdependența portanței și a numărului de contacte la profilele de acest fel. Cum se poate remarca și la celelalte profile, datorită erorilor de citire și de calcul, punctele lui $f(x)$, calculate tabelar ca tangente ale curbei $F(x)$, prezintă în general salturi valorice destul de mari.

Trecînd la microgeometria specifică a aliajului Y—Sn 83 și examinînd mai întîi zona b_2 cu cea mai redusă valoare a maximului asperităților R_x și cu cea mai regulată formă (după aspect) a profilului (fig. 5 a),





se constată o acoperire aproape completă a curbelor de portanță $F(x)$ pentru profilul real și pentru cel aproximat normal (fig. 5 *b*). Considerînd

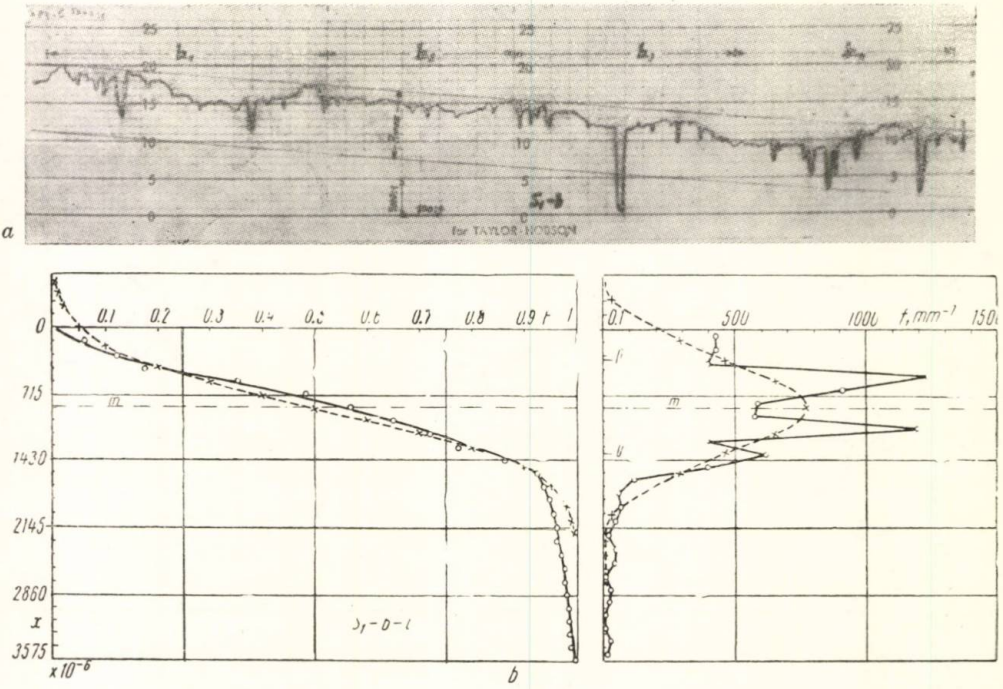
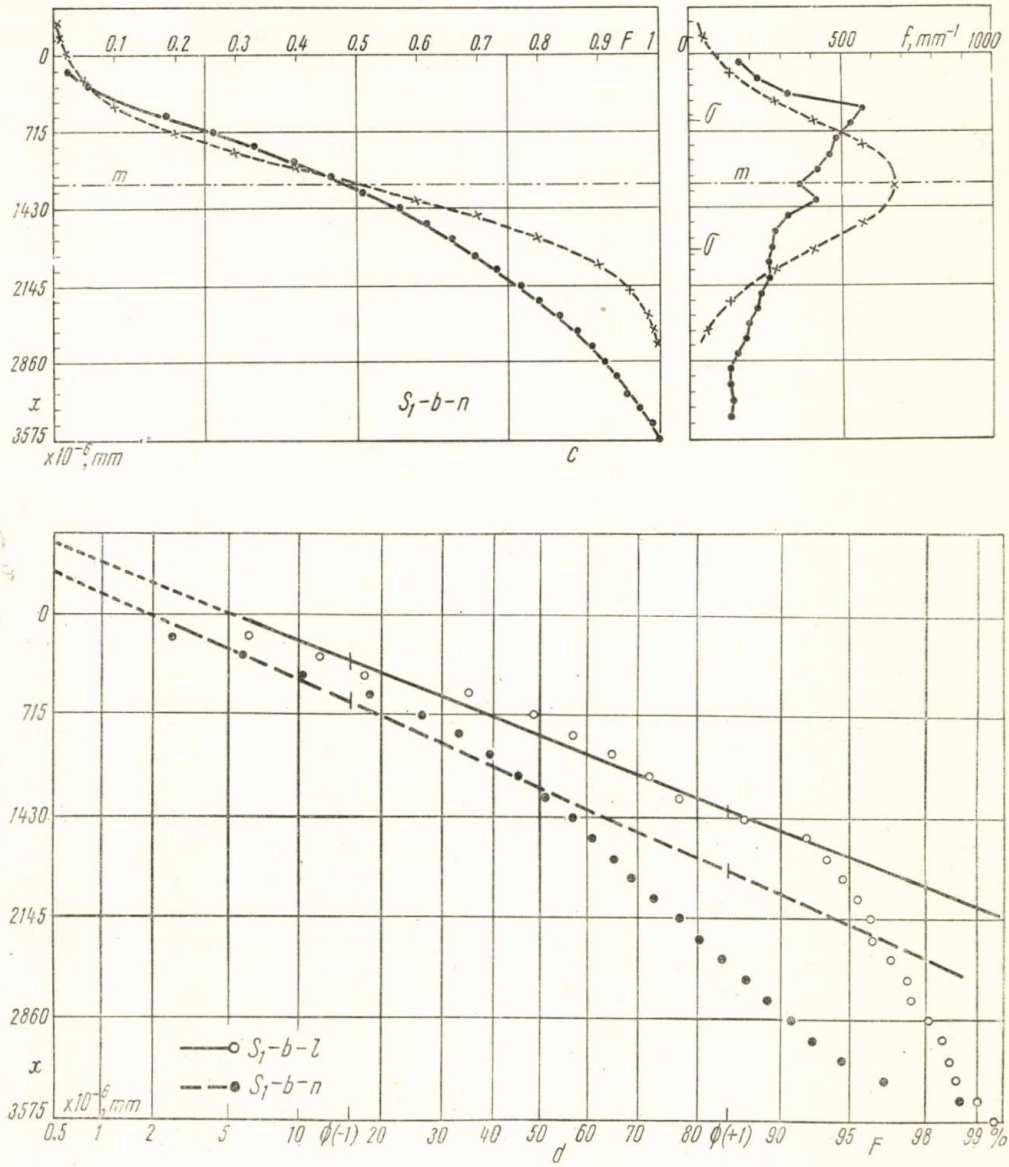


Fig. 8. — Microgeometria specifică din figura 2 : *a* — profilograma ; *b* — $F(x)$, $f(x)$ pentru portanță ; *c* — $F(x)$, $f(x)$ pentru numărul de contacte ; *d* — $F(x)$ liniar ; —— profil real ; — — profil aproximat normal.

această zonă a profilului specific ca fiind lipsită în cea mai mare măsură de acțiunea factorilor de uzură străini, ca praf și alții, vehiculați de către lubrifiant, se poate spune că microgeometria suprafeței active a materialului Y—Sn 83, rezultată dintr-un proces de alunecare în pereche cu fusul din oțel durificat, prezintă în ceea ce privește portanța profilului o repartiție aproape riguros normală. În această zonă, datorită întinderii ei relativ mari de 0,5 mm, trebuie să admitem însă că aici au acționat toți factorii de natură internă ai uzurii, de contact, corosivă, prin obosire superficială și abrazivă, prin particulele proprii de uzură. Profilul microgeometriei rezultat pe această cale avînd un caracter cu repartiție normală a portanței, înseamnă că nu numai procesele de abraziune (asemuite cu cele de așchiere) conduc la profile de acest fel în cazul materialului Y—Sn 83. Cercetări suplimentare în această direcție urmează să arate dacă nu predomină eventual în acest caz uzura prin abraziune datorită constituenților fragili din structură, deoarece rezistența la uzură corosivă a acestui material este relativ bună.

Acest profil prezintă apoi cea mai redusă valoare a înălțimii maxime a asperităților R_{max}, fiind numai 1/4 din cea a profilului inițial de prelucrare. Dacă se au în vedere anumite aspecte ale evoluției uzurii în perioada de rodaj, ca acest proces să devină optim, evoluția profilului de prelucrare către unul specific cu R_{max} mai redus se consideră că este avantajoasă [7]. Într-un raport de același ordin de mărime stă și R_a a profilului spe-



cific b_2 față de acela al celui de prelucrare. σ, ca parametru al curbei $f(x)$ care caracterizează variația portanței lui b_2, este de asemenea de circa 4 ori mai redus decît la profilul de prelucrare.

Parametrii privind funcția numărului de contacte al profilului specific b_2 au evoluat față de cei ai profilului de prelucrare în același sens și cam în același raport cantitativ cu cei ai portanței. Suprapunerea lui $F(x)$ real cu cel aproximat normal este însă puțin mai redusă (fig. 3 *c*)

decît în cazul portanței, mai ales în domeniile $F(x) = 0{,}1 \ldots 0{,}3$ și $F(x) = 0{,}7 \ldots 0{,}9$. Raportul dintre σ — portanță și σ — număr de contacte (0,72) la profilul specific b_2 marchează însă o scădere față de cel de la prelucrare (0,89), ceea ce arată că trecerea la profilul specific se produce impunînd portanței o variație mai bună cu înălțimea asperităților decît numărului de contacte. Aceasta înseamnă că profilul specific b_2 are vîrfurile asperităților mai puțin ascuțite decît cel de prelucrare, ceea ce rezultă în mod calitativ și din compararea vizuală a figurilor 3 *a* și 5 *a*.

Profilul specific b_1 are o înălțime maximă a asperităților de 2,5 ori mai mare decît b_2, figura 4 *d* arătînd că și punctele funcției $F(x)$ a profilului real prezintă o împrăștiere mai mare. Din figura 4 *b* rezultă că portanța profilului real variază aproape identic cu aceea a profilului aproximat normal în intervalul $F(x) = 0{,}15 \ldots 0{,}95$, acoperirea fiind mai slabă mai ales la nivelul vîrfurilor asperităților. În această zonă, poziția reciprocă a curbelor $F(x)$ arată că profilul aproximat normal corespunzător ar trebui să aibă vîrfurile asperităților mult mai înalte. Această diferență prezentîndu-se mai redusă la nivelul adînciturilor profilului, înseamnă că la astfel de forme de profil real asimetria față de linia medie m a profilului aproximat normal este mai accentuată și că în aproximare influența adînciturilor asperităților este preponderentă. Aspectul acesta apare mult mai accentuat în cazul sectorului b_3, cum se va vedea mai jos. Abaterea mai pronunțată a profilului real față de cel aproximat normal în zona vîrfurilor asperităților apare și în cazul curbelor $F(x)$ privind numărul de contacte (fig. 4 *c*). Gradul în care vîrfurile asperităților profilului real sînt mai puțin ascuțite față de adînciturile acestora nu se poate exprima în acest caz în mod concludent prin raportul $\sigma(S_1 - b_1 - l)/\sigma(S_1 - b_1 - n) = 0{,}88$. Ca o măsură a acestui grad poate fi luată însă valoarea lui x cu care curba $F(x)$ aproximată normală depășește în sus linia de zero din figura 4 *b*. Valoarea raportului de 0,88 de mai sus arată însă că în acest sector b_1 profilul specific aproximat normal prezintă o formă, în ceea ce privește portanța și numărul de contacte, foarte apropiată de cea a profilului de prelucrare.

Tratarea problemei unei microgeometrii specifice, caracterizată prin prezența unui riz pronunțat, pe aceeași cale a aproximării profilului cu unul avînd repartiția normală se prezintă mai dificilă. Astfel, din figura 6 *d* se poate vedea că punctele $F(x)$ pentru portanță, de altfel ca și pentru numărul de contacte, ar putea fi grupate după două linii drepte I și II. Prin linia I profilul real s-a lăsat aproximat pentru valori ale lui $F(x)$ cuprinse între 16 și 94%, în timp ce prin linia II intervalul lui $F(x)$ aproximabil prin linia dreaptă este de numai $\sim 95-97{,}3\%$. În cazul de față s-a tratat problema luînd în considerare numai linia I, care redă marea majoritate a particularităților profilului. Aspectele redate de liniile celor de genul marcate cu II au însă importanță, deoarece arată prezența unor asperități de mărime disproporționată în raport cu celelalte, adică a rizurilor, cum este acela din figura 6 *a*. Se poate vedea că profilul aproximat normal corespunzător liniei II ar prezenta față de cel real abateri excepțional de mari în zona vîrfurilor asperităților. Apare acum mai clar aspectul similar constatat, la un nivel cantitativ mai redus, și în cazul sectorului b_1, din figura 4 *a* reieșind prezența mai ales a două rizuri evident de dimensiuni mai mici.

Făcînd deci abstracție de linia II, din figura 6 *b* se constată o suprapunere destul de bună a curbei $F(x)$ aproximată normal cu cea a profilului real chiar în zona vîrfurilor asperităților. Același grad de acoperire îl prezintă și curbele $F(x)$ corespunzătoare numărului de contacte (fig. 6 *c*). Raportul $\sigma(S_1 - b_3 - l)/\sigma(S_1 - b_3 - n) = 0{,}84$ arată o interdependență portanță — număr de contacte cuprinsă între cea a sectorului b_2 de profil specific și cea a profilului de prelucrare, fiind însă mai apropiată de aceasta din urmă.

Un ultim aspect caracteristic de menționat în legătură cu acești parametri îl prezintă sectorul de profil specific b_4. Adîncul și vîrful ondulației pe care le conține (fig. 7 *a*) fac de asemenea dificilă aproximarea normală a funcției de repartiție $F(x)$. După cum reiese din figura 7 *b*, o astfel de asociere de formă a profilului conduce, în cazul portanței, la apariția unei porțiuni mai centrale a curbei în formă aproape de palier. Aproximarea normală s-ar putea face în acest caz prin trei drepte, rezultînd trei valori pentru σ. Fracțiunea de lungime din b_4 pe care s-ar întinde fiecare dintre aceste trei drepte ar putea fi de ordinul de mărime de maximum 0,2—0,3 mm, ceea ce pentru fenomenul studiat nu poate prezenta o importanță practică mai deosebită. Din această cauză, profilul din acest sector a fost aproximat normal tot numai printr-o singură dreaptă (fig. 7 *d*). Evident că gradul de suprapunere a acestei curbe peste curba portanței profilului normal este relativ redus (fig. 7 *b*). Diferențele cele mai mari apar în zona vîrfurilor asperităților.

Funcția $F(x)$ pentru numărul de contacte prezintă însă o regularitate mai bună (fig. 7 *c*), forma aproximată normal numai printr-o singură dreaptă (fig. 7 *d*) avînd totuși un grad de acoperire foarte slab la ambele capete. Raportul $\sigma(S_1 - b_4 - l)/\sigma(S_1 - b_4 - n)$, deși are valoarea 0,89, nu poate fi considerat concludent pentru a putea spune că acest profil prezintă o interdependență portanță — număr de contacte analogă cu profilul de prelucrare. Chiar în aceste condiții grele de aproximare se vede că acest raport nu depășește valoarea celui a profilului de prelucrare.

Influența diferitelor elemente neobișnuite ale profilelor, cum sînt rizurile, ondulațiile etc., în combinație cu asperitățile obișnuite fiind cunoscută din tratarea problemei pe sectoarele b_1, b_2, b_3, b_4, apare util de știut cum se reflectă particularitățile acestor sectoare în cazul ansamblului profilului din figura 8 *a*.

Din figura 8 *d* reiese mai întîi un aranjament al punctelor pentru portanță și numărul de contacte foarte asemănător celuia din figura 6 *d*. Aceasta înseamnă că rizurile mari din suprafață au o influență predominantă asupra parametrilor profilului. Pe de altă parte, influența ondulațiilor, adică aspectul cu palier din figura 7*b* a curbei $F(x)$ — portanță, este mult atenuată. Nu poate fi însă constatat un efect reciproc compensator mai pronunțat al acestor două elemente neobișnuite ale profilului. Trasînd în figura 8 *b* curba $F(x)$ corespunzătoare dreptei trasate în figura 8 *d* (cu neglijarea rizului), suprapunerea relativ slabă a acesteia peste curba $F(x)$ a profilului real în zona vîrfurilor asperităților poate fi atribuită influenței formei profilului din sectorul b_1. Gradul de suprapunere al acestor curbe la profilul complet este însă ameliorat față de situația de la sectorul b_1 (fig. 3 *b*). Astfel curba portanței profilului aproximat normal prezintă o suprapunere destul de bună cu cea a profilului real într-un interval

mare de valori ale lui $F(x)$ (0,1—0,95). În ceea ce privește funcția $F(x)$ pentru numărul de contacte, influența rizului mare din sectorul b_3 apare ameliorată, însă în zona adînciturilor asperităților gradul de acoperire se menține slab și la profilul specific considerat în ansamblu.

Raportul $\sigma(S_1-b-l)/\sigma(S_1-b-n)=0{,}875$ arată că la profilul specific aspectul interdependenței portanță-număr de contacte este sub valoarea aceluia a profilului de prelucrare, însă la o diferență redusă. Din tabela de mai sus rezultă apoi că abaterea medie a profilului integral $R_a = 0{,}436$ se prezintă de asemenea ameliorată, avînd o valoare cuprinsă între cea minimă a sectorului b_2 și cea maximă dată de sectorul b_4, fiind însă inferioară lui R_a a profilului de prelucrare.

În ceea ce privește valorile pentru secțiunea golurilor profilului S_g/L, determinate în cazul de față prin planimetrare, din tabela de mai sus rezultă aspectul de bază că profilul specific are vîrfurile asperităților mult mai puțin ascuțite decît cel de prelucrare. Volumul mult mai mare de lubrifiant cuprins în golurile acestui din urmă profil ameliorează condițiile de lubrifiere a suprafețelor într-o perioadă foarte critică de funcționare, aceea a fazei inițiale de rodaj.

Din cele expuse mai sus reiese că și în cazul unor aspecte de microgeometrie în lubrificație fenomenele se desfășoară după o legitate statistică, în cazurile de față normală, ceea ce permite exprimarea cantitativă a unora dintre parametrii acestor microgeometrii specifice.

Primită la redacție la 16 mai 1967

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford, 1964, p. 74.
2. Gh. Vasilca, Al. Nica, *Aspecte de structură în suprafața activă la unele materiale antifricțiune pentru lagăre*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *2*, 311 (1963).
3. Gh. Vasilca, Al. Nica, O. Biță, I. Dincă, *Unele aspecte ale influenței tipului de structură asupra comportării la alunecare și uzură la două aliaje de aluminiu*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *6*, 1431 (1963).
4. N. Tipei, H. Pascal, *Micro- and Macrogeometry Effects on Pressures in Three-Dimensional Lubrication*, I, *Plan Surfaces* Rév. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **11**, *3*, 699 (1966).
5. E. Schmid, R. Weber, *Gleitlager*, Springer-Verlag, Berlin (Göttingen)-Heidelberg, 1953, p. 325.
6. T. Tsukizoe, T. Hisakado, *On the Mechanism of Contact Between Metal Surfaces. The Penetrating Depth and the Average Clearance*, Transactions of the ASTME, Journal of Basic Engineering, September 1965, p. 666.
7. Gh. Vasilca, O. Biță, *Procese de lubrificație, frecare și uzură la suprafețele metalice*, Edit. Academiei, București, 1967, p. 230.
8. M. Josifescu, Gh. Mihoc, R. Theodorescu, *Teoria probabilităților și statistica matematică*, București, Edit. tehnică, 1966, p. 34.
9. A. G. Worthing, J. Geffner, *Prelucrarea datelor experimentale*, București, Edit. tehnică, 1959.

ÎN LEGĂTURĂ CU CALCULUL CONSTRUCȚIILOR DE GREUTATE MINIMĂ[1]

de S. RĂUTU și V. CHIROIU

Centrul de mecanică a solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

531.2

În lucrare se prezintă calculul barei cu secțiune variabilă de greutate minimă, determinată în ipoteza calculului la rupere. Rezultatele obținute sînt valabile pentru grinzi continue și cadre cu noduri fixe.

Una dintre problemele importante ale calculului construcțiilor static nedeterminate este proiectarea unei construcții care să fie capabilă de a rezista în bune condiții solicitărilor exterioare și, în același timp, de a utiliza cu maximum de randament materialul din care este alcătuită.

Problema determinării construcțiilor de greutate minimă a fost studiată de către o serie de cercetători. Unii dintre ei pornesc de la calculul elastic și caută să determine construcția de greutate minimă în ipoteza că efortul unitar nu depășește în nici un punct efortul de curgere [2], [3], [4].

Alții pornesc de la sarcina de rupere și determină dintre construcțiile cu aceeași sarcină de rupere pe aceea care duce la construcția de greutate minimă [5], [6].

Considerăm că a doua cale este mai avantajoasă, deoarece determină construcția de greutate minimă pornind de la capacitatea portantă a structurii și în același timp ne permite să determinăm mai simplu construcția cea mai economică.

În ceea ce urmează se va analiza calculul grinzii de greutate minimă în ipoteza că secțiunea grinzii variază liniar în apropierea punctelor de rezemare. S-a impus o variație liniară a secțiunii din considerente constructive; s-ar putea întîmpla ca pentru o variație neliniară să se obțină

---

[1] Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl. (în limba rusă), **13**, 2 (1968).

o construcție teoretic mai economică, dar care ar putea deveni mai scumpă din cauza dificultăților de execuție. Presupunînd de asemenea că o variație oarecare nu ar putea da o diferență mare față de variația liniară propusă, considerăm soluția aleasă ca suficientă pentru necesitățile tehnicii. Pentru început se consideră cazul unei grinzi solicitate de o singură sarcină concentrată, urmînd a demonstra ulterior că soluția este valabilă și pentru o solicitare oarecare.

Problema care se pune este determinarea mărimii secțiunii în așa mod, încît construcția rezultată să fie de greutate minimă.

Calculul în domeniul plastic al grinzilor static nedeterminate este condiționat de cunoașterea mecanismului de rupere, respectiv a pozițiilor secțiunilor critice (secțiuni în care se formează articulațiile plastice). Pentru grinzile cu secțiunea constantă există o schemă unică de rupere, caracterizată prin formarea a trei articulații plastice; una în cîmp și două pe reazem. Variația înălțimii secțiunii influențează însă distribuția momentelor de plastificare în lungul grinzii, ceea ce are ca rezultat apariția a șase scheme de rupere plastică, în funcție de modul de rezemare, de legea de variație a secțiunii și de modul de încărcare. Aceste scheme sînt prezentate în figura 2 pentru o grindă dublu încastrată cu vute simetrice drepte solicitată de o forță concentrată (fig. 1).

Se presupune că grinda este confecționată dintr-un material elasto-plastic.

NOTAȚII

P — sarcina care solicită grinda la distanța c de reazemul stîng;

P_r — sarcina de rupere (corespunzătoare formării ultimei articulații plastice);

M_c — momentul maxim în cîmp în stadiul elastic;

M_{pv}, M_{pt} — momentele de plastificare în secțiunile situate la distanța y și t de începutul vutei;

M_{rv}, M_{rt} — momentele de pe reazeme în stadiul elastic;

M_0 — momentul sub sarcină pentru grinda simplu rezemată corespunzătoare;

M_{pc} — momentul de plastificare în cîmp;

M_v, M_t — momentele din vute la distanța y și t de începutul vutei în stadiul elastic;

l — deschiderea grinzii;

a — lungimea vutei;

h_c, h_r, h_v, h_t — înălțimea secțiunii în cîmp, înălțimea secțiunii pe reazem și înălțimile secțiunilor situate la distanța y și t de începutul vutelor;

y, t — distanța de la începutul vutelor pînă la o secțiune curentă din cuprinsul vutelor;

X — funcția de greutate;

σ_c — rezistența la limita de curgere a materialului;
W_p — modulul de plasticitate;

$$\lambda = \frac{a}{l}\ ;\ \eta = \frac{h_r}{h_c}\ ;\ \zeta = \frac{t}{a}\ ;\ \xi = \frac{y}{a};\ \rho = \frac{c}{l}$$

$$k_1 = \frac{M_{rt}}{M_0};\ k_2 = \frac{M_{ry}}{M_0}.$$

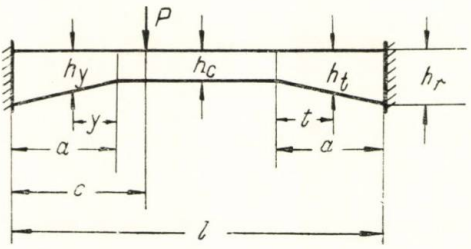


Fig. 1

Fig. 2

1. SARCINA DE RUPERE. POZIȚIA ARTICULAȚIILOR PLASTICE

Schemele de rupere prezentate în figura 2 se deosebesc prin poziția articulațiilor plastice corespunzătoare momentelor negative. Trebuie observat că schemele I—VI sînt cazuri particulare ale schemei II și, în con-

secință, rezultatele date pentru schemele I—VI se deduc din cele obținute pentru schema II de rupere prin particularizările corespunzătoare indicate în figura 2.

Schema II de rupere conduce la sarcina de rupere dată de relația

$$P_r = \frac{M_{py} + M_{pc}}{c - a + y} + \frac{M_{pt} + M_{pc}}{l - c - a + t}. \tag{1.1}$$

Deoarece

$$\frac{M_{py}}{M_{pc}} = \frac{h_y^2}{h_c^2} = [1 + \xi(\eta - 1)]^2,$$
$$\frac{M_{pt}}{M_{pc}} = \frac{h_t^2}{h_c^2} = [1 + \zeta(\eta - 1)]^2, \tag{1.2}$$

rezultă pentru sarcina de rupere următoarea expresie:

$$P_r = \frac{M_{pc}}{l}\left\{\frac{1 + [1 + \xi(\eta - 1)]^2}{\rho - \lambda + \xi\lambda} + \frac{1 + [1 + \zeta(\eta - 1)]^2}{1 - \rho - \lambda + \zeta\lambda}\right\}. \tag{1.3}$$

Poziția articulațiilor plastice corespunzătoare momentelor negative rezultă din condiția de minim a sarcinii de rupere:

$$\frac{\partial P_r}{\partial \xi} = 0 \; ; \; \frac{\partial P_r}{\partial \zeta} = 0 .$$

După efectuarea calculelor obținem

$$\lambda(\eta - 1)^2 \xi^2 + 2(\eta - 1)^2 (\rho - \lambda)\xi + 2(\rho - \lambda)(\eta - 1) - 2\lambda = 0,$$
$$\lambda(\eta - 1)^2 \zeta^2 + 2(\eta - 1)^2 (1 - \rho - \lambda)\zeta + 2(1 - \rho - \lambda)(\eta - 1) - 2\lambda = 0. \tag{1.4}$$

Pentru o structură cu caracteristicile geometrice (λ, η) și cu caracteristica de încărcare (ρ) cunoscute, ecuațiile (1.4) ne dau poziția articulațiilor plastice și, prin urmare, mecanismul de rupere. Considerînd problema inversă, și anume pornind de la o anumită schemă de rupere, ecuațiile (1.4) ne dau relațiile de legătură dintre η, λ și ρ, pentru care grinda se rupe după schema considerată. Aceste relații pentru schema II de rupere sînt

$$\rho = \frac{A_\zeta B_\xi}{A_\zeta B_\xi + A_\xi B_\zeta} \quad ; \quad \lambda = -\frac{2(\eta - 1) A_\xi A_\zeta}{A_\zeta B_\xi + A_\xi B_\zeta}, \tag{1.5}$$

unde

$$A_\zeta = (\eta - 1)\zeta + 1,$$
$$A_\xi = (\eta - 1)\xi + 1,$$
$$B_\zeta = (\eta - 1)^2 \zeta^2 - 2(\eta - 1)^2 \zeta - 2\eta, \tag{1.6}$$
$$B_\xi = (\eta - 1)^2 \xi^2 - 2(\eta - 1)^2 \xi - 2\eta.$$

Pentru diverse valori ale cantităților ξ și ζ,

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1; \qquad 0 \leqslant \zeta \leqslant 1,$$

obținem relații de același tip între η, λ și ρ corespunzătoare fiecărei scheme de rupere:

— pentru schema I de rupere ($\xi = \zeta = 1$)

$$\rho = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{\eta(\eta - 1)}{\eta^2 + 1}; \tag{1.7}$$

— pentru schema III de rupere ($\xi = \zeta = 0$)

$$\rho = \frac{1}{2}, \qquad \lambda = \frac{\eta - 1}{2\eta}. \tag{1.8}$$

După cum se vede din (1.7) și (1.8), schemele de rupere I și III există numai atunci cînd structura este solicitată de o forță concentrată în mijlocul deschiderii. Prin urmare, pentru o solicitare concentrată în mijlocul deschiderii, ruperea se produce după una dintre schemele de rupere I, II sau III, după cum urmează:

— pentru $\lambda \geqslant \frac{\eta(\eta - 1)}{\eta^2 + 1}$, ruperea are loc după schema I;

— pentru $\frac{\eta - 1}{2\eta} < \lambda < \frac{\eta(\eta - 1)}{\eta^2 + 1}$, ruperea are loc după schema II, poziția articulațiilor plastice corespunzătoare momentelor negative fiind dată de relația

$$\lambda(\eta - 1)^2 \xi^2 + (\eta - 1)^2 (1 - 2\lambda)\xi + \eta - 1 - 2\lambda\eta = 0; \tag{1.9}$$

— pentru $\lambda \leqslant \frac{\eta - 1}{2\eta}$, ruperea are loc după schema III.

În figura 3 sînt reprezentate grafic domeniile caracteristicilor geometrice (η, λ) pentru care ruperea se produce după una dintre schemele I, II și III (relații date și în lucrarea [1]). Pentru celelalte cazuri de solicitări, ruperea se poate face după una dintre schemele de rupere arătate în figura 2, exceptînd schemele I și III.

O grindă solicitată de o sarcină concentrată $\rho < 0{,}5$, se poate rupe după una dintre schemele II, IVa, Va și VIa (cazul $\rho > 0{,}5$ fiind absolut identic, schemele de rupere putînd fi II, IV b, V b și VI b), după cum urmează:

— pentru $\lambda \leqslant \frac{(1 - \rho)(\eta - 1)}{\eta}$, ruperea are loc după schema V a;

— pentru $\frac{(1 - \rho)(\eta - 1)}{\eta} < \lambda < \frac{2\eta(\eta - 1)\rho}{\eta^2 + 1}$, ruperea are loc după

schema II;

— pentru $\lambda \geqslant \dfrac{2\eta(\eta-1)\rho}{\eta^2+1}$, ruperea are loc după schema VI a.

În figurile 4 și 5 sînt reprezentate grafic domeniile caracteristicilor geometrice (η, λ) pentru care o bară încărcată cu o sarcină $\rho = 0{,}45$ și

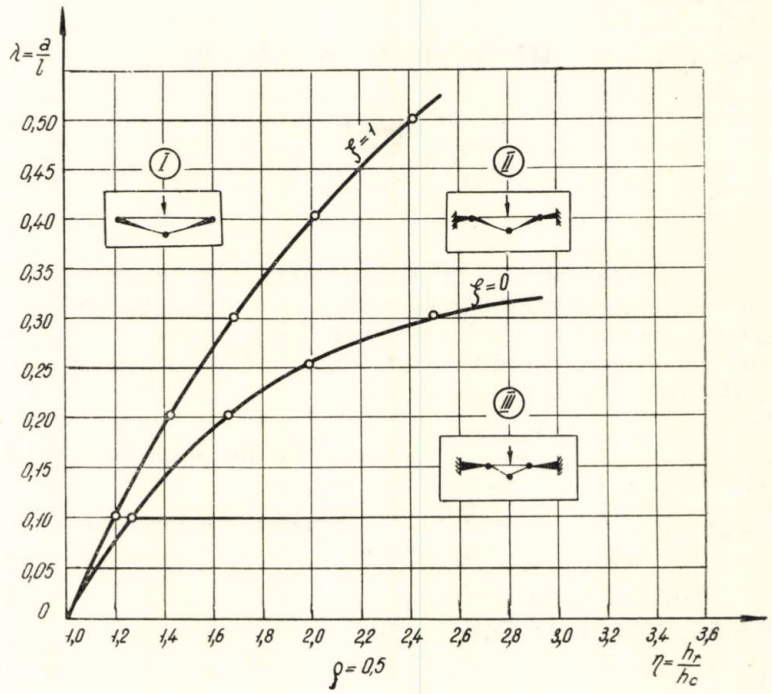


Fig. 3

$\rho = 0{,}40$ se rupe după una dintre schemele prezentate mai sus. Punctul A reprezintă cazul particular cînd grinda se rupe după schema IVa. El, după scum se vede, este inclus în domeniul (η, λ), pentru care ruperea se face după schema Va.

2. CALCULUL GREUTĂȚII MINIME

Greutatea structurii reprezentate în figura 1 este proporțională cu funcția

$$G = lh_c + a(h_r - h_c) = h_c(l-a) + h_r a$$

sau

$$G = h_c l(1 - \lambda + \eta\lambda). \tag{2.1}$$

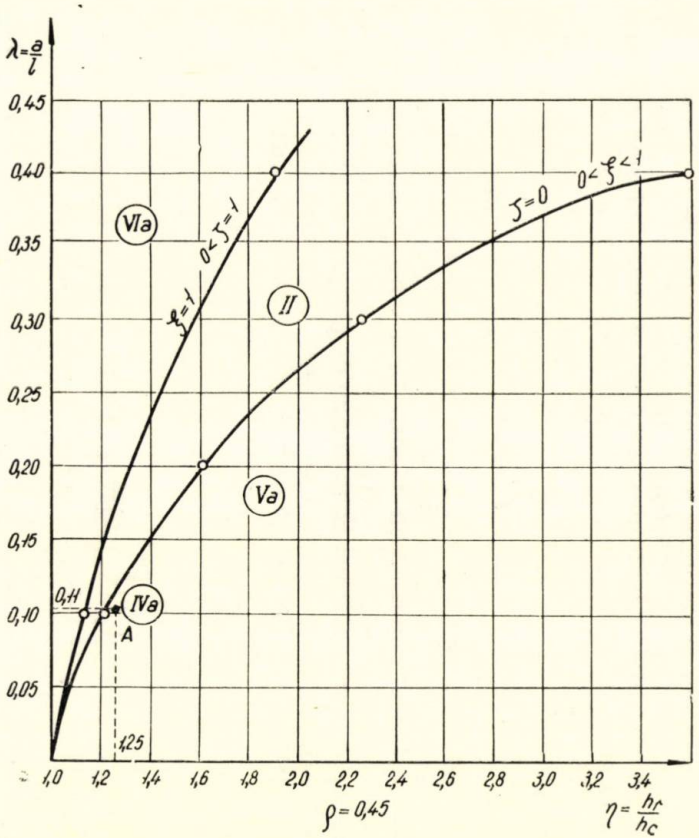

λ = a/l
0,45
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
VIa
II
Va
IVa
ξ=1
0<ζ=1
ζ=0
0<ξ<1
0,11
A
1,25
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3,0
3,2
3,4
ρ = 0,45
η = hr/hc

Fig. 4

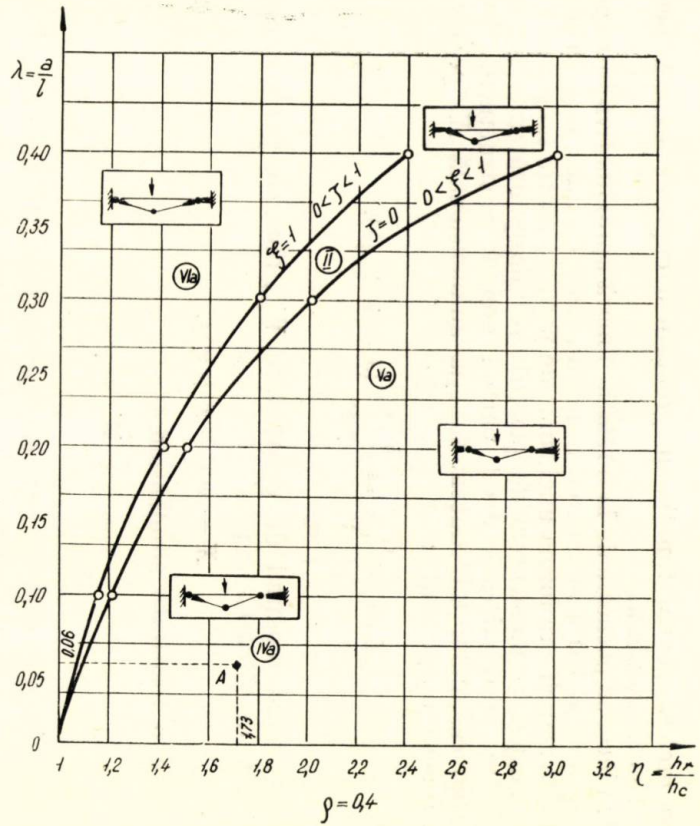

λ = a/l
0,40
0,35
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0
VIa
II
Va
IVa
ξ=1
0<ζ<1
ζ=0
0<ξ<1
0,06
A
1,73
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
2,2
2,4
2,6
2,8
3,0
3,2
η = hr/hc
ρ = 0,4

Fig. 5

Se preferă pentru funcţia de greutate o expresie exactă pentru grinda dreptunghiulară.

De obicei se porneşte de la o relaţie liniară aproximativă între greutatea specifică a barei şi momentul-limită, ceea ce duce la exprimarea greutăţii structurii sub forma unei sume de produse dintre lungimea barelor construcţiei şi momentele de plastificare corespunzătoare. Expresia obţinută nu caracterizează decît parţial greutatea structurii. Pentru simplitatea calculului introducem funcţia adimensională X, pe care o numim funcţie de greutate:

$$X = \frac{G}{l\sqrt{\frac{P}{\sigma_c}}} = \frac{h_c\sqrt{\sigma_c}}{\sqrt{P}}(1 - \lambda + \eta\lambda).$$

Introducînd modulul de plasticitate W_p, obţinem pentru funcţia de greutate următoarea expresie:

$$X = \nu(1 - \lambda + \eta\lambda), \tag{2.2}$$

unde ν este o cantitate adimensională:

$$\nu = \sqrt{\frac{W_p\,\sigma_c}{pl}}.$$

În proiectare există anumite cerinţe constructive care ne dau unele indicaţii asupra dimensionării, ca, de pildă, se dau înălţimea secţiunii în cîmp, lungimea grinzii, şi se determină înălţimea secţiunii în reazem şi lungimea vutei din condiţia ca greutatea structurii să fie minimă sau se dau înălţimea secţiunii în reazem şi lungimea grinzii şi se cere determinarea lungimei vutei şi înălţimea secţiunii în cîmp, folosind aceeaşi condiţie de minim a greutăţii structurii etc. Elementele necunoscute sînt de fiecare dată rapoartele

$$\lambda = \frac{a}{l}; \qquad \eta = \frac{h_r}{h_c}.$$

Aceste valori fiind necunoscute, nu se poate cunoaşte schema de rupere corespunzătoare cantităţilor λ şi η pentru care greutatea structurii este minimă. De aceea determinăm valorile λ şi η din condiţia ca greutatea structurii să fie minimă şi în nici un punct al grinzii momentul încovoietor să nu depăşească valoarea momentului de plastificare din acea secţiune. Ultima condiţie este echivalentă cu condiţia ca sarcina ce solicită structura să nu depăşească sarcina de rupere, oricare ar fi mecanismul de rupere considerat.

Aceste condiţii sînt

$$4\frac{M_{pc}}{pl}(1 + \eta^2) \geqslant 1, \tag{2.3 I}$$

$$\frac{M_{pc}}{pl}\left\{\frac{1 + [1 + \xi(\eta - 1)]^2}{\rho - \lambda + \xi\lambda} + \frac{1 + [1 + \zeta(\eta - 1)]^2}{1 - \rho - \lambda + \zeta\lambda}\right\} \geqslant 1, \tag{2.3 II}$$

$$4\frac{M_{pc}}{pl}\cdot\frac{1}{0{,}5 - \lambda} \geqslant 1, \tag{2.3 III}$$

$$\frac{M_{pc}}{pl}\left\{\frac{2}{\rho-\lambda}+\frac{1+\eta^2}{1-\rho}\right\}\geqslant 1, \tag{2.3 IVa}$$

$$\frac{M_{pc}}{pl}\left\{\frac{1+\eta^2}{\rho}+\frac{2}{1-\rho-\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{2.3 IVb}$$

$$\frac{M_{pc}}{pl}\left\{\frac{1+[1+\xi(\eta-1)]^2}{\rho-\lambda+\xi\lambda}+\frac{2}{1-\rho-\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{2.3 Va}$$

$$\frac{M_{pc}}{pl}\left\{\frac{2}{\rho-\lambda}+\frac{1+[1+\zeta(\eta-1)]^2}{1-\rho-\lambda+\zeta\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{2.3 Vb}$$

$$\frac{M_{pc}}{pl}\left\{\frac{1+\eta^2}{\rho}+\frac{1+[1+\zeta(\eta-1)]^2}{1-\rho-\lambda+\zeta\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{2.3 VIa}$$

$$\frac{M_{pc}}{pl}\left\{\frac{1+[1+\xi(\eta-1)]^2}{\rho-\lambda+\xi\lambda}+\frac{1+\eta^2}{1-\rho}\right\}\geqslant 1. \tag{2.3 VIb}$$

Cifra romană care apare în notarea formulei indică mecanismul de rupere corespunzător.

După cum se vede, pentru determinarea necunoscutelor există un număr de condiţii mai mare decît este necesar. Aceste condiţii se pot grupa două cîte două şi pentru fiecare dintre aceste grupe s-ar putea găsi o valoare a greutăţii minime posibile. Greutatea căutată va fi cea mai mică dintre greutăţile minime posibile găsite pentru fiecare dintre aceste combinaţii. Acestei valori îi va corespunde o anumită schemă de rupere, care va fi cea mai avantajoasă prin faptul că bara corespunzătoare acestei scheme de rupere admite pentru funcţia de greutate un minim minimorum. Cele nouă condiţii se pot grupa în 36 de grupe de cîte două condiţii şi, după cum se vede, calculul devine laborios. De aceea e avantajos în calculul greutăţii minime utilizarea unei metode inverse. Se presupune cunoscută apriori schema de rupere. Aceasta implică anumite relaţii cunoscute dintre λ şi η. Scriind condiţia de rezistenţă, se obţine o nouă condiţie în determinarea celor două necunoscute care intervin în expresia funcţiei de greutate. Această metodă inversă duce de fapt la determinarea schemei de rupere pentru care grinda corespunzătoare admite pentru funcţia de greutate un minim minimorum. Pentru aceasta determinăm greutatea minimă pentru fiecare dintre cele nouă scheme de rupere, şi acea schemă pentru care funcţia de greutate este minimă este schema căutată.

După cum se vede, problema s-a simplificat. Cele 36 de etape de calcul a greutăţii minime s-au redus la numai 9.

3. DETERMINAREA SCHEMEI DE RUPERE OPTIMĂ

Se numeşte schemă de rupere optimă schema de rupere corespunzătoare grinzii de greutate minimă. Se înţelege prin greutate minimă cea mai mică valoare (un minim minimorum) a cantităţilor minime posibile:

$$X=\nu(1-\lambda+\eta\lambda), \tag{3.1}$$

în următoarele condiţii de rezistenţă ale structurii :

$$4\nu^2(1+\eta^2) \geqslant 1 \tag{3.2 I}$$

$$\nu^2\left\{\frac{1+[1+\xi(\eta-1)]^2}{\rho-\lambda+\xi\lambda}+\frac{1+[1+\zeta(\eta-1)]^2}{1-\rho-\lambda+\zeta\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{3.2 II}$$

$$\frac{4\nu^2}{0{,}5-\lambda}\geqslant 1, \tag{3.2 III}$$

$$2\left\{\frac{2}{\rho-\lambda}+\frac{1+\eta^2}{1-\rho}\right\}\geqslant 1, \tag{3.2 IVa}$$

$$\nu^2\left\{\frac{1+\eta^2}{\rho}+\frac{2}{1-\rho-\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{3.2 IVb}$$

$$\nu^2\left\{\frac{1+[1+\xi(\eta-1)]^2}{\rho-\lambda+\xi\lambda}+\frac{2}{1-\rho-\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{3.2 Va}$$

$$\nu^2\left\{\frac{2}{\rho-\lambda}+\frac{1+[1+\zeta(\eta-1)]^2}{1-\rho-\lambda+\zeta\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{3.2Vb}$$

$$\nu^2\left\{\frac{1+\eta^2}{\rho}+\frac{1+[1+\zeta(\eta-1)]^2}{1-\rho-\lambda+\zeta\lambda}\right\}\geqslant 1, \tag{3.2 VIa}$$

$$\nu^2\left\{\frac{1+[1+\xi(\eta-1)]^2}{\rho-\lambda+\xi\lambda}+\frac{1+\eta^2}{1-\rho}\right\}\geqslant 1 \tag{3.2 VIb}$$

şi în condiţiile de existenţă a fiecărei scheme de rupere :

$$\rho=\frac{A_\zeta A_\xi}{A_\zeta B_\xi+A_\xi B_\zeta};\qquad \lambda=-\frac{2(\eta-1)A_\xi A_\zeta}{A_\zeta B_\xi+A_\xi B_\zeta}. \tag{3.3}$$

Se consideră ca un prim caz grinda solicitată de o forţă concentrată în mijlocul deschiderii.

Condiţia de minim a funcţiei de greutate X conduce la ecuaţiile următoare :

— pentru schema I :

$$\eta^3+\eta^2-5\eta+1=0,$$

$$\lambda=\frac{\eta^2-\eta}{\eta^2+1},$$

de unde obţinem

$$\lambda=0{,}293,$$

$$\eta=1{,}665,$$

$$X=1{,}194;$$

— pentru schema II, luînd $\xi = 0{,}2$:

$$0{,}003\eta^3 + 0{,}087\eta^2 - 0{,}028\eta - 0{,}1964 = 0,$$

$$\lambda = \frac{(\eta - 1)(0{,}2\eta + 0{,}8)}{0{,}36(\eta - 1)^2 + 2\eta},$$

de unde obţinem

$$\eta = 1{,}65,$$

$$\lambda = 0{,}208,$$

$$X = 1{,}135,$$

luînd $\xi = 0{,}8$:

$$0{,}1236\eta^3 + 0{,}0754\eta^2 - 0{,}2556\eta + 0{,}0375 = 0$$

$$\lambda = \frac{(\eta - 1)(0{,}8\eta + 0{,}2)}{0{,}96(\eta - 1)^2 + 2\eta},$$

de unde obţinem

$$\eta = 1{,}15,$$

$$\lambda = 0{,}08;$$

$$X = 1{,}012;$$

— pentru schema III de rupere :

$$6\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0,$$

$$\eta = \frac{1}{1 - 2\lambda},$$

care ne dă

$$\lambda = 0{,}211,$$

$$\eta = 1{,}732,$$

$$X = 1{,}154.$$

Curba funcţiei de greutate minime pentru $\rho = 0{,}5$ este reprezentată în figura 6.

Punctele de maxim A şi B reprezintă greutatea minimă calculată pentru schemele I şi III. După cum se vede, cea mai avantajoasă schemă este schema II. Dintre toate greutăţile minime ale schemei II obţinute pentru diverse valori ale parametrului $\xi = \zeta$, există o valoare ξ_0 pentru care greutatea minimă admite un minim minimorum. Acest punct C corespunde valorii $\xi_0 = 0{,}65$.

Faţă de greutatea minimă pe care o admite schema I de rupere, schemă după care se rupe şi bara cu secţiune constantă, greutatea minimă a grinzii cu secţiunea variabilă scade pînă la 20%.

Cînd sarcina solicită secţiunea într-un punct pentru care $\rho < 0{,}5$, curbele greutăţii minime pentru schemele Va, VIa, IVa şi II sînt prezentate grafic în figura 7. Curbele trase continuu aparţin schemei de rupere Va pentru $\xi = 0{,}2\,;\ 0{,}5\,;\ 0{,}8$. Ultimul caz, $\xi = 1$, dă o curbă a greutăţii mi

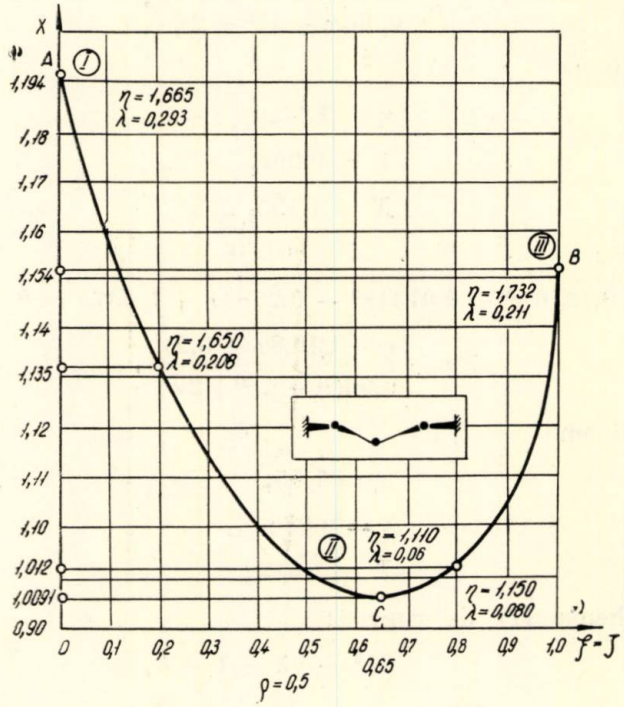


Fig. 6

nime pentru schema IVa, care reprezintă un caz particular al schemei Va. Curbele întrerupte reprezintă curbele de greutate minimă pentru schema VIa, respectiv pentru $\zeta = 0{,}2\,;\ 0{,}5\,;\ 0{,}8$. Curba trasată gros reprezintă curba greutăţii minime pentru schema II în cazul $\zeta = 0{,}8\,;\ \xi = 0{,}2$.

După cum se vede din figură, schema de rupere II admite cea mai mică greutate dintre greutăţile minime posibile.

Prin urmare, schema de rupere optimă pentru orice valoare a coeficientului ρ este schema II de rupere. Acestei scheme îi corespunde întotdeauna cea mai mică greutate dintre greutăţile minime posibile. S-a văzut că schema de rupere şi sarcina de rupere pentru o structură dată nu depind decît de solicitarea şi de dimensiunile barei respective.

Calculul poate fi extins şi pentru grinda încărcată cu un sistem oarecare de forţe dacă se cunoaşte sarcina de pe grindă sub acţiunea căreia apare articulaţia plastică, lucru care, în majoritatea cazurilor, nu este greu de determinat.

Presupunînd că pe grindă lucrează un sistem de sarcini concentrate (fig. 8 *a*) şi că am determinat forţa sub care apare articulaţia plastică în cîmp (de exemplu βP), mecanismul de rupere, de tipul mecanismului II,

se va produce ca în figura 8*b*. Determinarea punctelor de apariție a articulațiilor plastice din interiorul vutelor se face pornind de la condiția de minim a greutății barei, ca și în cazul unei construcții acționate cu o singură sarcină în cîmp. Sarcina de rupere va fi

$$P_r = \frac{M_{py} + M_{pc}}{\beta - a + y} + \frac{M_{pt} + M_{pc}}{l - \beta - a + t}.$$

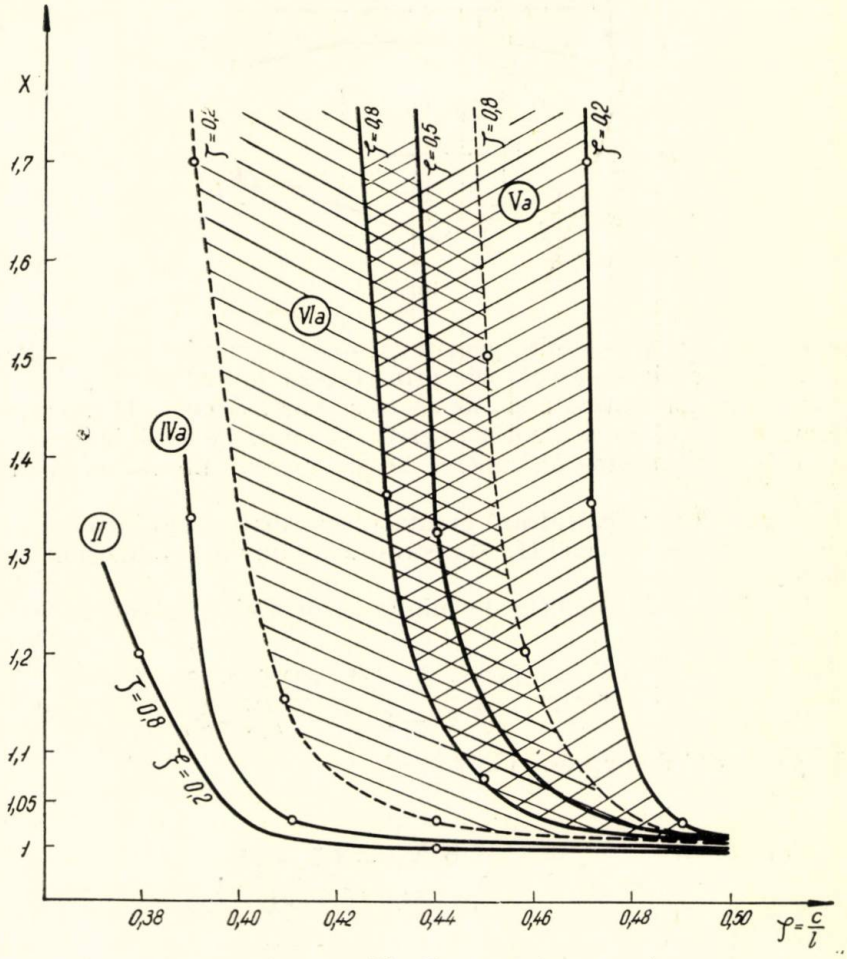


Fig. 7

4. DOMENIUL OPTIM (η,λ) CORESPUNZĂTOR GREUTĂȚII MINIME

Pornind de la faptul că schema II de rupere este cea mai avantajoasă din punctul de vedere al greutății prin faptul că orice bară care se rupe după schema II admite o greutate mai mică decît greutatea corespunzătoare barei care se rupe după celelalte scheme de rupere, apare evident

ideea restrîngerii domeniului caracteristicelor geometrice (η, λ) şi anume să se determine un domeniu pentru care schema II de rupere va admite cea mai mică valoare a greutăţii minime posibile.

Cu alte cuvinte, să se determine un subdomeniu (η^*, λ^*) care va fi o parte a domeniului (η, λ), căruia să-i corespundă grinzi cu schema de

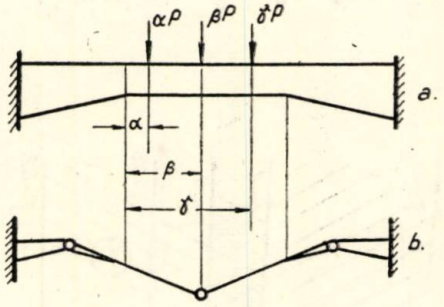


Fig. 8

rupere II şi care vor admite pentru greutate un minim minimorum. Este necesar să se amintească etapele prin care se obţine acest minim minimorum, pe care îl putem numi de speţa a doua. Schema II de rupere admite cea mai mică greutate dintre greutăţile minime posibile corespunzătoare celorlalte scheme de rupere. Acesta este un minim minimorum de speţa întîi.

După aceea se calculează greutatea cea mai mică dintre toate greutăţile minime ale schemei II. Aceasta este un minim minimorum de speţa a doua.

Pornind de la condiţia de minim a funcţiei de greutate, se obţine expresia

$$\lambda^* = \frac{-2(\eta^*-1)\rho[(\eta^*-1)\,\xi+1]}{(\eta^*-1)^2\,\xi^2-2(\eta^*-1)^2\,\xi-2\eta^*}, \tag{4.1}$$

unde ρ este dat de expresia (3.3)

şi

$$\eta^* = x + \frac{\xi(3\xi^2-6\xi-2)}{3\xi^2\,(\xi-2)},$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

cu

$$p = -\frac{2(3\xi-4)}{3\xi^2(\xi-2)^2}\,;\; q = \frac{-1072\xi^3+376\,\xi^2-360\,\xi-52}{27\xi^3\,(\xi-2)^4}.$$

Pentru $\rho = 0{,}5\,;\ 0{,}45\,;\ 0{,}4$ se obţin pentru caracteristicile geometrice (η^*, λ^*) valorile prezentate în tabela 1. De remarcat faptul că lungimea

vutei optime variază în jurul a 10% din deschiderea grinzii, iar înălțimea secțiunii în reazem depășește cu 12—20% înălțimea secțiunii în cîmp.

Tabela 1

ρ	λ^*	η^*
0,4	0,12	1,2
0,45	0,11	1,18
0,5	0,08	1,15

În felul acesta se determină pentru o bară cu secțiunea variabilă, încărcată oarecum, dimensiunile sale impuse de condiții de greutate minimă.

Rezultatele obținute sînt valabile pentru grinzi continue și cadre cu noduri fixe. În acest caz, ruperea se poate produce numai după un mecanism de bază identic cu cel acceptat în exemplele tratate și, în consecință, condițiile de minim se vor impune fiecărei bare luate separat.

Singura condiție suplimentară impusă este ca suma momentelor plastice a $(n-1)$ bare care se întîlnesc într-un nod să fie mai mare sau egală cu momentul plastic din bara n.

Primită la redacție la 26 mai 1967

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Bălan, S. Răutu, V. Petcu, *Scheme de rupere la grinzi static nedeterminate cu secțiunea variabilă*, St. cerc. mec. apl., *5*, (1961).
2. А. И. Виноградов, *К вопросу о расчете стержневых систем наименьшего веса*, Иссл. теор. соор., *8* (1959).
3. — *Об учете собственного веса в стержневых системах с заданными напряжениями*, Иссл. теор. соор., 8 (1959).
4. И. М. Рабинович, *Стержневые системы минимального веса*, Гр. II. Всес. съезда по теор. и прикл. механ., 1964, Обз. докл., вып. 3.
5. P. G. Hodge, *Plastic analysis of structures*, New York, Mc.Graw-Hill Book Co. Inc., 1959.
6. B. G. Neal, *The Plastic Methods of structural analysis*, Londra, Chapman-Hall, 1965.

MATRICE DE INFLUENȚĂ PENTRU CALCULUL CADRELOR ETAJATE LA FORȚE ORIZONTALE

EINAR KEINTZEL
D.S.A.P.C. Brașov

539.4

Se tratează calculul prin distorsiuni a cadrelor etajate, avînd rigiditățile barelor constante pe înălțimea construcției, la forțe orizontale, folosind serii de matrice. Se dau tabele cu coeficienți de influență care permit calculul direct al momentului într-un punct oarecare al unui cadru etajat, avînd un număr de niveluri arbitrar pentru o distribuție oarecare a sarcinilor orizontale pe înălțimea construcției. Aplicarea relațiilor deduse se arată în două exemple de calcul.

La proiectarea construcțiilor etajate se prevăd adeseori, atît din motive de arhitectură, cît și din motive de execuție, cadre avînd rigiditățile riglelor și ale stîlpilor constante pe toată înălțimea construcției. Particularitățile de alcătuire ale acestor structuri au permis elaborarea unei serii de metode simplificate pentru calculul lor la forțe orizontale [4], [5], [6], [8], [10]. Aceste metode de calcul folosesc înlocuirea rezolvării sistemului de ecuații statice care intervine la calculul cadrelor considerate fie prin rezolvarea unei ecuații diferențiale [5], [6], fie a unei ecuații cu diferențe finite [4], [8], [10]. Rigiditățile riglelor și ale stîlpilor fiind constante pe înălțimea construcției, ecuația diferențială, respectiv ecuația cu diferențe finite, care înlocuiește sistemul de ecuații statice are coeficienți constanți. Avantajele metodelor de calcul menționate față de o rezolvare iterativă a sistemului de ecuații statice sînt următoarele:

— se elimină iterația, de multe ori slab convergentă la cadre multietajate, din cauza rigidității mari a stîlpilor;

— se poate calcula direct momentul într-un anumit punct al structurii fără a calcula momentele pe toată structura.

Aceste metode de calcul prezintă însă și următoarele dezavantaje:

— se presupune o distribuție a sarcinilor orizontale pe înălțimea construcției după o lege analitică simplă (distribuție uniformă sau triunghiulară). În practică, de exemplu la distribuirea sarcinilor orizontale la diferite elemente de rigidizare (cadre, diafragme) sau în cazul sarcinilor seismice, intervin însă de multe ori legi de distribuție mai complicate;

— înlocuirea sistemului de ecuaţii statice printr-o ecuaţie diferenţială, adică înlocuirea structurii discontinue reale printr-o structură continuă fictivă, duce la aproximaţii bune numai în cazul structurilor multietajate. Forţele axiale mari care apar în stîlpii etajelor inferioare ale construcţiilor multietajate fac însă ca structurile în cadre cu rigidităţi constante pe toată înălţimea construcţiei să se folosească în primul rînd la construcţii cu un număr de niveluri nu prea mare.

În cele ce urmează se dă o metodă pentru calculul cadrelor etajate la forţe orizontale, avînd avantajele metodelor menţionate mai sus fără a avea şi dezavantajele lor. Metoda propusă permite ca atare calculul direct al momentului într-un punct oarecare al unui cadru etajat, avînd un număr de niveluri arbitrar, pentru o distribuţie oarecare a sarcinilor pe înălţimea construcţiei.

Metoda de calcul este exactă pentru cadre avînd rigidităţile riglelor şi ale stîlpilor constante pe înălţimea construcţiei. La cadre avînd rigidităţi constante pe porţiuni, cuprinzînd mai multe niveluri, metoda propusă se poate folosi pentru calculul aproximativ al momentelor pe primele niveluri, calcul necesar pentru predimensionarea structurii.

1. REZOLVAREA SISTEMULUI DE ECUAŢII STATICE PRIN SERII DE MATRICE

La calculul cadrelor etajate prin distorsiuni, cadrul real se înlocuieşte printr-un cadru echivalent, redus la un singur stîlp şi la cîte o riglă în dreptul fiecărui nivel (fig. 1), rigidităţile acestor elemente fictive fiind egale cu sumele rigidităţilor elementelor corespunzătoare reale [3].

Notînd

φ_i, φ_j, φ_k — unghiurile de distorsiune ale nodurilor învecinate i, j, k,

$i = \dfrac{I}{l}$ — rigiditatea practică a unei bare;

$t = \dfrac{i_s}{2i_s + 6i_r}$ — coeficientul de transmitere a distorsiunilor,

$\overline{M}_j = \overline{M}_{ji} + \overline{M}_{jk}$ — momentul total neechilibrat la nodul j în sistemul de bază,

$b_j = \dfrac{\overline{M}_j}{E(2i_s + 6i_r)}$,

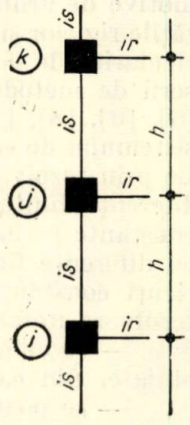


Fig. 1

distorsiunile φ_j se calculează din sistemul de ecuaţii [2]

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 - t\varphi_2 = b_1,\\
&-t\varphi_1 + \varphi_2 - t\varphi_3 = b_2,\\
&-t\varphi_2 + \varphi_3 - t\varphi_4 = b_3,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&-t\varphi_{m-1} - \varphi_m - t\varphi_{m+1} = b_m,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-t\varphi_{n-1} + \varphi_n = b_n.$$

Notînd

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$A = t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sistemul de ecuații (1) se scrie sub formă matriceală

$$(E - A)\Phi = B. \tag{2}$$

Din această ecuație, matricea Φ se poate exprima sub forma unei dezvoltări în serie de matrice [7]:

$$\Phi = (E - A)^{-1}B = (E + A + A^2 + A^3 + \ldots)B. \tag{3}$$

Astfel, de exemplu, pentru $n = 3$ se obține

$$E + A + A^2 + A^3 + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ t^4\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + t^5\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} + t^6\begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \ldots =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{t^2}{1-2t^2} & \dfrac{t}{1-2t^2} & \dfrac{t^2}{1-2t^2} \\ \dfrac{t}{1-2t^2} & \dfrac{1}{1-2t^2} & \dfrac{t}{1-2t^2} \\ \dfrac{t^2}{1-2t^2} & \dfrac{t}{1-2t^2} & 1 + \dfrac{t^2}{1-2t^2} \end{pmatrix}.$$

Pentru $n = 3$ s-a putut obține suma seriei de matrice sub formă finită, elementele matricelor formînd progresii geometrice. Pentru $n > 3$, acest lucru nu se mai întîmplă.

Notînd a_{ij} elementul din linia i și coloana j a matricei $(E - A)^{-1}$, adică din suma seriei de matrice din relația (3), această relație se scrie sub formă dezvoltată

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \ldots + a_{1n}b_n \\
\varphi_2 &= a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \ldots + a_{2n}b_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_m &= a_{m1}b_1 + a_{m2}b_2 + \ldots + a_{mn}b_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_n &= a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \ldots + a_{nn}b_n.
\end{aligned} \tag{4}$$

Matricea $(E - A)^{-1}$ reprezintă ca atare matricea coeficienților de influență pentru calculul unghiurilor de distorsiune φ în funcție de termenii liberi b. Vom denumi în continuare această matrice matrice de influență. Elementul a_{ij} a matricei de influență reprezintă unghiul de distorsiune care apare în nodul i sub influența unei valori $b = 1$ în nodul j.

Se poate arăta ușor că matricele B, AB, A^2B etc. din expresia (3) reprezintă matricele termenilor succesivi de corecție la rezolvarea sistemului de ecuații (1) prin iterație de tip Gauss [1]. Într-adevăr, acest sistem de ecuații, scris în notație matriceală, se poate pune sub forma

$$\Phi = B + A\Phi,$$

iar la rezolvarea prin iterație de tip Gauss valorile Φ_0, Φ_1, Φ_2 ... ale matricei Φ corespunzînd treptelor de aproximație 0, 1, 2, ... sînt

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= B, \\
\Phi_1 &= B + A\Phi_0 = B + AB, \\
\Phi_2 &= B + A\Phi_1 = B + AB + A^2B, \\
\Phi_3 &= B + A\Phi_2 = B + AB + A^2B + A^3B
\end{aligned}$$

etc.

Pentru studiul general al soluțiilor sistemului de ecuații (1) urmărit în această lucrare, reprezentarea matriceală a termenilor de corecție la rezolvarea iterativă prezintă o serie de avantaje, permițînd determinarea printr-un singur calcul a coeficienților a_{ij}, corespunzînd la n ipoteze de încărcare și punînd în evidență toate interdependențele dintre ei. De exemplu, pentru cazul $n = 3$ tratat mai sus, se observă că toți coeficienții a_{ij} se pot exprima în mod simplu prin a_{12}; $a_{11} = 1 + ta_{12}$, $a_{13} = ta_{12}$, $a_{22} = a_{12}/t$. Folosirea unor relații de acest tip, puse în evidență cu ajutorul seriei de matrice din expresia (3) pentru orice n, ușurează mult calculul coeficienților a_{ij} mai ales pentru $n > 3$, caz în care coeficienții de influență nu se mai pot exprima ca suma unei progresii geometrice. Astfel, considerînd aceste interdependențe, s-au putut calcula relativ simplu coeficienții de influență din anexă, reprezentînd rezultatele rezolvării a 390 de sisteme de ecuații. Sistemul de ecuații (1) îndeplinind criteriul lui Wittmeyer,

rezolvarea lui prin iterație de tip Gauss și, ca atare, prin seria din relația (3) este convergentă pentru orice valoare i_s/i_r. Se mai menționează că criteriul lui Wittmeyer este acoperitor [1], condiția riguroasă pentru convergența seriei de matrice din relația (3) cerînd ca toate valorile proprii ale matricei A, adică toate rădăcinile λ ale ecuației seculare $|A - \lambda E| = 0$, să fie subunitare în modul. În figura 2 s-au reprezentat, pentru diferite valori n, valorile maxime t pentru care condiția $|\lambda_{max}| < 1$ este îndeplinită.

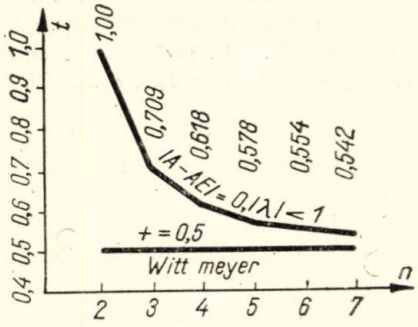


Fig. 2

În anexă se dau valorile a_{ij} corespunzînd domeniului $0{,}05 \leqslant t \leqslant 0{,}30$, adică $0{,}33 \leqslant i_s/i_r \leqslant 4{,}50$. Valorile a_{ij} din anexă s-au calculat luînd în considerare termenii seriei (3) pînă la A^{10}. Cu ajutorul acestor valori se pot alcătui matricele de influență pentru orice n, ținînd cont de următoarele proprietăți ale matricelor de influență puse în evidență prin studiul lor pentru $n = 2 \ldots 10$:

1. Din cauza formei particulare a sistemului de ecuații (1), matricea de influență este simetrică față de ambele diagonale;

2. Între elementele a_{ij} și $a_{i+1,j+1}$ unde $i + j < n$, exsită relația

$$a_{i+1,\,j+1} = a_{ij} + R_{ij}, \tag{5}$$

unde

$$R_{ij} = t^{i+j}(1 + c_1 t^2 + c_2 t^4 + \ldots).$$

Pentru $i + j \geqslant 6$ eroarea introdusă prin neglijarea termenului rest R_{ij} are deci, pentru domeniul de variație considerat al coeficientului t, cel mult ordinul de mărime $0{,}3^6 = 0{,}0007$, adică aproximativ 0,1% din a_{jj}. Considerînd această eroare practic neglijabilă, în anexă s-au tabulat valorile a_{ij} numai pentru $i + j \leqslant 7$, restul coeficienților determinîndu-se din relația (5), în care se pune $R_{ij} = 0$. Cazul $i + j \geqslant n$ se reduce la cazul $i + j < n$, folosind proprietățile de simetrie ale matricei de influență.

Relația (5) admite o interpretare intuitivă simplă : influența valorii $b = 1$ pusă în nodul j asupra nodului i este aproximativ egală cu influența aceleiași valori $b = 1$ pusă în nodul $j + 1$ asupra nodului $i + 1$. Diferențe apar numai din cauza depărtării diferite a nodurilor i, $i + 1$, respectiv j, $j + 1$, față de marginea superioară sau inferioară a construcției; ele scad o dată cu creșterea acestei depărtări după o lege exponențială. Termenul-rest R_{ij} are deci caracterul unei perturbări de margine.

3. Elementul a_{ij} al matricei de influență are forma

$$a_{ij} = t^{|j-i|}(1 + d_1 t^2 + d_2 t^4 + \ldots).$$

Elementele a_{ij} descresc deci după o lege exponențială o dată cu creșterea depărtării dintre nodurile i și j.

În anexă se dau elementele a_{ij} cu $|j-i| \leqslant 6$.

Se neglijează elementele cu $|j-i| > 6$, ordinul de mărime al acestor elemente fiind pentru domeniul de variație considerat al coeficientului t cel mult egal cu $0{,}3^7 = 0{,}0002$, adică aproximativ 0,02% din a_{jj}. Pentru cazuri practice se va observa cu ajutorul tabelelor din anexă, în funcție de t, pînă la ce valoare $|j-i|$ trebuie luate în considerație elementele a_{ij}

2. MODUL PRACTIC DE CALCUL

Se calculează b_j și t și se determină valorile a_{ij} din tabelele din anexă, folosind pentru $i + j \geqslant 6$ relația (5). Se calculează unghiurile de distorsiune φ_j prin relațiile (4).

Momentele M_{jk} și M_{kj} în stîlpul jk al cadrului înlocuitor echivalent și momentul M_{jj} în rigla j a aceluiași cadru se calculează prin relațiile [2]

$$M_{jk} = \overline{M}_{jk} - Ei_s(\varphi_j - \varphi_k),$$
$$M_{jj} = -6Ei_r\,\varphi_j.$$

Unghiul de înclinare față de verticală a stîlpului jk se calculează prin relația [9]

$$\varphi_{jk} = \frac{\overline{M}_{jk}}{6Ei_s} + \frac{\varphi_j + \varphi_k}{2}.$$

Calculul momentelor se poate simplifica, introducînd în relațiile (4), în loc de b_j, momentele neechilibrate $\overline{M}_j$.

Rezultă atunci momentele din distorsiune

$$M_j = \sum_{m=1}^{n} a'_{jm}\,\overline{M}_m \qquad (4')$$

și momentele

$$M_{jk} = \overline{M}_{jk} - t(M_j - M_k),$$
$$M_{jj} = -(1 - 2t)M_j,$$

iar unghiul de înclinare față de verticală a stîlpului jk devine

$$\psi_{jk} = \frac{\overline{M}_{jk}}{6Ei_s} + \frac{M_j + M_k}{2E(2i_s + 6i_r)}.$$

Calculul momentelor M_{jk} și M_{jj} se poate face și pe schema de transmiteri și distribuții, folosit în metoda Csonka. În acest caz se vor distribui momentele M_j, avînd semn contrar momentelor $\overline{M}_j$ la barele concurente în nodul j, iar momentul distribuit la un capăt de stîlp se va transmite la celălalt capăt cu coeficientul -1.

Momentul M_n de la ultimul nod se va distribui la stîlp și la grindă în raportul $i_s/6\ i_r$. Se menționează că valoarea acestui moment se determină în cadrul metodei propuse numai cu aproximație, coeficientul de transmitere a distorsiunilor de la ultimul nod fiind de fapt $i_s/6\ i_r$ în loc de t, valoare considerată în matricea A. După cum rezultă din exemplul de calcul 2, erorile introduse prin aceasta sînt însă mici, chiar în cazul unei rigidități a stîlpilor relativ mari.

3. EXEMPLE DE CALCUL

3.1. EXEMPLUL DE CALCUL 1

Se alcătuiește matricea de influență pentru un cadru etajat cu 10 niveluri, folosind elementele tabulate în anexă și ținînd cont de relația (5).

Matricea de influență este

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & 0 & 0 & 0 \\
a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & 0 & 0 \\
a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} & a_{24} & a_{25} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & 0 \\
a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{33} & a_{34} & a_{24} & a_{25} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\
a_{15} & a_{25} & a_{24} & a_{34} & a_{33} & a_{34} & a_{24} & a_{25} & a_{15} & a_{16} \\
a_{16} & a_{15} & a_{25} & a_{24} & a_{34} & a_{33} & a_{34} & a_{24} & a_{25} & a_{15} \\
0_{17} & a_{16} & a_{15} & a_{25} & a_{24} & a_{34} & a_{33} & a_{34} & a_{24} & a_{14} \\
0 & a_{17} & a_{16} & a_{15} & a_{25} & a_{24} & a_{34} & a_{33} & a_{23} & a_{13} \\
0 & 0 & a_{17} & a_{16} & a_{15} & a_{25} & a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{12} \\
0 & 0 & 0 & a_{17} & a_{16} & a_{15} & a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11}
\end{pmatrix}.$$

3.2. EXEMPLUL DE CALCUL 2

Se calculează momentele în stîlpii și riglele primelor două niveluri și deplasarea orizontală a nodului 2 pentru cadrul cu 8 niveluri, tratat în exemplul de calcul din [6]. În figura 3 s-au trecut elementele geometrice ale cadrului, sarcinile, momentele de încastrare perfectă și momentele neechilibrate $\overline{M}_j$.

Cu

$$I_{s1} = I_{s3} = 0{,}0025\ \text{m}^4,$$

$$I_{s2} = 0{,}0050\ \text{m}^4,$$

$$I_r = 0{,}0012\ \text{m}^4,$$

rigiditățile practice ale barelor cadrului înlocuitor echivalent sînt

$$i_s = \frac{2 \times 0{,}0025 + 0{,}0050}{3{,}0} = 0{,}0033,$$

$$i_r = 4 \times \frac{0{,}0012}{6{,}0} = 0{,}0008.$$

Rezultă

$$t = \frac{0{,}0033}{2 \times 0{,}0033 + 6 \times 0{,}0008} = \frac{0{,}0033}{0{,}0114} = 0{,}29.$$

Folosind tabelele din anexă și introducînd în relația (4') coeficienții de influență a_{ij}, se obține

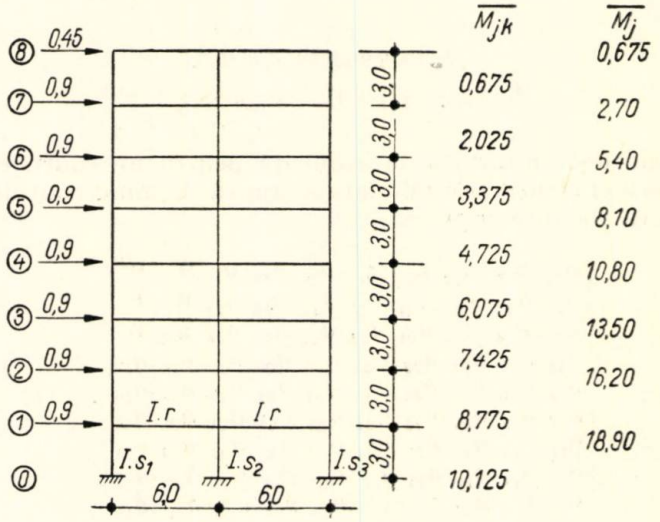


Fig. 3

$$M_1 = 18{,}9 \times 1{,}102 + 16{,}2 \times 0{,}3520 + 13{,}5 \times 0{,}1123 + 10{,}8 \times 0{,}0355 + 8{,}1 \times 0{,}0113 + 5{,}4 \times 0{,}0033 + 2{,}7 \times 0{,}0010 = 28{,}6 \text{ tm},$$

$$M_2 = 18{,}9 \times 0{,}3520 + 16{,}2 \times 1{,}213 + 13{,}5 \times 0{,}3875 + 10{,}8 \times 0{,}1227 + 8{,}1 \times 0{,}0390 + 5{,}4 \times 0{,}0113 + 2{,}7 \times 0{,}0033 + 0{,}675 \times 0{,}0010 = 33{,}2 \text{ tm}.$$

Rezultă

$$M_{11} = (1 - 2 \times 0{,}29) \times 28{,}6 = 12{,}00 \text{ tm},$$

$$M_{22} = (1 - 2 \times 0{,}29) \times 33{,}2 = 13{,}95 \text{ tm},$$

$$M_{01} = 10{,}125 + 0{,}29 \times 28{,}6 = 18{,}42 \text{ tm},$$

$$M_{10} = 10{,}125 - 0{,}29 \times 28{,}6 = 1{,}83 \text{ tm},$$

$$M_{12} = 8{,}775 - 0{,}29 \times (28{,}6 - 33{,}2) = 10{,}13 \text{ tm},$$

$$M_{21} = 8{,}775 - 0{,}29 \times (33{,}2 - 28{,}6) = 7{,}42 \text{ tm}.$$

Se constată o concordanță foarte bună între rezultatele obținute aici și cele din [6]. Momentul în ultima riglă, reprezentînd o valoare aproximativă, a rezultat de 1,63 tm, valoarea exactă din [6] fiind 1,73 tm.

Aproximația obținută este deci bună, mult mai bună decît cea obținută prin metode aproximative, recomandată în [6], care duce la valoarea de 1,18 tm pentru momentul respectiv.

Pentru determinarea deplasării orizontale a nodului 2 se calculează unghiurile ψ_{01} și ψ_{12}:

$$\psi_{01} = \frac{10{,}125}{6E \times 0{,}0033} + \frac{28{,}6}{2E \times 0{,}0114} = \frac{1765}{E},$$

$$\psi_{12} = \frac{8{,}775}{6E \times 0{,}0033} + \frac{28{,}6 + 33{,}2}{2E \times 0{,}0114} = \frac{3153}{E}.$$

Rezultă

$$u_2 = \frac{3{,}0 \times (1765 + 3153)}{E} = \frac{14\,754}{E\,(t/\mathrm{m}^2)}\ \mathrm{m}.$$

Primită la redacție la 6 decembrie 1966

ANEXĂ

Coeficienții de influență a_{11}, a_{12}

t	a_{11}			a_{12}		
	$n = 2$	$n = 3$	$n \geqslant 4$	$n = 2$	$n = 3$	$n \geqslant 4$
0,05	1,002	1,002	1,002	0,0501	0,0503	0,0503
0,06	1,004	1,004	1,004	0,0603	0,0605	0,0605
0,07	1,005	1,005	1,005	0,0704	0,0706	0,0706
0,08	1,006	1,006	1,006	0,0805	0,0810	0,0810
0,09	1,008	1,008	1,008	0,0907	0,0914	0.0914
0,10	1,010	1,010	1,010	0,1010	0,1020	0,1020
0,11	1,012	1,012	1,012	0,1114	0,1128	0,1128
0,12	1,014	1,014	1,014	0,1220	0,1236	0,1236
0,13	1,017	1,017	1,017	0,1320	0,1347	0,1347
0,14	1,020	1,020	1,020	0,1430	0,1458	0,1458
0,15	1,023	1,023	1,023	0,1535	0,1570	0,1570
0,16	1,027	1,027	1,027	0,1643	0,1688	0,1688
0,17	1,030	1,031	1,031	0,1750	0,1805	0,1805
0,18	1,033	1,035	1,035	0,1860	0,1925	0,1925
0,19	1,037	1,039	1,039	1,1970	0,2045	0,2045
0,20	1,042	1,044	1,044	0,2085	0,2175	0,2175
0,21	1,046	1,048	1,048	0,2200	0,2300	0,2305
0,22	1,050	1,054	1,054	0,2310	0,2435	0,2440
0,23	1,056	1,059	1,059	0,2425	0,2570	0,2580
0,24	1,062	1,065	1,065	0,2550	0,2695	0,2700
0,25	1,066	1,072	1,072	0,2660	0,2860	0,2870
0,26	1,073	1,078	1,078	0,2790	0,3000	0,3020
0,27	1,079	1,085	1,086	0,2910	0,3160	0,3180
0,28	1,084	1,093	1,094	0,3040	0,3320	0,3345
0,29	1,092	1,101	1,102	0,3170	0,3485	0,3520
0,30	1,099	1,109	1,111	0,3300	0,3650	0,3700

Coeficienţii de influenţă a_{13}, a_{14}

t	a_{13}			a_{14}	
	$n = 3$	$n \geqslant 4$	$n \geqslant 5$	$n = 4$	$n \geqslant 5$
0,05	0,0025	0,0025	0,0025	0,0001	0,0001
0,06	0,0036	0,0036	0,0036	0,0002	0,0002
0,07	0,0049	0,0049	0,0049	0,0003	0,0003
0,08	0,0065	0,0065	0,0065	0,0005	0,0005
0,09	0,0082	0,0083	0,0083	0,0007	0,0007
0,10	0,0101	0,0103	0,0103	0,0010	0,0010
0,11	0,0124	0,0125	0,0125	0,0014	0,0014
0,12	0,0148	0,0151	0,0151	0,0018	0,0018
0,13	0,0175	0,0178	0,0178	0,0023	0,0023
0,14	0,0204	0,0208	0,0208	0,0029	0,0030
0,15	0,0235	0,0241	0,0241	0,0036	0,0037
0,16	0,0270	0,0277	0,0277	0,0044	0,0046
0,17	0,0306	0,0316	0,0316	0,0054	0,0055
0,18	0,0347	0,0358	0,0358	0,0065	0,0067
0,19	0,0389	0,0403	0,0405	0,0077	0,0080
0,20	0,0435	0,0454	0,0455	0,0091	0,0095
0,21	0,0484	0,0506	0,0508	0,0106	0,0112
0,22	0,0535	0,0562	0,0565	0,0123	0,0130
0,23	0,0590	0,0624	0,0628	0,0143	0,0152
0,24	0,0650	0,0688	0,0695	0,0165	0,0177
0,25	0,0715	0,0760	0,0770	0,0190	0,0205
0,26	0,0780	0,0836	0,0847	0,0217	0,0237
0,27	0,0850	0,0915	0,0932	0,0247	0,0271
0,28	0,0930	0,1015	0,1024	0,0284	0,0310
0,29	0,1010	0,1113	0,1123	0,0323	0,0355
0,30	0,1095	0,1220	0,1233	0,0366	0,0406

Coeficienţii de influenţă a_{15}, a_{16}, a_{17}, a_{22}

t	a_{15}		a_{16}	a_{17}	a_{22}	
	$n = 5$	$n \geqslant 6$	$n \geqslant 6$	$n \geqslant 7$	$n = 3$	$n \geqslant 4$
0,05	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,005	1,005
0,06	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,007	1,007
0,07	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,010	1,010
0,08	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	1,013	1,013
0,09	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	1,016	1,016
0,10	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	1,020	1,020
0,11	0,0001	0,0001	0,0000	0,0000	1,025	1,025
0,12	0,0002	0,0002	0,0000	0,0000	1,030	1,030
0,13	0,0003	0,0003	0,0000	0,0000	1,035	1,035
0,14	0,0004	0,0004	0,0001	0,0000	1,041	1,041
0,15	0,0006	0,0006	0,0001	0,0000	1,047	1,048
0,16	0,0007	0,0007	0,0001	0,0000	1,054	1,055
0,17	0,0009	0,0009	0,0002	0,0000	1,062	1,063
0,18	0,0012	0,0012	0,0002	0,0000	1,070	1,071
0,19	0,0015	0,0015	0,0003	0,0001	1,078	1,078
0,20	0,0019	0,0019	0,0004	0,0001	1,087	1,089
0,21	0,0023	0,0025	0,0005	0,0001	1,096	1,098
0,22	0,0029	0,0031	0,0007	0,0002	1,107	1,110
0,23	0,0033	0,0037	0,0009	0,0002	1,119	1,123
0,24	0,0042	0,0045	0,0011	0,0003	1,123	1,127
0,25	0,0051	0,0055	0,0014	0,0003	1,143	1,148
0,26	0,0062	0,0066	0,0017	0,0004	1,156	1,163
0,27	0,0073	0,0079	0,0021	0,0006	1,171	1,179
0,28	0,0087	0,0095	0,0027	0,0008	1,186	1,195
0,29	0,0103	0,0113	0,0033	0,0010	1,202	1,213
0,30	0,0122	0,0134	0,0040	0,0012	1,219	1,232

Coeficienții de influență a_{23}, a_{24}, a_{25}, a_{33}, a_{34}

t	a_{23}		a_{24}	a_{25}	a_{33}	a_{34}
	$n = 4$	$n \geqslant 5$	$n \geqslant 5$	$n \geqslant 6$	$n \geqslant 5$	$n \geqslant 6$
0,05	0,0504	0,0504	0,0025	0,0001	1,005	0,0504
0,06	0,0608	0,0608	0,0036	0,0002	1,007	0,0608
0,07	0,0710	0,0710	0,0049	0,0003	1,010	0,0710
0,08	0,0815	0,0815	0,0065	0,0005	1,013	0,0815
0,09	0,0920	0,0920	0,0083	0,0007	1,016	0,0920
0,10	0,1030	0,1030	0,0104	0,0010	1,020	0,1030
0,11	0,1140	0,1140	0,0127	0,0014	1,025	0,1140
0,12	0,1255	0,1255	0,0153	0,0018	1,030	0,1255
0,13	0,1370	0,1370	0,0181	0,0023	1,035	0,1370
0,14	0,1490	0,1490	0,0212	0,0030	1,041	0,1491
0,15	0,1605	0,1605	0,0247	0,0038	1,048	0,1606
0,16	0,1730	0,1730	0,0285	0,0047	1,055	0,1731
0,17	0,1860	0,1860	0,0325	0,0057	1,063	0,1862
0,18	0,1990	0,1990	0,0370	0,0068	1,071	0,1992
0,19	0,2120	0,2130	0,0420	0,0083	1,081	0,2133
0,20	0,2265	0,2275	0,0475	0,0097	1,091	0,2279
0,21	0,2405	0,2420	0,0532	0,0117	1,102	0,2425
0,22	0,2555	0,2570	0,0593	0,0138	1,113	0,2577
0,23	0,2710	0,2730	0,0663	0,0161	1,126	0,2739
0,24	0,2865	0,2900	0,0738	0,0189	1,139	0,2911
0,25	0,3040	0,3080	0,0820	0,0220	1,154	0,3094
0,26	0,3220	0,3260	0,0910	0,0255	1,170	0,3277
0,27	0,3430	0,3455	0,1005	0,0294	1,186	0,3476
0,28	0,3625	0,3660	0,1110	0,0339	1,205	0,3687
0,29	0,3840	0,3875	0,1227	0,0390	1,225	0,3908
0,30	0,4065	0,4110	0,1353	0,0447	1,247	0,4150

BIBLIOGRAFIE

1. R. AGENT, *Metoda aproximațiilor succesive aplicată în probleme de statică și în alte probleme similare*, vol. I, București, 1955.
2. — *Bazele teoretice și aplicațiile utilizării distorsiunilor în calculul cadrelor etajate*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, *10* (1963).
3. CARACOSTEA, *Manual pentru calculul construcțiilor*, București, 1959.
4. P. CSONKA, *Die Windberechnung von Rahmentragwerken mit Hilfe von Differenzengleichungen*, Die Bautechnik, *10* (1962).
5. — *Beitrag zur Berechnung waagerecht belasteter Stockwerkrahmen*, Die Bautechnik, *7* (1962).
6. — *Procedeu simplificat pentru calculul cadrelor etajate la încărcări date de vînt*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții *1* (1966).
7. D. K. FADEEV, *Algebra lineară*, în *Matematica, conținutul, metodele și importanța ei, vol. III*, București, 1961.
8. E. KEINTZEL, *Calculul cadrelor spațiale etajate axial-simetrice prin ecuații cu diferențe finite*, St. cerc. mec. apl. *1* (1063).
9. — *Contribuții la sistematizarea calculului seismic al cadrelor etajate*, Revista construcțiilor și al materialelor de construcții, *5* (1964).
10. W. MANN, *Die Berechnung regelmässiger Windrahmen*, în *Geschlossene Form mit Hilfe von Differenzengleichungen*, Der Bauingenieur, *3* (1961).

UN MODEL MATEMATIC PENTRU CALCULUL STRUCTURILOR CURBE SUBȚIRI CELULARE

de V. VISARION și D. DRĂGHICESCU
Centrul de mecanică a solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

539.3

Este prezentat în această lucrare un model matematic pentru calculul structurilor curbe celulare subțiri elastice.
Se adoptă pentru o structură curbă, un model echivalent cu material continuu, o placă curbă prezentînd un tip special de anizotropie multiplă. În cazul particular al plăcii curbe subțiri se obține un model de calcul bazat pe ipoteze mai puțin restrictive decît ipotezele Love-Kirchhoff.

1. INTRODUCERE

Teoria clasică a plăcilor curbe subțiri elastice se bazează în mod esențial pe ipoteza Love-Kirchoff a nedeformabilității elementului normal, echivalentă cu anularea deformațiilor de tăiere și a deformației principale în direcția normalei.

O altă ipoteză acceptată în teoria clasică și în cea mai mare parte a teoriilor pentru plăci curbe subțiri elastice constă în echivalarea a două elemente de placă asupra cărora acționează forțe exterioare și masice de torsor egal.

Acestora li se atașează unele ipoteze care le contrazic:

— tensiunea σ_{33} este luată egală cu zero, o dată cu ε_{33};

— din $\varepsilon_{13} = 0$, $\varepsilon_{23} = 0$ și $\sigma_{13} \neq 0$,

$\sigma_{23} \neq 0$ rezultă contrazicerea relațiilor lui Hooke, ceea ce conduce printre altele, și la imposibilitatea de a impune condiții la limită forțelor tăietoare.

Pentru cea mai mare parte a învelitorilor izotrope și omogene utilizate în practică, contradicțiile arătate nu influențează substanțial valoarea celorlalte eforturi și, prin urmare, metodele de calcul bazate pe ele dau rezultate satisfăcătoare.

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl. (în limba rusă), **12**, 2 (1968).

În cazul structurilor curbe subțiri, dat fiind caracterul neomogen al distribuției materialului, se impune ca necesară o nouă teorie.

În lucrarea de față este dezvoltată o teorie a structurilor curbe subțiri elastice care se bazează pe următoarele ipoteze :

— echivalența structurilor subțiri ale căror elemente sînt supuse unor sarcini masice și de suprafață de torsor egal ;

— neglijarea raportului $\frac{h}{R}$ față de unitate în toate expresiile care nu sînt derivate în raport cu z. Această aproximație dispare în cazul plăcii plane, unde în orice punct curburile sînt nule.

Plăcile curbe sînt tratate în cele ce urmează utilizîndu-se sistemul de ecuații al teoriei elasticității, pentru corpuri omogene ecuațiile de echilibru ale lui Cauchy, ecuațiile geometric liniare și ecuațiile fizice de asemenea liniare. Relațiile fizice pentru structurile celulare se obțin prin echivalarea structurii reale cu una anizotropă cu omogenitate de un anumit tip, utilizînd ipotezele rezistenței materialelor. Aceste ipoteze simplificatoare ale rezistenței materialelor influențează numai asupra valorii constantelor elastice, numărul ca și semnificația lor rămînînd cele adoptate în teoria generală a elasticității liniare. Obținerea acestor constante se poate face și pe cale experimentală, ceea ce conduce la o tratare a problemei fără aproximațiile rezistenței materialelor în cadrul modelului matematic al teoriei elasticității.

Notațiile utilizate în lucrare sînt cele adoptate în teoria clasică a plăcilor curbe subțiri. Menționăm că notațiile deformațiilor ε_1, ε_2, ε_3 sînt echivalente cu ε_{11}, ε_{22}, ε_{33} din teoria elasticității.

Placa curbă subțire este referită la un sistem de referințe format din liniile de curbură ale suprafeței mediane și din normalele la această suprafață.

2. RELAȚIILE GEOMETRICE DINTRE DEFORMAȚII ȘI DEPLASĂRI

Fie M un punct al suprafeței mediane nedeformate, M_1 un punct situat pe normala în punctul M la cota z și M^*, M_1^* aceleași puncte în poziția deformată a plăcii considerate.
Deci

$$\begin{aligned} \bar{r}_1^* &= \bar{r} + z\bar{n} + \bar{U}(\alpha, \beta, z), \\ \bar{r}_1 &= \bar{r} + z\bar{n}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$\bar{r}$ fiind vectorul de poziție al lui M, $\bar{r}_1$ al lui M_1, $\bar{r}_1^*$ vectorul de poziție al lui M_1^*, iar $\bar{U}(\alpha, \beta, z)$ vectorul deplasării elastice cu origine în M_1 și extremitatea în M_1^*.

Pentru cele ce urmează vom face ipoteza

$$\bar{U}(\alpha, \beta, z) = \bar{U}_0(\alpha, \beta) + \cos\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\bar{U}_c(\alpha, \beta) + \sin\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\bar{U}s(\alpha, \beta), \tag{2.2}$$

pe baza căreia vom putea satisface cerințele formulate în primul paragraf.

Este de observat că (2.2) provine din reținerea primilor trei termeni într-o dezvoltare trigonometrică ortogonală după variabila z, de perioadă $4h$.

În cadrul formulării liniare se poate considera

$$\varepsilon_{ij} = \left(\frac{\partial \bar{r}_1^*}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{r}_1^*}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x_j} \right) \frac{1}{2 \left| \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x_i} \right| \left| \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x_j} \right|} \tag{2.3}$$

$$x_1 = \alpha, \quad x_2 = \beta, \quad x_3 = z.$$

Pe baza neglijării lui $\frac{h}{R}$ în raport cu unitatea,

$$\left| \frac{\partial \bar{r}_1}{\partial x_1} \right| = \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) A \cong A \quad \text{ș.a.m.d.} \tag{2.4}$$

Cu aceasta rezultă

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{10} + \varepsilon_{1c} \cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{h} + \varepsilon_{1s} \sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{h}, \tag{2.5}$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\omega_0 + \omega_c \cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{h} + \omega_s \sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{h} \right), \tag{2.6}$$

$$\varepsilon_{33} = \varepsilon_{33c} \cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{h} + \varepsilon_{33s} \sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{h}, \tag{2.7}$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\gamma_{10} + \gamma_{1c} \cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{h} + \gamma_{1s} \sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{h} \right), \tag{2.8}$$

în care

$$\varepsilon_{10} = \frac{\bar{t}_1}{A} \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{1c} = \frac{\bar{t}_1}{A} \frac{\partial \bar{U}_c}{\partial \alpha}, \quad \varepsilon_{1s} = \frac{\bar{t}_1}{A} \frac{\partial \bar{U}_s}{\partial \alpha}, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \omega_{10} &= \frac{\bar{t}_2}{A} \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \alpha}, & \omega_{20} &= \frac{\bar{t}_1}{B} \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \beta}, \\ \omega_{1c} &= \frac{\bar{t}_2}{A} \frac{\partial \bar{U}_c}{\partial \alpha}, & \omega_{2c} &= \frac{\bar{t}_1}{B} \frac{\partial \bar{U}_c}{\partial \beta}, \\ \omega_{1s} &= \frac{\bar{t}_2}{A} \frac{\partial \bar{U}_s}{\partial \alpha}, & \omega_{2s} &= \frac{\bar{t}_1}{B} \frac{\partial \bar{U}_s}{\partial \beta}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33c} &= \frac{\pi}{2h} \bar{n} \bar{U}_s, & \varepsilon_{33s} &= -\frac{\pi}{2h} \bar{n} \bar{U}_c, \\ \gamma_{10} &= \frac{\bar{n}}{A} \frac{\partial \bar{U}_0}{\partial \alpha}, & \gamma_{1c} &= \frac{\bar{n}}{A} \frac{\partial \bar{U}_c}{\partial \alpha} + \frac{\pi}{2h} \bar{t}_1 \bar{U}_s, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\gamma_{1s} = \frac{\bar{n}}{A} \frac{\partial \bar{U}_s}{\partial \alpha} - \frac{\pi}{2h} \bar{t}_1 \bar{U}_c. \tag{2.12}$$

Este de remarcat că rezultă geometric

$$\varepsilon_{330} = 0. \tag{2.13}$$

Dacă se notează pentru $0, c, s = i$

$$\overline{U}_i = u_i\,\bar{t}_1 + v_i\,\bar{t}_2 - w_i\,\bar{n}, \tag{2.14}$$

se obține

$$\varepsilon_{1i} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\,v_i - A\,\frac{w_i}{R_1}\right), \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{1i} &= \frac{1}{A}\left(\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\,u_i\right),\\
\omega_{2i} &= \frac{1}{B}\left(\frac{\partial u_i}{\partial \beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\,v_i\right),\\
\omega_i &= \omega_{1i} + \omega_{2i},
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\eta_{10} &= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial w_0}{\partial \alpha} + A\,\frac{u_0}{R_1}\right),\\
\eta_{1c} &= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial w_c}{\partial \alpha} + A\,\frac{u_c}{R_1}\right) + \frac{\pi}{2h}\,u_s,\\
\eta_{1s} &= -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial w_s}{\partial \alpha} + A\,\frac{u_s}{R_1}\right) - \frac{\pi}{2h}\,u_c.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

3. ECUAȚII DE ECHILIBRU

Ecuațiile de echilibru în punctul de coordonate α, β, z în cazul neglijării lui $\frac{h}{R}$ în raport cu unitatea sînt [1])

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{11}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\,\sigma_{22} + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{12}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}\,\sigma_{12} +\\
&+ AB\left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sigma_{13} + AB\,\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial z} + AB\,P_\alpha = 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

. . . . . .

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{13}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{23}) - AB\left(\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{33}}{R_1} + \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{R_2}\right) +\\
&+ AB\,\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} + AB\,P_z = 0.
\end{aligned}$$

[1]) În cazul plăcii plane ele sînt exacte.

Vom nota cu σ_{ijo}, σ_{ijc}, σ_{ijs} termenul constant și, respectiv, coeficienții lui $\cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{h}$ și $\sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{h}$ din expresiile lui σ_{ij}, obținute pe baza deplasării (2.2) și a relațiilor dintre tensiuni și deformații.

Forțele masice le vom lua sub forma

$$P_{x_i} = P_{x_i 0} + \cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{h} P_{x_i c} + \sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{h} P_{x_i s}. \tag{3.2}$$

Introducînd în (3.1) și identificînd, rezultă

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{110}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\sigma_{220} + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{120}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}\sigma_{120} + \\ + AB\left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sigma_{130} + AB\ P_{\alpha 0} = 0, \tag{3.3}$$

. . . . . .

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{130}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{230}) - AB\left(\frac{\sigma_{110} - \sigma_{330}}{R_1} + \frac{\sigma_{220} - \sigma_{330}}{R_2}\right) + \\ + ABP_{z0} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{11c}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\sigma_{22c} + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{12c}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}\sigma_{12c} + \\ + AB\left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sigma_{13c} + AB\frac{\pi}{2h}\sigma_{13s} + ABP_{\alpha c} = 0, \tag{3.4}$$

. . . . . .

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{13c}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{23c}) - AB\left(\frac{\sigma_{11c} - \sigma_{33c}}{R_1} + \frac{\sigma_{22c} - \sigma_{33c}}{R_2}\right) + \\ + AB\frac{\pi}{2h}\sigma_{33s} + AB\,P_{zc} = 0$$

și

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{11s}) - \frac{\partial B}{\partial \alpha}\sigma_{22s} + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{12s}) + \frac{\partial A}{\partial \beta}\sigma_{12s} + \\ + AB\left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sigma_{13s} - AB\frac{\pi}{2h}\sigma_{13c} + AB\,P_{\alpha s} = 0,$$

. . . . . (3.5)

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}(B\sigma_{13s}) + \frac{\partial}{\partial \beta}(A\sigma_{23s}) - AB\left(\frac{\sigma_{11s} - \sigma_{33s}}{R_1} + \frac{\sigma_{22s} - \sigma_{33s}}{R_2}\right) - \\ - AB\frac{\pi}{2h}\sigma_{33c} + AB\,P_{zs} = 0.$$

Satisfacerea relaţiilor (3.3), (3.4) şi (3.5) de către componentele tensiunilor în cazul plăcii plane este echivalentă cu satisfacerea exactă a ecuaţiilor punctuale de echilibru (3.1), iar în cazul plăcilor curbe este echivalentă cu satisfacerea ecuaţiilor (3.1), care în acest caz au coeficienţii stabiliţi cu eroare de $\frac{h}{R}$ faţă de unitate în raport cu ecuaţiile de echilibru ale elasticităţii.

Este demn de remarcat faptul că sistemul de ecuaţii (3.3), corespunzînd părţii constante din dezvoltarea eforturilor, nu coincide cu ecuaţiile teoriei de membrană, ci unei formulări care conţine şi forţe tăietoare. Mai trebuie observat faptul că, deoarece $\varepsilon_{330} = 0$, σ_{330} nu apare ca un efort distinct, ci poate fi, în general, determinat în funcţie de celelalte eforturi pe baza unei legi fizice care să lege tensiunile de deformaţiile unitare.

4. ECUAŢII DE CONTINUITATE A DEFORMAŢIEI

Ecuaţiile de continuitate a deformaţiei pentru termeni constanţi se stabilesc astfel. Pornim de la relaţia lui Schwarz:

$$\frac{\partial^2 \overline{U}_0}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 \overline{U}_0}{\partial\beta\partial\alpha}. \tag{4.1}$$

Proiectînd-o pe cele trei axe

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\bar{t}_1 \frac{\partial \overline{U}_0}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial\alpha}\frac{\partial \overline{U}_0}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\bar{t}_1 \frac{\partial \overline{U}_0}{\partial\alpha}\right) - \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial\beta}\frac{\partial \overline{U}_0}{\partial\alpha} \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\bar{n} \frac{\partial \overline{U}_0}{\partial\beta}\right) - \frac{\partial \bar{n}}{\partial\alpha}\frac{\partial \overline{U}_0}{\partial\beta} = \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\bar{n} \frac{\partial \overline{U}_0}{\partial\alpha}\right) - \frac{\partial \bar{n}}{\partial\beta}\frac{\partial \overline{U}_0}{\partial\alpha},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

pe baza notaţiilor (2.9—12) se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\,\omega_{20}) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega_{10} - \frac{\partial}{\partial\beta}(A\varepsilon_{10}) + \frac{\partial A}{\partial\beta}\varepsilon_{20} - AB\,\frac{\eta_{20}}{R_1} = 0, \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&AB\left(-\frac{\omega_{20}}{R_1} + \frac{\omega_{10}}{R_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(B\eta_{20}) - \frac{\partial}{\partial\beta}(A\eta_{10}) = 0,
\end{aligned} \tag{4.3}$$

cărora li se alătură şi relaţia

$$\omega_{10} + \omega_{20} = \omega_0. \tag{4.4}$$

Sistemul (4.3), (4.4) reprezintă sistemul de ecuaţii de continuitate a deformaţiei obţinută prin eliminarea componentelor u_0, v_0, w_0 ale vectorului deplasării $\overline{U}_0$ între deformaţiile ε_{10}, ε_{20}, ω_0, ω_{10}, ω_{20}, η_{10}, η_{20}.

Pentru celelalte componente se observă o analogie între deformațiile de același nume în $\cos\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}$ și cele în $\sin\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}$. Aceasta permite ca, notînd în general

$$e = e_c + \mathrm{i}e_s, \tag{4.5}$$

să putem reuni relațiile geometrice sub forma complexă

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\bar{t}_1}{A}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\alpha}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\bar{t}_2}{B}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\beta},\\
\omega_1 &= \frac{\bar{t}_2}{A}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\alpha}, \qquad \omega_2 = \frac{\bar{t}_1}{B}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\beta},\\
\eta_1 &= \frac{\overline{n}}{A}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\alpha} - \mathrm{i}\frac{\pi}{2h}\bar{t}_1\overline{U},\\
\eta_2 &= \frac{\overline{n}}{B}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\beta} - \mathrm{i}\frac{\pi}{2h}\bar{t}_2\overline{U},\\
\varepsilon_3 &= -\mathrm{i}\frac{\pi}{2h}\overline{n}\overline{U}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Ecuațiile de continuitate pentru aceste componente le vom obține prin întocmirea în ecuațiile geometrice a deplasărilor explicitate în raport cu η_1, η_2 și ε_3.
Astfel, din

$$\eta_1 = \frac{\overline{n}}{A}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\alpha} - \mathrm{i}\frac{\pi}{2h}\bar{t}_1\overline{U}, \tag{4.7}$$

$$\overline{n}\overline{U} = \mathrm{i}\frac{2h}{\pi}\varepsilon_3, \tag{4.8}$$

se obțin două relații:

$$\begin{aligned}
\bar{t}_1\overline{U}\left(\frac{1}{R_1} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2h}\right) &= \mathrm{i}\frac{2h}{\pi}\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\alpha} - \eta_1,\\
\bar{t}_2\overline{U}\left(\frac{1}{R_2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2h}\right) &= \mathrm{i}\frac{2h}{\pi}\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\beta} - \eta_2.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

O exprimare comodă se obține scriind vectorul $\overline{U}$ pe baza relațiilor (4.9), (4.8) sub forma

$$\overline{U} = \frac{\mathrm{i}\frac{2h}{\pi}\frac{1}{A}\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\alpha} - \eta_1}{\frac{1}{R_1} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2h}}\bar{t}_1 + \frac{\mathrm{i}\frac{2h}{\pi}\frac{1}{B}\frac{\partial\varepsilon_3}{\partial\beta} - \eta_2}{\frac{1}{R_2} + \mathrm{i}\frac{\pi}{2h}}\bar{t}_2 + \mathrm{i}\frac{2h}{\pi}\varepsilon_3\overline{n}. \tag{4.10}$$

Înlocuirea în relaţiile geometrice

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{t}_1}{A}\frac{\partial \bar{U}(\eta_1, \eta_2, \varepsilon_3)}{\partial \alpha}, \tag{4.11}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{\bar{t}_2}{B}\frac{\partial \bar{U}(\eta_1, \eta_2, \varepsilon_3)}{\partial \beta},$$

$$\omega = \frac{\bar{t}_2}{A}\frac{\partial \bar{U}(\eta_1, \eta_2, \varepsilon_3)}{\partial \alpha} + \frac{\bar{t}_1}{B}\frac{\partial \bar{U}(\eta_1, \eta_2, \varepsilon_3)}{\partial \beta}$$

generează ecuaţiile de continuitate a deformaţiei [2]). Cele şase ecuaţii reale astfel obţinute transcrise în tensiuni pe baza unei legi fizice, alăturate celor şase ecuaţii de echilibru (3.5) şi (3.6), formează un sistem de 12 ecuaţii în cele 12 necunoscute tensiuni : σ_{11c}, σ_{11s}, σ_{22c}, σ_{22s}, σ_{12c}, σ_{12s}, σ_{13c}, σ_{13s}, σ_{23c}, σ_{23s}, σ_{33c}, σ_{33s}.

5. LEGEA FIZICĂ

Presupunem că placa considerată este realizată dintr-un material care pentru fiecare dintre componente admite relaţii liniare ce leagă tensiunile de deformaţiile unitare. Pentru fiecare dintre componente vom presupune proprietăţi de anizotropie de o formă specială :

$$\varepsilon_{1j} = \frac{1}{E_{tj}}(\sigma_{11j} - \nu_{ttj}\sigma_{22j} - \nu_{tnj}\sigma_{33j}), \tag{5.1}$$

$$\varepsilon_{2j} = \frac{1}{E_{tj}}(\sigma_{22j} - \nu_{tti}\sigma_{11j} - \nu_{tnj}\sigma_{33j}), \tag{5.2}$$

$$\varepsilon_{3j} = \frac{1}{E_{nj}}(\sigma_{33j} - \nu_{ntj}\sigma_{11j} - \nu_{ntj}\sigma_{22j}), \tag{5.3}$$

$$\eta_{1j} = \frac{1}{2\mu_n}\sigma_{13j}, \qquad \eta_{2j} = \frac{1}{2\mu_n}\sigma_{23j}; \qquad \omega_j = \frac{1}{2\mu_t}\sigma_{13j}, \tag{5.4}$$

care, după cum vom arăta, pot fi utilizate în cazul structurilor curbe celulare subţiri elastice.

Cazul materialului omogen izotrop sau anizotrop, cu liniile principale de anizotropie corespunzînd cu liniile de curbură ale suprafeţelor $Z =$ $=$ const, evident îl vom obţine prin particularizarea relaţiilor (5.1)—(5.4), considerînd că toate constantele elastice nu depind de componenta considerată.

În cele ce urmează vom studia posibilitatea de stabilire a legii fizice pentru o structură curbă subţire celulară, formată din două plăci curbe echidistante între care se află o reţea de plăci de rigidizare aşezate după

[2]) Înlocuind $\bar{U}$ dat de (4.10) în expresiile lui η_1 şi η_2, se obţin în mod evident identităţi.

o lege dată. Această structură o vom echivala pentru fiecare componentă a deplasării cu cîte o placă curbă omogenă anizotropă, considerînd două elemente ca echivalente dacă au aceeași rigiditate.

Din această corespondență între plăci se deduc constantele elastice ale învelitorii omogene anizotrope pentru fiecare componentă a deplasării în parte, adică anizotropia de structură se echivalează de fapt cu trei anizotropii de material.

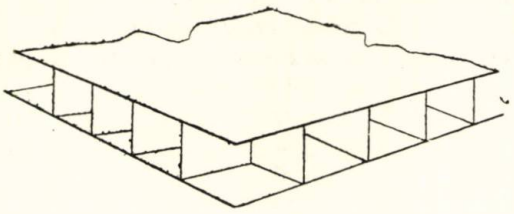


Fig. 1

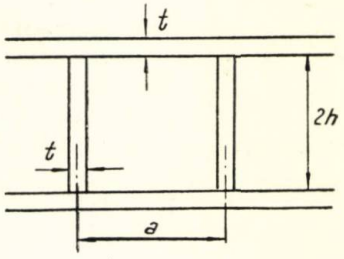


Fig. 2

Ca exemplificare vom prezenta modul de obținere a relațiilor fizice pentru o placă subțire celulară cu o rețea de pereți de rigidizare formată din pătrate, ceea ce asigură existența unui plan de izotropie, adică reduce constantele elastice doar la cinci independente pentru fiecare componentă. În plus, pentru comoditate vom lua grosimile pereților de rigidizare egale cu cele ale plăcilor de bază și valoarea lor comună o vom nota cu t. Distanța dintre plăcile de bază, egală cu înălțimea pereților de rigidizare, o vom nota cu $2h$, ceea ce dă pentru grosimea plății celulare grosimea $2(h+t)$. Acest tip de placă celulară apare în figura 1 și 2.

Elementul de placă îl vom considera centrat în punctul de intersecție a două nervuri de rigidizare ortogonale avînd lungimea egală cu jumătatea $\frac{a}{2}$ a distanței dintre două nervuri consecutive.

A. CAZUL PLĂCII DEFORMATE CONSTANT ÎN RAPORT CU z

Relațiile de echivalare între structura celulară și placa omogenă sînt

$$
\begin{aligned}
2haE_t &= 2taE + 2thE,\\
2E\nu_{tt}ht &= 2atE(\nu - \nu_{tt}),\\
2ah\mu_t &= 2\,at\mu,\\
2ah\mu_n &= 2th\mu,\\
\nu_{tn} &= \frac{1}{2}\nu,\\
E_n &= 2\frac{t}{a}E, \qquad 2ht(\nu - \nu_{nt})E = 2at\nu_{nt}E,
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

unde

— E_t, μ_t, ν_{tt} sînt, respectiv, modulul de elasticitate, modulul de alunecare și coeficientul lui Poisson pentru elementele din planul de izotropie (planul tangent la o suprafață paralelă cu cea mediană),

— E, μ, ν — aceiași coeficienți pentru materialul izotrop din care este confecționată structura celulară,

— E_n, μ_n, — coeficienții de elasticitate și respectiv de alunecare pe direcția normală la planul de izotropie,

— ν_{nt} și ν_{tn} — coeficienții de contracție transversală în cazul cînd eforturile acționează după normală și respectiv în planul de izotropie.

Din relațiile (5.5) rezultă

$$
\begin{aligned}
&E_t = t\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{a}\right)E, \\
&\mu_t = \frac{t}{h}\mu; \qquad \nu_{tn} = \frac{1}{2}\nu, \\
&\nu_{tt} = \frac{\nu}{a+h}; \qquad E_n = 2\frac{t}{a}E, \\
&\mu_n = \frac{t}{a}\mu; \qquad \nu_{nt} = \frac{\nu h}{a+h}.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Relațiile de echivalență au fost obținute pe baza studiului comportării unei celule oarecare în ipotezele de lucru ale rezistenței materialelor. O primă verificare a corectitudinii acestor ipoteze, și în special a consecvenței cu care ele au fost aplicate la deducerea constantelor elastice ale plăcii, este dată de faptul că relațiile de reciprocitate ale lui Betti sînt verificate exact.

Între cele 7 constante (5.6) există două relații: una care leagă modulii de elasticitate, de lunecare și coeficientul lui Poisson în planul de izotropie și cea a lui Betti.

$$
\mu_t = \frac{aE_t}{2\left[1 + \left(1 + \frac{h}{a}\right)\nu_{tt}\right](a+h)}; \qquad \frac{\nu_{nt}}{E_n} = \frac{\nu_{tn}}{E_t},
$$

ceea ce arată că de fapt numai cinci constante sînt independente.

B. CAZUL PLĂCII DEFORMATE DUPĂ $\cos\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}$

Relațiile de echivalență se obțin în aceleași ipoteze ca și în cazul A. Ca exemplu, relația din care se deduce E_t este

$$
E_t\int_0^h \cos\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\,dz + aE\int_{h-t}^h \cos\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\,dz = aE_t\int_0^h \cos\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}\,dz.
$$

Din relaţiile de echivalare rezultă

$$
\begin{aligned}
E_t &= E\left(\frac{t}{a} + 2\sin^2\frac{\pi t}{4h}\right),\\
\nu_{tt} &= 2\nu\,\frac{t}{h}\,\frac{a}{a+h},\\
\mu_t &= \frac{\pi^2 t^2}{2h^2}\,\mu,\\
\mu_n &= \frac{t}{a}\,\mu,\\
E_n &= 2\,\frac{t}{a}E,\\
\nu_{nt} &= \frac{\nu h}{a+h},\\
\nu_{tn} &= \frac{\nu h}{2(a+h)}\left(1 + \frac{\pi^2 t a}{8h^2}\right).
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

C. CAZUL PLĂCII DEFORMATE DUPĂ $\sin\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}$

Relaţiile de echivalare se stabilesc în acelaşi mod ca la cazul B, pe baza aceloraşi ipoteze, egalîndu-se cuplurile corespunzătoare deformaţiilor egale.

În acest mod se obţin valorile

$$
\begin{aligned}
E_t &= \frac{t}{h}\left(\frac{h}{a} + \frac{\pi^2}{4}\right)E,\\
\nu_t &= \nu,\\
\mu_t &= \frac{\pi^2}{4}\,\frac{t}{h}\,\mu,\\
\nu_{nt} &= \frac{h}{a+h}\,\nu,\\
E_n &= 2\,\frac{t}{a}E,\\
\nu_{tn} &= \frac{1}{2}\,\frac{h}{a+h}\left(\frac{h}{a} + \frac{\pi^2}{4}\right).
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

6. FORMULAREA PROBLEMELOR LA LIMITĂ

Modul în care a fost luat vectorul deplasării (2.2) permite, după cum vom arăta, să descompunem problema generală la limită în două probleme separate pentru cele trei componente: una pentru partea constantă și alta pentru partea în cosinus și în sinus, satisfăcînd toate condițiile la limită ale teoriei clasice corespunzătoare și luînd în considerare efectul forțelor de pe cele două suprafețe care limitează placa elastică subțire, notate cu S^+ și S^-.

Valorile la limită ale deplasărilor sau tensiunilor se vor dezvolta în serie Fourier cu perioada egală cu $4h$ și cu originea pe suprafața mediană, reținîndu-se primii trei termeni. Întrucît funcțiile la limită sînt definite pe intervalul $2h$, va trebui să fie prelungite în mod convenabil pe întreaga perioadă astfel încît să fie accentuată convergența seriei.

Sistemul de forțe masice și forțe care acționează pe suprafețele S^+ și S^- vor fi înlocuite, în virtutea ipotezelor adoptate, cu un sistem static echivalent de forțe masice care au doar componente constante pe grosime și variind ca $\sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{h}$.

Acest sistem îl vom numi în cele ce urmează sistem de forțe masice echivalent.

Vom nota cu $\overline{R}$, $\overline{C}$ torsorul forțelor masice echivalente în raport cu punctul $\left(\alpha + A\frac{d\alpha}{2}, \beta + B\frac{d\beta}{2}, 0\right)$.

A. *Problema pentru partea constantă pe grosime.* Ecuațiile de echilibru (3.3), relațiile geometrice (2.9) și relațiile fizice corespunzătoare (5.1)—(5.4) conțin numai componente ale deplasării, deformației și tensiunii constante în raport cu z. Sistemul este complet, după cum se vede imediat, și permite satisfacerea a trei condiții la limită în tensiuni sau deplasări în lungul conturului. Drept condiții la limită vom lua partea constantă a valorilor funcțiilor date dezvoltate în serie Fourier, iar drept forțe masice partea constantă din sistemul echivalent. Cu acestea problema pentru partea constantă s-a separat, putînd fi rezolvată pînă la capăt independent de celelalte componente. Observăm că această problemă poate fi privită ca o primă aproximație a problemei generale, putînd fi în același timp privită ca o teorie fără momente completă, deoarece, spre deosebire de teoria clasică fără momente și cu atît mai mult față de modelul de membrană, ea conține și forțele tăietoare, cu posibilitate de a satisface toate condițiile la limită.

O a doua observație este aceea că pe suprafețele S^+ și S^- apar ca duale ale eforturilor σ_{13} și σ_{23} eforturi al căror torsor este un cuplu $\overline{C}_1$. Făcînd torsorul forțelor de suprafață și al celor masice astfel obținute în prima etapă, observăm că el este egal cu $\overline{R} + \overline{C}_1$ și nu $\overline{R} + \overline{C}$, cît sînt forțele masice echivalente.

B. *Problema pentru partea ce variază ca* $\sin \frac{\pi}{2} \frac{z}{h}$ *și* $\cos \frac{\pi}{2} \frac{z}{h}$. Suprapunînd soluția problemei B soluției problemei A, elementul de placă

trebuie să rezulte a fi acționat de un sistem de forțe masice echivalente $R + C$. De aceea în etapa B vom considera ca forțe masice echivalente $C - C_1$, echivalate cu forțe masice variind ca $\sin\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}$.

Se observă însă că σ_{13}, σ_{23}, σ_{33}, care variază ca $\sin\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}$, dau asemenea eforturi pe S^+ și S^-, al căror torsor are componentele

$$2\,AB\sigma_{13s},\ 2\,AB\sigma_{23s},\ 2\,AB\sigma_{33s}. \tag{6.1}$$

De aceea vom considera forțe masice echivalente suplimentare variind ca $\cos\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}$, de coeficienți

$$P_{\alpha c} = -\frac{\pi}{2h}\sigma_{13\,s},\ P_{\beta c} = -\frac{\pi}{2h}\sigma_{23\,s},\ P_{zc} = -\frac{\pi}{2h}\sigma_{33\,s}, \tag{6.2}$$

al căror torsor este opus torsorului (6.1).

Această observație ne arată că ecuațiile de echilibru pentru etapa B trebuie considerate în ceea ce privește componenta în $\cos\frac{\pi}{2}\frac{z}{h}$ sub forma

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\sigma_{11\,c}) - \frac{\partial B}{\partial\alpha}\sigma_{22\,c} + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\sigma_{12\,c}) + \frac{\partial A}{\partial\beta}\sigma_{12\,c} + AB\left(\frac{2}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\sigma_{13\,c} = 0, \tag{6.3}$$

. . . . . .

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\sigma_{13\,c}) + \frac{\partial}{\partial\beta}(A\sigma_{23\,c}) - AB\left(\frac{\sigma_{11\,c} - \sigma_{33\,c}}{R_1} + \frac{\sigma_{22\,c} - \sigma_{33\,c}}{R_2}\right) = 0.$$

Pentru calculul etapei B utilizăm deci ecuațiile de echilibru (3.6), (6.3), relațiile geometrice corespunzătoare din (2.9)—(2.12), ecuațiile de continuitate (4.10), (4.11) și relațiile fizice corespunzătoare. Se observă că sistemul este complet atît în tensiuni, cît și în deplasări și că permite satisfacerea de șase condiții la limită.

Primită la redacție la 22 iunie 1967

CONTRIBUȚII LA STUDIUL GRINZILOR CU DOUĂ REAZEME ELASTICE

de GUȚU ALEXANDRU
Institutul politehnic Galați

539.3 : 511.9

Se studiază problema unei grinzi cu secțiune constantă cu două reazeme late, elastice. Se determină, în ipoteza Winkler, lungimea efectivă de rezemare a_0. Se consideră cazurile cînd grinda este încărcată cu o sarcină concentrată aplicată în mijlocul grinzii și cînd sarcina este uniform repartizată pe deschiderea liberă a grinzii.
Se calculează de asemenea momentul de încovoiere maxim M în cele două cazuri de încărcare pentru diferite valori ale rigidității reazemelor. Se arată că a_0 și M variază foarte mult cu rigiditatea reazemelor. Se arată că momentul de încovoiere astfel calculat este mult diferit de cel calculat în ipoteza (practicată curent) că rezultanta reacțiunii reazemelor este aplicată la mijlocul lungimii reazemului.

Problema unei grinzi cu două reazeme lungi și elastice a mai fost examinată în această revistă [1]; s-a considerat acolo că reazemul se tasează pe toată lungimea lui.

În acest articol se examinează problema mai generală a unui reazem care nu se tasează pe întreaga lui lungime și se stabilește lungimea de tasare pentru o grindă cu secțiune constantă supusă fie la o sarcină concentrată la mijlocul ei, fie la o sarcină uniform repartizată. Totodată se stabilește momentul de încovoiere maxim.

1. Se consideră că deformațiile grinzii și a reazemelor iau formele arătate în figura 1. Originea O a axei Ox este punctul interior al reazemului din stînga. Se notează cu a lungimea de tasare a reazemului. Pe această lungime, în ipoteza lui WINKLER, ecuația diferențială a curbei elastice a grinzii este :

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 v_1}{\mathrm{d}x^4} + kv_1 = 0 \quad (-a \leqslant x \leqslant 0). \tag{1}$$

Se menține notația [1]

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}. \tag{2}$$

Se obține

$$v_1 = \mathrm{e}^{\beta x}(C_1 \sin \beta x + C_2 \cos \beta x) + \mathrm{e}^{-\beta x}(C_3 \sin \beta x + C_4 \cos \beta x) \tag{3}$$

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl. (în limba franceză), **12**, 2 (1967)

2. Se consideră cazul cînd sarcina F este concentrată în mijlocul M al grinzii. Pe porțiunea OM de grindă este valabilă ecuația

$$EI\frac{d^2v_2}{dx^2} = -M = -\frac{F}{2}(x+b) \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right), \tag{4}$$

în care b este distanța față de O a punctului de aplicație a rezultantei reacțiunilor de pe reazemul stîng.

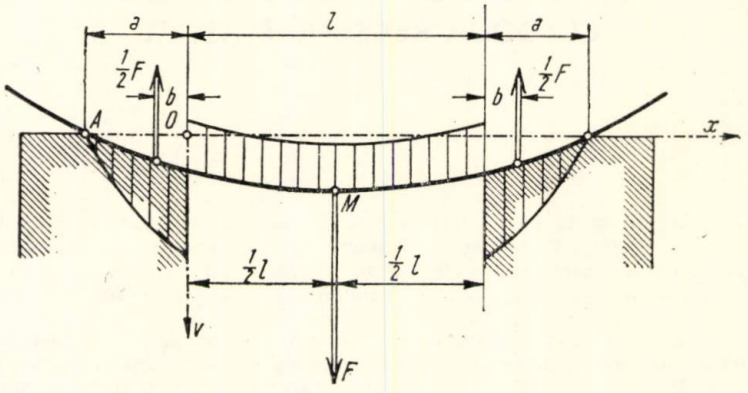


Fig. 1

Se introduce notația :

$$\alpha = -\frac{F}{12EI}. \tag{5}$$

Se obține :

$$v_2 = \alpha x^3 + 3\alpha b x^2 + C_5 x + C_6. \tag{6}$$

Se determină cei opt parametri necunoscuți $C_1,\ldots, C_6$, a, b scriind condițiile următoare :

a) curba elastică are o tangentă orizontală în mijlocul M

$$x = \frac{l}{2}, \quad \frac{dv_2}{dx} = 0, \quad \frac{3}{4}\alpha l^2 + 3\alpha l b + C_5 = 0; \tag{7}$$

b) curba elastică are o singură tangentă în O

$$x = 0, \quad \frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx}, \quad \beta(C_1 + C_2 + C_3 - C_4) = C_5; \tag{8}$$

c) curba elastică are o singură ordonată în O

$$x = 0, \quad v_1 = v_2, \quad C_2 + C_4 = C_6; \tag{9}$$

d) forța tăietoare în O este $\frac{F}{2}$

$$x = 0, \quad EI\frac{d^3v_1}{dx^3} = -\frac{F}{2}, \quad C_1 - C_2 + C_3 + C_4 = 3\frac{\alpha}{\beta^3}; \tag{10}$$

e) momentul de încovoiere în punctul A este nul

$$x = -a,\ v_1 = 0,\ \frac{d^2v_1}{dx^2} = 0,\ \frac{C_1 + C_2 \operatorname{tg} \beta a}{C_3 + C_4 \operatorname{tg} \beta a} = e^{2\beta a}; \tag{11}$$

f) forța tăietoare în punctul A este nulă

$$x = -a,\ v_1 = 0,\ \frac{d^3v_1}{dx^3} = 0,\ -\frac{C_1 - C_2 + (C_1 + C_2) \operatorname{tg} \beta a}{C_3 + C_4 + (C_4 - C_3) \operatorname{tg} \beta a} = e^{2\beta a}; \tag{12}$$

g) săgeata în punctul A este nulă

$$x = -a,\ v_1 = 0 \qquad -\frac{C_2 - C_1 \operatorname{tg} \beta a}{C_4 - C_3 \operatorname{tg} \beta a} = e^{2\beta a}; \tag{13}$$

h) momentul rezultantei $\frac{F}{2}$ a reacțiunilor de pe reazemul stîng este egal cu suma momentelor acestor reacțiuni

$$\frac{bF}{2} = \int_0^{-a} kv_1 x\,dx.$$

Se introduc în această condiție, relațiile (5), (11), (12) și se obține

$$\beta^2(C_1 - C_3) = 3\alpha b. \tag{14}$$

3. Se combină convenabil aceste condiții și se introduc notațiile

$$m = \frac{4}{2 - \beta l}\ ,\qquad n = \frac{4}{2 + \beta l}\cdot \tag{15}$$

Se scrie un sistem de cinci ecuații în care intervin numai parametrii necunoscuți $C_1, \ldots, C_4$

$$\begin{aligned}
C_1 \quad &- C_2 \quad + C_3 \quad &&= 3\frac{\alpha}{\beta^3},\\
mC_1 \quad &\quad + nC_3 \quad &&= 3\frac{\alpha}{\beta^3},\\
-(1 + \operatorname{tg} \beta a)\, C_1 &+ (1 - \operatorname{tg} \beta a)\, C_2 \quad &&= 0,\\
&\quad (1 - \operatorname{tg} \beta a)\, C_3 + (1 + \operatorname{tg} \beta a)\, C_4 &&= 0,\\
C_1 \quad &+ \operatorname{tg} \beta a\, C_2 - e^{2\beta a}.\, C_3 - e^{2\beta a} \operatorname{tg} \beta a\, C_4 &&= 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Rezultatul eliminării necunoscutelor $C_1, \ldots, C_4$ este

$$\left(e^{2\beta a} - \frac{2 - \beta l}{2 + \beta l}\right)\left(\operatorname{tg} \beta a - \frac{2}{\beta l}\right) = 0. \tag{17}$$

Deoarece $\beta > 0$, există numai soluția:

$$\beta a = \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\beta l}\cdot \tag{18}$$

Se obţine şirul de valori

βl	1	2	3	4	5
βa	1,107	0,785	0,588	0,464	0,381
a/l	1,107	0,3925	0,196	0,116	0,0762

(19)

4. În sistemul (16) se introduce ecuaţia (14) în locul ecuaţiei (10). Rezultatul eliminării necunoscutelor din acest nou sistem este:

$$\beta b = \frac{v(1-u)-(1+u)}{v(1-u)m+(1+u)n} = \frac{v(\beta l-2)-(\beta l+2)}{4(1-v)} \tag{20}$$

cu notaţiile:

$$u = \operatorname{tg}\beta a, \qquad v = e^{2\beta a} \tag{21}$$

Se obţine următorul şir de valori:

βl	1	2	3	4	5
βb	0,373	0,262	0,196	0,154	0,127
$\beta a/3$	0,369	0,2617	0,196	0,154	0,127

(22)

Dacă reazemele sînt foarte rigide ($\beta l > 2$) se poate lua

$$b = \frac{1}{3}a \tag{23}$$

Momentul de încovoiere maxim este

$$M_{\max} = \mathrm{FL}/4, \qquad L = l + 2b \tag{24}$$

Se obţine pentru expresia adimensională

$$\frac{M_{\max}}{Fl} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{b}{l}\right), \tag{25}$$

şirul de valori

βl	1	2	3	4	5
$\frac{M_{\max}}{F \cdot l}$	0,4365	0,3155	0,2828	0,2693	0,2627

(26)

Dacă se consideră un reazem cu o lungime $0{,}5l$ şi dacă se consideră o repartizare uniformă a reacţiunilor pe toată lungimea reazemelor, se obţine pentru expresia $M_{\max}/Fl$ valoarea 0,375.

Dacă se consideră în formula recomandată în lucrarea [1], o lungime de reazem egală cu $0{,}5l$, se obţine pentru expresia $M_{\max}/Fl$ valoarea 0,333.

5. Se consideră acum o sarcină uniform repartizată pe lungimea liberă l a grinzii. Ecuațiile diferențiale ale curbei elastice sînt:

$$EI\frac{d^4v_1}{dx^4} + kv_1 = 0 \qquad (-a \leqslant x \leqslant 0),$$

$$EI\frac{d^2v_2}{dx^2} = -\frac{F}{2}(x+b) + \frac{Fx^2}{2l} \qquad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2}\right).$$

Soluția primei ecuații este dată prin relația (3), pe cînd soluția celei de-a doua ecuații este

$$v_2 = -\frac{\alpha}{2l}x^4 + \alpha x^3 + 3\alpha b x^2 + C_5 x + C_6.$$

Se introduc condițiile a) ... h); ecuația (7) devine

$$\frac{\alpha l^2}{2} + 3\alpha b l + C_5 = 0. \tag{7'}$$

Celelalte ecuații (8) ... (14) rămîn aceleași.

Se scrie același sistem (16) cu notații schimbate

$$m = \frac{6(2+\beta l)}{6-\beta^2 l^2}, \qquad n = \frac{6(2-\beta l)}{6-\beta^2 l^2}. \tag{15'}$$

Rezultatul eliminării necunoscutelor $C_1 \ldots C_4$ este

$$e^{2\beta a} = -\frac{n + (n-2)\operatorname{tg}\beta a}{m + (2-m)\operatorname{tg}\beta a}.$$

Relația care dă valoarea lui βb este

$$\beta b = \frac{v(1-u) - (1+u)}{v(1-u)m + (1+u)n}$$

cu aceleași notații (21) pentru u și v.

Momentul de încovoiere maxim este

$$M_{max} = \frac{FL}{4} - \frac{Fl}{8}.$$

Mărimea adimensională M_{max}/Fl are expresia

$$\frac{M_{max}}{Fl} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{b}{l}\right).$$

Se obține următorul tablou cu valorile $\frac{a}{l}$, $\frac{b}{l}$, $\frac{M_{max}}{Fl}$:

βl	1	2	3	4	5
βa	1,147	0,858	0,668	0,540	0,450
a/l	1,147	0,429	0,223	0,135	0,090
b/l	0,3825	0,143	0,0745	0,0450	0,030
M_{max}/Fl	0,316	0,1965	0,1623	0,1475	0,140

Dacă se consideră un reazem de lungime $0{,}5l$ și o repartizare uniformă a reacțiunilor se obține pentru M_{max}/Fl valoarea 0,25. Dacă în formula recomandată în lucrarea [1] se introduce o lungime $0{,}5l$ pentru reazeme se obține pentru M_{max}/Fl valoarea 0,208. Aceste valori sînt valabile numai pentru valori ale lui βl cuprinse între 1 și 2.

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Buzdugan, *Grinzi pe reazeme elastice de lungime dată*, St. cerc. mec. apl., *2* (1958)

METODA REDUCERII, METODĂ APROXIMATIVĂ PENTRU REZOLVAREA PROBLEMEI STABILITĂȚII PLĂCII PLANE

de STELIAN CETĂȚEANU
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor, București

624.07

Se analizează două procedee pentru rezolvarea problemei stabilității plăcii plane. Un procedeu este folosit de Broude pentru studiul stabilității plăcii plane cu margini longitudinale încastrate elastic, iar altul este folosit de Shuleshko pentru studiul stabilității plăcii ortotrope, a plăcii solicitate deasupra domeniului elastic sau a plăcii solicitate după două direcții perpendiculare în domeniul elastic. Prin cele două procedee descrise ale metodei reducerii se determină valorile coeficienților de voalare pentru plăci plane cu anumite solicitări și condiții pe contur.

Se analizează două procedee pentru rezolvarea problemei stabilității plăcii plane, care constau în reducerea acesteia la o problemă a cărei soluție este deja cunoscută sau la alta a cărei rezolvare este mai simplă.

Un procedeu este folosit de Broude [3],[4] pentru studiul stabilității plăcii plane cu marginile longitudinale încastrate elastic, iar altul este folosit de Shuleshko [19, [20] pentru studiul stabilității plăcii ortotrope sau a plăcii solicitate deasupra domeniului elastic.

Din punctul de vedere al metodei de rezolvare, ambele procedee sînt asemănătoare, fiind posibil a obține valoarea efortului unitar critic la voalare a unei plăci cu o anumită solicitare și anumite condiții marginale, folosind valorile efortului unitar critic cunoscute ale unor plăci altfel solicitate și cu alte condiții marginale fără a fi nevoie de a rezolva complicate ecuații de valori proprii.

Întrucît reduce rezolvarea unei probleme la o problemă a cărei soluție este deja cunoscută sau la alta a cărei rezolvare este mai simplă, această metodă este denumită metoda reducerii.

Folosind această nouă metodă, unele probleme de stabilitate a plăcii plane se rezolvă mult mai simplu decît cu ajutorul altor metode aproximative cunoscute în teoria stabilității, ca metoda energetică, metoda diferențelor finite, metoda statică etc.

1. PROCEDEUL BROUDE

Pînă la apariţia lucrărilor lui Broude [3], [4], în literatura de specialitate au fost determinate valorile efortului unitar critic la voalare pentru unele moduri de solicitare a plăcilor simplu rezemate pe contur, încastrate rigid pe contur sau cu unele margini rigid încastrate, simplu rezemate sau libere .

Pentru plăcile cu margini încastrate elastic nu au fost determinate valorile efortului unitar critic decît pentru cazul solicitării la compresiune uniformă, prin integrarea directă a ecuaţiei diferenţiale a acestor plăci deformate [12], [13], [22]. Pentru alte moduri de solicitare a acestor plăci, valoarea efortului unitar critic la voalare nu mai poate fi determinată prin metoda directă. Trebuie folosită pentru aceasta o metodă variaţională sau numerică. Oricare ar fi această metodă, ea conduce la calcule laborioase şi necesită mult timp de lucru.

Pentru a simplifica determinarea valorii efortului unitar critic la voalare a plăcii încastrate elastic pe marginile longitudinale şi simplu rezemate pe celelalte margini, Broude a elaborat şi a folosit un nou procedeu, expus în cele ce urmează.

Rezultatele obţinute au fost folosite de acesta pentru a stabili criteriile de verificare a stabilităţii locale a grinzilor metalice în cadrul noii metode de calcul a construcţiilor la starea-limită.

Suprafaţa voalată a plăcii încastrate elastic se presupune reprezentată printr-o expresie de forma

$$w = w_s + \lambda w_i, \tag{1.1}$$

în care

w_s exprimă suprafaţa deformată a unei plăci identice ca dimensiuni şi solicitare, însă simplu rezemate pe contur; se înlătură încastrarea elastică a marginilor longitudinale,

w_i — suprafaţa deformată a unei plăci identice ca dimensiuni şi solicitare, însă cu marginile longitudinale încastrate rigid,

λ — un parametru.

Componentele stării de tensiune plană, iniţială, stabilite cu exactitate pînă la factorul constant $\varkappa$, fiind notate prin expresiile

$$\varkappa\sigma_x\,;\ \varkappa\sigma_y\,;\ \varkappa\tau_{xy}, \tag{1.2}$$

metoda folosită de Broude constă în reprezentarea soluţiei minime căutate $\varkappa$ prin soluţiile $\varkappa_s$ şi $\varkappa_i$ care corespund funcţiilor w_s, respectiv w_i şi prin coeficientul de rigiditate relativă a încastrării elastice γ. Folosind această metodă, se determină efortul unitar critic la voalare a plăcii încastrate elastic de-a lungul marginilor longitudinale cu aproximaţie suficientă calculelor tehnice, fără a fi nevoie de a rezolva complicate ecuaţii de valori proprii.

Energia potenţială totală de deformare a unei plăci izotrope cu marginile longitudinale încastrate elastic, ca urmare a voalării, valorează:

$$\Pi(w) = A_p(w) + A_\gamma(w) + \varkappa E(w), \tag{1.3}$$

unde

$$A_p(w) = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 - 2(1-\mu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.4}$$

reprezintă energia potențială de deformare a plăcii prin încovoiere;

$$A_\gamma(w) = \Sigma\frac{\overline{G}\overline{I}_t}{2}\int_0^a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\mathrm{d}x \tag{1.5}$$

reprezintă energia potențială de deformare a plăcii prin torsiune a elementului de construcție în care este încastrată elastic marginea longitudinală; rigiditatea la torsiune a acestui element de construcție este $\overline{GI}_t$, iar semnul Σ se referă la numărul marginilor longitudinale încastrate elastic ale plăcii;

$$E(w) = -\frac{t}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\sigma_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\sigma_y\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - 2\tau_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.6}$$

reprezintă energia potențială a încărcării exterioare, care este egală cu negativul sumei produselor încărcării exterioare prin deplasările corespunzătoare punctelor ei de acțiune produse în direcția solicitării plăcii.

Din teoria extremală a valorilor proprii se știe că una dintre metodele pentru a obține valoarea proprie pozitivă minimă $\varkappa$ este egalarea cu zero a minimului funcționalului $\Pi(w)$, adică

$$\min \Pi(w) = 0. \tag{1.7}$$

Întrucît expresia (1), care definește suprafața voalată a plăcii, este exprimată prin două funcții w_s și w_i, ecuația (1.7) se scrie

$$\min \Pi(w_s + \lambda w_i) = \min\{A_p(w_s) + 2\lambda A_p(w_s, w_i) + \lambda^2 A_p(w_i) + A_\gamma(w_s) + \varkappa\,[E(w_s) + 2\lambda E(w_s, w_i) + \lambda^2 E(w_i)]\} = 0, \tag{1.8}$$

unde s-au introdus următoarele notații pentru funcționalele biliniare:

$$A_p(w_s, w_i) = \frac{D}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2}\right) - (1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w_i}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y}\cdot\frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1.9}$$

$$E(w_s, w_i) = -\frac{t}{2}\int_0^a\int_0^b\left[\sigma_x\frac{\partial w_s}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_i}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial w_s}{\partial y}\cdot\frac{\partial w_i}{\partial y} - \tau_{xy}\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\cdot\frac{\partial w_i}{\partial y}+\frac{\partial w_i}{\partial x},\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.10}$$

Funcţionalul $A_\gamma (w_s)$ depinde numai de w_s :

$$A_\gamma (w_s + \lambda w_i) = A_\gamma (w_s) \tag{1.11}$$

deoarece, cînd se înlocuieşte încastrarea elastică de-a lungul marginilor $y = 0$ şi $y = a$ prin încastrare rigidă, există relaţiile

$$\frac{\partial w_i}{\partial y} = 0 \text{ şi } \frac{\partial^2 w_i}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.12}$$

şi, prin urmare,

$$A_\gamma (w_i) = 0. \tag{1.13}$$

Expresia (1.1) poate fi considerată ca variaţie a funcţiei w_s, care realizează minimul funcţionalului

$$\Pi (w) = A_p (w) + \varkappa E (w), \tag{1.14}$$

cînd placa este simplu rezemată pe contur, adică atunci cînd se înlătură încastrarea elastică a marginilor longitudinale. Fiindcă funcţionalul (1.14) este pătratic, substituirea lui w prin expresia (1.1) duce la un polinom de gradul doi în raport cu λ :

$$P(\lambda) = \lambda^2 [A_p (w_i) + \varkappa_s E (w_i)] + 2\lambda [A_p (w_s, w_i) + \varkappa_s E (w_s, w_i)] + \\ + A_p (w_s) + \varkappa_s E (w_s) \tag{1.15}$$

şi variaţia coincide cu valoarea coeficientului lui λ.

Însă w_s este o extremală, de aceea

$$\delta [A_p (w_s) + \varkappa_s E(w_s)] = 0, \tag{1.16}$$

de unde rezultă

$$A_p (w_s, w_i) + \varkappa_s E (w_s, w_i) = 0. \tag{1.17}$$

Trebuie observat că permutarea indicilor s şi i în relaţia (1.17) nu este admisă, deoarece w_s nu satisface condiţiile marginale caracteristice încastrării rigide a marginilor y ale plăcii.

De aceea

$$w' = w_i + \lambda' w_s \tag{1.18}$$

nu poate fi considerată ca variaţie a suprafeţei w_i.

Întrucît fiecare dintre funcţiile w_s şi w_i este determinată cu exactitate numai pînă la un factor constant, se poate admite

$$E(w_s) = E(w_i). \tag{1.19}$$

Funcţionalul din partea stîngă a ecuaţiei (1.8) are valoarea minimă egală cu zero cînd

$$\varkappa = - \frac{A_p (w_s) + \lambda^2 A_p (w_i) + 2\lambda A_p (w_s, w_i) + A_\gamma (w_s)}{E (w_s) + \lambda^2 E (w_i) + 2\lambda E (w_s, w_i)} \tag{1.20}$$

este minim.

Întrucît

$$\varkappa_s = -\frac{A_p(w_s)}{E(w_s)} \text{ și } \varkappa_i = -\frac{A_p(w_i)}{E(w_i)}, \tag{1.21}$$

avînd în vedere egalitatea (1.19), a doua relație (1.21) devine

$$\varkappa_i = -\frac{A_p(w_i)}{E(w_s)}, \tag{1.22}$$

iar condiția (1.20) se scrie sub forma

$$\varkappa_{\min} = \frac{\varkappa_s + \lambda^2\varkappa_i + 2\lambda\varkappa_s \dfrac{E(w_s, w_i)}{E(w_s)} - \dfrac{A_\gamma(w_s)}{E(w_s)}}{1 + \lambda^2 + 2\lambda \dfrac{E(w_s, w_i)}{E(w_s)}}. \tag{1.23}$$

Pentru ca valoarea lui $\varkappa$ să fie minimă și astfel condiția (1.7) să fie îndeplinită, trebuie alese variabilele

$$\rho = \frac{E(w_s, w_i)}{E(w_s)} \text{ și } \lambda \tag{1.24}$$

astfel încît să realizeze minimul expresiei (1.23).

Scriind expresia (1.23) sub forma

$$\varkappa_{\min} = \frac{a_1 + b_1\rho}{a_2 + b_2\rho}, \tag{1.25}$$

se poate cerceta variația lui $\varkappa$ în raport cu ρ:

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho} = \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{(a_2 + b_2\rho)^2}. \tag{1.26}$$

Din (1.26) se deduce:

dacă
$$\frac{b_1}{b_2} < \frac{a_1}{a_2}, \tag{1.27}$$

atunci
$$\frac{\partial\varkappa}{\partial\rho} < 0 \tag{1.28}$$

și deci $\varkappa$ descrește pe măsura creșterii valorii raportului ρ.

În cazul studiat, comparînd pe (1.25) cu (1.23), se constată că

$$\frac{b_1}{b_2} = \varkappa_s \text{ și } \frac{a_1}{a_2} > \frac{\varkappa_s + \lambda^2\varkappa_i}{1 + \lambda^2} > \varkappa_s, \tag{1.29}$$

deoarece din exprseia lui a_1 s-a neglijat termenul pozitiv $\left[-\dfrac{A_\gamma(w_s)}{E(w_s)}\right]$, iar $\varkappa_i > \varkappa_s$; prin urmare, înlocuind pe ρ cu o cantitate mai mare, se va micșora valoarea lui $\varkappa$.

Pentru a se obține valoarea cea mai mică a lui $\varkappa$ va trebui să fie cunoscută valoarea maximă posibilă a lui ρ. Pentru aceasta se pleacă de la inegalitatea

$$A_p(w_s, w_i) = A_p(w_s) + A_p(w_i) - 2A_p(w_s, w_i) > 0. \tag{1.30}$$

Folosind relațiile (1.17), (1.21) și (1.22), inegalitatea (1.30) devine

$$\varkappa_s E(w_s) + \varkappa_i E(w_s) < 2\varkappa_s E(w_s, w_i), \tag{1.31}$$

de unde

$$\rho = \frac{E(w_s, w_i)}{E(w_s)} < \frac{1 + \frac{\varkappa_i}{\varkappa_s}}{2}. \tag{1.32}$$

Substituind în (1.23) pe ρ prin valoarea lui maximă (1.32), se obține valoarea cea mai mică pentru $\varkappa$:

$$\varkappa_{\min} = \frac{(\varkappa_s + \lambda\varkappa_i)(1+\lambda) - \frac{A_\gamma(w_s)}{E(w_s)}}{(1+\lambda)^2 + \left(\frac{\varkappa_i}{\varkappa_s} - 1\right)\lambda}, \tag{1.33}$$

în care variabila λ trebuie să fie astfel aleasă, încît valoarea lui $\varkappa$ să fie minimă.

Broude stabilește ulterior că limita lui ρ (1.32) este aproximativă și demonstrează că

a) în cazul cînd $\sigma_x \geqslant 0$; $\sigma_y \equiv 0$ și $\tau_{xy} \equiv 0$

sau $\sigma_x \equiv 0$; $\sigma_y > 0$ și $\tau_{xy} \equiv 0$

limita maximă exactă valorează

$$\rho = 1; \tag{1.34}$$

b) în cazul cînd $\sigma_x = \sigma\left(1 - 2\frac{y}{b}\right)$; $\sigma_y \equiv 0$ și $\tau_{xy} \equiv 0$,

limitele maxime ale lui ρ sînt date în tabela 1 în funcție de raportul $\frac{\alpha}{m}$.

S-a notat prin α raportul $\frac{a}{b}$ al dimensiunilor plane ale plăcii, iar prin m numărul semiundelor de voalare în direcție longitudinală:

Tabela 1

α/m	0,4	0,5	0,6	0,7
ρ	0,78	0,87	0,91	0,95

c) în cazul forfecării pure: $\sigma_x \equiv 0$; $\sigma_y \equiv 0$ și $\tau_{xy} > 0$ se admite că limita (1.34) este o presupunere.

În cazul plăcii cu marginile longitudinale încastrate elastic și solicitate longitudinal de compresiune distribuită liniar (fig. 1 *a*), componentele stării de tensiune au valorile

$$\sigma_x = \sigma\left(1 - \frac{d}{b}y\right); \quad \sigma_y \equiv 0 \quad \text{și} \quad \tau_{xy} \equiv 0 \tag{1.35}$$

Multiplicînd ambele părți ale expresiei (1.33) cu raportul $\frac{b^2 t\sigma}{\pi^2 D}$, D reprezentînd rigiditatea la încovoiere a plăcii, cu unele simplificări se obține valoarea parametrului de voalare K în funcție de valorile parametrilor K_s și K_i:

$$K = \frac{K_s(1 + 2\lambda) + K_i\lambda^2 + g\gamma}{(1 + \lambda)^2}. \tag{1.36}$$

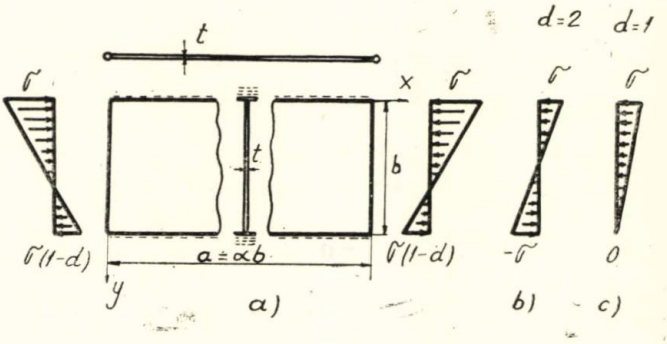


Fig. 1

S-au notat

$$\gamma = \frac{\overline{GI}_t}{bD}, \tag{1.37}$$

$$g = \frac{b^3 N}{\int_0^a \int_0^b \left(1 - \frac{d}{b}y\right)\left(\frac{\partial w_s}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \tag{1.38}$$

$$N = \frac{1}{\pi^2}\int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\,\partial y}\right)_{y=0}^2 + \left(\frac{\partial^2 w_s}{\partial x\,\partial y}\right)_{y=b}^2\right]\mathrm{d}x. \tag{1.39}$$

În expresia (1.36), valoarea parametrului λ trebuie să fie aleasă astfel încît K să fie minim. Pentru aceasta trebuie ca

$$\frac{\partial K}{\partial \lambda} = 0,$$

de unde se deduce

$$\lambda = \frac{g\gamma}{K_i - K_s}. \tag{1.40}$$

Substituind valoarea parametrului λ (1.40) în (1.36), se obține valoarea minimă a parametrului de voalare K:

$$K = \frac{K_s(K_i - K_s)^2 + g\gamma(K_i^2 - K_s^2) + K_i g^2\gamma^2}{(K_i - K_s + g\gamma)^2}. \tag{1.41}$$

Expresia (1.41) are caracter general. Ea păstrează aceeași formă chiar dacă placa este solicitată numai de eforturi unitare normale σ_y sau numai de eforturi unitare tangențiale τ_{xy}. În aceste cazuri se schimbă numai simbolul parametrului de voalare K în Z sau, respectiv, în R și valoarea expresiei (1.38):

a) în cazul cînd $\sigma_y = p$ și $\sigma_x = \tau_{xy} \equiv 0$,

$$g = \frac{a^2 b N}{\int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}; \tag{1.42}$$

b) în cazul cînd $\sigma_y = \frac{p}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{b}y\right)$ și $\sigma_x = \tau_{xy} \equiv 0$,

$$g = \frac{2a^2 b N}{\int_0^a \int_0^b \left(1 + \cos\frac{\pi}{b}y\right)\left(\frac{\partial w_s}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y}; \tag{1.43}$$

c) în cazul cînd $\sigma_x = \sigma_y \equiv 0$ și $\tau_{xy} \neq 0$, iar $\alpha \geqslant 1$,

$$g = \frac{ab^2 N}{\alpha \int_0^a \int_0^b \frac{\partial w_s}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_s}{\partial y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}. \tag{1.44}$$

Dacă $\alpha < 1$, în formula (1.44) se introduce $1/\alpha$ în loc de α.

În formulele (1.42), (1.43) și (1.44), valoarea lui N este dată de (1.39).

Trebuie notat că, dacă există numai eforturi unitare longitudinale σ_x, fiecare parametru de voalare K_s sau K_i corespunde unui anumit număr de semiunde în direcție longitudinală m_s sau, respectiv, m_i. Pentru unele valori ale raportului α al dimensiunilor plane ale plăcii, valoarea lui m_s coincide cu cea a lui m_i; pentru altele, aceste valori nu mai sînt egale. În ultimul caz urmează a se determina de două ori valoarea lui K cu ajutorul expresiei (1.41): o dată folosind valorile lui K_s și K_i corespunzătoare lui $m = m_s$ și a doua oară folosind valorile lui K_s și K_i corespunzătoare lui $m = m_i$. Se va considera ca soluție valoarea cea mai mică dintre acestea.

Pentru a stabili abaterea valorilor efortului unitar critic obținut prin această metodă aproximativă de la valorile lor exacte, Broude a determinat cu ajutorul expresiei (1.41) valorile parametrului de voalare K pentru mai multe ipoteze de solicitare și de rezemare a plăcii și le-a comparat cu cele exacte, obținute prin rezolvarea directă a ecuației diferențiale a plăcii plane deformate. Rezultatele comparării sînt indicate în tabela 2.

Întrucît abaterile sînt mici și neînsemnate pentru practică, se deduce că rezultatele obținute prin metoda reducerii concepută de Broude, pot fi folosite în calculele tehnice cu suficientă siguranță.

Tabela 2

Solicitarea plăcii		Rezemarea marginilor plăcii			Abaterea maximă	Observații
natura	direcția	încastrată elastic	simplu rezemată	liberă		
Compresiune distribuită uniform	Paralelă cu axa x	y=0	y=b x=0 x=a	—	−0,20%	—
	Paralelă cu axa x	y=0 y=b	x=0 x=a	—	−0,33%	—
	Paralelă cu axa y	y=0	y=b x=0 x=a	—	−2,00%	$\gamma \geqslant 2$
					−0,50%	$\gamma < 2$
	Paralelă cu axa x	y=0	x=0 x=a	y=b	+ 2,00 %	—

În consecință, au fost determinate cu ajutorul formulei (1.41) valorile coeficientului de voalare al plăcii cu marginile $y = 0$ și $y = b$ încastrate elastic, solicitată:

a) la încovoiere pură ($d = 2$) de-a lungul marginilor $x = 0$ și $x = a$ (fig. 1 *b*);

b) la compresiune triunghiulară ($d = 1$) de-a lungul marginilor $x = 0$ și $x = a$ (fig. 1 *c*);

c) la compresiune uniformă repartizată de-a lungul marginii $y = 0$ (fig. 4);

d) la forfecare pură pe contur (fig. 5).

Aceste valori au fost folosite la stabilirea criteriilor pentru verificarea stabilității locale a grinzii metalice prin metoda de calcul la starea-limită [11].

a) În cazul plăcii solicitate la încovoiere în direcție longitudinală (fig. 1*b*) se cunosc valorile coeficienților de voalare: K_s, corespunzător plăcii simplu rezemată pe contur [3, p. 45, tab. 1.3], și K_i, corespunzător plăcii încastrate rigid pe marginile longitudinale [3, p. 52, tab. 3.6].

Suprafața deformată a plăcii considerate simplu rezemate pe contur se exprimă prin expresia

$$w_s = \sin \frac{m\pi}{a}\, x \sum_{n=1}^{4} A_n \sin \frac{n\pi}{b}\, y, \tag{1.45}$$

coeficienții A_n fiind determinați prin formula

$$A_n = (-1)^{n+1} \frac{M_{1n}}{M_{11}}. \tag{1.46}$$

S-a notat prin M_{1n} minorul matricei (1.47), format prin eliminarea primului rînd și a coloanei n:

$$\begin{Vmatrix} F_1 & -\frac{16}{9} & 0 & -\frac{32}{225} \\ \cdot & F_2 & -\frac{48}{25} & 0 \\ \cdot & \cdot & F_3 & -\frac{96}{49} \\ \cdot & \cdot & \cdot & F_4 \end{Vmatrix} \tag{1.47}$$

S-a notat

$$F_n = \frac{m^2\pi^2}{2\alpha^2 K_s}\left(1 + n^2\frac{\alpha^2}{m^2}\right)^2 . \tag{1.48}$$

Folosind formulele (1.38) și (1.39), se determină valoarea lui g pentru diverse valori ale raportului α; ele sînt menționate în tabela 3.

Tabela 3

0,4	0,5	0,6	$0{,}7_{(m=1)}$	$0{,}7_{(m=2)}$
34,49	29,85	27,76	26,53	37,00

Tabela 4

γ \ α	0,4	0,5	0,6	$0{,}7_{(m=1)}$	$0{,}7_{(m=2)}$
$0(K_s)$	29,10	25,53	24,13	23,91	32,09
0,25	34,05	30,45	29,11	29,00	37,09
0,5	36,04	32,83	31,90	32,17	38,95
1,0	37,79	35,17	34,92	35,91	40,51
2,0	39,03	37,01	37,52	39,41	41,59
4,0	39,80	38,24	39,35	42,06	42,24
10,0	40,32	39,10	40,72	44,14	42,68
$\infty(K_i)$	40,70	39,74	41,77	45,81	42,99

Ținînd seama de acestea, cu formula (1.4) se determină valorile coeficientului de voalare K_γ menționate în tabela 4 și reprezentate în graficul din figura 2.

b) În cazul plăcii comprimate triunghiular de-a lungul marginilor $x = 0$ și $x = a$ (fig. 1 *c*) se cunosc valorile coeficienților de voalare K_s și K_i [3, p. 43, tab. 1.2; p. 52, tab. 2.6]. Exprimînd suprafața defor-

mată a plăcii considerate simplu rezemate pe contur prin expresia (1.45), în care se păstrează numai doi termeni ai seriei ($i = 1; 2$), se determină valoarea lui g pentru diverse valori ale raportului α; ele sînt menționate în tabela 5.

Tabela 5

0,5	0,6	0,65	0,7	0,8	0,9	1,0
7,86	7,71	7,69	7,68	7,69	7,72	7,74

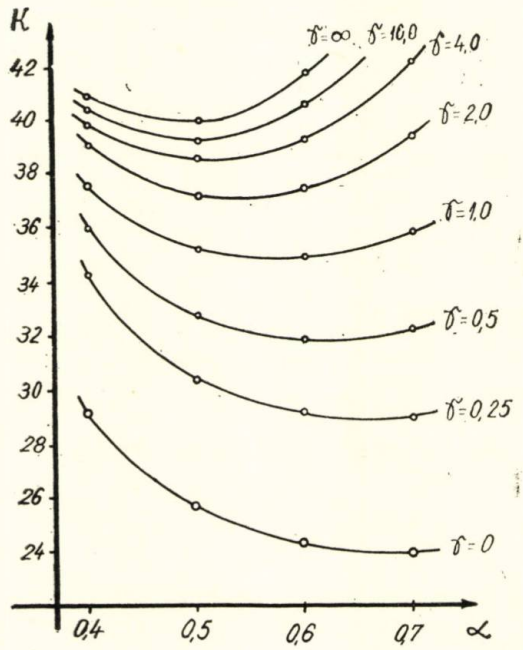


Fig. 2

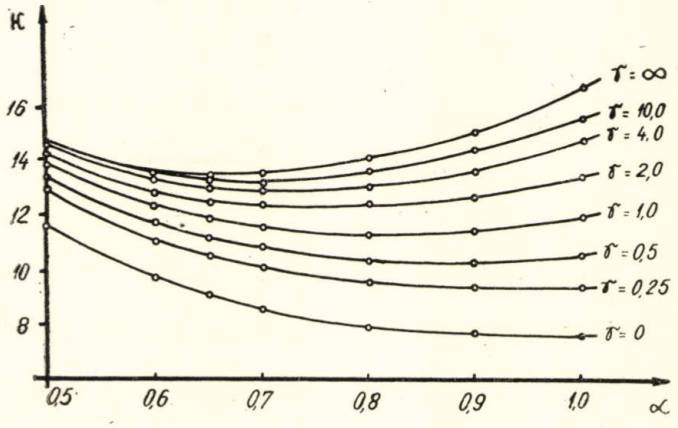


Fig. 3

Ținînd seama de acestea, cu formula (1.41) se determină valorile coeficientului de voalare K_γ menționate în tabela 6 și reprezentate în graficul din figura 3.

Tabela 6

γ \ α	0,5	0,6	0,65	0,7	0,8	0,9	1,0 $(m = 1)$	1,0 $(m = 2)$
0	11,63	9,74	9,14	8,70	8,13	7,87	7,81	—
0,25	12,83	11,03	10,48	10,22	9,60	9,41	9,40	—
0,5	13,37	11,69	11,20	10,86	10,50	10,42	10,52	—
1,0	13,86	12,34	11,95	11,72	11,55	11,68	11,99	—
2,0	14,23	12,87	12,57	12,44	12,53	12,94	13,54	—
4,0	14,46	13,23	12,99	12,96	13,26	13,93	14,84	14,46
10,0	14,62	13,48	13,32	13,35	13,83	14,74	15,86	14,62
∞	14,75	13,68	13,56	13,65	14,29	15,41	16,90	14,74

c) În cazul plăcii comprimate uniform de-a lungul marginii $x = 0$ de efortul unitar

$$\sigma_y = p, \tag{1.49}$$

distribuit pe înălțimea plăcii după legea (fig. 4)

$$\sigma_y = \frac{p}{2}\left(1 + \cos\frac{\pi}{b}\,y\right), \tag{1.50}$$

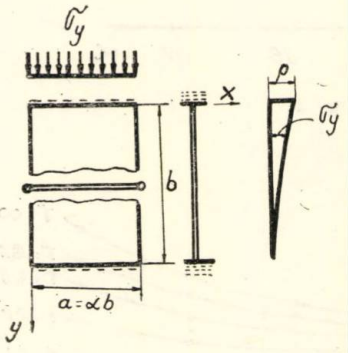


Fig. 4

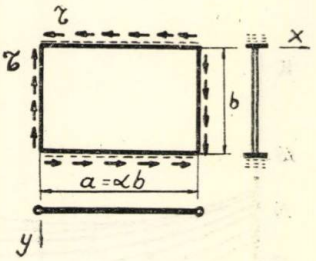


Fig. 5

se cunosc valorile coeficienților de voalare Z_s și Z_i [3, p. 60, tab. 1.1; p. 64, tab. 1.2].

Suprafața deformată a plăcii considerate simplu rezemate pe contur se exprimă prin expresia

$$w_s = \sin\frac{\pi}{a}\,x\,\sum_n A_n \sin\frac{n\pi}{b}\,y, \tag{1.51}$$

coeficienții A_n fiind determinați prin formula

$$A_n = \frac{2^{n-1}}{n} D_{n-1}(Z). \tag{1.52}$$

S-a notat prin $D_{n-1}(Z)$ determinantul de ordinul $n-1$, care este situat în colțul superior stîng al determinantului:

$$\begin{vmatrix} F_1' & a_{12} & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ a_{21} & F_2' & a_{23} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & F_3' & a_{34} & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & F_4' & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & F_{i-1}' & a_{i-1,i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & a_{i,i-1} & F_i' \end{vmatrix}, \tag{1.53}$$

unde

$$F_n' = \frac{2(1+\alpha^2 n^2)^2}{\alpha^2 n^2 Z_s} - 1; \quad a_{i,i-1} = -\frac{i-1}{2i}; \quad a_{i,i+1} = -\frac{i+1}{2i}. \tag{1.54}$$

Se știe că în acest caz valoarea determinantului $D_n(Z)$ se scrie sub forma generală

$$D^n(Z) = F_n D_{n-1}(Z) - \frac{1}{4} D_{n-2}(Z). \tag{1.55}$$

Folosind formulele (1.39) și (1.43), se determină valoarea lui g pentru diverse valori ale raportului α; ele sînt menționate în tabela 7.

Tabela 7

α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0
g	9,11	8,35	7,80	7,28	6,87	6,59	6,46	6,42	6,62	6,80

Ținînd seama de acestea, cu formula (1.41) se determină valorile coeficientului de voalare Z_γ, menționate în tabela 8.

d) În cazul plăcii solicitate de eforturi unitare tangențiale pe contur (fig. 5), se cunosc valorile coeficienților de voalare R_s și R_i [3, p. 111, tab. 1.2; p. 112, tab. 2.2]. Suprafața deformată a plăcii considerate simplu rezemate pe contur se exprimă prin expresia

$$w_s = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{m\pi}{b} y, \tag{1.56}$$

Tabela 8

γ \ α	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0
0	4,64	4,88	5,12	5,37	5,59	5,80	6,01	6,26	8,16	11,21
0,25	5,43	5,80	6,14	6,45	6,70	6,94	7,21	7,50	9,62	13,17
0,5	5,59	6,06	6,50	6,90	7,23	7,56	7,91	8,29	10,77	14,82
1,0	5,70	6,25	6,80	7,30	7,74	8,19	8,69	9,23	12,46	17,43
2,0	5,76	6,37	7,00	7,60	8,14	8,72	9,39	10,12	14,53	20,86
4,0	5,79	6,44	7,14	7,78	8,80	9,09	9,89	10,81	16,55	24,77
6,0	5,81	6,47	7,17	7,85	8,50	9,23	10,10	11,10	17,54	26,78
10,0	5,82	6,49	7,20	7,91	8,58	9,36	10,28	11,35	18,52	28,86
∞	5,83	6,52	7,26	8,00	8,73	9,56	10,58	11,79	20,48	33,16

coeficienţii A_{mn} fiind determinaţi din sistemul de ecuaţii liniare şi omogene a cărui ecuaţie generală are forma

$$\pi^2 (m^2 + \alpha^2 n^2)^2 A_{mn} - 32\ \alpha^3 R_s \sum_{m_1} \sum_{n_1} \frac{mn\ m_1 n_1}{(m^2 - m_1^2)(n_1^2 - n^2)} A_{m_1 n_1} = 0, \tag{1.57}$$

unde $m + n =$ par; $m_1 + n_1 =$ par şi $m + m_1 =$ impar.

Folosind formulele (1.39) şi (1.44), se determină valoarea lui g pentru diverse valori ale raportului α; ele sînt menţionate în tabela 9.

Tabela 9

α	0,5	0,667	1,0	1,5	2,0	8,0
g	2,10	6,31	13,75	9,12	6,47	5,74

Ţinînd seama de aceasta, cu formula (1.41) se determină valorile coeficientului de voalare R_γ, menţionate în tabela 10.

2. PROCEDEUL SHULESHKO

Prin acest procedeu [19], [20] se reduce rezolvarea problemei stabilităţii plăcii plane dreptunghiulare la soluţionarea unei probleme de stabilitate mai simplă sau la una a cărei soluţie este deja cunoscută.

Astfel determinarea efortului unitar critic la voalare a plăcii ortotrope se reduce la determinarea efortului unitar critic la voalare a unei plăci izotrope; studiul stabilităţii plăcii solicitate peste limita elastică se reduce la studiul stabilităţii unei plăci solicitate în domeniul elastic; soluţia problemei stabilităţii plăcii solicitate după două direcţii perpen-

Tabela 10

γ \ α	0,5	0,666	1,0	2,0	∞
0	6,55	7,05	9,34	6,55	5,35
0,25	6,666	7,552	10,90	7,67	6,38
0,50	6,681	7,662	11,39	8,27	6,96
1,00	6,690	7,704	11,75	8,89	7,58
2,0	6,694	7,740	12,00	9,40	8,11
5,0	6,698	7,763	12,15	9,83	8,57
10,0	6,699	7,772	12,22	10,01	8,75
∞	6,70	7,78	12,28	10,21	8,99

diculare se reduce la soluţia unei plăci solicitată uniaxial etc. Aceste reduceri sînt posibile numai în anumite condiţii. Pentru problemele de stabilitate a plăcii plane dreptunghiulare, aceste condiţii sînt reprezentate prin existenţa unor ecuaţii simultane.

Soluţia obţinută prin procedeul Shuleshko este exactă sau aproximativă, după tipul şi natura problemei.

Se presupune că pentru o problemă de stabilitate a plăcii plane, ecuaţia de valori proprii din care se determină soluţia problemei se prezintă sub forma

$$f(\alpha, \beta, \gamma \ldots) = 0, \tag{2.1}$$

unde α, β, γ, ... sînt parametri, iar ecuaţia de valori proprii a altei probleme de stabilitate se prezintă sub forma

$$f(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \ldots) = 0, \tag{2.2}$$

care este de acelaşi tip cu ecuaţia (2.1), însă cu parametri diferiţi : α_0, β_0, γ_0, ...

Dacă se realizează

$$\alpha = \alpha_0; \ \beta = \beta_0; \ \gamma = \gamma_0; \ \ldots, \tag{2.3}$$

atunci cele două ecuaţii de valori proprii (2.1) şi (2.2) se transformă una într-alta, iar problemele se reduc una la alta.

Pentru ca condiţiile (2.3) să fie realizate, este necesar să fie satisfăcute simultan anumite ecuaţii, care reprezintă relaţia dintre soluţiile celor două ecuaţii de valori proprii (2.1) şi (2.2).

Aceste ecuaţii simultane se numesc ecuaţii de reducere, iar metoda de rezolvare se numeşte metoda reducerii.

Ecuaţiile de valori proprii (2.1) şi (2.2) se obţin din ecuaţiile diferenţiale de stabilitate a celor două plăci şi din condiţiile marginale ale acestora.

În domeniul elastic, ecuația diferențială a stabilității plăcii plane ortotrope dreptunghiulare, cu grosime constantă și uniform comprimate pe marginile opuse (fig. 6 *a*) are forma generală

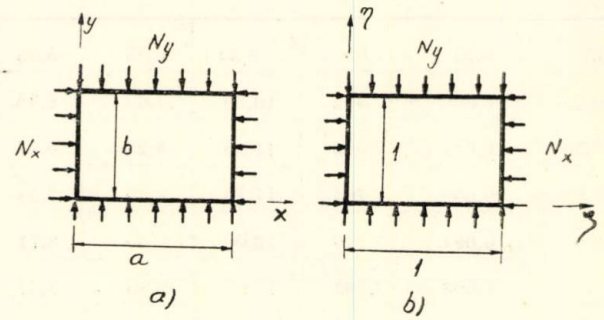


Fig. 6

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad (2.4)$$

unde

$D_x = \dfrac{1}{1 - \mu_{xy}\,\mu_{yx}} (EI)_x$ reprezintă rigiditatea la încovoiere a plăcii în raport cu axa x, (2.5a)

$D_y = \dfrac{1}{1 - \mu_{xy}\,\mu_{yx}} (EI)_y$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii în raport cu axa y, (2.5b)

$D_t = (GI)_{xy}$ — rigiditatea la torsiune a plăcii, (2.5c)

$2D_{xy} = 4D_t + \mu_{xy} D_x +$ (2.5d)

$\mu_{yx} D_y$, μ_{xy} și μ_{yx} — coeficienții de contracție transversală (primul indice arată direcția deformației, iar al doilea direcția în care se produce cauza care dă naștere acestei deformații).

Ecuația diferențială a stabilității unei plăci plane similare solicitate peste limita elastică poate fi scrisă sub forma (2.4), însă în acest caz simbolurile D_x, D_{xy}, D_y se exprimă prin expresiile menționate în tabela 11.

Dacă în ecuația (2.4) se înlocuiește

$$D_x = D_{xy} = D_y = D = \frac{EI}{1 - \mu^2}, \qquad (2.6)$$

se obține ecuația diferențială a stabilității plăcii plane dreptunghiulare izotrope, solicitată uniform pe marginile opuse în domeniul elastic.

Tabela 11

Solicitarea	Rigiditatea la încovoiere a plăcii solicitate peste limita elastică			extras din lucrarea
	D_x	D_y	D_{xy}	
compresiune uniformă axială în direcţia axei x	$D\tau_r$	$D\sqrt{\tau_r}$	D; $\tau_r = \frac{E_r}{E}$	[2], [22]
	$D\tau_c$	$D\left(\frac{1}{2}\tau_c + \frac{1}{2}\sqrt{\tau_c}\right)$	D; $\tau_c = \frac{E_{cal}}{E}$	[13],[14],[15]
	$D'\left(1+\frac{3}{4}\tau_1\right)$	D'	D'; $\tau_1 = \frac{E_t}{E_s}$	[21]
	$D[1-c\delta(2-\mu)^2]$	$D[1-c\delta(2-\mu)(2\mu-1)]$	$D[1-c\delta(2\mu-1)^2]$	
	$D(1-\psi)(1-p)$	$D(1-\psi)$	$D(1-\psi)$	[18]
compresiune uniformă biaxială	$EI\,\psi_1/\psi_2$	$EI\left(\frac{\psi_2}{\psi_4}+2F\right)$	$EI\,\frac{\psi_3}{\psi_4}$	[1]
	$D'\left[1-\frac{3}{4}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_i}\right)^2 e_1\right]$	$D'\left[1-\frac{3}{4}\sigma_x\sigma_y/\sigma_i^2\, e_1\right]$	$D'\left[1-\frac{3}{4}(\sigma_y/\sigma_i)^2 e_1\right]$ $e_1 = 1-\frac{E_t}{E_1}$	[21]
	$D(1-\psi)(1-p/\theta)$	$D[(1-\psi)(1-\alpha p/\theta)]$	$D[(1-\psi)(1-\alpha^2 p/\theta)]$ $\alpha=\frac{P_2}{P_1}$; $\theta=1-\alpha+\alpha^2$	[18], [17]

În cele ce urmează se foloseşte ecuaţia diferenţială sub forma (2.4), întrucît reprezintă toate cele trei tipuri de plăci a căror stabilitate s-a propus a fi rezolvată prin procedeul lui Shuleshko.

Prin folosirea următoarelor substituiri (fig. 6 *b*):

$$\xi = \frac{x}{a} \quad \text{şi} \quad \eta = \frac{y}{b}, \tag{2.7}$$

ecuaţia diferenţială (2.4) se transformă în forma nedimensională

$$\left(\frac{\varepsilon}{m_0}\right)^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\rho\left(\frac{\varepsilon}{m_0}\right)^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \pi^2\left(\frac{\varepsilon}{m_0}\right)^2\left(K_x \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + m_0^2 K_y \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}\right) = 0, \tag{2.8}$$

unde s-au notat

$$\varepsilon = \omega \frac{m_0 b}{a} = \omega \frac{m_0}{\alpha}, \tag{2.9a}$$

$$\omega = \left(\frac{D_x}{D_y}\right)^{1/4}, \tag{2.9b}$$

$$\rho = \frac{D_{xy}}{\sqrt{D_x D_y}}, \tag{2.9c}$$

$$K_x = \frac{b^2 N_x}{\pi^2 \sqrt{D_x D_y}}, \tag{2.9d}$$

$$K_y = \frac{a^2 N_y}{m_0^2 \pi^2 \sqrt{D_x D_y}}, \tag{2.9e}$$

iar m_0 este numărul semiundelor de voalare în direcţia x a plăcii ortotrope, respectiv a plăcii solicitate peste limita elastică sau a plăcii izotrope solicitate biaxial în domeniul elastic.

Pentru a exprima condiţiile marginale ale plăcii ortotrope trebuie mai întîi stabilite, de asemenea sub formă nedimensională, expresiile intensităţii eforturilor secţionale care apar pe feţele laterale ale unui element prismatic infinit mic, detaşat din placa plană ortotropă, în funcţie de deformaţia w pe care o suferă planul median al plăcii în timpul voalării. Cînd axele x şi y coincid cu direcţiile principale, se cunosc expresiile intensităţii eforturilor secţionale :

$$M_x = -D_x \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu_{xy} \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right), \tag{2.10a}$$

$$M_y = -D_y \left(\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \mu_{yx} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), \tag{2.10b}$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -\frac{2}{ab} D_t \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta}, \tag{2.10c}$$

$$N_{xz} = -\frac{1}{a^3} D_x \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{1}{ab^2} (2D_t + \mu_{xy} D_x) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2}, \tag{2.10d}$$

$$N_{yz} = -\frac{1}{b^3} D_y \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} - \frac{1}{a^2 b} (2D_t + \mu_{yx} D_y) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta}. \tag{2.10e}$$

Pentru placa plană solicitată peste limita elastică, intensitatea eforturilor secţionale se exprimă prin aceleaşi expresii (2.10), însă simbolurile D_x, D_{xy} şi D_y au valorile indicate în tabela 11 ; în cazul plăcii plane izotrope solicitate biaxial în domeniul elastic, între valorile simbolurilor D_x, D_{xy} şi D_y există relaţia (2.6).

În funcţie de modul solicitării şi felul rezemării marginii $\eta = 1$ a plăcii ortotrope considerate şi ţinînd seama de expresiile (2.10), condiţiile marginale de-a lungul acestei margini sînt :

— marginea neîncărcată este încastrată rigid

$$w = 0 ; \qquad \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0, \tag{2.11a}$$

— marginea neîncărcată este încastrată elastic:

$$w = 0; \quad M_y = \frac{1}{a^2 b}\overline{GI}_t \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta}, \tag{2.11b}$$

— marginea neîncărcată este simplu rezemată:

$$w = 0; \quad M_y = 0, \tag{2.11c}$$

— marginea neîncărcată este nerezemată:

$$M_y = 0; \quad N_{yz} + \frac{1}{a}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \xi} = 0, \tag{2.11d}$$

— marginea neîncărcată este nerezemată (se poate încovoia în direcție perpendiculară pe planul plăcii, însă nu poate fi rotită):

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \quad N_{yz} + \frac{1}{a}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \xi} = 0, \tag{2.11e}$$

— marginea încărcată cu N_y este nerezemată:

$$M_y = 0; \quad N_{yz} + \frac{1}{a}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \xi} = -\frac{1}{b} N_y \frac{\partial w}{\partial \eta}, \tag{2.11f}$$

— marginea încărcată cu N_y este nerezemată (se poate încovoia în direcție perpendiculară pe planul plăcii, însă nu poate fi rotită):

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = 0; \quad N_{yz} + \frac{1}{a}\frac{\partial M_{xy}}{\partial \xi} = -\frac{1}{b} N_y \frac{\partial w}{\partial \eta}. \tag{2.11g}$$

Lundquist și Stowell [13], notînd cu S rigiditatea la torsiune pe unitatea de lungime a elementului de construcție care reține elastic marginea plăcii sau momentul necesar pentru a roti o unitate de lungime a acestui element cu 1/4 radiani, au stabilit următoarele condiții pentru marginea $\eta = 1$ neîncărcată și încastrată elastic:

$$w = 0; \quad M_y = 4S\frac{1}{b}\left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right). \tag{2.11b'}$$

Pentru celelalte margini ale plăcii se pot scrie condiții asemănătoare, în funcție de solicitarea și de rezemarea acestora.

Presupunînd cunoscută valoarea lui K_y (2.9e) și valoarea raportului ε (2.9a), problema stabilității plăcii ortotrope considerate constă în a găsi cea mai mică valoare a lui K_x (2.9d), care rezolvă ecuația diferențială (2.4) cînd expresia $w \neq 0$ satisface condițiile marginale pe conturul plăcii. În alte cazuri se presupune cunoscută valoarea lui K_x și a raportului ε și se urmărește determinarea soluției minime K_y a ecuației (2.4) sau se presupun cunoscute valorile rapoartelor $\vartheta = \frac{K_x}{K_y}$ și ε.

Suprafața voalată a plăcii ortotrope se presupune reprezentată printr-o expresie de forma

$$w = \Xi H, \tag{2.12}$$

unde

Ξ este o funcție numai de ξ, astfel aleasă încît să satisfacă condițiile pe marginile $\xi = 0$ și $\xi = 1$,

H — o funcție numai de η, necunoscută, care urmează să fie determinată astfel încît să satisfacă condițiile marginale $\eta = 0$ și $\eta = 1$ cît mai exact posibil.

Substituind pe (2.12) în (2.8), ecuația diferențială a stabilității plăcii plane ortotrope se scrie

$$\Xi \frac{\partial^4 H}{\partial \eta^4} + 2\pi^2 \varepsilon^2 \left[\frac{1}{2} K_y \Xi + \frac{\rho}{m_0^2 \pi^2} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} \right] \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \\ + \pi^4 \varepsilon^2 \left(\frac{K_x}{m_0^2 \pi^2} \cdot \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} + \frac{\varepsilon^2}{m_0^4 \pi^4} \cdot \frac{\partial^4 H}{\partial \eta^4} \right) H = 0. \tag{2.13}$$

Folosind metoda momentelor, se multiplică ecuația (2.13) cu Ξ e integrează de la zero la unitate, se simplifică și se obține

$$\frac{\partial^4 H}{\partial \eta^4} + 2\pi^2 \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} K_y - \rho C_1 \right) \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \pi^4 \varepsilon^2 (K_x C_1 - \varepsilon^2 C_2) H = 0, \tag{2.14}$$

unde s-a notat

$$C_1 = -\frac{1}{m_0^2 \pi^2} \cdot \frac{\int_0^1 \Xi \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} \, d\xi}{\int_0^1 \Xi^2 d\xi}, \tag{2.15a}$$

$$C_2 = +\frac{1}{m_0^4 \pi^4} \cdot \frac{\int_0^1 \Xi \frac{\partial^4 \Xi}{\partial \xi^4} \, d\xi}{\int_0^1 \Xi^2 d\xi}. \tag{2.15b}$$

Pentru diferite moduri de rezemare a marginilor $\xi = 0$ și $\xi = 1$ ale plăcii se obțin următoarele valori ale rapoartelor C_1 și C_2.

a) Dacă marginile $\xi = 0$ și $\xi = 1$ sînt simplu rezemate, expresia (2.12) satisface condițiile de-a lungul acestor margini cînd funcția Ξ se reprezintă sub forma

$$\Xi = \sin m_0 \pi \xi \qquad (m_0 = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2.16a}$$

În acest caz

$$\frac{1}{\Xi} \cdot \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} = -m_0^2 \pi^2 = \text{const},$$

$$\frac{1}{\Xi} \cdot \frac{\partial^4 \Xi}{\partial \xi^4} = m_0^4 \pi^4 = \text{const},$$

deci pentru H se obține soluție exactă.

Substituind funcția (2.16a) în (2.15) și integrînd, se obține

$$C_1 = C_2 = 1. \tag{2.17a}$$

b) Dacă marginea $\xi = 0$ a plăcii este simplu rezemată, iar marginea $\xi = 1$ este nerezemată (se poate încovoia, dar nu se poate roti), expresia (2.12) satisface condițiile de-a lungul acestor margini cînd funcția Ξ se reprezintă sub forma

$$\Xi = \sin \frac{m_0 \pi}{2} \xi. \qquad (m_0 = \text{impar}). \tag{2.16b}$$

În acest caz, substituind funcția (2.16 b) în (2.15) și integrînd, se obține

$$C_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \quad C_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4. \tag{2.17b}$$

c) Dacă marginile $\xi = 0$ și $\xi = 1$ ale plăcii sînt incastrate rigid, funcția Ξ se reprezintă sub forma

$$\Xi = \xi^4 - 2\xi^3 + \xi^2. \tag{2.16c}$$

În acest caz,

$$\frac{1}{\Xi} \cdot \frac{\partial^2 \Xi}{\partial \xi^2} \neq \text{const},$$

$$\frac{1}{\Xi} \cdot \frac{\partial^4 \Xi}{\partial \xi^4} \neq \text{const},$$

deci pentru funcția H se admite o soluție aproximativă.

Substituind funcția (2.16) în (2.15) și integrînd se obține:

$$C_1 = \frac{1}{m_0^2} 1{,}21585 \quad \text{și} \quad C_2 = \frac{1}{m_0^4} 5{,}1747. \tag{2.17c}$$

În același mod se determină valorile lui C_1 și C_2 și pentru alte moduri de rezemare a marginilor ξ ale plăcii plane ortotrope considerate.

Substituind expresia (2.12) în condițiile marginale (2.11 a—g), multiplicînd cu Ξ, integrînd de la zero la unitate și simplificînd, se obține

$$H = 0 \text{ și } \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \tag{2.18a}$$

$$H = 0 \text{ și } \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \pi^2 \varepsilon^2 C_1 \frac{\overline{GI_t}}{b\sqrt{D_x D_y}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \tag{2.18b}$$

$$H = 0 \text{ și } \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + 4S \frac{b}{D_y} \cdot \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \tag{2.18b'}$$

$$H = 0 \text{ și } \frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} = 0, \tag{2.18c}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \frac{\pi^2 \varepsilon^2 G \mu_{yx}}{\omega^2} H = 0 \text{ şi } \frac{\partial^3 H}{\partial \eta^3} - \pi^2 \varepsilon^2 C_1 \left(2\rho - \frac{\mu_{yx}}{\omega^2}\right) \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \quad (2.18d)$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} - \frac{\pi^2 \varepsilon^2 C_1 \mu_{yx}}{\omega^2} H = 0 \text{ şi } \frac{\partial^3 H}{\partial \eta^3} - \pi^2 \varepsilon^2 \left[C_1 \left(2\rho - \frac{\mu_{yx}}{\omega^2}\right) - K_y\right] \frac{\partial H}{\partial \eta} = 0, \quad (2.18e)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = 0 \text{ şi } \frac{\partial^3 H}{\partial \eta^3} = 0, \quad (2.18f)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = 0 \text{ şi } \frac{\partial^3 H}{\partial \eta^3} = 0. \quad (2.18g)$$

Pentru plăcile solicitate peste limita elastică şi pentru cele solicitate biaxial, condiţiile marginale se obţin din relaţiile (2.18 a—g) prin particularizare.

Soluţia eucaţiei diferenţiale (2.14) este

$$H = \beta_1 \text{sh}\beta\eta + \beta_2 \text{ch}\beta\eta + \beta_3 \sin\gamma\eta + \beta_4 \cos\gamma\eta, \quad (2.19)$$

unde

$$\beta = \pi\varepsilon \sqrt{-\left(\frac{1}{2} K_y - \rho C_1\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} K_y - \rho C_1\right)^2 + \left(C_1 \frac{K_x}{\varepsilon^2} - C_2\right)}} \quad (2.19a)$$

$$\gamma = \pi\varepsilon \sqrt{+\left(\frac{1}{2} K_y - \rho C_1\right) + \sqrt{\left(\frac{1}{2} K_y - \rho C_1\right)^2 + \left(C_1 \frac{K_x}{\varepsilon^2} - C_2\right)}}. \quad (2.19b)$$

Constantele de integrare B_1, B_2, B_3 şi B_4 se determină din condiţiile de-a lungul marginilor η.

În cazul plăcii ortotrope cu marginile $\eta = 0$ şi $\eta = 1$ încastrate rigid, substituind soluţia (2.19) în condiţiile marginale (2.18), se obţine următoarea ecuaţie de valori proprii:

$$(\cos\gamma - \text{ch}\,\beta)^2 + \left(\sin\gamma - \frac{\gamma}{\beta} \text{sh}\,\beta\right)\left(\sin\gamma + \frac{\beta}{\gamma} \text{sh}\,\beta\right) = 0, \quad (2.20)$$

care, sub formă prescurtată, se notează

$$f(\beta, \gamma) = 0, \quad (2.21)$$

unde β şi γ au valorile date de (2.19a) şi (2.19b), iar C_1 şi C_2 au valorile (2.14 a—c) după modul de rezemare a marginilor ξ.

Ecuaţia de valori proprii pentru o placă izotropă, identică ca dimensiuni şi solicitare cu placa ortotropă, însă încastrată rigid pe marginile η şi simplu rezemată pe marginile ξ, are aceeaşi formă, adică

$$f(\beta_0, \gamma_0) = 0, \quad (2.22)$$

în care expresia parametrilor β_0 și γ_0 diferă de cea a parametrilor β și γ:

$$\beta_0 = \pi\varepsilon_0 \sqrt{-\left(\frac{1}{2}K_{0y}-1\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}K_{0y}-1\right)^2+\left(\frac{K_{0x}}{\varepsilon_0^2}-1\right)}}, \quad (2.23a)$$

$$\gamma_0 = \pi\varepsilon_0 \sqrt{+\left(\frac{1}{2}K_{0y}-1\right)+\sqrt{\left(\frac{1}{2}K_{0y}-1\right)^2+\left(\frac{K_{0x}}{\varepsilon_0^2}-1\right)}}, \quad (2.23b)$$

în care

$$\varepsilon_0 = \frac{m_0}{\alpha}; \qquad K_{0x} = \frac{b^2 N_x}{\pi^2 D}; \qquad K_{0y} = \frac{a^2 N_y}{m^2\pi^2 D}. \quad (2.24)$$

Dacă se realizează

$$\beta = \beta_0 \text{ și } \gamma = \gamma_0, \quad (2.25)$$

atunci ecuația (2.21) se transformă în (2.22) sau invers, adică problema stabilității plăcii ortotrope încastrate rigid pe marginile η se reduce la problema stabilității unei plăci izotrope identice ca dimensiuni și solicitare cu placa ortotropă și încastrate rigid pe marginile η ca și aceasta, însă simplu rezemată pe marginile ξ.

Condițiile (2.25) sînt îndeplinite dacă sînt satisfăcute simultan următoarele ecuații:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(K_y - 2\rho C_1) &= \varepsilon_0^2(K_{0y}-2), \\ \varepsilon^2(K_x C_1 - \varepsilon^2 C_2) &= \varepsilon_0^2(K_{0x}-\varepsilon_0^2). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Sistemul de ecuații (2.26) reprezintă relația dintre soluțiile celor două ecuații de valori proprii (2.21) și (2.22). Dacă sînt cunoscute soluțiile ecuației (2.22), din ecuațiile (2.26) se determină și soluțiile ecuației (2.21) sau invers. Ecuațiile (2.26) sînt generale și pot fi folosite pentru plăci cu orice mod de rezemare pe marginile ξ. Coeficienții C_1 și C_2 au valori diferite pentru diverse moduri de rezemare și trebuie să fie calculați în mod separat din ecuațiile (2.17). Se observă că ecuațiile (2.26) se obțin și prin egalarea coeficienților ecuației diferențiale (2.14) a plăcii ortotrope și a plăcii izotrope. Aceasta este posibil cînd condițiile pe marginile η sînt independente de constantele elastice ale materialului, ca în cazul de mai sus (ecuația 2.18a). În cazul cînd condițiile pe margini depind de constantele elastice ale materialului (ecuațiile 2,18b, 2.18b′, 2.18d și 2.18f), pentru ca problema stabilității plăcii ortotrope să fie redusă la cea a plăcii izotrope, trebuie ca pe lîngă ecuațiile de reducere (2.26) să fie satisfăcute de asemenea și unele ecuații suplimentare, obținute prin egalarea coeficienților condițiilor marginale ale celor două plăci.

Deci în timp ce condițiile pe marginile ξ influențează asupra ecuațiilor de reducere (2.23) prin valorile coeficienților C_1 și C_2, condițiile marginale η creează noi ecuații de reducere suplimentare.

În tabela 12 sînt menționate atît ecuațiile de valori proprii, cît și ecuațiile de reducere pentru plăci ortotrope cu diferite moduri de rezemare

Tabela 12

Nr. crt.	Modul de rezemare a marginilor $\eta = 0$	Modul de rezemare a marginilor $\eta = 1$	Ecuaţia de valori proprii	Ecuaţii de reducere
1	încastrată rigid	încastrată rigid	$(\cos\gamma - \operatorname{ch}\beta)^2 + \left(\sin\gamma - \frac{\gamma}{\beta}\operatorname{sh}\beta\right)\left(\sin\gamma + \frac{\beta}{\gamma}\operatorname{sh}\beta\right) = 0$	$\varepsilon^2(K_y - 2\rho C_1) = \varepsilon_0^2(K_{0y} - 2)$ $\varepsilon^2(K_x C_1 - \varepsilon^2 C_2) = \varepsilon_0^2(K_{0x} - \varepsilon_0^2)$
2	încastrată rigid	încastrată elastic	$\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}(\gamma \operatorname{sh}\beta\cos\gamma - \beta\operatorname{ch}\beta\sin\gamma) + -4\frac{Sb}{Dy}\left[(\cos\gamma - \operatorname{ch}\beta)^2 + \left(\sin\gamma - \frac{\gamma}{\beta}\operatorname{sh}\beta\right)\left(\sin\gamma + \frac{\beta}{\gamma}\operatorname{sh}\beta\right)\right] = 0$	ecuaţiile de la nr. 1 plus ecuaţia suplimentară $\frac{Sb}{Dy} = \frac{S_0 b_0}{D}$
3	încastrată rigid	simplu rezemată	$\beta\operatorname{tg}\gamma = \gamma\operatorname{th}\beta$	aceleaşi ca la nr. 1
4	simplu rezemată	încastrată elastic	$(\beta^2+\gamma^2)\operatorname{sh}\beta\sin\gamma - 4\frac{Sb}{Dy}(\gamma\operatorname{sh}\beta\cos\gamma - \beta\operatorname{ch}\beta\sin\gamma) = 0$	aceleaşi ca la nr. 2
5	nerezemată	încastrată rigid	$\left(\beta^2\frac{B}{A} - \gamma^2\frac{A}{B}\right)\operatorname{sh}\beta\sin\gamma - \beta\gamma\left(\frac{B}{A} + \frac{A}{B}\right)\operatorname{ch}\beta\cos\gamma - 2\beta\gamma = 0$ $A = \beta^2 - \pi^2\varepsilon^2\frac{C_1\mu_{yx}}{\omega^2}\ ;\ B^2 = \beta^2 + \pi^2\varepsilon^2\frac{C_1\mu_{yx}}{\omega^2}$	ecuaţiile de la nr. 1 plus ecuaţia suplimentară $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{C_1\mu_{yx}/\mu}$
6	,, ,,	încastrată elastic	$(\beta^2+\gamma^2)\left[\beta\frac{B}{A}\sin\gamma\operatorname{ch}\beta - \gamma\frac{A}{B}\operatorname{sh}\beta\sin\gamma\right] + -4\frac{Sb}{Dy}\left[\beta\gamma\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)\operatorname{ch}\beta\cos\gamma - \left(\beta^2\frac{B}{A} - \gamma^2\frac{A}{B}\right)\operatorname{sh}\beta\sin\gamma - 2\beta\gamma\right] = 0$	ecuaţiile de la nr. 2 plus ecuaţia suplimentară $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{\omega}\sqrt{C_1\mu_{yx}/\mu}$
7	,, ,,	simplu rezemată	$\beta\frac{B}{A}\operatorname{tg}\gamma = \gamma\frac{A}{B}\operatorname{th}\beta$	aceleaşi ca la nr. 5
8*	,, ,,	nerezemată	$\gamma A^2\sin\gamma\operatorname{ch}\beta - \beta B^2\operatorname{sh}\beta\cos\gamma = 0$ sau $\gamma A^2\cos\gamma\operatorname{sh}\beta - \beta B^2\operatorname{ch}\beta\sin\gamma = 0$	aceleaşi ca la nr. 5

* Prima ecuaţie de la nr. 8 corespunde formei simetrice de voalare a plăcii, iar a doua ecuaţie formei antimetrice de voalare.

a marginilor η. Ecuațiile de reducere și valorile proprii pentru plăcile izotrope corespunzătoare pot fi găsite în lucrările [13]—[22].

Ulterior, placa izotropă simplu rezemată pe marginile ξ și încastrată rigid pe marginile η_1 la care a fost redusă placa ortotropă considerată poate fi redusă la o placă izotropă simplu rezemată pe contur etc.; prin urmare, este posibilă o reducere progresivă pînă se ajunge la o problemă a cărei rezolvare este ușor de realizat sau chiar cunoscută.

După modul de solicitare pot fi considerate următoarele cazuri particulare ale ecuațiilor (2.26).

Cazul 1. Placa izotropă este solicitată uniaxial în direcția y. În acest caz, $K_{0x} = 0$. Din ecuațiile (2.26) se determină

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon (C_2 - C_1 K_x \varepsilon^{-2})^{1/4}, \\ K_y &= 2\rho C_1 + (K_{0y} - 2)(C_2 - C_1 K_x \varepsilon^{-2})^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

ceea ce este posibil cînd

$$C_2 - C_1 K_x \varepsilon^{-2} \geqslant 0 \quad \text{sau} \quad K_x \leqslant \frac{C_2}{C_1} \varepsilon^2, \tag{2.28}$$

incluzînd valorile negative ale lui K_x, adică întindere în direcția x. Conform celor stabilite, se presupun cunoscute valorile ε și K_x.

În 1952, printr-o metodă diferită, Wittrick [23] a obținut ecuații similare (2.27) pentru plăci cu margini simplu rezemate.

Prin urmare, dacă se cunoaște soluția problemei stabilității unei plăci izotrope solicitate după direcția y, poate fi determinată soluția unei plăci ortotrope sau a unei plăci izotrope încărcate peste limita elastică, solicitată bi- sau uniaxial.

Cazul 2. Placa izotropă este solicitată uniaxial în direcția x. În acest caz, $K_{0y} = 0$. Din cuațiile (2.26) se determină

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \varepsilon(\rho C_1 - 0{,}5\ K_y)^{1/2}, \\ K_x &= \frac{C_2}{C_1}\ \varepsilon^2 + (K_{0x} - \varepsilon_0^2)(\rho C_1 - 0{,}5\ K_y)\ \frac{1}{C_1}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Aceasta este posibil cînd

$$K_y \leqslant 2\rho C_1,$$

incluzînd valorile negative ale lui K_y, adică întindere în direcția y. Se presupun cunoscute valorile ε și K_y.

Primită la redacție la 5 mai 1967

BIBLIOGRAFIE

1. P. P. Bijlaard, *Theory and tests on the plastic stability of plates and shells*, J. Aero. Sci XVI, 9 (1949).
2. F. Bleich, *Buckling Strength of Metal Structures*, New York, Mc. Graw-Hill Book Co., Inc., 1952.
3. B. M. Broude, *Ustoicivosti plastinok v elementah stalnth konstruktii*, Moskva, Maşstroizdat, 1949.

4. B. M. Broude, *Predelnîe sostoianiia stalnîh balok*, Moskva—Leningrad, Gosizdat. liter. po stroiit. i arhit., 1953.
5. S. Cetățeanu, *Elemente ale construcțiilor metalice sudate rigidizate transversal unilateral*, disertație, București, Tipografia învățământului, 1958.
6. — *Grinzi cu inimă plină rigidizate transversal unilateral*, St. cerc. mec. apl. **XI**, *1* (1960).
7. — *Ustoicivosti stenok balok s odnostoronnimi rebrami jestkosti pri deistvii normalnîh napriajenii*, Prikladna mehanica, Acad. Nauk, SSSR, **VII**, *4* (1961).
8. — *Coeficient de siguranță la verificarea stabilității locale a inimi grinzilor metalice*, Buletinul științific și tehnic, Institutul politehnic Timișoara, **II** (16) fasc. *1* (1957).
9. — *Influența variației în trepte a grosimii inimii asupra stabilității locale a elementelor metalice*, Standardizarea, **18**, *11* (1966).
10. — *Influența încastrării elastice a marginilor inimii, a deformațiilor inițiale ale acesteia și a excentricității aplicării încărcărilor asupra stabilității locale a elementelor metalice*, Standardizarea, **19**, *3* (1967).
11. C.S.C.A.S. *Normativ condițional pentru calculul construcțiilor metalice la starea limită*, partea IV, *Proiectarea construcțiilor metalice civile și industriale* (P 11—62), vol. II, București, Edit. tehnică, 1963.
12. C. F. Kollbrunner, M. Meister, *Beulung*, Berlin, Springer-Verlag, 1958.
13. E. E. Lundquist, E. Z. Stowell, *Critical compressive stress for flat rectangular plates supported along all edges and elastically restrained against rotation along the unloaded edges*, NACA Report 733 (1942).
14. — *Critical compression stress for outstanding flanges*, NACA Report 734 (1942).
15. — *Restraint provided a flat rectangular plate by a sturdy stiffener along an edge of the plate*, NACA Report 735 (1943).
16. P. M. Oghibalov, *Izghib, ustoicivosti i kolevaniia plastinok*, Izd. Moskovskovo Universiteta, 1958.
17. S. M. Popov, *Ustoicivosti svobodno opertih plastinok za predelom uprugosti*, Injenernîi sbornik, **X** (1951).
18. — *Ustoicivisti za predelom uprugosti plastinok ukreplennîh rebrami*, Injenernîi sbornik, **XII** (1952).
19. Shuleshko P., *A New Method of Solving Eigenvalue Problems*, Australian Journal of Applied Science, **VIII**, *1* (1957).
20. — *A Reduction Method for Buckling Problems of Orthotropic Plates*, The Aeronautical Quarterly, **VIII**, *2* (1957).
21. E. Z. Stowell, *A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates*, NACA Report 898 (1949).
22. S. Timoshenko, *Theory of Elastic Stability*, New York, Mc. Graw-Hill Book Co., Inc., 1936.
23. R. Wittrick, *Correlation between some stability problems for orthotropic and isotropic plates under biaxial direct stress*, Aeronautical Quarterly, *4* (1952).

RECENZII

HERBERT E. MERRIT, *Hydraulic control systems* (Sisteme de control hidraulic), John Wiley and Sons, Inc., New York-Londra-Sydney, 1967, X+ 358 p., 192 fig.

Sistemele de control hidraulice s-au dezvoltat considerabil în ultimul timp, datorită unor avantaje pe care le posedă în raport cu alte modalităţi de control existente. Fără îndoială, sistemele de control hidraulic au şi o serie de neajunsuri, care le limitează posibilităţile de aplicare, dar, în anumite limite, ele prezintă un interes deosebit. Volumul lui H. E. Merrit, scris în primul rînd pentru inginerii care proiectează sau exploatează acest gen de sisteme de control, are meritul de a putea fi utilizat şi de cei care doresc să se iniţieze în problemă.

Primele trei capitole constituie o introducere, care conţine în special o privire asupra proprietăţilor fluidelor şi unor elemente de mecanica fluidelor necesare în continuare. Următoarele patru capitole sînt consacrate prezentării părţilor componente ale sistemelor de servocontrol hidraulic. Prezentarea începe cu pompele şi motoarele hidraulice şi continuă cu supapele de control hidraulic. Diferitele combinaţii ale acestora conduc la elementele de putere utilizate în controlul hidraulic, care fac obiectul unui capitol separat. În sfîrşit, ultimul dintre cele patru capitole amintite se ocupă de servosupapele hidraulice.

Restul lucrării este consacrat sistemelor de control hidraulic şi unor probleme ridicate de utilizarea acestora. Astfel un capitol destul de amplu are ca obiect servomecanismele electrohidraulice, în timp ce servomecanismele hidromecanice sînt tratate pe scurt, autorul considerînd că nu este necesar să repete unele dezvoltări anterioare. Efectul neliniarităţii sistemelor de control este discutat pe larg într-un capitol separat. Volumul mai conţine încă două scurte capitole, dintre care unul este consacrat supapelor de control al presiunii sau scurgerii, iar celălalt elementelor de putere hidraulice.

Scrisă clar, la nivelul corespunzător proiectării sau unui manual de învăţămînt şi însoţită de un bogat material grafic, în special sub formă de diagrame, lucrarea lui H. E. Merrit răspunde în bune condiţii scopului pe care l-am amintit. În acelaşi timp, nu este lipsită de interes nici pentru cercetători, deoarece deschide perspective asupra unui domeniu de o deosebită actualitate practică.

T. Oroveanu

Аэрофизические исследования сверхзвуковых Течений (*Studii aerofizice ale scurgerilor supersonice*), Москва-Ленинград, Издательство «Наука», 1967, 301 p.

Este bine cunoscut faptul că prin considerarea undei de şoc ca o suprafaţă de discontinuitate pentru parametrii curentului gazos este necesar să se studieze structura ei internă atunci cînd apar fenomene de disociaţie şi de ionizare a aerului din apropierea corpului care o provoacă. Aceste fenomene influenţează în mod intim atît structura, cît şi diferitele caracteristici

geometrice ale undei de şoc. În această direcţie sînt orientate cercetările efectuate în cadrul Institutului fizico-tehnic „A. I. Ioffe" al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S.

Volumul consacră un număr de 34 de lucrări, unor probleme teoretice şi experimentale grupate în două capitole.

Primul capitol, intitulat „Studii în tuburi de şoc", atacă probleme legate de studiul scurgerii din jurul unor modele aşezate în tubul de şoc, determinarea parametrilor curentului în tub, variaţia vitezei undei, efecte magnetohidrodinamice în tub etc.

Al doilea capitol, numit „Studii aerobalistice", întruneşte lucrări legate de studiul poziţiei şi formei undei de şoc ataşate pentru corpuri de diferite forme (semisferă, elipsoid de rotaţie, corpuri cu vîrf rotunjit), integrarea asimptotică a ecuaţiilor stratului-limită compresibil gazos etc.

Lucrările publicate în volum scot în evidenţă caracterul lor aplicativ şi interesul practic care stă la baza lor, rezultatele obţinute fiind de o importanţă practică foarte mare pentru aerodinamică.

Complexitatea problemelor studiate şi modul lor de abordare dă lucrării o înaltă valoare ştiinţifică, impunînd-o ca o contribuţie de seamă la rezolvarea problemelor actuale de aerodinamică.

Lucrarea poate fi folosită în probleme de cercetare ştiinţifică de către inginerii şi cercetătorii din domeniul mecanicii fluidelor.

I. Pop

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 27, nr. 3 1968

SUMAR

STUDII

Pag.

E. CARAFOLI, Henri Coandă, pionier al aerodinamicii aplicate 411

T. OROVEANU şi I. SPULBER, Influenţa neomogenităţii mediului poros asupra restabilirii presiunii într-un sistem liniar 421

I. POP, Efectul sucţiunii periodice asupra convecţiei libere nestaţionare deasupra unei plăci poroase plane verticale 433

I. ANTON şi E. ŞIŞAK, Contribuţii la definirea caracteristicilor energetice şi cavitaţionale ale reţelelor de profile din maşinile hidraulice axiale 439

ŞT. N. SĂVULESCU şi V. TOMA, Studiu experimental al scurgerii în jurul unui jet transversal curbat 459

LUCIAN Z. DUMITRESCU, Acţiunea undelor de şoc slabe asupra obstacolelor plane 469

D. ARSENIE şi I. DAVID, Asupra apariţiei turbulenţei la mişcarea între doi pereţi cu rugozitate periodică dată 495

V. N. CONSTANTINESCU şi E. RĂDULESCU, Asupra influenţei compresibilităţii în sisteme de etanşare şi lagărele cu canale spirale 503

BODNĂRESCU DAN, Asupra efectului de super-skin 521

D. CRAIFALEANU, Stabilitatea la răsucire a barelor cu reazeme intermediare 527

VALERIU PETCU, Calculul plastic al grinzilor continue de oţel 547

H. SANDI, Domeniul de rezistenţă al structurilor nedeterminate, ideal elasto-plastice 561

EINAR KEINTZEL, Matrice de influenţă pentru calculul la forţe orizontale al diafragmelor cu goluri la construcţii multietajate 573

M. SIMONICI, Cercetări de laborator asupra coeficienţilor de absorbţie a energiei oscilaţiilor 581

NICOLAE ŢOPA, Acţiunea seismică asupra cadrelor plane, de formă oarecare, avînd mase concentrate la noduri 601

CHR. PELECUDI, I. SAVA, A. MATHEESCU, Optimizarea legilor de funcţionare ale mecanismelor de distribuţie 617

A. RAICU, Contribuţii la sinteza structurală a mecanismelor spaţiale 645

RECENZII 655

St. cerc. mec. apl., Tom. 27, Nr. 3, P. 409—658, Bucureşti, 1968

HENRI COANDĂ, PIONIER AL AERODINAMICII APLICATE*

de E. CARAFOLI
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Institutul de mecanica fluidelor își fixează în fiecare an pentru sesiunea sa științifică generală o tematică legată de preocupările și profilul Institutului. Preocupările acestea sînt multiple și acoperă un cîmp larg de aplicații din tehnica modernă și din industrie.

În ultimul timp, cercetătorii Institutului nostru s-au ocupat de diferitele utilizări ale jeturilor fluide: la hipersustentația avioanelor, la devierea curenților gazoși, la comenzi prin jeturi fluide, la sustentația cu pernă de aer, la elemente pneumonice pentru automatizare, la „reversarea" impulsului jeturilor, precum și în unele fenomene de perete și de contact cu suprafața respectivă, ca stratul-limită, lubrificația, cavitația etc. Într-o bună parte din aceste fenomene intervine „efectul Coandă", care constituie tocmai subiectul director al Simpozionului nostru, completat cu unele aplicații speciale ale aero-hidrodinamicii, legate într-un fel oarecare, direct sau indirect, de subiectele enumerate mai sus. Avem deosebita plăcere să scoatem în evidență cu această ocazie personalitatea remarcabilă a D-lui HENRI COANDĂ, care are o contribuție cu totul deosebită în unele din aceste probleme.

De altfel, în ultimul timp, numeroase publicații s-au făcut ecoul unor importante aplicații în diverse domenii ale tehnicii moderne, publicînd în acest sens articole foarte interesante și elogiind pe D-l HENRI COANDĂ, descoperitorul „efectului" care-i poartă numele.

Acest nume ilustrează începuturile celei mai spectaculoase cuceriri din zilele noastre, *aviația cu reacție*, cu cea mai explozivă desvoltare a acesteia spre orizonturile strălucitoare ale cuceririi cosmosului, care se desfășoară în fața ochilor noștri cu un ritm vertiginos.

În această cucerire a științei și tehnicii, poporul român a adus o contribuție însemnată la patrimoniul mondial al civilizației materiale.

*) Prezentată la Simpozionul „Efectul Coandă și unele aplicații ale aero-hidrodinamicii, (București, iunie 1967).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 27. NR. 3, P. 411–420, BUCUREȘTI, 1968.

Într-adevăr, la 18 martie 1906, la Montesson lîngă Paris, constructorul aviator român TRAIAN VUIA se avîntă în aer la cca 1 m înălțime, făcînd un zbor scurt, ilustrat însă printr-o delocare cu propriile mijloace de bord, adică numai cu puterea motorului său instalat pe avionul construit de el însuși, care, înainte de decolare, a rulat pe pămînt cu un tren de aterizare format dintr-un cărucior pe patru roți de cauciuc, strămoș al trenului de aterizare de astăzi.

El a completat astfel faimosul zbor al fraților WRIGHT, efectuat la 17 decembrie 1903, care s-au înălțat în aer utilizînd un plan înclinat.

Cu cîțiva ani mai tîrziu, aviatorul și constructorul român, AUREL VLAICU, cucerea trofee importante la concursurile internaționale aeronautice (Aspern, lîngă Viena, în 1912).

Un alt precursor român, ing. GOGU CONSTANTINESCU, crea mai tîrziu o nouă ramură a științei, *sonicitatea* — știința care se ocupă cu transmisia puterii mecanice prin vibrații în mediile fluide și solide —, ce avea să fie aplicată în aviație la sincronizarea tragerilor prin elice (în Anglia) și în alte multe domenii de mare importanță practică.

În această epocă eroică a aviației, cînd încercările erau temerare și presărate cu jertfe dureroase, poporul român se găsea într-o competiție îndrăzneață pentru cucerirea văzduhului, alături de popoarele fruntașe ale lumii.

În acțiunea de omagiere a creației românești în aceste domenii ale științei, onorăm astăzi un pionier al aerodinamicii aplicate, pe D-l HENRI COANDĂ, legînd numele său de Simpozionul nostru și prezentîndu-i într-o privire de ansamblu opera sa științifică și tehnică.

★

Ilustrul om de știință și inventatorul HENRI COANDĂ a imaginat și realizat o gamă întreagă de aparate și mașini, de la primul avion cu reacție în 1910 și primul bimotor *Bristol-Coandă*, pînă la tunul fără recul, de la descoperirea „efectului" care-i poartă numele, pînă la toate aplicațiile așa de importante ale acestui fenomen, cu care se ocupă încă astăzi, la vîrsta sa înaintată. Ing. HENRI COANDĂ a desfășurat astfel o activitate științifică și tehnică considerabilă, începînd chiar din fragedă copilărie.

Personalitatea lui HENRI COANDĂ este complexă, iar capacitatea sa creatoare s-a manifestat cu intensitate în cele mai variate domenii ale activității umane, dar mai ales în științele tehnice, unde a obținut rezultate remarcabile.

Viața D-sale este deosebit de activă și în același timp pilduitoare sub aspectul muncii neobosite pentru progres.

HENRI COANDĂ s-a născut la București la 7 iunie 1886; chiar în această lună a împlinit respectabila vîrstă de 81 de ani. Îi urăm mai departe o viață lungă și plină de multe satisfacții.

După absolvirea școlii primare în București, tînărul COANDĂ a intrat la liceul „Sf. Sava". În anul 1900, a fost mutat însă la liceul militar din Iași, pe care l-a terminat cu trei ani mai tîrziu, în fruntea promoției. A urmat apoi Școala militară de artilerie din București, devenind ofițer de artilerie.

Deoarece în România de atunci condițiile materiale necesare dezvoltării talentelor și realizării practice a invențiilor lipseau, HENRI

COANDĂ, întocmai ca și compatrioții săi TRAIAN VUIA și GEORGE CONSTANTINESCU, a fost nevoit să ia calea peregrinărilor în străinătate. El frecventează mai întîi „Technische Hochschule" din Charlottenburg, apoi urmează cursurile Universității din Liège și ale Institutului de electrotehnică Montefiore; în cele din urmă, se înscrie la Școala superioară de aeronautică din Paris, ale cărei cursuri le termină cu succes în anul 1909. Parisul era pe acea vreme orașul tuturor posibilităților, „edenul" tuturor inventatorilor.

Primele sale lucrări de aerodinamică au fost remarcate de către oamenii, de știință și constructorii de avioane. Cu sprijinul lui *Gustave Eiffel*, al lui *Paul Painlevé* și al lui *Sétrieux*, HENRI COANDĂ a realizat un banc mobil pentru încercări aerodinamice, cu ajutorul căruia a efectuat numeroase experiențe deosebit de interesante în iarna anilor 1908—1909. Locomotiva, pe care COANDĂ instalase o platformă și un dispozitiv înregistrator, de concepție originală, a rulat mai multe luni în șir, cu viteza de 95 km/h, pe parcursul Paris—Saint Quentin.

Sprijinul moral pe care-l căpătase de la iluștrii savanți pomeniți mai sus era de fapt o înaltă apreciere asupra capacității lui HENRI COANDĂ. Într-adevăr, EIFFEL constructorul turnului „Eiffel" era în același timp și un precursor al aerodinamicii experimentale, efectuînd primele experiențe de aerodinamică pe dispozitive lansate în cădere liberă de pe înălțimea turnului „Eiffel"; iar PAINLEVÉ, fostul prim ministru al Franței, s-a numărat printre primii savanți din lume care au zburat pe un avion la începutul secolului nostru și între primii care s-au ocupat de problemele de aerodinamică.

Dar să revenim la COANDĂ. În cursul acelor experiențe de care am pomenit mai sus și care au fost destul de periculoase, întrucît trebuia să le execute cățărat pe locomotivă, COANDĂ a studiat fenomenele aerodinamice din jurul anumitor corpuri utilizate în aviație, în special în jurul aripilor de avion groase, în contrast cu cele subțiri utilizate pînă atunci și a studiat *aripa cu fantă de bord de atac*, folosită mai tîrziu la multe avioane Rezultatele cercetărilor au fost concretizate într-o comunicare prezentată la Școala superioară de aeronautică din Paris, la începutul anului 1910 și apoi într-un studiu intitulat „Aripile considerate ca mașini de reacțiune", publicat în revista „Le Technique Aéronautique" în iulie 1910 și care s-a bucurat de aprecierea unanimă a oamenilor de știință.

Folosind o suflerie aerodinamică cu fum, pentru vizualizare, și dispunînd de o balanță aerodinamică de concepție personală, el a continuat studiile asupra profilelor de aripă, realizînd, în același timp, numeroase fotografii de spectre aerodinamice și utilizînd în acest scop un aparat fotografic de construcție proprie. Rezultatele experiențelor au fost expuse într-o remarcabilă conferință, ținută la „Aeroclubul Franței", în ziua de 13 mai 1911.

În octombrie 1910, cu ocazia celui de-al doilea Salon Internațional de Aeronautică de la Paris, COANDĂ a prezentat *primul avion cu reacție din lume*. Caracterizat printr-o puternică notă de originalitate, acest avion a constituit punctul de atracție al expoziției și a stîrnit numeroase comentarii în presa vremii.

În decembrie 1910, după închiderea salonului, avionul a fost transportat pe cîmpia de la Issy-les-Moulineaux, din apropierea Parisului, unde, după un scurt rulaj, s-a ridicat la cîţiva metri deasupra solului şi COANDĂ a efectuat astfel primul zbor aeroreactiv din lume.

În recenzia sa asupra celui de-al II-lea Salon Internaţional de Aeronautică de la Paris, comentatorul revistei germane „Zeitschrift für Flugtechnik und Motor-Luftfahrt" scria despre avionul Coandă-1910 :

„... un biplan, care a trezit mult interes la Salonul Internaţional de Aeronautică, a fost expus de Dl. COANDĂ... Caracteristica cea mai remarcabilă a biplanului COANDĂ o constituie înlocuirea elicei cu o elice turbină. Avantajele acestei elice constau în aceea că are un diametru mai mic şi că este complet închisă într-un canal uşor conic, fiind astfel mai bine protejată decît o elice ordinară. Cercetările D-lui COANDĂ au stabilit, în plus, că eficacitatea elicei-turbină este mai mare decît a celor mai perfecţionate elice actuale..."

La rîndul său, GEORGE ESPITALIER, directorul revistei „La Technique Aéronautique", făcea următoarele aprecieri asupra avionului expus de COANDĂ :

„Aeroplanul COANDĂ este unul dintre rarele aparate în care totul este nou, iar modul judicios şi raţional prin care inventatorul său iese din făgaşele drumului bătut în această direcţie pentru a înfrunta riscurile lucrului inedit, este un motiv destul de puternic spre a ne decide să examinăm cu atenţie mijloacele pe care inventatorul le foloseşte în construcţia sa..." Referindu-se la sistemul de propulsie a avionului lui COANDĂ, GEORGE ESPITALIER scria mai departe : „... Cea mai mare ingeniozitate creatoare Dl. COANDĂ a dovedit-o, desigur, în concepţia acestui propulsor. În lipsa încercărilor definitive, care să îngăduie a preciza randamentul aparatului, nu putem spune întrucît acest sistem ar putea înlocui elicea în propulsia aeriană".

Ori s-a dovedit astăzi că propulsia prin reacţie este singura care permite realizarea zborului cu viteze mari şi a zborului rachetelor.

Iată acum o scurtă descriere a acestui prim avion cu reacţie din lume :

Avionul cu reacţie COANDĂ-1910 era un biplan de tipul sesquiplanului, care se distingea printr-o remarcabilă linie aerodinamică. Caracteristicile sale constructive erau : anvergura : 10,30 m ; lungimea maximă : 12,50 m : suprafaţa portantă : 32,70 m^2 ; greutatea în linie de zbor : 420 kg. Forma aripilor în plan era dreptunghiulară, cu vîrfurile rotunjite ; grosimea profilului era constantă în lungul anvergurii, cu excepţia părţilor de vîrf. Structura aripilor consta din cîte două longeroane confecţionate din oţel aliat, nervuri şi lise. Longeroanele — încercate cu multă grijă atît la solicitările statice cît şi la solicitările dinamice — permiteau o încărcare mare a aripilor. Între cele două longeroane, profilul aripii prezenta o curbură accentuată, iar spre partea din faţă se afla *fanta de bord de atac*, element nou pe acea vreme, care pe lîngă sporirea portanţei la aterizare, mai servea şi pentru controlul lateral. Acest sistem a fost foarte mult utilizat mai tîrziu, pînă chiar şi în zilele noastre, pentru unele avioane speciale. O altă particularitate esenţială a aripii o constituie învelişul ei de contraplacaj vopsit, netezit şi lăcuit. Aici trebuie relevată prioritatea lui COANDĂ în ceea ce priveşte întrebuinţarea învelişului rigid de contra-

placaj subțire, care a constituit mai tîrziu sistemul de construcție obișnuit, fiind extins apoi și la învelișul metalic.

Fuzelajul — așezat între cele două planuri principale și menținut de cei patru montanți — avea o formă transversală ovală, o alungire mare, iar învelișul, constituit tot din placaj, era vopsit și lăcuit. În partea posterioară a fuzelajului, în fața ampenajului, era montat un plan sustentator auxiliar de anvergură mică.

Carlinga era situată în partea anterioară a fuzelajului, la circa 4 m depărtare de vîrful acestuia. În exteriorul carlingii, lateral, de o parte și de alta, se aflau două volane, cu ajutorul cărora pilotul acționa asupra organelor de comandă.

Ampenajul era compus din patru planuri fixe de formă triunghiulară, prelungite prin patru planuri mobile de aceiași formă. Planurile erau astfel dispuse, încît formau un *sistem cruciform diagonal.*

Manevrele pentru comanda aparatului erau extrem de simple. Maneabilitatea longitudinală se realiza prin bracarea celor patru cîrme în același sens (în sus și în jos). În acest scop, pilotul acționa simultan asupra celor două volane, rotindu-le spre el (cabraj) sau în față (picaj). Maneabilitatea laterală se realiza prin bracarea unei singure perechi de cîrme (din dreapta sau din stînga). În acest scop era suficient ca pilotul să rotească spre el volanul din dreapta (viraj dreapta) sau volanul din stînga (viraj stînga). Manetele pentru comanda motorului erau așezate pe fiecare dintre cele două volane.

Trenul de aterizare, foarte scund, se compunea din două roți principale în față, o patină alungită situată între cele două roți și o patină de coadă servind drept bechie. Roțile erau montate elastic pe resorturi plate de oțel.

În sfîrșit, pentru *întîia oară*, rezervoarele de combustibil și lubrifiant erau instalate în aripa superioară, a cărei grosime era suficient de mare pentru a permite aceasta. Pe lîngă acest avantaj, aripa groasă va fi utilizată foarte curent mai tîrziu pentru considerente constructive.

Dar elementul revoluționar era *sistemul de propulsie*, care a făcut ca avionul COANDĂ—1910 să fie considerat primul avion reactiv din lume. Propulsia avionului se realiza cu ajutorul unui motor aeroreactiv montat în partea anterioară a fuzelajului și învelit într-un carenaj conic. Era compus dintr-un motor cu piston de tip CLERGET avînd 50 CP, care acționa asupra unui compresor centrifugal, de o construcție specială, avînd o turație de 4 000 rot/min.

În timpul funcționării, aerul era absorbit de compresor și trimis în camera de ardere inelară, unde se realiza arderea combustibilului adus prin intermediul mai multor injectoare dispuse simetric pe circumferința camerei. Combustibilul era aprins cu ajutorul gazelor de eșapament ale motorului cu piston, evacuate în camera de ardere. După părăsirea camerei de ardere, gazele treceau în două ajutaje reactive — situate de o parte și de alta a fuzelajului și, de aici, în atmosferă, generînd forța de reacție necesar propulsiei avionului.

Particularitățile avionului COANDĂ-1910 sînt edificatoare în ceea ce privește ingeniozitatea și puterea de intuire a constructorului său. Prioritatea lui COANDĂ în ceea ce privește invenția avionului cu reacție

este în prezent recunoscută pretutindeni. Chiar foarte recent numeroase periodice consacră articole elogioase în acest sens.

Revista „American Aviation" din 5 decembrie 1955 publică un articol, sub titlul „Cine a fost părintele aviației reactive ?", în care afirmă că prioritatea invenției avionului cu reacție aparține inginerului H. COANDĂ.

André Bić, bibliotecar la Muzeul Aerului din Paris, semnează, în revista „Aviation Magazine" nr. 160 din 1955, articolul intitulat „Primul avion turbopropulsat din lume" în care scrie :

„Aeroplanul COANDĂ, prezentat la Salonul Internațional de Aeronautică din 1910, unde a fost extrem de remarcat, este un veritabil exemplar de avangardă..."

Iar mai departe :

„Dacă aspectul exterior al aparatului COANDĂ, grosimea și rigiditatea aripilor sale, feluritele îmbunătățiri introduse constituiau de acum un ansamblu de inovații îndrăznețe pentru acea epocă, *sistemul de propulsie era* — el singur — *o adevărată revoluție, atît ca principiu cît și ca aplicare* În acest punct al aparatului său, constructorul a desfășurat cea mai mare ingeniozitate creatoare. Problema a fost abordată sub un unghi deosebit de interesant, iar soluția, chiar dacă nu ar fi dat imediat rezultatele scontate, permitea, pentru viitor, cele mai strălucite speranțe..." — ceea ce s-a și întîmplat.

Revista „Flying" din septembrie 1956 publică un articol sub titlul „El a zburat în 1910", care descrie avionul cu reacție construit de COANDĂ și zborul efectuat de acesta în decembrie 1910, iar numărul său recent din martie 1967 confirmă din nou prioritatea lui COANDĂ în această epocală acțiune.

În fine, în cartea „The Jet Aircraft of the World", publicată la Londra, în anul 1955, autorii, *Green și Cross*, recunosc că primul avion aeroreactiv din lume este cel expus de COANDĂ în anul 1910 la Salonul Internațional de Aeronautică de la Paris.

Acest fapt este lucru cunoscut azi, fiind reflectat și în periodice de mare circulație, ca de exemplu „Le Figaro Littéraire ", în paginile căruia, în numărul din 5 mai 1966 se poate citi scris cu litere mari : *„In 1910, HENRI COANDĂ inventa aviația cu reacție"*.

Aceste documente, împreună cu multe altele, atestă faptul că numele lui H. COANDĂ a intrat în istoria aviației mondiale, fiind indisolubil legat de începuturile aviației aeroreactive.

Se poate dar conchide că aeroreactorul COANDĂ—1910 a zburat cu trei decenii înainte ca celebrii constructori WHITTLE, CAMPINI și HEINKEL să fi construit avioanele lor cu reacție, cu care au desăvîrșit astfel această epocală descoperire.

În anul 1911, la Reims, cu ocazia unui concurs de avioane militare, COANDĂ a prezentat primul avion bimotor, dar cu o singură elice, inițiind astfel realizarea avioanelor multimotoare.

În același an 1911, COANDĂ a plecat în Anglia, anagajîndu-se la uzinele Bristol, unde a construit mai multe tipuri de avioane, denumite „Bristol-Coandă", care au fost foarte apreciate de lumea aeronautică din acea vreme. Unul dintre aceste avioane s-a clasat primul la concursul internațional militar de aviație desfășurat în Anglia în anul 1912.

În anul 1913, pe cînd se afla în Anglia, COANDĂ a inventat şi construit un tun fără recul pentru avioane.

Mobilizarea din 1914 l-a găsit în Franţa, la uzinele Delauney-Belleville din Saint-Denis. În anul 1916 el a construit remarcabilul avion pentru cercetare artileristică S.I.A., echipat cu două elice propulsive, montate la extremitatea posterioară a fuzelajului.

Întrucît războiul necesita cantităţi enorme de metal, COANDĂ a studiat posibilitatea înlocuirii acestuia cu alte materiale, imaginînd şi realizînd rezervoare din beton pentru combustibili, cisterne din beton pentru transportul pe cale ferată, vagoane din beton etc.

După terminarea războiului, în anul 1918, COANDĂ a conceput şi construit primele elemente de case prefabricate. Cu această ocazie, el a inventat materialul denumit *beton-bois*, foarte potrivit pentru ornamentări în construcţii şi, bineînţeles, mult mai rezistent şi mai puţin expus degradărilor decît lemnul. Acest material a fost folosit de către profesorul arhitect I. A. Berindei pentru decorarea interioară a Palatului Justiţiei şi Administrativ (Palatul Culturii) din Iaşi, inaugurat la 11 octombrie 1925.

A avut multe alte invenţii şi inovaţii în domenii foarte diverse, dovedind un spirit inventiv şi multilateral, încît un publicist, G. HARRY STINE a publicat în revista AIR PROGRESS (august—septembrie 1965) un articol sub titlul semnificativ "The Amazing Dr. COANDĂ", (Uimitorul Dr. COANDĂ), unde îi elogiază această activitate prodigioasă.

În tot acest timp, COANDĂ n-a neglijat nici un moment preocupările sale ştiinţifice.

După numeroase cercetări în domeniul mecanicii fluidelor, COANDĂ a descoperit fenomenul denumit „efectul COANDĂ" denumire dată de către Profesorul Albert Métral, care i-a făcut şi analiza matematică în 1939 —, denumire însuşită apoi şi de alţi autori, printre care Th. v. Kármán —. COANDĂ brevetează invenţia sa la 8 octombrie 1934 cu numărul 374.943 sub denumirea de „Procedeu şi dispozitiv pentru devierea unui fluid într-un alt fluid". Aşa cum s-a scris pe drept cuvînt în diverse publicaţii, acest efect este *cheia* noului domeniu al amplificatorilor fluizi".

Analiza fizică a efectului COANDĂ, a evidenţiat ca particularităţi principale ale acestui fenomen următoarele:

— devierea jetului după conturul suprafeţei pe care se scurge, aderînd la această suprafaţă;

— amplificarea procesului de antrenare a fluidului ambiant de către jet şi accelerarea scurgerii în interiorul ajutajelor.

Ansamblul acestor particularităţi conferă efectului COANDĂ o largă aplicabilitate practică în cele mai variate domenii ale tehnicii. Cîmpul utilizărilor sale practice a fost inaugurat de însuşi COANDĂ, care a realizat dispozitivul depresor-amortizor de zgomot folosit pentru ameliorarea randamentului motoarelor cu combustie internă, frîna de recul pentru armele de foc, pulverizatorul de insectofungicide folosit pentru combaterea dăunătorilor în agricultură etc. Aplicaţiile acestui efect se extind mai departe la sisteme de propulsie subacvatică, la construirea de elemente pneumonice pentru automatizare, la reversoare pentru ajutajele motoarelor cu reacţie, la mijloacele de hipersustentaţie pentru aripi, la aparatele de decolare şi aterizare verticală.

Şi în ţara noastră, în ultimul deceniu, s-au efectuat cercetări sistematice asupra „efectului COANDĂ" referitoare la reversarea tracţiunii turbomotoarelor de avion, la atenuarea zgomotelor generate de motoarele cu reacţie sau de instalaţiile industriale, la sporirea randamentului motoarelor cu combustie internă, obţinîndu-se rezultate interesante, precum şi la hipersustentaţia aripilor de avion, unde se utilizează diferitele sisteme de jeturi fluide.

În aceeaşi ordine de idei mai trebuie menţionată şi o aplicaţie specială — aşa numitele „ajutaje cu reţele depresive" realizată de Dr. Ing. Teodorescu-Ţintea în diferite variante.

Din studiile efectuate asupra „efectului COANDĂ", s-au putut releva mai multe utilizări, dintre care vom menţiona următoarele:

— Sustentarea şi propulsarea corpurilor utilizate în aeronautică. În acest sens COANDĂ însuşi a conceput în 1935 „farfuriile zburătoare". Ele au o formă semilenticulară şi se caracterizează prin aceea că pot decola şi ateriza la verticală, se menţin la punct fix şi pot zbura cu viteze orizontale mari.

— Ameliorarea turbinelor cu gaze, prin realizarea aşa-numitei turbine cu palete depresive;

— Devierea jeturilor de gaze pentru hipersustentaţia prin reacţie la avioanele de mare viteză;

— Dispozitive pentru amplificatori fluizi, sau dispozitive de reanimare;

— Amortizarea zgomotului produs de eşaparea gazelor la turbomotoarele de aviaţie, centralele termice, uzinele chimice etc;

— Pulverizarea fină a unui lichid şi amestecarea uniformă a acestuia cu aer sau un alt fluid.

Rezultatele excepţionale obţinute pe acest tărîm au fost subliniate cu ocazia Simpozionului Internaţional de automatică ţinut la New York în anul 1965, unde HENRI COANDĂ a fost omagiat şi distins cu diploma de onoare "HARRY DIAMOND LABORATORIES".

Pornind de la rezultatele obţinute de COANDĂ în acest domeniu, s-au realizat noi tipuri de arzătoare pentru combustibilii grei, care în afara randamentului deosebit de mare, sînt foarte simple din punct de vedere constructiv, prezintă stabilitate funcţională şi robusteţe, şi au un preţ de cost redus.

★

În acestă scurtă trecere în revistă a aplicaţiilor „efectului COANDĂ" s-a putut situa numai cadrul realizărilor de ordin aplicativ. Bună parte din aceste realizări vor putea fi urmărite chiar în cadrul Simpozionului nostru şi ne vom da seama cu acest prilej de cîmpul vast de aplicaţii ce se desfăşoară în activitatea acelora care se ocupă cu aceste probleme de aerodinamică aplicată.

★

În cele de mai sus am încercat în cîteva cuvinte să vă prezint îndelungata şi fecunda activitate ştiinţifică şi tehnică a strălucitului inginer care a fost şi este HENRI COANDĂ.

De-a lungul activității sale Ing. COANDĂ a dovedit un spirit ingenios, o intuiție extraordinară și un simț al previziunii științifice, cu totul remarcabile. Multe din invențiile sale au fost realizate mai înainte ca aplicațiile respective să poată fi înfăptuite. Dar capacitatea creatoare a oamenilor a făcut ca sămînța aruncată să încolțească și să se dezvolte în momentul în care toate condițiile necesare erau asigurate. Iată cazul aviației cu reacție, care atinge o dezvoltare vertiginoasă, la aproximativ treizeci de ani după zborul săvîrșit de COANDĂ în 1910, cu avionul de construcție proprie.

Așa după cum am văzut „efectul COANDĂ" a condus la o serie de aplicații de mare importanță în diferite domenii ale științei.

Cine ar fi putut să-și închipuie că „efectul COANDĂ" va fi folosit de asemenea și la ghidarea sateliților artificiali prin folosirea circuitelor logice?

Toate acestea ne dau posibilitatea să apreciem mai bine contribuția sa în domeniul științei și tehnicii.

De mai mult de cincizeci de ani HENRI COANDĂ își desfășoară activitatea sa creatoare alături de inginerii și oamenii de știință francezi. Ni se oferă acum prilejul să exprimăm, pe această cale, întreaga noastră recunoștință poporului francez, care l-a înconjurat cu toată căldura, primindu-l în mijlocul marei sale familii și l-a ajutat în desfășurarea activității sale creatoare pe solul Franței generoase, unde au apărut atîtea idei minunate pentru progresul civilizației omenești.

HENRI COANDĂ nu a uitat niciodată patria sa, iar dragostea pentru pămîntul natal a rămas mereu intactă.

Românii în trecere prin Franța găsesc întotdeauna o caldă primire în casa sa de la Paris, împărtășindu-le totodată din vasta sa experiență în diferitele domenii ale științei și tehnicii. În felul acesta legăturile cu patria sa sînt păstrate în mod permanent.

Datorită contribuțiilor lui HENRI COANDĂ și a predecesorilor săi, VUIA și VLAICU, poporul nostru se numără printre popoarele care au deschis calea acestei minunate cuceriri a omenirii: *aviația* menită să cunoască în cursul secolului nostru o dezvoltare impetuoasă ajungînd în zilele de azi la pătrunderea omului în cosmos.

Ca și iluștrii săi compatrioți, mai sus menționați, care au lucrat cam în același timp, activitatea desfășurată de inginerul HENRI COANDĂ a avut o considerabilă înrîurire asupra inginerilor, constructorilor, aviatorilor și tehnicienilor din România, care au continuat opera acestuia, fixînd jaloanele tradiției românești în această minunată cucerire a științei și tehnicii, care este *aviația*.

Noi toți, oameni de știință și ingineri români, alături de oamenii de știință și inginerii din lumea întreagă, care i-au cunoscut și apreciat activitatea sa plină de succese, îi aducem astăzi un omagiu pe deplin meritat urîndu-i o viață lungă și plină de realizări utile, cu urmări binefăcătoare asupra activității economice și a progresului tehnicii moderne. Pentru tineretul studios din România, activitatea desfășurată cu atît avînt de Ing. HENRI COANDĂ va fi o pildă demnă de urmat.

★

După o absență de mai bine de o jumătate de secol, HENRI COANDĂ a revenit pe pămîntul scump al României, unde s-a născut, a copilărit și și-a petrecut adolescența. De acest pămînt îl leagă nenumărate amintiri dragi și de neuitat. Acum a găsit o țară înnoită în plină dezvoltare științifică, culturală și economică, o patrie înfloritoare care îl primește cu bucurie și entuziasm.

Simpozionul consacrat fenomenului ce-i poartă numele „efectul COANDĂ" este un omagiu adus fecundei sale activități tehnice și științifice.

INFLUENȚA NEOMOGENITĂȚII MEDIULUI POROS ASUPRA RESTABILIRII PRESIUNII ÎNTR-UN SISTEM LINIAR

de T. OROVEANU și I. SPULBER
Institutul de petrol, gaze și geologie

532

Se consideră problema determinării variației în timp a presiunii unui lichid compresibil, în interiorul unui mediu poros, după încetarea scurgerii și se studiază efectul pe care îl are asupra acestui fenomen variația caracteristicilor mediului poros. În cazul cel mai simplu, al scurgerii liniare, se indică mai întîi cîteva soluții exacte, corespunzînd la anumite legi de variație a permeabilității și porozității. După aceea se prezintă o metodă aproximativă care poate fi aplicată cu rezultate bune în cazul în care legile de variație a permeabilității și porozității au un caracter mai general.

1. **Introducere.** În cazul scurgerii unui lichid compresibil printr-un mediu poros prezintă interes problema restabilirii presiunii după ce scurgerea a încetat. După cum se știe, analiza curbei de creștere a presiunii cu timpul servește la determinarea caracteristicilor mediului poros. Utilizarea acestei metode presupune că mediul poros este omogen, situație care nu este totdeauna realizată în cazurile practice. În cele ce urmează, ne propunem să analizăm efectul pe care îl are variația permeabilității sau aceea a porozității asupra variației în timp a presiunii după încetarea scurgerii. Ne vom limita la scurgerea unidimensională iar în ceea ce privește condițiile la limită, vom considera unul dintre cele două cazuri care au fost studiate pentru mediile poroase omogene. Astfel, dacă mediul poros are o lungime finită l, la $x=0$ vom considera o presiune constantă p_c, în timp ce la $x = 1$ avem $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Condiția inițială necesară pentru rezolvarea problemei va fi stabilită ulterior.

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **13**, 3, (1968), (în limba franceză).

2. **Cazul unui zăcămînt liniar alimentat cu presiune constantă la distanță finită.** Deoarece la $x = 0$ presiunea are valoarea constantă p_c, putem pune

$$\overline{p} = \frac{p_c - p}{p_c - p_{si}}, \tag{1}$$

p_{si} fiind presiunea la $x = l$ în momentul încetării scurgerii ($t = 0$). Dacă introducem mărimile adimensionale [1])

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \theta = \frac{k^{(0)}\, t}{l^2 \beta_l \mu m_0}, \quad \overline{k} = \frac{k}{k^{(0)}}, \quad \overline{m} = \frac{m}{m_0}, \tag{2}$$

unde am notat cu β_l coeficientul de compresibilitate al lichidului, cu μ vîscozitatea dinamică, cu $k^{(0)}$ și m_0 valoarea permeabilității, respectiv a porozității la $x = 0$, funcția $\overline{p}$ satisface ecuația

$$\frac{\overline{k}}{\overline{m}} \frac{\partial^2 \overline{p}}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\overline{m}} \frac{\mathrm{d}\overline{k}}{\mathrm{d}\xi} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta}, \tag{3}$$

$\overline{k}$ și $\overline{m}$ fiind funcții de ξ.

Condiția inițială se obține dacă admitem că în momentul încetării scurgerii acesta din urmă era practic staționară. Utilizînd rezultatele din [4] obținem pentru repartiția inițială a presiunii expresia

$$p = p_c - \frac{p_c - p_{si}}{\displaystyle\int_0^l \frac{\mathrm{d}x}{k}} \int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{k}, \tag{4}$$

de unde rezultă condiția

$$\theta = 0, \quad \overline{p} = \frac{1}{I_0} \int_0^\xi \frac{\mathrm{d}\xi}{\overline{k}}. \tag{5}$$

cu

$$I_0 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{\overline{k}}. \tag{6}$$

La rîndul lor, condițiile la limită sînt

$$\xi = 0, \ \overline{p} = 0; \quad \xi = 1, \ \frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi} = 0, \tag{7}$$

și deoarece ecuația (3) este liniară, soluția problemei poate fi găsită prin separarea variabilelor. Pentru anumite legi de variație a permeabilității și a porozității există soluții exacte al căror interes este însă destul de limitat. În cazul în care funcțiile $\overline{k}(\xi)$ și $\overline{m}(\xi)$ sînt oarecare, îndeplinind numai condițiile de a fi continue și pozitive în [0, 1], iar în ceea ce privește

[1]) Pentru porozitate, care este o mărime fără dimensiuni, notația din (2) este introdusă din motive care vor apare ulterior.

porozitatea şi condiţia $m_0\overline{m}(\xi) < 1$ în acelaşi interval, nu se poate găsi soluţia exactă. Există însă posibilitatea de a se utiliza o metodă aproximativă care a dat rezultate foarte mulţumitoare în probleme asemănătoare [3]. Înainte de a expune această metodă, vom prezenta însă cîteva dintre soluţiile exacte amintite mai sus, însoţindu-le şi de o aplicaţie numerică.

2.1. *Soluţii exacte.* Cu schimbarea de variabile

$$\eta = \frac{\pi}{I_0}\int_0^{\xi}\frac{d\xi}{\overline{k}}, \qquad \tau = \frac{\pi^2}{I_0^2}\theta \tag{8}$$

ecuaţia (3) ia forma

$$\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial\eta^2} = \overline{m}\overline{k}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\tau} \tag{9}$$

iar soluţia trebuie găsită cu condiţia iniţială

$$\tau = 0, \ \overline{p} = \frac{\eta}{\pi} \tag{10}$$

şi condiţiile la limită

$$\eta = 0, \ \overline{p} = 0; \ \eta = \pi, \ \frac{\partial\overline{p}}{\partial\eta} = 0. \tag{11}$$

Prin separarea variabilelor, obţinem pentru $\overline{p}$ expresia

$$\overline{p} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(\eta)\, e^{-\alpha_n^2\tau} \tag{12}$$

în care $H_n(\eta)$ este soluţia ecuaţiei

$$\frac{d^2H_n}{d\eta^2} + \alpha_n^2\,\overline{m}\,\overline{k}\,H_n = 0 \tag{13}$$

cu condiţiile

$$\eta = 0, \ H_n = 0; \ \eta = \pi, \ \frac{dH_n}{d\eta} = 0. \tag{14}$$

Atunci cînd avem

$$\overline{m}\ \overline{k} = \eta^q \tag{15}$$

ecuaţia (13) devine

$$\frac{d^2H_n}{d\eta^2} + \alpha_n^2\,\eta^q\,H_n = 0 \tag{16}$$

şi soluţia ei se poate exprima cu ajutorul funcţiilor Bessel de indice $\frac{1}{q+2}$.

Astfel, atunci cînd avem

$$\frac{1}{q+2} = r, \tag{17}$$

r fiind un număr întreg şi pozitiv, rezultă

$$H_n = C_n \eta^{\frac{1}{2}} J_r\left(2\alpha_n r\eta^{\frac{1}{2r}}\right) \tag{18}$$

deoarece funcţia Bessel de specia a doua devine infinită pentru $\eta = 0$. Expresia (18) a funcţiei H_n satisface prima condiţie la limită (14) iar a doua condiţie la limită (14) ne dă pentru determinarea valorilor proprii α_n relaţia

$$J_{r-1}\left(2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}\right) = 0. \tag{19}$$

În felul acesta soluţia (21) ia forma

$$\overline{p} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \eta^{\frac{1}{2}} J_r\left(2\alpha_n r\eta^{\frac{1}{2r}}\right) e^{-\alpha_n^2 \tau} \tag{20}$$

şi pentru determinarea constantelor C_n utilizăm condiţia iniţială (10) care ne dă

$$\frac{\eta}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \eta^{\frac{1}{2}} J_r\left(2\alpha_n r\eta^{\frac{1}{2r}}\right). \tag{21}$$

Cu notaţiile

$$\zeta = \left(\frac{\eta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2r}}, \qquad \beta_n = 2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}, \tag{22}$$

obţinem

$$\zeta^r = \pi^{\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_r(\beta_n \zeta) \tag{23}$$

şi dacă observăm că în loc de (19) putem scrie

$$r J_r(\beta_n) + \beta_n J_r'(\beta_n) = 0 \tag{24}$$

constantele C_n se calculează dezvoltînd în serie Dini primul membru al relaţiei (23). Această dezvoltare fiind cunoscută, găsim cu uşurinţă

$$C_n = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}} \frac{2\beta_n J_{r+1}(\beta_n)}{(\beta_n^2 - r^2) J_r^2(\beta_n) + \beta_n^2 J_r'^2(\beta_n)}. \tag{25}$$

Revenind la notaţiile anterioare, rezultă în cele din urmă

$$\overline{p} = \frac{\eta^{\frac{1}{2}}}{r\pi^{\frac{r+1}{2r}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{r+1}\left(2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}\right) J_r\left(2\alpha_n r\eta^{\frac{1}{2r}}\right) e^{-\alpha_n^2 \tau}}{\alpha_n \left[\left(1 - \frac{1}{4\alpha_n^2 \pi^{\frac{1}{r}}}\right) J_r^2\left(2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}\right) + J_r'^2\left(2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}\right)\right]}, \tag{26}$$

iar la $\eta = \pi$ variaţia în timp a funcţiei $\overline{p}$ se calculează din formula

$$\overline{p} = \frac{1}{r\pi^{\frac{1}{2r}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_r\left(2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}\right) J_{r+1}\left(2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}\right) e^{-\alpha_n^2 \tau}}{\alpha_n \left[\left(1 - \frac{1}{4\alpha_n^2 \pi^{\frac{1}{r}}}\right) J_r^2\left(2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}\right) + J_r'^2\left(2\alpha_n r\pi^{\frac{1}{2r}}\right)\right]}. \tag{27}$$

Atunci cînd $\frac{1}{q+2}$ este un întreg negativ, soluția problemei se găsește în mod asemănător.

Dintre cazurile în care $\frac{1}{q+2}$ nu este un număr întreg îl semnalăm pe acela în care acest indice este egal cu jumătatea unui întreg impar. După cum se știe, funcțiile Bessel de un astfel de indice pot fi exprimate prin funcții elementare. Tot cu ajutorul funcțiilor elementare se construiește soluția problemei și atunci cînd avem $q = 0$.

Soluții exacte mai pot fi găsite dacă se aplică tot metoda separării variabilelor direct ecuației (3) ceea ce dă

$$\overline{p} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(\xi) e^{-\alpha_n^2 \theta}, \tag{28}$$

X_n fiind soluția ecuației

$$\frac{d^2 X_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\overline{k}} \frac{d\overline{k}}{d\xi} \frac{dX_n}{d\xi} + \alpha_n^2 \frac{\overline{m}}{\overline{k}} X_n = 0 \tag{29}$$

cu condițiile la limită

$$\xi = 0, \; X_n = 0; \; \xi = 1, \frac{dX_n}{d\xi} = 0. \tag{30}$$

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$\zeta = 1 - \beta\xi \tag{31}$$

și punem [1]

$$\overline{k} = \zeta^{\gamma_1}, \; \overline{m} = \zeta^{2\gamma_2} \tag{32}$$

ecuația (29) devine

$$\frac{d^2 X_n}{d\zeta^2} + \frac{\gamma_1}{\zeta} \frac{dX_n}{d\zeta} + \frac{\alpha_n^2}{\beta^2} \zeta^{2\gamma_2 - \gamma_1} X_n = 0 \tag{33}$$

cu condițiile la limită

$$\zeta = 1, \; X_n = 0; \; \zeta = 1 - \beta, \frac{dX_n}{d\zeta} = 0. \tag{34}$$

Soluția are forma

$$X_n = \zeta^{\frac{\nu}{\delta}} \left[A_n J_\nu \left(\frac{\alpha_n}{\beta} \delta \zeta^{\frac{1}{\delta}} \right) + \beta_n Y_\nu \left(\frac{\alpha_n}{\beta} \delta \zeta^{\frac{1}{\delta}} \right) \right], \tag{35}$$

unde

$$\frac{1}{\delta} = \frac{2\gamma_2 - \gamma_1 + 2}{2}, \quad \frac{\nu}{\delta} = \frac{1 - \gamma_1}{2}, \tag{36}$$

notațiile din (35) fiind cele obișnuite pentru funcțiile Bessel.

Vom examina mai de aproape numai două cazuri particulare în care calculele sînt destul de simple. Primul este acela în care avem $\gamma_1 = 1$ respectiv $\nu = 0$, ceea ce ne dă

$$X_n = Y_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\zeta^{\frac{1}{\delta}}\right) - J_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\right) Y_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\zeta^{\frac{1}{\delta}}\right), \tag{37}$$

expresie care satisface prima condiție la limită (34). Din a doua condiție la limită (34) obținem

$$Y_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\right) J_1\left[\frac{\alpha_n}{\beta}\delta(1-\beta)^{\frac{1}{\delta}}\right] - J_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\right) Y_1\left[\frac{\alpha_n}{\beta}\delta(1-\beta)^{\frac{1}{\delta}}\right] = 0, \tag{38}$$

relație din care rezultă valorile proprii α_n.

Soluția problemei are deci forma

$$\overline{p} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left[Y_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\right) J_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\zeta^{\frac{1}{\delta}}\right) - J_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\right) Y_0\left(\frac{\alpha_n}{\beta}\delta\zeta^{\frac{1}{\delta}}\right)\right] e^{-\alpha_n^2\theta}, \tag{39}$$

constantele C_n urmînd a fi determinate cu ajutorul condiției inițiale (5) Aceasta devine

$$\theta = 0, \ \overline{p} = \frac{\ln\zeta}{\ln(1-\beta)} = \frac{\delta\ln\zeta^{\frac{1}{\delta}}}{\ln(1-\beta)} \tag{40}$$

și trebuie dezvoltată în serie de funcții Bessel. Nu insistăm asupra calcu lelor deoarece soluția are un caracter destul de particular, corespunzînd la o variație liniară a permeabilității, în timp ce variația porozității păstrează un caracter mai general. O dată constantele C_n determinate pe această cale, variația în timp a presiunii la $\xi = 1$ rezultă imediat din (39).

Al doilea caz particular în care calculele se simplifică destul de mult este acela în care avem

$$\gamma_1 = 2(\gamma_2 + 1), \tag{41}$$

soluția ecuației (33) fiind [1]

$$X_n = \zeta^{-\frac{1+2\gamma_2}{2}} [A_n \sin(\varkappa_n \ln\zeta) + \beta_n \cos(\varkappa_n \ln\zeta)] \tag{42}$$

cu

$$\varkappa_n = \sqrt{\frac{\alpha_n^2}{\beta^2} - \left(\frac{1+2\gamma_2}{2}\right)^2}. \tag{43}$$

Prima condiție la limită (34) ne dă

$$B_n = 0, \tag{44}$$

în timp ce din a doua condiție rezultă relația pentru determinarea valorilor proprii și anume

$$\operatorname{tg}[\varkappa_n \ln(1-\beta)] = \frac{2\varkappa_n}{1+2\gamma_2}. \tag{45}$$

Soluția problemei are deci forma

$$\overline{p} = \zeta^{-\frac{1+2\gamma_2}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\varkappa_n \ln \zeta)\, e^{-\alpha_n^2 \theta} \tag{46}$$

cu

$$\alpha_n^2 = \beta^2 \left[\varkappa_n^2 + \left(\frac{1+2\gamma_2}{2} \right)^2 \right]. \tag{47}$$

Condiția inițială (5) se scrie

$$\theta = 0, \qquad \overline{p} = \frac{1 - \zeta^{1-\gamma_1}}{1 - (1-\beta)^{1-\gamma_1}} \tag{48}$$

și avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\varkappa_n \ln \zeta) = \frac{\zeta^{\frac{\gamma_1 - 1}{2}} - \zeta^{-\frac{\gamma_1 - 1}{2}}}{1 - (1-\beta)^{1-\gamma_1}} \tag{49}$$

dacă ținem seama și de (41). Constantele A_n pot fi determinate dacă se dezvoltă în serie Fourier membrul al doilea al relației precedente. Calculele devin mai simple după ce introducem schimbarea de variabilă.

$$\ln \zeta = \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z, \tag{50}$$

intervalul de variație al lui z fiind $[0, \pi)$. Cu notația

$$D_n = [1 - (1-\beta)^{1-\gamma_1}] A_n \tag{51}$$

obținem în loc de (49)

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left[\varkappa_n \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z \right] = e^{\frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z} -$$

$$- e^{\frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z} = 2 \operatorname{sh}\left[\frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z \right]. \tag{52}$$

Funcțiile $\sin\left[\varkappa_n \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z \right]$ formează un sistem ortogonal în $[0, \pi]$ și prin urmare avem

$$D_n = \frac{2 \int_0^{\pi} \operatorname{sh}\left[\frac{\gamma_1 - 1}{2} \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z \right] \sin\left[\varkappa_n \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z \right] dz}{\int_0^{\pi} \sin^2\left[\varkappa_n \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} z \right] dz}, \tag{53}$$

integralele putînd fi calculate fără nici o greutate. După determinarea constantelor D_n, variația în timp a presiunii la $\xi = 1$ este

$$\overline{p} = \frac{1}{(1-\beta)^{\frac{\gamma_1 - 1}{2}} - (1-\beta)^{-\frac{\gamma_1 - 1}{2}}} \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin[\varkappa_n \ln(1-\beta)]\, e^{-\alpha_n^2 \theta}. \tag{54}$$

Pentru o aplicație numerică, am considerat valorile

$$\gamma_2 = \frac{1}{4}, \qquad \ln(1-\beta) = -1, \qquad \beta = 0{,}6321$$

cu care avem

$$\overline{p} = \zeta^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\varkappa_n \ln \zeta)\, e^{-\alpha_n^2 \theta}.$$

Aplicarea rezultatelor precedente ne dă

$$D_n = \frac{\frac{1}{2\pi} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{4}\right) \sin(k_n \pi) - 2k_n \operatorname{sh}\left(\frac{1}{4}\right) \cos(k_n \pi)}{\left(\frac{1}{16\pi^2} + k_n^2\right)\left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4k_n} \sin(2k_n \pi)\right]},$$

unde

$$k_n = \varkappa_n \frac{\ln(1-\beta)}{\pi} = -\frac{\varkappa_n}{\pi}$$

iar $\varkappa_n$ rezultă din

$$\operatorname{tg} \varkappa_n = -4\varkappa_n.$$

Mai departe, avem de asemenea

$$A_n = -\frac{D_n}{0{,}6448},$$

rezultatele calculelor fiind trecute în tabela 1.

Tabela 1

n	1	2	3	4	5	6
$\varkappa_n$	1,7155	4,7648	7,8857	11,0183	14,1549	17,2933
α_n^2	1,1784	9,0743	24,8501	48,5127	80,0628	119,5002
D_n	0,3902	−0,0675	0,0199	−0,0105	0,0064	−0,0043
A_n	−0,6014	0,1040	−0,0308	0,0163	−0,0098	0,0066

La $\xi = 1$, variația presiunii în timp rezultă din formula

$$\overline{p} = -\frac{1}{\sqrt[4]{0{,}3679}} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \varkappa_i\, e^{-\alpha \frac{2}{n} \theta},$$

valorile calculate pentru diferite timpuri adimensionale θ găsindu-se în tabela 2. Pentru comparaţie, am trecut în aceeaşi tabelă valorile corespunzătoare ale funcţiei $\overline{p}^{(0)}$ la $\xi = 1$, pentru cazul unui mediu poros omogen cu $\overline{k} = 1$ şi $\overline{m} = 1$. Soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial^2 \overline{p}^{(0)}}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \overline{p}^{(0)}}{\partial \theta} \tag{55}$$

cu condiţia iniţială

$$\theta = 0, \quad \overline{p}^{(0)} = \xi \tag{56}$$

şi condiţiile la limită (7) este

$$\overline{p}^{(0)} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\sin\left[(2q+1)\frac{\pi}{2}\xi\right]}{(2q+1)^2} e^{-(2q+1)^2 \frac{\pi^2}{4}\theta} \tag{57}$$

astfel că la $\xi = 1$ avem

$$\overline{p}^{(0)} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\sin\left[(2q+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2q+1)^2} e^{-(2q+1)^2 \frac{\pi^2}{4}\theta}. \tag{58}$$

Tabela 2

θ	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$\overline{p}$	0,6257	0,4805	0,3774	0,2981	0,2353
$\overline{p}^{(0)}$	0,4959	0,3021	0,1845	0,1126	0,0688
θ	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$\overline{p}$	0,1858	0,1468	0,1160	0,0916	0,0723
$\overline{p}^0$	0,0419	0,0256	0,0157	0,0095	0,0058

Exemplul considerat corespunde la o scădere a permeabilităţii şi la o creştere a porozităţii în sensul scurgerii. Se observă că influenţa acestei variaţii a caracteristicilor mediului poros asupra restabilirii presiunii este destul de accentuată, presiunea crescînd mult mai încet în cazul în care mediul poros nu este omogen. Fără a permite să se tragă concluzii cu caracter general, acest exemplu apare totuşi semnificativ.

2.2. *Soluţia aproximativă.* Atunci cînd funcţiile $\overline{k}(\xi)$ şi $\overline{m}(\xi)$ au forme care nu mai permit găsirea soluţiei exacte, se poate recurge la procedeul aproximativ propus în [2] pe care l-am mai întrebuinţat la studiul altor probleme de scurgere a lichidelor comparabile prin medii poroase neomogene [3].

Astfel, dacă în ecuaţia (29) facem schimbarea de funcţie

$$Y_n = \overline{k}^{\frac{1}{2}} X_n \tag{59}$$

obținem

$$\frac{d^2 Y_n}{d\xi^2} + \left(\alpha_n^2 \frac{\overline{m}}{\overline{k}} - \frac{1}{\overline{k}^{\frac{1}{2}}} \frac{d^2 \overline{k}^{\frac{1}{2}}}{d\xi^2} \right) Y_n = 0 \tag{60}$$

cu cnodițiile la limită

$$\xi = 0,\ Y_n = 0\ ;\ \xi = 1,\ \frac{1}{Y_n} \frac{dY_n}{d\xi} - \frac{1}{2\overline{k}} \frac{d\overline{k}}{d\xi} = 0. \tag{61}$$

Funcțiile $\overline{k}(\xi)$ și $\overline{m}(\xi)$ fiind pozitive în [0,1] putem pune

$$\frac{\overline{m}}{\overline{k}} = \lambda^2(\xi) \tag{62}$$

și dacă mai introducem notația

$$\frac{1}{\overline{k}^{\frac{1}{2}}} \frac{d^2 \overline{k}^{\frac{1}{2}}}{d\xi^2} = \gamma(\xi), \tag{63}$$

ecuația (60) devine

$$\frac{d^2 Y_n}{d\xi^2} + (\alpha_n^2 \lambda^2 - \gamma) Y_n = 0. \tag{64}$$

Cu schimbarea de funcție

$$Y_n = e^{\int_0^\xi v(\xi) d\xi} \tag{65}$$

găsim ecuația

$$\frac{dv}{d\xi} + v^2 + \alpha_n^2 \lambda^2 - \gamma = 0 \tag{66}$$

care este de tip Riccati. Aplicarea metodei Wentzel — Brillouin — Kramers ne conduce la soluția aproximativă

$$v = \pm i \alpha_n \lambda - \frac{1}{2} \frac{d(\ln \lambda)}{d\xi} \tag{67}$$

respectiv

$$Y_n = C_n \lambda^{-\frac{1}{2}} \sin\left(\alpha_n \int_0^\xi \lambda d\xi \right) \tag{68}$$

C_n fiind o constantă arbitrară. Soluția (68) a fost aleasă astfel ca să se satisfacă prima condiție la limită (61).

A doua condiție la limită (61) ia forma

$$\alpha_n \operatorname{cotg}\left(\alpha_n \int_0^1 \sqrt{\frac{\overline{m}}{\overline{k}}}\, d\xi \right) = \frac{1}{4} \left[\sqrt{\frac{\overline{k}}{\overline{m}}} \left(\frac{1}{\overline{m}} \frac{d\overline{m}}{d\xi} + \frac{1}{\overline{k}} \frac{d\overline{k}}{d\xi} \right) \right]_{\xi=1} \tag{69}$$

și servește la determinarea valorilor proprii.

Dacă revenim la funcția X_n, obținem

$$X_n = C_n (\bar{k}\bar{m})^{-\frac{1}{4}} \sin\left(\alpha_n \int_0^{\xi} \sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}}\, \mathrm{d}\xi\right) \tag{70}$$

și prin urmare

$$\bar{p} = (\bar{k}\bar{m})^{-\frac{1}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \, \mathrm{e}^{-\alpha_n^2 \theta} \sin\left(\alpha_n \int_0^{\xi} \sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}}\, \mathrm{d}\xi\right). \tag{71}$$

Constantele C_n rezultă din relația

$$\frac{(\bar{k}\bar{m})^{\frac{1}{4}}}{I_0} \int_0^{\xi} \frac{\mathrm{d}\xi}{\bar{k}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\alpha_n \int_0^{\xi} \sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}}\, \mathrm{d}\xi\right), \tag{72}$$

după ce dezvoltăm în serie Fourier primul membru.

Schimbarea de variabilă

$$\eta = \frac{1}{I} \int_0^{\xi} \sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}}\, \mathrm{d}\xi, \qquad I = \frac{1}{\pi} \int_0^{1} \sqrt{\frac{\bar{m}}{\bar{k}}}\, \mathrm{d}\xi \tag{73}$$

ușurează calculele, dezvoltarea urmînd a se face în intervalul $[0, \pi]$ în care sistemul $\sin(\alpha_n I\eta)$ este ortogonal.

După efectuarea calculelor, variația în timp a presiunii la $\xi = 1$ rezultă din (71).

Valorile proprii pot fi ameliorate prin utilizarea cîtului lui Rayleigh. Astfel dacă notăm cu $\alpha_1^{(0)}$ cea mai mică valoare proprie, obținută în prima aproximație (cea mai mică rădăcină a ecuației (69)) și cu $Y_1^{(0)}$ funcția (68) corespunzătoare a doua aproximație este

$$(\alpha_1^{(1)})^2 = (\alpha_1^{(0)})^2 - \frac{\displaystyle\int_0^1 \left(\lambda^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}^2 \lambda^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}\xi^2} - \gamma\right) (Y_1^{(0)})^2 \, \mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_0^1 \lambda^2 (Y_1^{(0)})^2 \, \mathrm{d}\xi}. \tag{74}$$

Dacă funcțiile $Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \ldots, Y_r^{(0)}$ satisfac condițiile generalizate de ortogonalitate

$$\int_0^1 \lambda^2 Y_r^{(0)} Y_1^{(0)} \, \mathrm{d}\xi = \int_0^1 \lambda^2 Y_r^{(0)} Y_2^{(0)} \, \mathrm{d}\xi = \ldots = \int_0^1 \lambda^2 Y_r^{(0)} Y_{r-1}^{(0)} \, \mathrm{d}\xi = 0, \tag{75}$$

valoarea proprie de indice r, în a doua aproximație, are expresia

$$(\alpha_r^{(1)})^2 = (\alpha_r^{(0)})^2 - \frac{\displaystyle\int_0^1 \left(\lambda^2 \frac{\mathrm{d}^2 \lambda^{-\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}\xi^2} - \gamma\right) (Y_r^{(0)})^2 \, \mathrm{d}\xi}{\displaystyle\int_0^1 \lambda^2 (Y_r^{(0)})^2 \, \mathrm{d}\xi}. \tag{76}$$

Este ușor de arătat că în problema de care ne ocupăm condițiile (75) sînt îndeplinite. Cu schimbarea de variabilă (73) avem

$$\int_0^1 \lambda^2 Y_r^{(0)} Y_{r-1}^{(0)} \, d\xi = C_r C_{r-1} I \int_0^{\pi} \sin(\alpha_r^{(0)} I\eta) \sin(\alpha_{r-1}^{(0)} I\eta) \, d\eta \qquad (77)$$

iar funcțiile $\sin(\alpha_r^{(0)} I\eta)$ și $\sin(\alpha_{r-1}^{(0)} I\eta)$ sînt soluții ale ecuației

$$\frac{d^2 Z_q}{d\eta^2} + (\alpha_q^{(0)})^2 I^2 Z_q = 0 \qquad (78)$$

în care punem $q = r$ sau $q = r - 1$. Condițiile la limită sînt

$$\eta = 0, \quad Z_q = 0; \qquad \eta = \pi, \quad aZ_q' + bZ_q = 0 \qquad (79)$$

ultima condiție rezultînd din (30) cu

$$a = \left[(\overline{k}\overline{m})^{-\frac{1}{4}}\right]_{\eta=\pi}, \qquad b = \left[\frac{d(\overline{k}\overline{m})^{-\frac{1}{4}}}{d\eta}\right]_{\eta=\pi}. \qquad (80)$$

Se știe însă că în acest caz avem

$$\int_0^{\pi} \sin(\alpha_n^{(0)} I\eta) \sin(\alpha_{r-1}^{(0)} I\eta) \, d\eta = 0 \qquad (71)$$

și dacă în loc de $r - 1$ punem $1, 2, \ldots, r-2$, putem demonstra în același mod toate relațiile (75). În felul acesta, se poate realiza, în general, un grad de precizie suficient de bun al soluției.

3. **Concluzii.** Rezultatele precedente arată că variația caracteristicilor mediului poros are o influență destul de importantă asupra restabilirii presiunii. Metoda aproximativă indicată, permite să se rezolve problema propusă în condiții suficient de generale de variație a porozității și permeabilității.

Primită la redacție la 30 decembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. Raymond L. Bisplinghoff, Holt Ashley, Robert Halfman, *Aeroelasticity*, Addison — Wesley Company, Inc., Cambridge, Mass., 1955, p. 432—433.
2. J. W. Goodey, *The Approximate Calculation of Eigenvalues for Certain Second Order Linear Differential Equations*, Journal of the Royal Aeronautical Society, **65**, 605, 1961.
3. T. Oroveanu, *Unele aspecte ale scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase*. St. cerc. mec. apl., **25**, 3 (1967).
4. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Edit. Academiei Republicii Populare Române, București, 1963, p. 89—91.

EFECTUL SUCȚIUNII PERIODICE ASUPRA CONVECȚIEI LIBERE NESTAȚIONARE DEASUPRA UNEI PLĂCI POROASE PLANE VERTICALE *)

de I. POP
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj

533

În lucrare se examinează efectul sucțiunii periodice asupra cîmpului vitezelor și cîmpului termperaturii mișcării cu convecție liberă nestaționară deasupra unei plăci poroase plane verticale.
Se constată că temperatura fluidului crește cu creșterea sucțiunii și scade cu creșterea numărului Prandtl.

NOTAȚII

$O\bar{x}\bar{y}$	reprezintă	un sistem ortogonal de coordonate axa Ox fiind în planul plăcii verticale;
$\bar{u}$, $\bar{v}$	—	componentele vitezei în lungul axelor de coordonate $O\bar{x}$, $O\bar{y}$;
$\bar{t}$	—	timpul;
$\bar{T}$	—	temperatura;
$\bar{T}_\infty$	—	temperatura de echilibru;
T_w	—	temperatura plăcii;
$\bar{\rho}$	—	densitatea;
$\bar{p}$	—	presiunea;
$\bar{\omega}$	—	frecvența sucțiunii;
$\bar{v}_0$	—	o constantă negativă diferită de zero, reprezentînd sucțiunea;

*) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **13**, *1* (1968) (în limba engleză)

f_x — accelerația datorită gravitației;
β — coeficientul de expansiune volumică;
k — difuziunea termică;
ν — coeficientul de viscozitate cinematică;
A — o constantă reală pozitivă;
ε — un număr mic, astfel ca $\varepsilon A \leqslant 1$;
$\overline{U}_0$ — viteza de referință;
σ — numărul lui Prandtl;

$$y = \frac{|\overline{v}_0|\,\overline{y}}{\nu}, \quad t = \frac{\overline{v}_0^2\,\overline{t}}{4\nu},$$

$$\omega = \frac{4\nu\overline{\omega}}{\overline{v}_0^2}, \quad u = \frac{\overline{u}}{\overline{U}_0},$$

$$T = \frac{f_x \beta (\overline{T} - \overline{T}_\infty)}{\overline{U}_0 v_0^2}$$ — mărimi adimensionale;

f_1, f_2, g_1, g_2 — funcții adimensionale de y.

Bara notează mărimile dimensionale.

1. INTRODUCERE

În anul 1962, R. S. NANDA și V. P. SHARMA [1] au studiat curgerea și transferul de căldură în convecția liberă nestaționară deasupra unei plăci poroase plane verticale în decursul unui proces termic nestaționar. Adică, inițial, întreg sistemul este termic izolat; fluidul și placa se găsesc la aceeași temperatură. După aceea, placa se supune unei temperaturi variabile în timp și simultan i se aplică și fenomenul de sucțiune. Autorii studiază problema în cazul cînd viteza de sucțiune este proporțională cu $\overline{t}^{-1/2}$ și cînd este constantă.

Ulterior acestei probleme i-au fost consacrate un număr considerabil de lucrări [2], [4] etc.

În această lucrare, vom încerca să extindem problema considerată în [1], la cazul cînd viteza de sucțiune este funcție periodică de timp adică,

$$\overline{v} = \overline{v}_0 [1 + \varepsilon A e^{i\overline{\omega}\overline{t}}].$$

Se examinează efectul sucțiunii periodice asupra vitezei și temperaturii curgerii, pentru diferite valori ale parametrului A și pentru fluide cu numere Prandtl egale cu unu și doi. Se constată că temperatura crește o dată cu creșterea sucțiunii și scade cu creșterea numărului Prandtl.

2. ECUAȚIILE DE BAZĂ

Ecuațiile care descriu convecția liberă nestaționară a unui fluid vîscos și incompresibil deasupra plăcii verticale, infinite, sînt [1]:

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} = f_x\,\beta\,(\overline{T} - \overline{T}_\infty) + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{t}} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}}\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{t}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \overline{y}} = k\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \overline{y}^2}\,. \tag{4}$$

Din ecuația (1), rezultă că $\overline{v}$ este funcție numai de timp. Atunci, să considerăm că $\overline{v}$ are forma [5], [6]:

$$\overline{v} = \overline{v}_0\ [1 + \varepsilon A\, e^{i\overline{\omega}\overline{t}}] \tag{5}$$

Introducînd în ecuațiile (2), (4), mărimile adimensionale, ele devin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [1 + \varepsilon A\, e^{i\omega t}]\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t} = -T\,, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + [1 + \varepsilon A\, e^{i\omega t}]\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{1}{4}\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \tag{7}$$

Condițiile la limită ale sistemului (6), (7) sînt:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } t < 0\,; & u = v = T = 0 & \text{pentru } y \geqslant 0, \\ \text{b) } t \geqslant 0\,; & u = 0,\ T_w = T_w(t) & \text{pentru } y = 0, \\ & u \to 0,\ T \to 0 & \text{pentru } y \to \infty. \end{array} \tag{8}$$

3. REZOLVAREA PROBLEMEI

Vom căuta soluția ecuației (7), în forma:

$$\left.\begin{aligned} T_w(t) &= 1 + \varepsilon\, e^{i\omega t}, \\ T(y, t) &= 1 + \varepsilon e^{i\omega t} - f_1(y) - \varepsilon\, e^{i\omega t} f_2(y), \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

cu condiția că în problema noastră, numai partea reală are sens fizic.

Substituind (9) în (7) și identificînd coeficienții aceloraşi termeni armonici, obținem sistemul de ecuații:

$$\left.\begin{aligned} f_2'' + \sigma f_1' &= 0\,, \\ f_1'' + \sigma f_2' - \frac{i\sigma\omega}{4} f_2 &= -\frac{\sigma i\,\omega}{4} - A\sigma f_1'\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

unde accentul notează derivata în raport cu y.

Condițiile la limită ale sistemului (10) sînt:

$$\left.\begin{aligned} f_1 = 0,\ f_2 = 0 \quad & \text{pentru } y = 0, \\ f_1 \to 1,\ f_2 \to 1 \quad & \text{pentru } y \to \infty. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Soluția sistemului (10), satisfăcînd condițiile la limită (11), este

$$\left.\begin{aligned} f_1(y) &= 1 - \mathrm{e}^{-\sigma y}, \\ f_2(y) &= 1 + (S-1)\,\mathrm{e}^{-\sigma y} - S\mathrm{e}^{-\sigma h y}, \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

unde

$$S = 1 + \frac{4A\,\mathrm{i}\,\sigma}{\omega}, \qquad h = \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{\mathrm{i}\omega}{\sigma}\right)^{1/2}\right].$$

În acest fel, cîmpul temperaturii fluidului, în mișcarea cu convecție liberă, este

$$T(y,t) = \mathrm{e}^{-\sigma y} + \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,[(1-S)\,\mathrm{e}^{-\sigma y} + S\,\mathrm{e}^{-\sigma h y}], \tag{13}$$

iar cantitatea adimensională de căldură cedată fluidului

$$q = -\frac{\sqrt{q}}{k\,|\bar{v}_0|} = -\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{y=0} = \sigma\{1 + \varepsilon\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,[1 + (h-1)\,S]\}. \tag{14}$$

Separînd în (13) și (14), părțile reale, obținem formulele:

$$\left.\begin{aligned} T(y,t) &= \mathrm{e}^{-\sigma y} + \varepsilon\,(M_1\cos\omega t + M_2\sin\omega t), \\ q &= \sigma\,[1 + \varepsilon\,|B|\cos(\omega t + \alpha)], \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

unde

$$M_1 = \mathrm{e}^{-\sigma h_1 y}\,[\cos(\sigma h_2 y) + \frac{4A\sigma}{\omega}\sin(\sigma h_2 y)],$$

$$M_2 = \frac{4A\sigma}{\omega}\mathrm{e}^{-\sigma y} + \mathrm{e}^{-\sigma h_1 y}[\sin(\sigma h_2 y) - \frac{4A\sigma}{\omega}\cos(\sigma h_2 y)],$$

$$h_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right)^{1/2} + 1\right]\right\}^{1/2},$$

$$h_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{\omega^2}{\sigma^2}\right)^{1/2} - 1\right]\right\}^{1/2},$$

$$B = B_1 + \mathrm{i}\,B_2 = 1 + (h-1)\,S, \quad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{B_2}{B_1},$$

$$B_1 = h_1 - \frac{4A\sigma}{\omega}h_1, \quad B_2 = \frac{4A\sigma}{\omega}(h_1 - 1) + h_2.$$

În figura 1, este reprezentat profilul temperaturii T din (15), pentru diferite valori ale parametrului A și pentru $\omega t = \pi/2$, $\varepsilon = 1$, $\omega = 1$, $\sigma = 1$ și 2.

Din figură, se observă că efectul sucțiunii este de a îndepărta profilul temperaturii de placă. În același timp, temperatura fluidului descrește pe măsură ce numărul lui Prandtl crește.

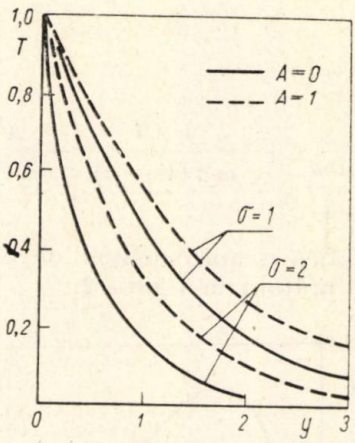


Fig. 1. — Profilul temperaturii $T = e^{-\sigma h} + M_2$.

Acum se poate integra și ecuația (6). Astfel alegem soluția ei în forma :

$$u(y, t) = g_1(y) + \varepsilon e^{i\omega t} g_2(y). \tag{16}$$

Înlocuind (16) în (6) și ținînd seamă de (13), rezultă, pentru funcțiile g_1 și g_2, sistemul de ecuații :

$$\left.\begin{aligned} &g_1'' + g_1' = -e^{-\sigma y}, \\ &g_2'' + g_2' - \frac{i\omega}{4} g_2 = -Ag_1' + (S-1)e^{-\sigma y} - Se^{-\sigma h y}, \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

ale cărui condiții la limită, sînt :

$$\begin{aligned} &g_1 = g_2 = 0 && \text{pentru } y = 0, \\ &g_1 = g_2 = 0 && \text{pentru } y \to \infty. \end{aligned} \tag{18}$$

Soluția sistemului (17), este

$$\left.\begin{aligned} g_1(y) &= y e^{-y} && (\sigma = 1), \\ g_1(y) &= \frac{1}{\sigma(1-\sigma)} (e^{-\sigma y} - e^{-y}) && (\sigma \neq 1), \\ g_2(y) &= \frac{A + (S-1)(1-\sigma)}{(1-\sigma)\left(\sigma^2 - \sigma - \frac{i\omega}{4}\right)} e^{-\sigma y} - \frac{S}{\sigma^2 h^2 - \sigma h - \frac{i\omega}{4}} e^{-\sigma h y} - \\ &\quad - \frac{4Ai}{\omega\sigma(1-\sigma)} e^{-y} + Ce^{-ly}, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

unde

$$l = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{1 + i\omega}\right],$$

$$C = \frac{S}{\sigma^2 h^2 - \sigma h - \frac{i\omega}{4}} + \frac{4Ai}{\omega\sigma(1-\sigma)} - \frac{A + (S-1)(1-\sigma)}{(1-\sigma)\left(\sigma^2 - \sigma - \frac{i\omega}{4}\right)}.$$

Reprezentarea grafică a aproximaţiei de ordinul unu a vitezei, pentru $\sigma = 1$ şi 2, este arătată în figura 2.

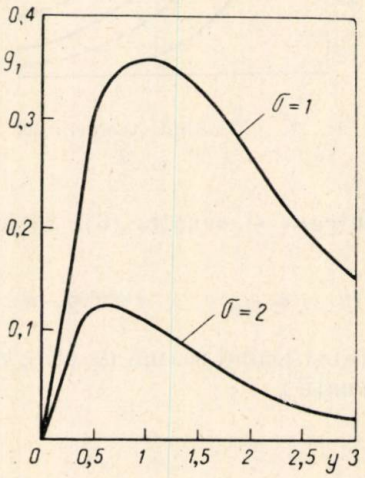


Fig. 2. — Profilul vitezei g_1.

Se observă că viteza particulelor de fluid descreşte pe măsură ce numărul lui Prandtl creşte, adică pe măsură ce conductibilitatea termică a fluidului descreşte.

Primită la redacţie la 20 decembrie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. R. S. Nanda, V. P. Sharma, *Possible Similarity Solutions of Unsteady Free Convection Flow Past a Vertical Plate with Suction*, J. Phys. Soc. Japan, **17**,*10*, 1651—1656 (1962).
2. R. S. Nanda, V. P. Sharma, *Free convection laminar boundary layers in oscillatory flow*, J. Fluid Mech., **15**, *3*, 419—428 (1963).
3. A. K. Rao, *Unsteady Free Convection from a Vertical Plate*, J. Phys. Soc. Japan, **18**, *12*, 1829—1832 (1963).
4. D. Singh, *Effect of Suction upon Unsteady laminar free Convection flow on a vertical infinite flat Plate*, Appl. Sci. Res., A, **13**, *6*, 437—450 (1964).
5. S. A. S. Messiha, *Laminar boundary layers in oscillatory flow along an infinite flat plate with variable suction*, Proc. Cambr. Phyl. Soc., **62**, *2*, 329—337 (1966).
6. Pop, *Hydromagnetic Flow with variable Suction in Laminar Periodic Boundary Layers*, Bul. Inst. politehnic Iaşi, *13* (*17*), 3—4, 173—178 (1967).

CONTRIBUȚII LA DEFINIREA CARACTERISTICILOR ENERGETICE ȘI CAVITAȚIONALE ALE REȚELELOR DE PROFILE DIN MAȘINILE HIDRAULICE AXIALE*)

de I. ANTON și E. ȘIȘAK
Centrul de cercetări tehnice, Timișoara

532 :621.24

Modificarea portanței și a distribuției presiunii la dispunerea unui profil hidrodinamic în rețea este studiată prin metode elaborate de autori. În locul coeficientului de influență al rețelei definit ca raportul portanțelor, care dă diferențe inadmisibile în calcule, se deduce o relație care conține raportul gradienților caracteristicilor portanță-incidență în rețea și singular. Pentru modificarea distribuției de presiuni la trecerea de la profilul singular la rețea sau invers se dau metode de determinare a curbelor de sensibilitate la cavitație plecînd de la teoria singularităților. Pentru calcule orientative se dă și o metodă bazată pe legile scurgerii medii a curentului. Rezultatele calculelor sînt comparate cu datele din literatură și cu date experimentale proprii.

Pe lîngă metodele de cercetare directă a proprietăților și caracteristicilor profilelor de aripă portantă dispuse în rețea, o deosebită actualitate pentru calculul rețelelor prezintă problema utilizării profilelor studiate singular. Marile progrese realizate în aviație și, mai recent, în transporturile navale, se datoresc în primul rînd performanțelor aerodinamice îmbunătățite ale profilelor de aripă singulare aflate în curent nelimitat. Succesele realizate la calculul paletelor mașinilor hidraulice axiale compuse din profile în rețea se datoresc și ele în parte acumulării datelor din ce în ce mai multe asupra caracteristicilor energetice și cavitaționale ale profilelor singulare, precum și evaluării din ce în ce mai exacte a influenței rețelei asupra acestor caracteristici.

La dispunerea unui profil singular într-o rețea, apar importante modificări la valoarea portanței și la distribuția presiunilor pe conturul său datorite influenței profilelor din restul rețelei. În cazul rețelelor de profile care definesc paletele mașinilor hidraulice axiale, caracteristicile energe-

* Lucrare comunicată la simpozionul „Efectul Coandă", București, 22 iunie 1967.

Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **13**, *3* (1968), (în limba engleză).

tice și cavitaționale depind de aceste modificări, amîndouă trebuie cunoscute nu numai la punctul de calcul ci în tot domeniul posibil de variație a datelor mașinei.

Pentru calculul modificării portanței sub influența rețelei au fost elaborate metode bazate pe teoria singularităților, respectiv, a transformărilor conforme, dînd soluții riguroase pentru rețelele din plăci drepte și din plăci curbate în formă de arc de cerc. Prin extinderea metodei, s-a ajuns la exprimarea modificării portanței considerînd influența rețelei prin factori de influență care țin seama pe lîngă incidență, curbură și forma scheletului și de grosimea profilului. În acest fel dispunem de metode care permit calcularea modificării portanței unui profil singular care se dispune în rețea prin factorii de influență care caracterizează scurgerea, precum și geometria profilului și a rețelei.

Pe lîngă aceste metode, influența modificării portanței este exprimată și prin relații globale care aproximează fenomenul real într-o măsură mai mult sau mai puțin exactă. Ca factor pentru exprimarea influenței rețelei asupra portanței s-a admis la început raportul celor două portanțe : în rețea și singular, extinzînd în mod arbitrar valabilitatea sa indiferent de geometria profilelor și a rețelei. Coeficientul de influență definit în acest fel dă diferențe care depășesc aproximațiile admisibile la calculul rețelelor paletelor de mașini hidraulice axiale. Acest neajuns apare în mod evident dacă analizăm relația dată de G. F. Proskura [1] pentru coeficientul de portanță unitară a profilelor cu contur oarecare dispuse în rețea. Relația a fost obținută pentru profile Jukovski prin generalizarea rezultatelor obținute la rețele de profile subțiri drepte sau curbate și conține, sub formă explicită, parametrii rețelei și mărimile care caracterizează geometria profilului :

$$C_A = 2\pi K_0 \frac{\Delta + \alpha}{1 - \Delta/\mathrm{tg}\beta}. \tag{1}$$

Prin introducerea în calcule a grosimii stratului-limită relația dă rezultate mai apropiate de fenomenul real. Valabilitatea relației este limitată de autor în domeniul porțiunilor drepte ale curbelor date de F. Weinig pentru rețeaua din plăci drepte, de grosime foarte mică. În acest domeniu K_0 — coeficientul de influență al rețelei din plăci drepte se calculează cu relația :

$$K_0 \simeq \frac{2}{\pi} \frac{t}{l} \frac{1}{\sin\beta}, \tag{2}$$

fiind valabilă pentru valorile pasului relativ t/l pînă la 0,5—0,8. În acest domeniu expresia (1) împreună cu relația clasică pentru profilul singular

$$C_a = 2\pi \sin(\alpha_0 + \alpha) \tag{3}$$

poate fi folosită în calcule pentru a ține seama de influența rețelei asupra modificării portanței profilelor.

Coeficientul de influență notat cu K și definit ca raportul portanței profilului în rețea (1) față de cea a profilului singular (3)

$$K = C_A/C_a, \tag{4}$$

se verifică cu datele experimentale numai parțial și în general numai la incidențe mari, unde finețea de multe ori nu mai este optimă [2]. Nesiguranța crește încă și mai mult din cauza că la incidența de portanță nulă a profilului singular coeficientul de influență K definit sub forma (4) ia valori $\pm\infty$. Acest rezultat se obține dintr-o analiză atentă a relației K scrisă explicit ca raportul expresiilor (1) și (3):

$$K = K_0 \frac{1}{1 - \Delta/\mathrm{tg}\beta} \cdot \frac{\Delta + \alpha}{\alpha_0 + \alpha}, \tag{5}$$

care pentru incidența $\alpha = -\alpha_0$ are valoarea infinit. Pentru incidențe α pozitive valorile coeficientului de influență obținute cu această relație sînt cuprinse între $K = 2 \ldots 4$, fiind comparabile cu datele experimentale, determinate în tunelul hidrodinamic din Laboratorul de mașini hidraulice din Timișoara.

În figurile 1, 2 și 3 sînt redate rezultatele experimentale comparate cu cele calculate cu metoda de mai sus, care ilustrează cele expuse în cadrul

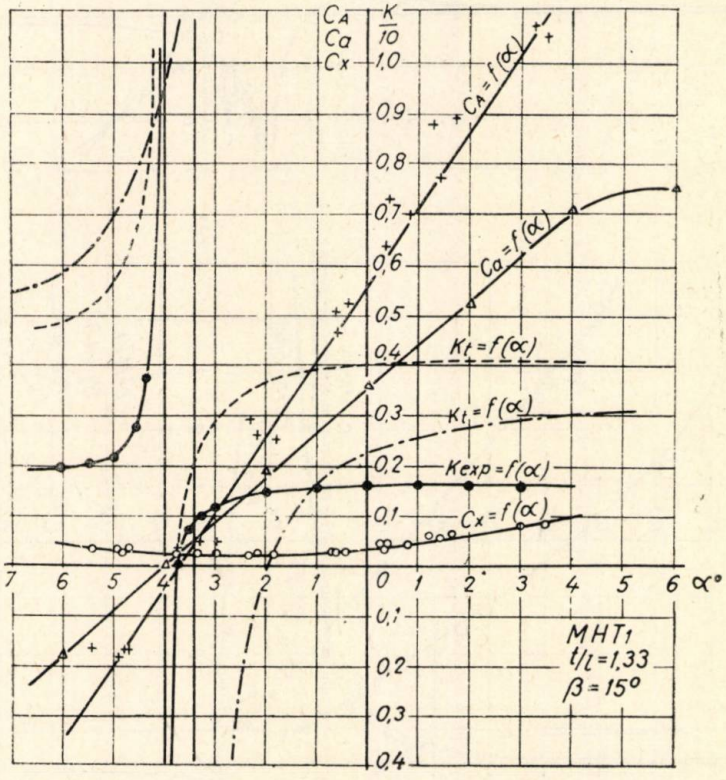


Fig. 1. — Caracteristicile hidrodinamice și coeficientul de influență teoretic și experimental al profilului MHT-1; $\beta = 15°$.

discutării relației coeficientului de influență. Figurile conțin caracteristicile $C_A = f(\alpha)$ și $C_a = f(\alpha)$ precum și $C_X = f(\alpha)$ și $C_x = f(\alpha)$ pentru profilul cu contur experimental MHT-1 singular și dispus în rețea de turbină

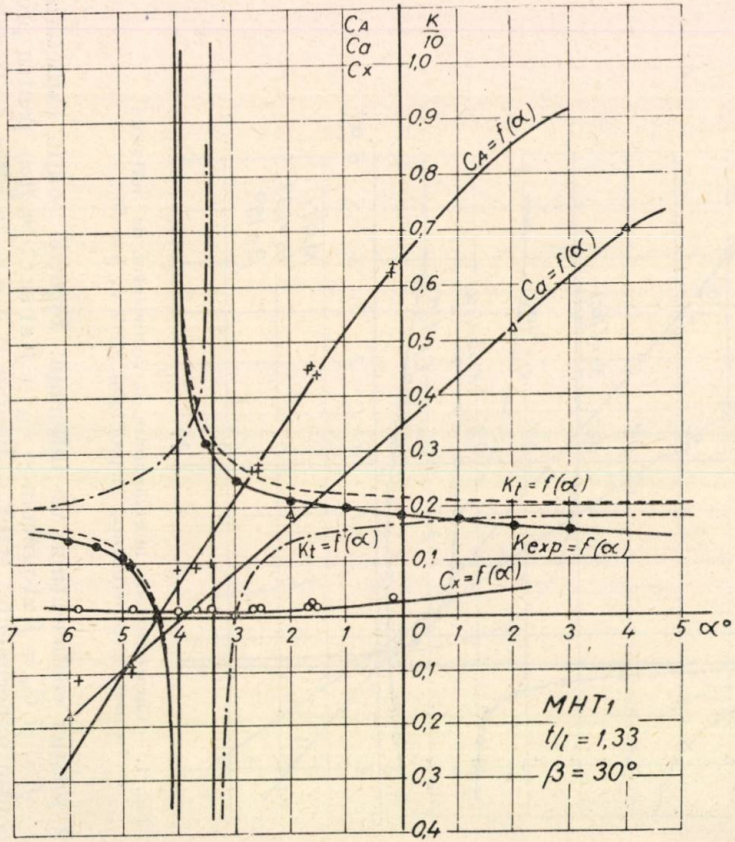


Fig. 2. — Caracteristicile hidrodinamice și coeficientul de influență teoretic și experimental al profilului MHT-1 ; $\beta = 30°$.

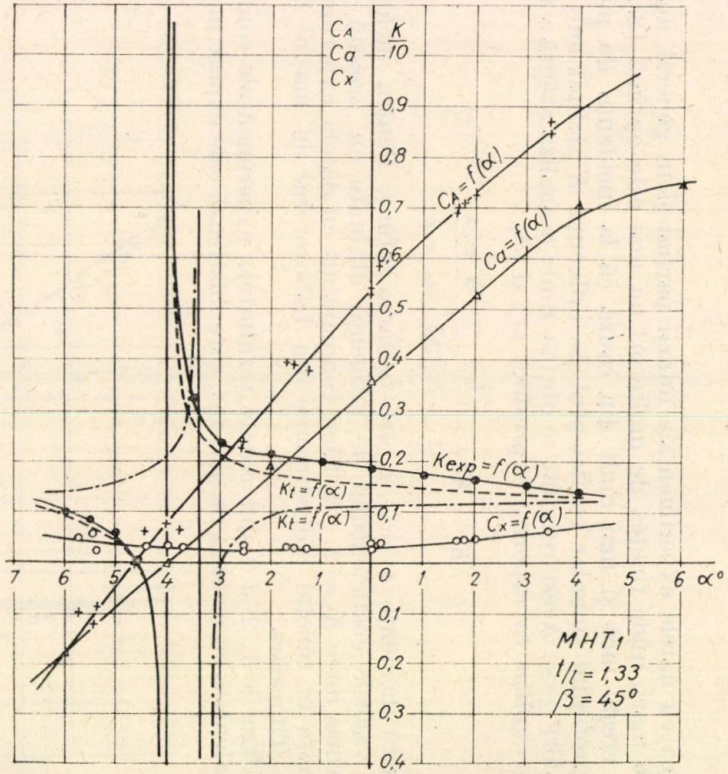


Fig. 3. — Caracteristicile hidrodinamice și coeficientul de influență teoretic și experimental al profilului MHT-1 ; $\beta = 45°$.

avînd pasul relativ $t/l = 1{,}33$ și trei valori ale unghiului de așezare $\beta = 15°$, $30°$ și $45°$. Se observă o creștere apreciabilă a coeficientului de portanță C_A a profilului dispus în rețea de turbină față de coeficientul profilului singular C_a.

Tabelul 1

Profilul	d/l %	x_d/l %	f/l %	x_f/l %	l mm
MHT-1	8,23	30	4,12	35	60

În aceste figuri sînt redate și funcțiile de variație a coeficientului de influență K cu incidența α. Liniile pline sînt funcțiile $K = f(\alpha)$ experimentale. Coeficientul de influență calculat cu relația dată de G. F. Proskura, unde s-au introdus valorile experimentale ale incidențelor de portanță nulă pentru profilul singular α_0 și pentru profilul în rețea Δ, este reprezentat cu linie punctată. Linia întreruptă reprezintă curbele teoretice calculate cu aceeași relație folosind însă valorile incidențelor de portanță nulă din relațiile date de C. Pfleiderer pentru α_0 și de G. F. Proskura pentru Δ:

$$\alpha_0 = \left[82 + \frac{1}{1 + 0{,}05\left(\frac{d}{l}\,100\right)}\left(\frac{x_f}{l}\,10\right)^2\right]\frac{f}{l}, \tag{6}$$

$$\Delta = \frac{\left(2\,\frac{f}{l} + \frac{d}{l}\right)\operatorname{tg}\beta}{2\left(2\,\frac{f}{l} + \frac{d}{l}\right) + \frac{2\delta}{l} + \operatorname{tg}\beta}. \tag{7}$$

Aici δ este grosimea stratului-limită, care, după indicațiile date de G. F. Proskura, se calculează cu aproximație ca în cazul plăcilor.

În privința coeficientului de influență se observă din figură că pentru unghiurile de așezare $\beta = 30°$ și $45°$ și la incidențele uzuale apar diferențe de 50—100% între valorile obținute pe cale experimentală și prin calcul, utilizînd relația lui G. F. Proskura. La unghiul de așezare $\beta = 15°$, apar diferențe și mai mari.

Aceleași rezultate cu privire la coeficientul K au fost obținute în cadrul cercetărilor făcute în curent de aer [4]. În figura 4 se arată valorile coeficientului K definit ca raportul portanțelor în rețea și singular. Portanța profilului în rețea s-a calculat în acest caz aplicînd teorema impulsului. Din curbele date în figură, la unghiuri β egale cu cele folosite la măsurătorile în curent de apă, valorile coeficientului K sînt între 2,1—3,5 la incidențele uzuale.

Prelucrînd rezultatele experimentale asupra unor profile calculate cu metoda singularităților s-a obținut o concordanță mai bună între valorile calculate cu relația G. F. Proskura și cele măsurate introducînd o corecție de forma $1/\sqrt{t/l}$ [3]. Cu această corecție coeficientul de portanță

a profilului în rețea are expresia de forma,

$$C_A = \frac{1}{\sqrt{t/l}} 2\pi K_0 \frac{\Delta + \alpha}{1 - \Delta/\mathrm{tg}\beta}, \tag{8}$$

iar coeficientul de influență calculat cu expresia

$$K = \frac{1}{\sqrt{t/l}} K_0 \frac{1}{1 - \Delta/\mathrm{tg}\beta} \cdot \frac{\Delta + \alpha}{\alpha_0 + \alpha} \tag{9}$$

are valori $K = 1{,}5 - 2{,}8$ la incidențe pozitive.

Îmbunătățiri importante în cercetarea scurgerii prin rețele de profile au fost obținute prin determinarea caracteristicilor hidrodinamice mai

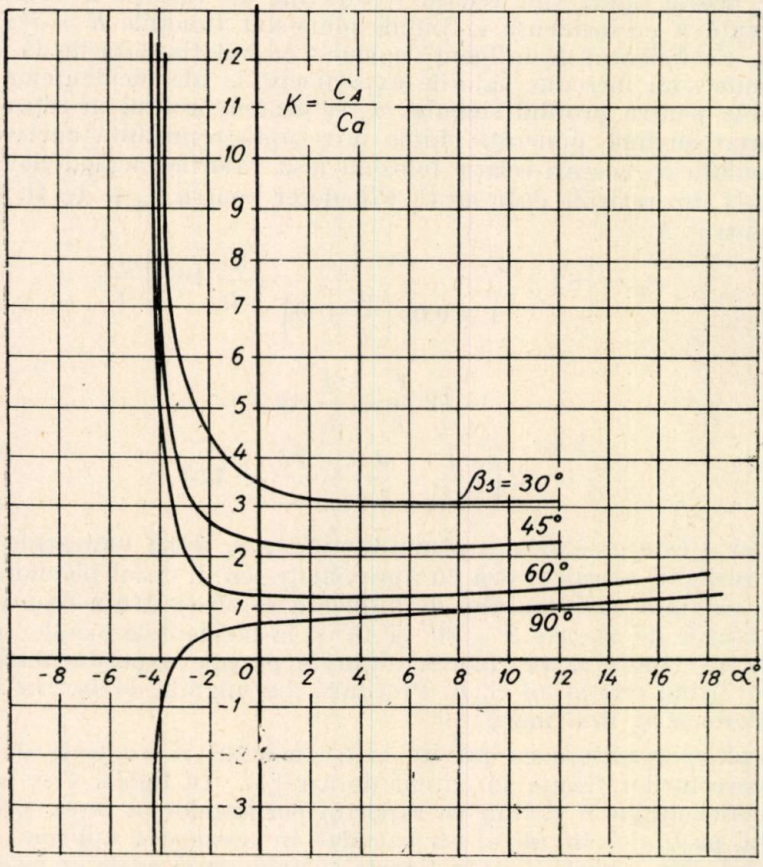


Fig. 4. — Coeficientul de influență experimental al profilului MHT-1 determinat în curent de aer; $K = C_A/C_a = f(\alpha)$.

întîi în cazul simplu cînd rețeaua este alcătuită din plăci drepte sau din plăci curbate în formă de arc de cerc. Aceste lucrări au o importanță mai mult calitativă, arătînd direcțiile în care trebuie îndreptate cercetările.

H. Schlichting [5] prezintă o metodă simplificată bazată pe teoria singularităților, cu ajutorul căreia se pot determina caracteristicile hidro-

dinamice ale unei rețele de profile groase. Metoda se bazează pe admiterea unor distribuții de surse și vîrtejuri dispuse de-a lungul corzii profilului și nu de-a lungul scheletului, ceea ce conduce la o ecuație integrală care se impune a fi satisfăcută de-a lungul conturului profilului. Pentru simplificare, verificarea ecuației se face numai într-un număr finit de puncte.

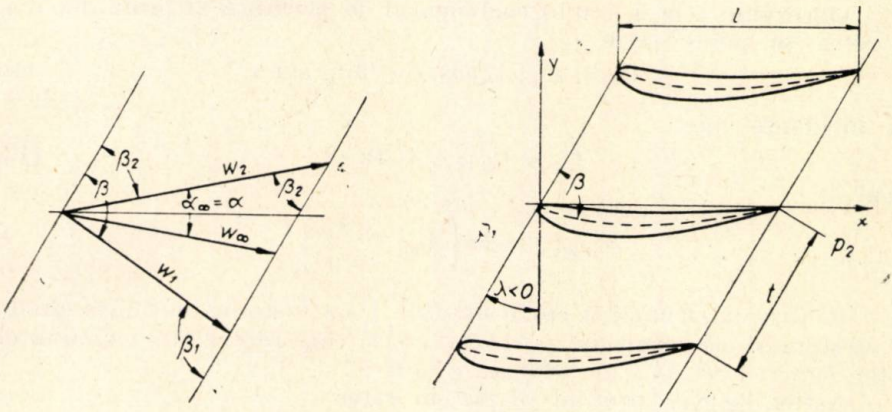


Fig. 5. — Rețea plană de profile.

În felul acesta se obține un sistem de ecuații liniare, prin a cărui soluționare se determină coeficienții funcțiilor de distribuție a singularităților. Tabelarea valorilor numerice ale constantelor valabile pentru toate rețelele care apar în relații ușurează mult calculul.

Pe această cale, H. Schlichting utilizînd notațiile din figura 5 a stabilit relația coeficientului portanței profilului în rețea de turbină ($\lambda < 0$) sau de pompă ($\lambda > 0$) și anume:

$$C_A = 2\pi\left[\left(A_{00} + \frac{A_{10}}{2}\right)_R \cos\alpha + \left(A_{0\beta} + \frac{A_{1\beta}}{2}\right)_R \sin\alpha\right], \qquad (10\,a)$$

iar pentru profilul funcționînd singular, deci pentru $t/l \to \infty$

$$C_a = 2\pi\left[\left(A_{00} + \frac{A_{10}}{2}\right)_S \cos\alpha + \sin\alpha\right]. \qquad (10\,b)$$

În cazul incidențelor mici, relațiile (10) devin:

$$C_A = 2\pi\left[\left(A_{00} + \frac{A_{10}}{2}\right)_R + \left(A_{0\beta} + \frac{A_{1\beta}}{2}\right)_R \alpha\right], \qquad (11\,a)$$

$$C_a = 2\pi\left[\left(A_{00} + \frac{A_{10}}{2}\right)_S + \alpha\right]. \qquad (11\,b)$$

Aici coeficienții A_{00}, A_{10}, $A_{0\beta}$ și $A_{1\beta}$ caracterizează legea de distribuție a turbionilor $\gamma(x)$ și a surselor $q(x)$ și depind de geometria profilului și a rețelei precum și de incidența α (unghiul dintre viteza W_∞ și coarda profilului). Compararea caracteristicilor hidrodinamice ale profilului func-

ționînd singular față de cele ale profilului în rețea se face prin coeficientul de influență sub forma (4)

$$K = C_A/C_a.$$

Se observă că acest coeficient K în cazul plăcilor depinde numai de t/l și β [3], [1], iar în cazul profilelor groase depinde și de incidență [1].

Observînd relația (10 b) coeficientul de portanță al profilului dispus în rețea se poate scrie

$$C_A = C_A|_{\alpha=0} \cos \alpha + 2\pi\chi \sin \alpha. \tag{12 a}$$

La incidențe mici

$$C_A = C_A|_{\alpha=0} + 2\pi\chi\alpha, \tag{12 b}$$

unde

$$C_A|_{\alpha=0} = 2\pi\left(A_{00} + \frac{A_{10}}{2}\right)_R. \tag{13}$$

Pentru determinarea coeficientului χ s-a introdus noțiunea gradului de creștere al coeficientului portanței [5] și care reprezintă valoarea derivatei funcției $C_a = f(\alpha)$ pentru $\alpha = 0$.

Astfel, pentru profilul dispus în rețea

$$\left.\frac{dC_A}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 2\pi\left(A_{0\beta} + \frac{A_{1\beta}}{2}\right)_R, \tag{14 a}$$

iar pentru profilul izolat

$$\left.\frac{dC_a}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 2\pi. \tag{14 b}$$

Coeficientul χ definește tocmai raportul gradului de creștere al portanței C_A către gradul de creștere al portanței C_a deci

$$\chi = \frac{\left.\frac{dC_A}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}}{\left.\frac{dC_a}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}} = \left(A_{0\beta} + \frac{A_{1\beta}}{2}\right)_R. \tag{15}$$

Prin înlocuirea expresiilor care dau pe $C_A|_{\alpha=0}$ și χ în relația (12 b) obținem expresia inițială (10 a).

Astfel influența rețelei este caracterizată prin acești doi coeficienți

$$C_A|_{\alpha=0} = f(t/l, \beta),$$

$$\chi = f(t/l, \beta).$$

H. Schlichting [5] și apoi L. Speidel și N. Scholz [7] trasează curbele ce reprezintă variația acestor funcții la două profile NACA 0010 și 8410. Rezultatele teoretice sînt comparate cu cele experimentale și pentru cele două profile, la unghiuri de așezare β mari și $t/l = 0{,}8-0{,}5$ se obține o corespondență destul de bună în acest domeniu. Coeficientul $2\pi\chi$ este cuprins între valorile 6—12 [7]. Primul termen al expresiei coeficientului de portanță a profilului în rețea este portanța unitară a profilului în rețea

la incidență nulă, iar al doilea conține raportul gradienților celor două portanțe raportate la incidențe. Observînd că acești doi termeni ai relației (12 b) date de H. Schlichting au termeni corespondenți în relația (1) dată de G. F. Proskura, în lucrarea [2] se dă o cale simplă pentru a exprima raportul χ:

$$C_A = C_A|_{\alpha=0} + 2\pi\chi\alpha \qquad \text{după H. Schlichting,} \quad (16)$$

$$C_A = 2\pi K_0 \frac{\Delta}{1 - \Delta/\mathrm{tg}\beta} + 2\pi \frac{K_0}{1 - \Delta/\mathrm{tg}\beta}\alpha \quad \text{după G. F. Proskura.} \quad (17)$$

La incidență nulă ($\alpha = 0$) primul termen în ambele relații exprimă tocmai $C_A|_{\alpha=0}$ iar raportul χ din termenul al doilea corespunde cu expresia

$$\chi = \frac{K_0}{1 - \Delta/\mathrm{tg}\,\beta}. \qquad (18)$$

În felul acesta raportul χ, care la H. Schlichting apare ca o necesitate matematică, primește aici un sens fizic.

Pentru cazul rețelei de plăci curbate MHT 8406 în lucrarea [6] sînt calculate valorile numerice și reprezentate grafic în figurile 6 și 7 ale

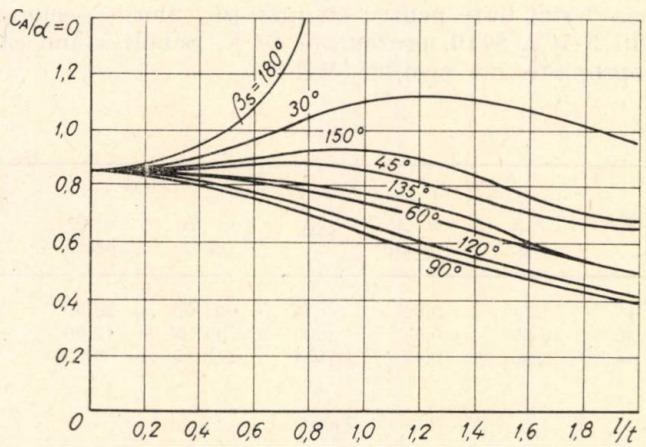


Fig. 6. — Curbele coeficientului unitar de portanță la incidență nulă; $C_A|_{\alpha_\infty=0}$.

coeficientului de portanță la incidență nulă și ale raportului χ în limite largi ale pasului relativ l/t și ale unghiului de așezare β. Calculele se bazează pe metoda dată de H. Krüger.

În tabela 2 se dau coeficienții de portanță C_A la incidență nulă și factorul $2\pi\chi$ la portanță nulă, obținute experimental. Totodată se dau valorile corespunzătoare obținute prin calcul folosind unele rezultate date de G. F. Proskura.

Diferențele care apar aici între valorile de calcul și experimentale sînt de același ordin de mărime ca cele indicate mai sus pentru coeficienții de influență K.

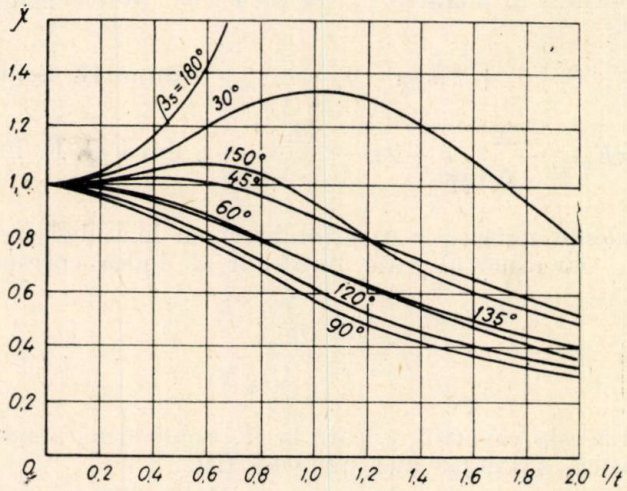


Fig. 7. — Curbele coeficientului de influență al rețelei χ.

În tabela 3 sînt date pentru comparație valorile aceloraşi coeficienți pentru profilul NACA 8410, prezentate de N. Scholz avînd caracteristicile geometrice apropiate de profilul MHT-1.

Tabela 2

Profil	β°	$C_A\|_{\alpha=0}$ cu Δ exp.	$C_A\|_{\alpha=0}$ cu Δ teoretic	$C_A\|_{\alpha=0}$ exp.	$2\pi\chi$ cu Δ exp.	$2\pi\chi$ cu Δ teoretic	$2\pi\chi$ exp.	Obs.
MHT-1	15	1,74	0,82	0,55	27,00	23,50	10,90	
	30	0,95	0,64	0,65	12,55	12,00	7,70	
	45	0,66	0,41	0,54	8,17	7,85	6,90	

Tabela 3

Profil	β°	$C_A\|_{\alpha=0}$	$2\pi\chi$
NACA 8410	30	1,59	8,3
	60	0,68	3,5
	90	0,48	2,6

Alți autori [7] determină portanța unui profil dispus într-o rețea oarecare plecînd de la portanța profilului singular și considerînd influența rețelei prin factori de influență pentru incidență K_α, curbură K_f, forma scheletului K_s și grosimea K_d, mergînd pînă la valori mici ale pasului relativ.

Pentru coeficientul de portanță a profilului în rețea expresia finală este dată sub forma

$$C_A = K_\alpha \frac{dC_a}{d\alpha}(\alpha_\infty - \alpha_0 + \Delta\alpha_0). \tag{19}$$

Conform acestei relații influența rețelei constă în modificarea gradientului portanței cu factorul K_α și în modificarea direcției de portanță nulă cu valoarea $\Delta\alpha_0$ care conține influența curburii, a formei și a grosimii. Pentru cazurile în care se necesită numai caracteristica de portanță fără distribuția vitezelor pe conturul profilului această metodă oferă o soluție foarte utilă și simplă. Deficiențele legate de ea constau în neglijarea componentelor tangențiale ale vitezei induse de restul de rețea și în considerarea imperfectă a scheletului și conturului profilelor din restul rețelei. Aceste două influențe sînt cu atît mai mult neglijabile cu cît profilele sînt mai subțiri și cu cît mai mare este pasul relativ. Metoda este deci bună îndeosebi pentru profile subțiri cu curbură slabă : $d/l < 0{,}10$; $f/l < 0{,}08$ și pînă la valori ale pasului relativ $t/l > 0{,}8$.

Metoda oferă o posibilitate comodă pentru corectarea valorilor măsurate pe profile singulare cu privire la influența rețelei. Ea permite de asemenea determinarea influenței asupra portanței a modificării unuia din parametrii geometrici ai profilului sau rețelei.

În cazul mașinilor hidraulice considerarea modificării numai a portanței sub influența rețelei nu este suficientă, deoarece nu caracterizează comportarea mașinii din punct de vedere cavitațional. Interes deosebit prezintă modificarea și a distribuției presiunii pe profil sub influența rețelei, fiind factorul hotărîtor în determinarea calităților cavitaționale ale mașinii în ansamblu.

Căutînd a exprima fenomenul observat în natură, intrarea în regim de cavitație a mașinilor în cele două domenii extreme ale valorii debitelor, în Laboratorul de mașini hidraulice din Timișoara se introduc pentru prima dată în anul 1957 curbele caracteristice de cavitație [8]. Aceste curbe permit cunoașterea limitelor scurgerii fără cavitație în tot domeniul de funcționare, după cum curbele caracteristice energetice definesc condițiile de funcționare din punctul de vedere al performanțelor energetice pentru întreaga gamă de variație a datelor între valorile maxime și minime.

Respectînd metodica de cercetare asupra modificării portanței la trecerea de la profilul singular la profilul în rețea au fost extinse studiile pentru considerarea modificării distribuției presiunii sub influența rețelei printr-un factor global, respectiv prin curbele de sensibilitate la cavitație studiate pentru profilul singular și în rețea. Expresia coeficientului care caracterizează depresiunea maximă pe conturul unui profil în rețea de turbină utilizînd relația diferenței maxime de presiune pe cele două fețe ale profilului, s-a obținut sub forma [9]

$$K_{p_{max}} = \frac{p_1 - p_{min}}{\frac{1}{2}\rho w_\infty^2} = -\frac{w_{max}^2}{w_1^2} - 1 = \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{d/l}{t/l \sin\beta}\right)^2} + C_A\right] - 1. \tag{20}$$

Același coeficient pentru profilul singular primește forma simplă

$$k_{p_{max}} = C_a \tag{21}$$

punînd în (20) condiția $t/l = \infty$ cînd C_A trece în C_a.

Expresiile (20) și (21) oferă posibilitatea de a urmări influența rețelei asupra distribuției presiunii, prin coeficientul depresiunii maxime. În mod analog cu coeficientul de influență K, care exprimă modificarea

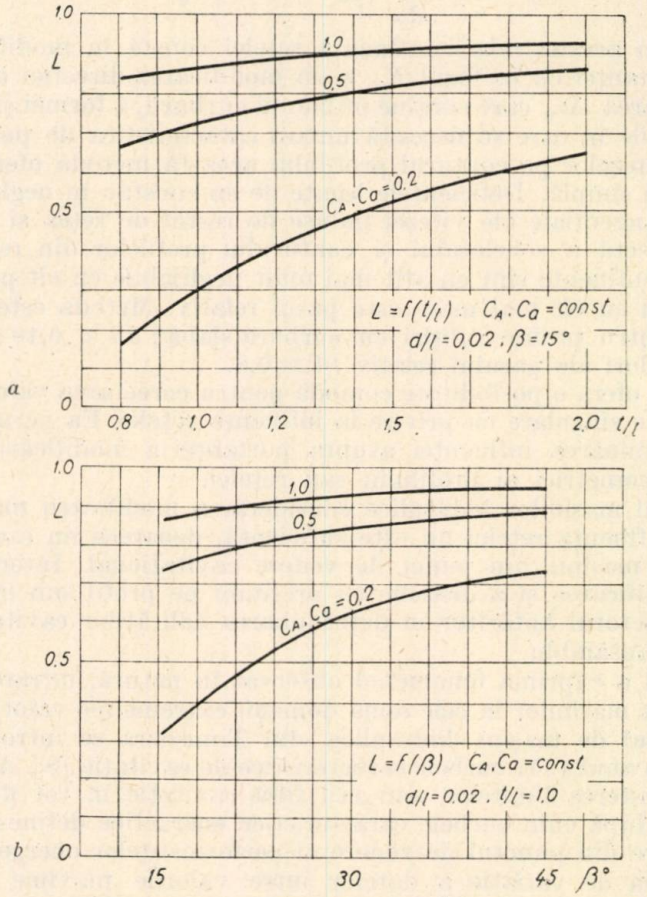


Fig. 8. — Variația raportului coeficientului depresiunii maxime la profile în rețea de turbină și singular în funcție de pasul relativ și unghiul de așezare.

portanței profilului singular sub influența restului de rețea, raportul coeficienților de depresiune maximă (în rețea și singular) — notat cu L, exprimă modificarea presiunii în punctul de minim de pe contur:

$$L = \frac{K_{p_{max}}}{k_{p_{max}}} = \frac{1}{C_a\left(1 + \frac{d/l}{t/l \sin \beta}\right)^2} + \frac{C_A - 1}{C_a}. \tag{22}$$

Raportul L este o funcție de geometria profilului, de parametrii rețelei și variază cu unghiul de incidență.

Pentru profile, ale căror caracteristici energetice $C_{A,a} = f(\alpha)$ sînt cunoscute, raportul L permite determinarea influenței rețelei asupra coeficientului depresiunii maxime.

În figura 8 sînt date dependențele $L = f(t/l)$ și $L = f(\beta)$ calculate cu relația (22) la C_A, $C_a = \text{const}$. Ele arată tendința apropierii raportului L de valoarea $L = 1$ pe măsura creșterii pasului relativ, respectiv a unghiului de așezare.

Expresiile (20) și (21) mai oferă posibilitatea de a trasa liniile de delimitare a domeniului cu și fără cavitație pentru extradosul profilelor în rețea de turbină și singulare. Metoda fiind bazată pe scurgerea medie, se referă la profile cu contur oarecare, cu curbură slabă [10].

Prin introducerea în expresia coeficientului depresiunii maxime (20) și (21) a presiunii critice de formare a cavitației se separă mărimile care caracterizează curentul din zona neinfluențată de profile și mărimile care definesc presiunea în punctul de pe conturul profilului unde aceasta este minimă :

$$K_{p_{\max}} = \frac{p_1 - p_{cr}}{\frac{1}{2}\rho w_\infty^2} - \frac{p_{\min} - p_{cr}}{\frac{1}{2}\rho w_\infty^2}. \tag{23}$$

În zona unde $p_{\min} < p_{cr}$ avem cavitație dezvoltată.

Dacă în expresia coeficientului de depresiune maximă exprimăm portanța în funcție de incidență, devine posibilă delimitarea domeniului cu și fără cavitație prin dependența

$$K_{p_{\max}} = f(\alpha)$$

utilizată sub această formă și la stabilirea curbelor de sensibilitate la cavitație a profilelor.

În figura 9 este arătată metoda de delimitare a domeniilor cu și fără cavitație precum și caracteristicile calculate și măsurate ale profilului singular MHTC 04.04.10. Menționăm că în limitele datelor de experimentare cu care s-a lucrat în tunelul hidrodinamic nu s-a ajuns în regim de cavitație. În urma acestui fapt domeniul unde $p_{\min} \leqslant p_{cr}$ nu apare pe figură. Metoda conține deficiențele inerente aprecierii globale a modificării presiunii pe conturul profilelor sub influența rețelei.

Rezultate care se suprapun aproape complet cu fenomenul real oferă curbele de sensibilitate la cavitație a profilelor, definite ca fiind dependența funcțională dintre coeficientul minim de presiune absolut K_p, unghiul de incidență critic $\alpha_\infty = \alpha_c$ și abscisa relativă $x/l = \lambda_0/l$ la care, și unde, acest minim se realizează. În mod obișnuit punctele λ_0 de incipiență a cavitației se distribuie în trei zone, funcțiile avînd trei ramuri, corespunzătoare cu aceste trei zone.

Metoda elaborată pentru profilul singular [11] se bazează pe funcția de viteze definită pe conturul profilului $V = V(x)$, coeficientul K_p avînd expresia :

$$K_{p_{\max}} = \left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2_{\max} - 1. \tag{24}$$

Conform acestei relații determinarea coeficientului de cavitație rezultă din calcularea coeficientului de presiune K_p în punctul unde distribuția de viteze realizează un maxim, deci acolo unde :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{V(x)}{V_\infty}\right] = 0, \tag{25}$$

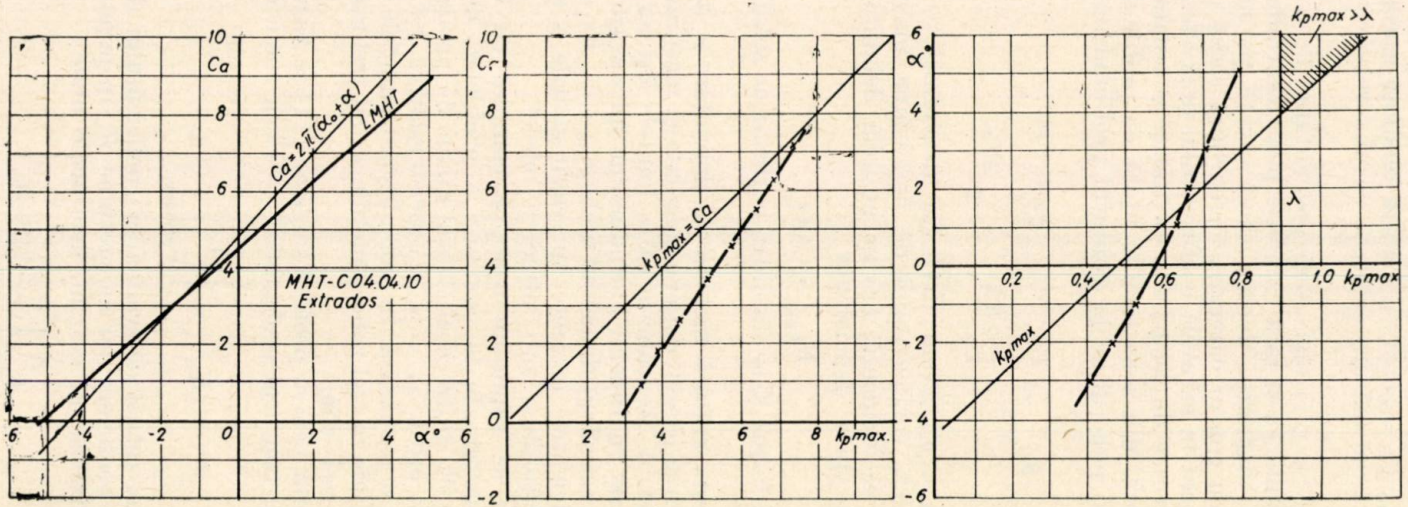


Fig. 9. — Dependența coeficientului de depresiune maximă de incidență în cazul profilului MHT-C 04.04.10 ; ——— teoretic ; ▬▬ experimental, în apă.

cu condiția suplimentară :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left[\frac{V(x)}{V_\infty}\right] = 0. \tag{26}$$

Din mulțimea punctelor de abscisă x care satisfac condițiile generale (25) și (26), în dreptul unui singur punct sau cel mult două puncte se va realiza maximul absolut al distribuției de viteze ; acest punct este punctul de incipiență a fenomenului de cavitație. În cazul cînd se obțin două abscise relative unde se realizează un maxim absolut în distribuția de viteze, ne aflăm în dreptul unuia dintre punctele de intersecție ale celor trei ramuri ale funcției $K_{p_{max}} = f(\alpha_c)$.

În cazul profilelor singulare, de formă oarecare, se pornește de la dezvoltarea în serie Fourier a ordonatei profilului și de la funcția de viteze enunțată de F. Riegels avînd forma generală

$$\frac{V(\varphi)}{V_\infty} = \frac{C(\varphi\,;K_G\,;K_s)\cos\alpha_\infty + D(\varphi\,;K_G)\sin\alpha_\infty}{N(\varphi\,;\,K_G\,;\,K_s)}. \tag{27}$$

În această relație funcțiile C, D și N prin variabila angulară φ și parametrul grosimii K_G, respectiv al scheletului K_s, evidențiază influența geometriei conturului, a grosimii și a formei scheletului asupra sensibilității la cavitație a unui profil hidrodinamic oarecare.

Derivînd funcția de viteze (27) în raport cu variabila φ și anulînd-o în dreptul unei abscise relative oarecare, se obține ecuația în φ care determină incidența α_∞

$$\operatorname{tg}\alpha_\infty = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}C(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} - C(\varphi)\dfrac{1}{N(\varphi)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}N(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}}{\dfrac{\mathrm{d}D(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi} - D(\varphi)\dfrac{1}{N(\varphi)}\cdot\dfrac{\mathrm{d}N(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}}. \tag{28}$$

Dacă în acest punct funcția de viteze realizează un maxim absolut, acest punct este un punct de incipiență a cavitației și α_∞ definit de (28) este identic cu α_c ; unghiul de incidență critic. Din relația (27) cu ajutorul unghiului de incidență determinat conform celor arătate, rezultă viteza maximă în punctul considerat. În continuare relația (24) oferă posibilitatea determinării coeficientului de cavitație.

Pentru verificarea metodei s-a ales profilul Clark Y studiat experimental de F. Numachi. Comparația rezultatelor teoretice cu cele experimentale este arătată în figura 10 pentru cazul profilului Clark Y 8, reproducînd valorile obținute prin metoda elaborată și valorile experimentale obținute de F. Numachi. Se constată o suprapunere mulțumitoare îndeosebi pentru funcțiile $K_{p_{max}}(\alpha_c)$.

Comparația s-a efectuat pentru seria de profile Clark Y, concordanța curbelor calculate și măsurate menținîndu-se, suprapunerea rezultatelor fiind cu atît mai bună cu cît profilele au grosimea și curbura mai redusă. La profilul Clark Y 8 suprapunerea este bună pentru toate ramurile funcției $K_p(\alpha_c)$. În ceea ce privește funcțiile $\alpha_c(\lambda_0/l)$, (fig. 11), valorile experimentale nu se distribuie după o lege precisă, fapt condiționat de metoda experimentală folosită. Prin suprapunerea mulțumitoare a valorilor teoretice și experimentale ale funcției $K_{p_{max}}(\alpha_c)$ rezultă, pe de

altă parte, că funcția teoretică $\alpha_c(\lambda_0/l)$, de care depinde prima funcție, este determinată cu suficientă exactitate.

Concluzii utile în privința modificării sensibilității la cavitație a profilului singular sub influența relației se obțin, în mod analog profilului sin-

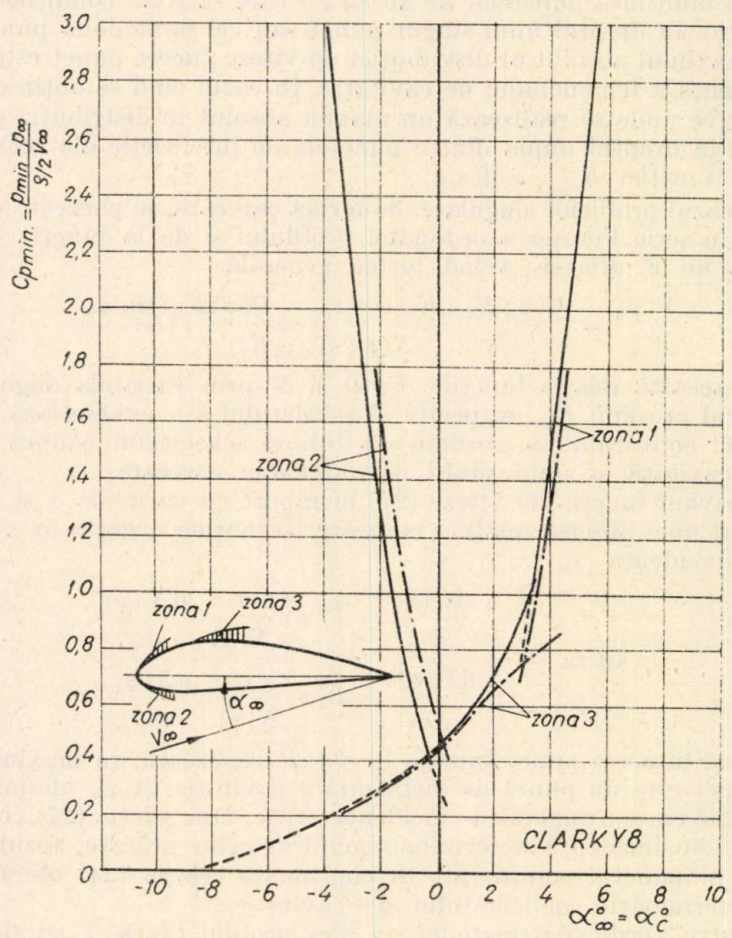


Fig. 10. — Curbele de sensibilitate la cavitație $K_p(\alpha_c)$ pentru profilul singular Clark Y 8; ——— teoretic; ▬▬ experimental (F. Numachi).

gular, cercetînd alura distribuției de viteze, respectiv, de presiuni pe conturul profilului dispus în rețea. Pentru rezolvarea problemei s-a elaborat în laboratorul nostru o metodă aproximativă de determinare a maximului distribuției de viteze [12]. Metoda este exemplificată prin aplicarea sa la cazul rețelelor de profile Carafoli MHT-C 04.04.10, cu unghiul de instalare $\beta = 30°$ și pasul relativ $t/l = 1{,}00$.

Geometria profilului singular rezultă din compunerea a două funcții simple, funcția scheletului și funcția de grosime. Profilele sînt linii de curent în cîmpul rezultant din suprapunerea potențialului complex al curentului de translație de viteză W_∞ peste potențialul complex al sistemului periodic de singularități γ și q — vîrtejuri și surse. Condiția ca conturul profilului

să fie linie de curent conduce la un sistem de ecuații integrale care determină coeficienții distribuției de singularități, cu ajutorul cărora se află parametrii hidrodinamici ai rețelei de profile.

Repartiția de viteze pe conturul profilului dispus în rețea W_p are expresia

$$\frac{W_p}{U_\infty} = [(S_{10} + KS_{1\beta}) \pm (S_{20} + K S_{2\beta})] (1 + y'^2_G)^{-\frac{1}{2}}, \tag{29}$$

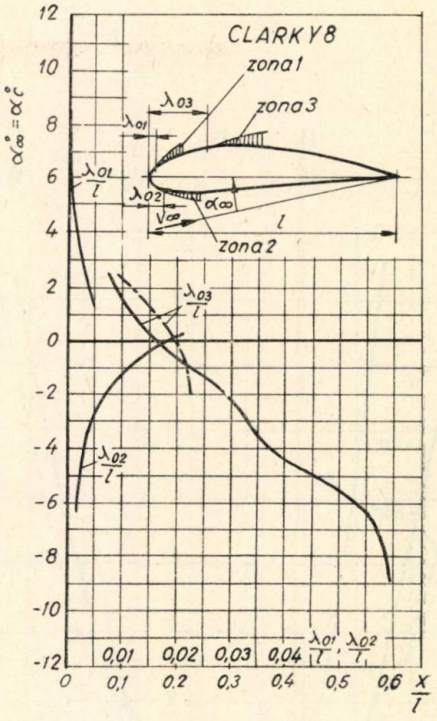


Fig. 11. — Abscisa relativă λ_0/l a punctului de incipiență a cavitației în funcție de unghiul de incidență critic; ——— teoretic; ——— experimental (F. Numachi); $\alpha^0_\infty = \alpha^0_c$ unghiul de incidență critic; abscisa relativă x/l a punctului de incipiență a fenomenului de cavitație.

unde U_∞ este componenta reală a vitezei de translație $W_\infty = U_\infty - iV_\infty$.

În relația (29) termenul în paranteza pătrată reprezintă repartiția vitezelor în lungul corzii U_s/U_∞, iar $(1 + y'^2_G)^{-1/2}$ este factorul lui Riegels. Repartiția de viteze depinde de distribuția de singularități prin funcțiile S.

Acolo unde derivata funcției de viteze luată în raport cu x, respectiv cu φ, se va anula, repartiția de viteze realizează un maxim sau un minim. Nedeterminarea se elimină prin cercetarea fie a semnului derivatei de ordinul doi, fie a comportării funcției în vecinătatea punctului zero al derivatei de ordinul unu. Pentru o rețea de geometrie dată, abscisa relativă x/l unde se realizează maximul, precum și valoarea atinsă de acest maxim vor fi funcții de parametrul unghiului de incidență $K = \operatorname{tg} \alpha_\infty$. Valoarea căutată a lui K va fi definită de expresia

$$K(x/l) = -\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}(S_{10} \pm S_{20}) - \psi(S_{10} \pm S_{20})}{\frac{\partial}{\partial\varphi}(S_{1\beta} \pm S_{2\beta}) - \psi(S_{1\beta} \pm S_{2\beta})}, \tag{30}$$

obținută prin anularea derivatei funcției de viteze.

Cunoscînd valorile critice ale parametrului unghiului de incidență $K = \operatorname{tg} \alpha_\infty$, respectiv valorile pe care trebuie să le ia parametrul K pentru a realiza într-un anumit punct de pe conturul profilului un maxim în repartiția vitezelor, cu ajutorul ecuației lui Bernoulli putem determina valorile minime realizate de distribuția presiunilor.

Calculăm coeficientul minim de presiune raportat la condițiile din avalul rețelei

$$K_{p2} = 1 - \left(\frac{W_p}{W_2}\right)^2, \tag{31}$$

unde

$$\frac{W_p}{W_2} = \frac{W_p}{U_\infty} \cdot \frac{U_\infty}{W_2}, \quad \text{iar} \quad \frac{U_\infty}{W_2} = \frac{\sin \beta_2}{\cos \lambda - K \sin \lambda}.$$

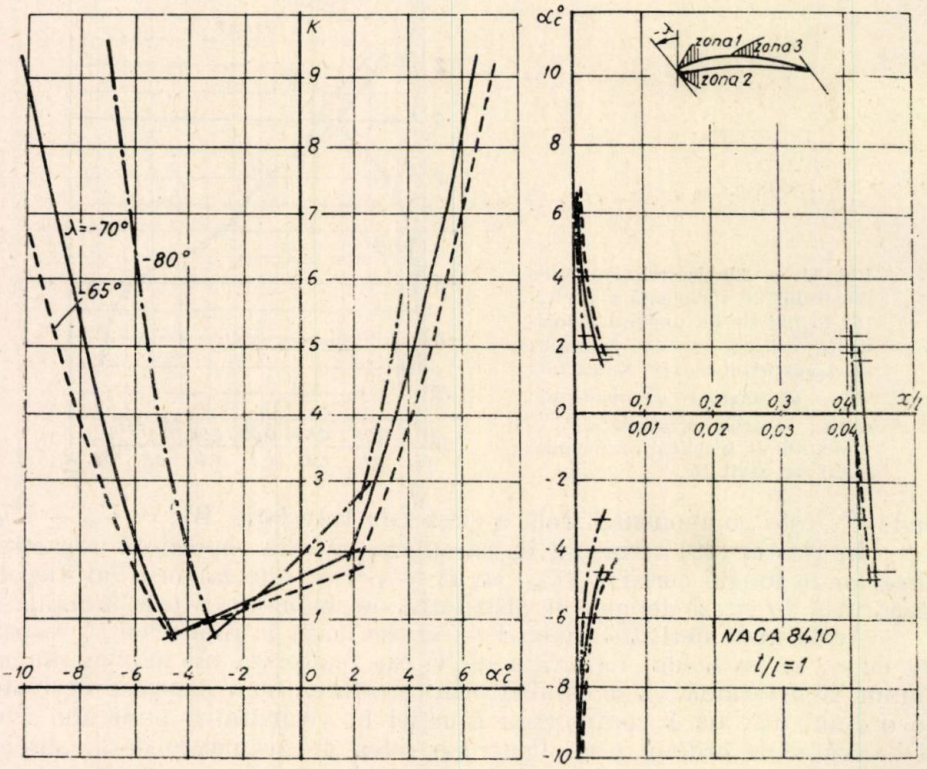


Fig. 12. — Variația coeficientului minim de presiune $C_{p_{\min}} = 1 - \frac{w_0^2}{w_2^2}$ în funcție de unghiul de incidență α_∞^0 pentru profilul NACA 8410 în rețea de turbină cu $\beta = 20°, 30°, 35°$ și $t/l = 1{,}0$.

În figura 12 sînt arătate curbele de sensibilitate la cavitație, calculate cu metoda enunțată pentru cazul profilului NACA 8410, avînd parametrii rețelei $t/l = 1{,}0$ și $\beta = 20°, 30°$ și $35°$.

Prin cercetările prezentate în mod succint în cadrul acestei comunicări s-a urmărit de a obține rezultate noi pentru restrîngerea zonei de dispersiune a valorilor calculate după metodele teoretice din literatură față de cele obținute experimental, la noi și în alte laboratoare, pentru coeficientul de influență al rețelei și pentru coeficientul depresiunii maxime. Metodele elaborate și materialul experimental de verificare contribuie la precizarea influenței unor factori legați de geometria profilelor și a rețelei asupra caracteristicilor energetice și cavitaționale la trecerea de la profilul singular la profilul în rețea și invers.

Primită la redacție la 5 decembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. G. F. Proskura, *Ghidrodinamika turbomașin*, Mașghiz, Kiev, 1954.
2. A. Bărglăzan, I. Anton, E. Sisak, Viorica Anton, I. Preda, *Caracteristicile energetice ale profilului MHT-1 dispus în rețea de turbină funcționînd în apă.* Academia R.S.R., Baza Timișoara, St. cerc. și. tehn., **VIII**, *3—4* (1961).
3. E. Sisak, *Cercetarea hidrodinamică a cavitației la profile în rețea de turbină*, Disertație, Harkov 1953.
4. Viorica Anton, I. Santău, *Influența unghiului de instalare asupra caracteristicei rețelei de profile MHT-1*, Comunicare la sesiunea CCT, Dec. 1966.
5. H. Schlichting, *Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter*, VDI Forsch. Heft 447 (1955).
6. A. Bărglăzan, E. Sisak, O. Popa, *Rețeaua plană de profile subțiri MHT 8406*, Academia R.S.R., Baza Timișoara, St. cerc. și. tehn., **VII**, *3—4* (1960).
7. N. Scholz, *Aerodynamik der Schaufelgitter I*, Ed. G. Braun, Karlsruhe, 1965.
8. I. Anton, *Curbele caracteristice ale mașinilor hidraulice*, Comunicările Conferinței de mașini hidraulice, vol. I, Timișoara 1964.
9. E. Sisak, *Influența parametrilor rețelei asupra raportului dintre coeficientul depresiunii maxime la unele profile funcționînd în rețea și izolat*, Comunicare la Conferința unională de mașini hidraulice, Harkov 1966.
10. — *Considerații asupra coeficientului de depresiune maximă la profile hidrodinamice în rețea și singular*, Comunicare la sesiunea generală științifică organizată cu ocazia aniversării Centenarului Academiei, București 1966.
11. I. Anton, O. Popa, *Asupra caracteristicilor de cavitație ale unui profil izolat*, Academia R.S.R., Baza Timișoara, St. cerc., st. tehn., **X**, *2* (1963).
12. — *Caracteristicile cavitaționale ale unei rețele de profile cu bordul de fugă rotunjit (profile Carafoli)*. Academia R.S.R., Baza Timișoara, St. cerc. și. tehn. **X**, *2* (1963).

STUDIU EXPERIMENTAL AL SCURGERII ÎN JURUL UNUI JET TRANSVERSAL CURBAT*)

de ST. N. SĂVULESCU şi V. TOMA
Institutul de mecanica fluidelor
la Academiei Republicii Socialiste România

Autorii prezintă rezultatele experimentale obţinute prin explorare, cu ajutorul sondelor Pitot şi a firului cald, a zonei de interacţiune aerodinamică a unui curent principal şi a unui jet transversal subţire. S-a studiat influenţa formei orificiului de ieşire şi a gradului de turbulenţă asupra parametrilor geometrici (forma jetului, lungime), aerodinamici (distribuţia vitezelor, dîra) şi a structurii (gradul de turbulenţă al zonei, tranziţia) etc. Rezultatele arată că forma orificiului nu are influenţă prea mare asupra caracteristicilor jetului deformat, în timp ce contrariul se manifestă în ceea ce priveşte gradul de turbulenţă.

1. INTRODUCERE

Printre metodele utilizate pentru perturbarea [1], [2], [3] unei scurgeri oarecare sau pentru hipersustentaţie [4], jeturile transversale (în cazul hipersustentaţiei devenite laterale) reprezintă un mijloc eficient şi modern.

Însă, după cunoştinţele noastre, nu s-a acordat o atenţie specială formei orificiului prin care jetul este introdus în camera de interacţiune cu scurgerea principală, considerîndu-se fanta rectangulară suficientă ca geometrie. De asemenea nu s-a acordat o atenţie specială structurii scurgerii în zona interacţiunii, efectele globale obţinute fiind considerate ca singurele elemente ce interesează această tehnică.

În lucrarea prezentă s-a încercat să se obţină informaţii asupra acestor două aspecte ale problemei interacţiunii aerodinamice a jeturilor, utilizînd tehnica experimentală a explorării punctuale a acestei zone cu sonde Pitot şi cu firul cald.

Fenomenul interacţiunii fiind foarte complex şi foarte sensibil la influenţa diverşilor parametrii ai scurgerii, ca de exemplu gradul de tur-

*) Publicată şi în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **13**, 3 (1968) (în limba franceză).

bulenţă, nu s-au dat scheme teoretice de calcul. S-a încercat, în primul rînd, interpretarea — cu ajutorul cunoştinţelor actuale asupra stabilităţii hidrodinamice şi asupra aerodinamicei jeturilor — rezultatelor experimen-

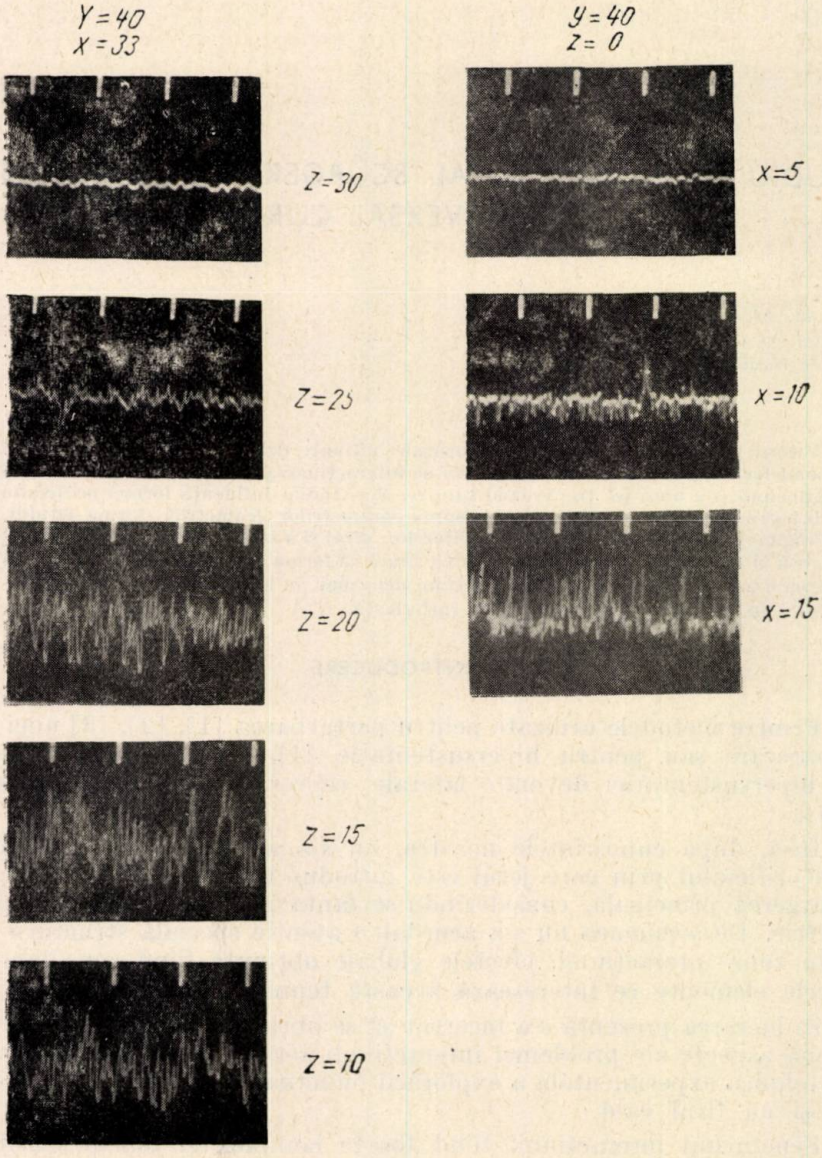


Fig. 1

tale obţinute. Toate experienţele au fost realizate în sufleria de mică turbulenţă a Secţiei de aeromecanică a Institutului de mecanica fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România.

2. INSTALAȚIA ȘI METODA EXPERIMENTALĂ

S-a folosit o cameră de experienţe de $80 \times 500 \times 2000$ mm în care gradul de turbulenţă a curentului principal, în zona studiată, a fost variat de la 0,2% pînă la 10% cu ajutorul grilelor perturbatoare, viteza curentului principal fiind în jur de 3 m/s. De asemenea, un suport special al sondei (precum şi al firului cald), permite prin deplasare şi rotire să se atingă toate punctele din interiorul camerei de experienţe cu o precizie de 0,02 mm. Metoda determinării frontierelor zonei de interacţiune a curentului principal cu jetul transversal se bazează pe răspunsul firului cald în timpul traversării acestei frontiere. În figura 1 se dau cîteva oscilograme în care trecerea firului cald peste frontiera dintre jet şi curentul principal este marcată printr-o schimbare netă a aspectului oscilogramelor. Această schimbare care este foarte clară, în cazul unui curent principal de mică turbulenţă poate să fie remarcat chiar şi în cazul curentului principal cu grad mare de turbulenţă.

De asemenea s-a determinat o măsură a gradului de turbulenţă care dă rezultate ca în figura 2.

După alura curbelor obţinute s-a luat ca frontieră jumătatea distanţei care arată creşterea turbulenţei şi astfel s-a stabilit un criteriu practic pentru determinarea frontierei.

Este de remarcat că comparativ cu metoda de vizualizare această metodă permite să se traseze destul de precis frontiera tridimensională de contact între curentul principal şi jetul lateral; această metodă pierde în precizie (însă vizualizarea cu atît mai mult) acolo unde viteza jetului

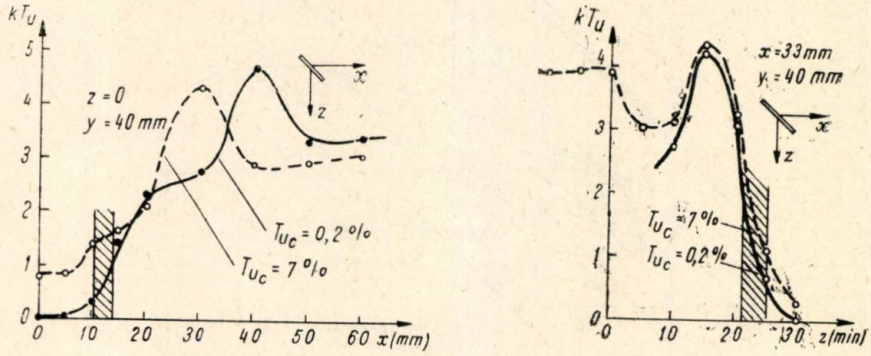


Fig. 2

are ordinul de mărime al vitezei curentului principal şi pentru grade mari de turbulenţă a acestuia. Examinarea vizuală a oscilogramelor dă un criteriu, la drept vorbind subiectiv, însă de cele mai multe ori practic.

3. PARAMETRII GEOMETRICI ŞI AERODINAMICI

Pentru curentul principal jetul transversal reprezintă un „obstacol" — un „corp" fluid. Scurgerea care se stabileşte în jurul acestui „obstacol" fluid este în primul rînd potenţială pentru scări cu ordinul

de mărime al grosimii jetului deformat. Însă deoarece acest „corp" fluid nu poate suporta presiuni ca și un corp solid, trebuie să se curbeze într-un mod foarte complicat, conform cu formula:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \frac{V^2}{R}, \tag{1}$$

unde R este raza de curbură a liniei de curent care trece prin punctul unde avem presiunea p, densitatea ρ și viteza V.

Deci prima problemă de rezolvat este *geometria jetului*.

Figura 3 arată schematic un exemplu.

Parametrii geometrici dați sînt:

— forma orificiului de ieșire (fantă dreptunghiulară, secțiune arc de cerc, conturul unui sector de cerc);

— poziția orificiului față de curentul principal (unghiul de incidență α).

Parametrii geometrici care rezultă din interacțiune sînt:

— coordonatele frontierei exprimate prin ecuația

$$Z_{fr} = F(X_{fr}, y_{fr}), \tag{2}$$

unde axele de coordonate sînt indicate pe fig. 3;

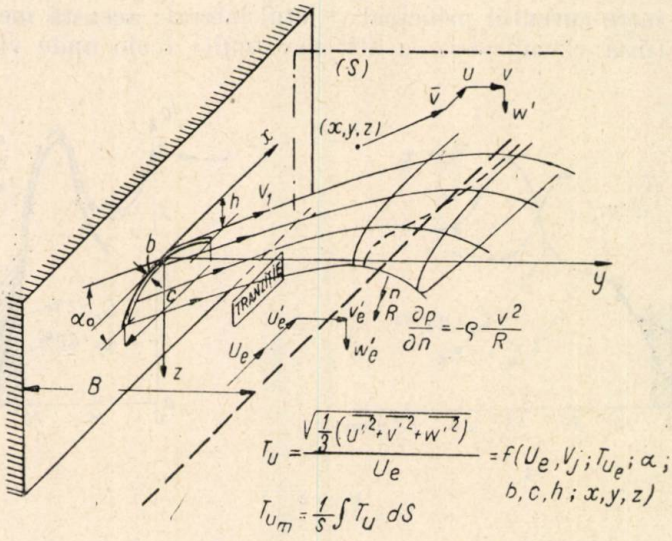


Fig. 3

— dimensiunile globale caracteristice (grosimea jetului, suprafața de viteză maximă în interiorul jetului, raza mijlocie de curbură, grosimea dîrei, anvergura jetului etc).

În prezenta lucrare s-a studiat anvergura B (fig. 3) ca mărime globală, caracterizînd comportamentul aerodinamic al jetului. Determinarea lui B a fost făcută prin aceeași metodă (paragraful 2) de apreciere a frontierei urmînd linia $x = \text{const}$, $z = \text{const}$, pentru toate formele de orificii.

Trebuie remarcat că lipseşte încă un criteriu mai precis pentru definirea lui B.

Parametrii aerodinamici daţi sînt:

— viteza U_e şi gradul de turbulenţă $T_{u_e} = \frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{U_e}$ a curentului principal în amonte;

— viteza V_j şi gradul de turbulenţă $T_{u_j} = \frac{\sqrt{\overline{v_j'^2}}}{V_j}$ al jetului la ieşire (o medie pe suprafaţa orificiului).

Parametrii aerodinamici care rezultă din interacţiune sînt:

— distribuţia de viteze şi presiuni în interiorul zonei de interacţiune şi de asemenea la exterior;

— distribuţia de viteze în zona de frontieră a jetului şi a curentului exterior — un fel de strat limită;

— distribuţia de viteze în dîra dinapoia „corpului" fluid;

— distribuţia gradului de turbulenţă în tot domeniul.

În prezenta lucrare s-a studiat distribuţia vitezelor şi gradul de turbulenţă în zona de frontieră (strat-limită) şi în dîră.

S-a introdus o medie

$$T_{u_m} = \frac{1}{S} \int T_u \, dS, \tag{3}$$

unde S este o suprafaţă, $x = \text{const.}$ în dîră (fig. 3).

Se vede că e greu să se stabilească relaţii care să caracterizeze complet corelaţiile între parametrii geometrici daţi şi rezultate. Numărul experienţele particulare mergînd la infinit rezultă necesitatea unei analize dimensionale mai întîi şi apoi scheme teoretice. În acest fel se va putea sesiza importanţa unor parametri şi studia optimizarea lor pentru diferite aplicaţii.

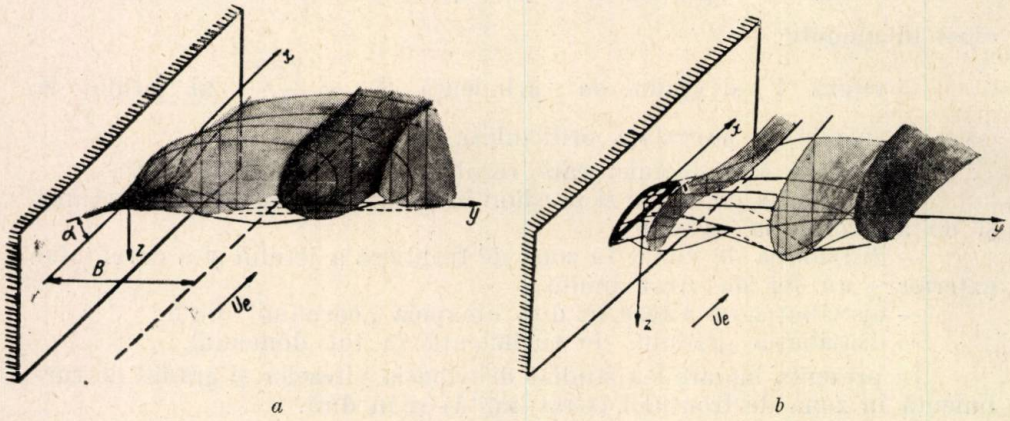
4. REZULTATE EXPERIMENTALE ŞI INTERPRETAREA LOR

În primul rînd a fost determinată geometria jetului deformat traversînd zona de frontieră. Cîteva exemple se dau în figura 4.

Liniile care, plecînd din orificiu, formează suprafaţa corpului „fluid" nu au nimic comun cu eventualele linii de curent pe această suprafaţă. Ele încadrează jetul indicînd forma tridimensională a acestuia, care se prezintă destul de complicată. Se remarcă dificultatea de a determina raza de curbură a liniilor de curent locale şi în acelaşi timp de a preciza lungimea de evoluţie a jetului. Schemele teoretice trebuie să considere cazul unui jet care are un gradient de presiune transversal şi care prin urmare, se curbează. Lungimea caracteristică de evoluţie B depinde de unghiul de incidenţă (α) a jetului în orificiu şi de gradul de turbulenţă al curentului principal. Astfel, în figura 5 se arată unele din rezultatele obţinute.

Minimul lui B pentru $T_{u_e} \sim 7\%$ arată interacţiuni neliniare între cele două jeturi. Forma orificiului jetului nu joacă un rol important în variaţia

lui *B*. Din punct de vedere teoretic prima chestiune importantă este natura scurgerii în jurul jetului deformat. Ipoteza jeturilor subţiri [4] le consideră pe acestea ca aripi subţiri obişnuite, fenomenul de portanţă producîndu-se ca pentru aripi solide.



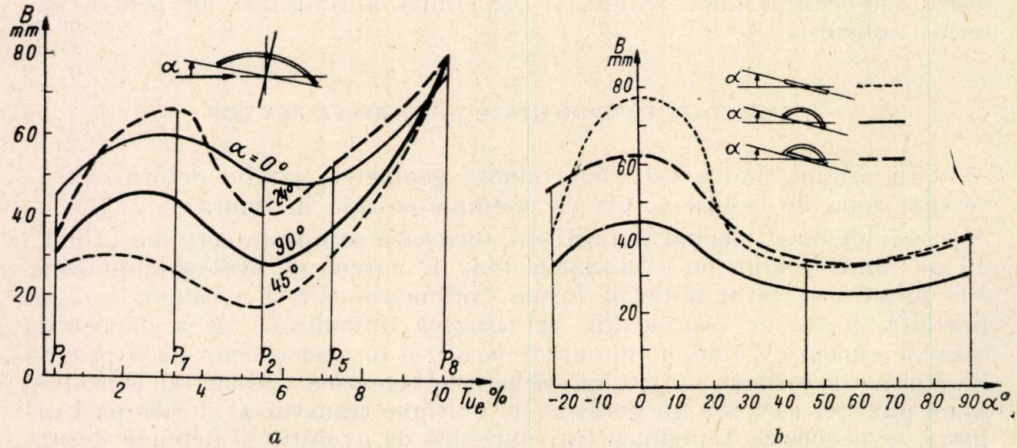
a *b*

Fig. 4

Analiza rezultatelor experimentărilor noastre duce la următoarele remarci :

— într-adevăr, pentru grade mici de turbulenţă (< 5%) scurgerea în jurul zonei de interacţiune este potenţială

$$\int_S \text{rot } \overline{V} \, d\sigma = 0 \qquad (4)$$



a *b*

Fig. 5

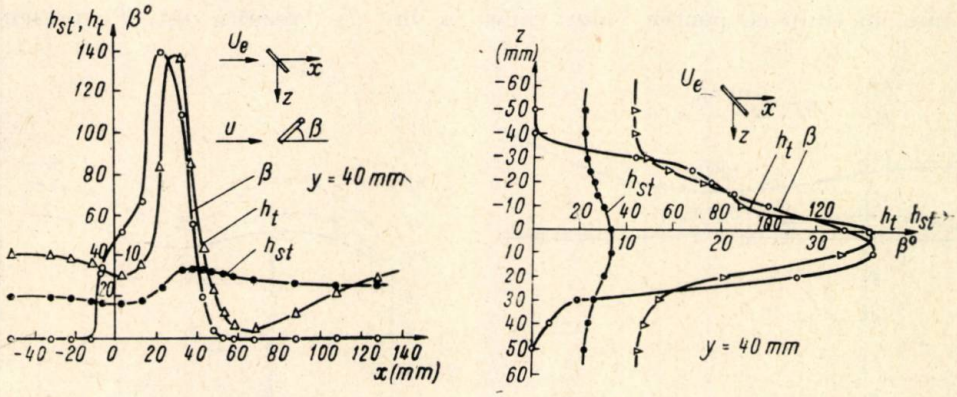
pentru domenii (S) a căror dimensiune caracteristică este de ordinul de mărime al grosimii jetului deformat. Pentru aripile rigide S este de ordinul de mărime a grosimii stratului-limită spre zona de desprindere. Deci

aproape de orificiul de ieşire al jeturilor subţiri, acestea se comportă, din punct de vedere aerodinamic, ca aripile subţiri. Însă mai departe, ţinînd seama de grosimea crescîndă a jetului şi de formarea unei zone de interacţiune, comportamentul aerodinamic al jetului deformat este modificat în mod esenţial;

— pentru grade ridicate de turbulenţă ale curentului principal comportamentul aerodinamic al jetului este modificat chiar de la ieşire. Circulaţia în jurul profilului „fluid", ca de altfel pentru profilul rigid [5], nu capătă deloc valoarea sa obişnuită.

În consecinţă a doua chestiune teoretică importantă este analiza frontierei jetului, acolo unde în cazul corpurilor rigide se află stratul-limită şi unde, pentru pereţii impermeabili, $\overline{V}_v = 0$. S-a explorat acest domeniu, în detaliu, cu firul cald (figura 1,2) şi cu un tub Pitot-Prandtl destul de mic ($Ø_e \sim 3$ mm), determinînd distribuţia de viteze (valoare şi orientare) şi presiune statică, cum se arată în figura 6.

Se vede că treerea peste frontieră arată o creştere însemnată a presiunii totale şi a orientării vitezei în raport cu curentul exterior ($|z| > > 40$ mm, $|x| > 50$ mm în figura 6), în timp ce presiunea statică nu suferă decît o uşoară modificare. În orice caz ceea ce este foarte important de remarcat este concentraţia vitezei într-un domeniu finit (vezi curbele după x şi z din figura 6) ceea ce constituie pentru scurgerea exterioară un fel de „obstacol fluid". Distribuţia presiunilor statice atestă în plus cîmpul aerodinamic creat în jurul acestui obstacol care comportă nuclee turbionare destul de puternice.



a *b*

Fig. 6

A treia chestiune teoretică importantă este existenţa şi structura dîrei din spatele jetului deformat. Se pot vedea, în figura 7, distribuţii de viteze şi de fluctuaţii într-o secţiune în aval de jetul deformat.

Se remarcă existenţa unui profil de viteze ca şi în cazul unei dîre obişnuite, numai pentru un grad mic de turbulenţă (T_{u_e}) a curentului incident, în timp ce pentru valori mari ale lui T_{u_e} dîra reprezintă o suprapunere aproape uniformă a fluctuaţiilor de diferite feluri. Nu s-au găsit semnale care să indice existenţa nucleelor de vîrtejuri Bénard-Kármán.

S-a explicat acest fenomen prin natura complet diferită a zonei de frontieră, acolo unde în mod obișnuit se formează stratul-limită care se desprinde pentru o valoare anumită a gradientului de presiune longitudinal. Dar importanța practică a dîrei se manifestă prin creșterea gradului de

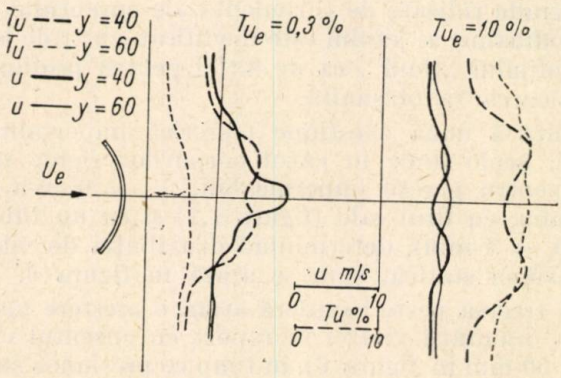
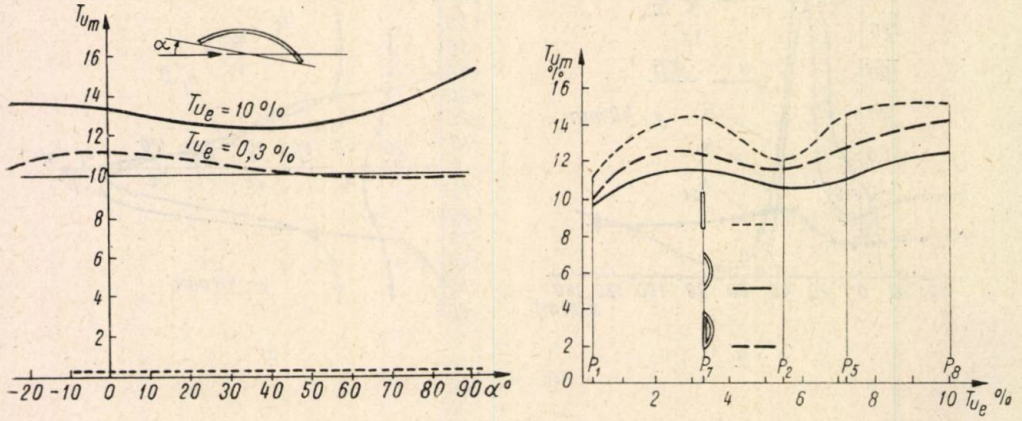


Fig. 7

turbulență al curentului incidental și în consecință s-a determinat acest grad de turbulență T_{u_m} pentru situații diferite ca cele din figura 8.

Se remarcă creșterea puternică $\left(\frac{T_{u_m}}{T_{u_e}} \approx 500\right)$ a lui T_u, cînd T_{u_e} este mic, în timp ce pentru valori mari a lui T_{u_e} rezultă un T_u crescut



a b

Fig. 8

numai cu 20%. Deci eficacitatea unui astfel de sistem generator de turbulență este evidentă pentru scurgeri fluide cu turbulență normală (1—5%).

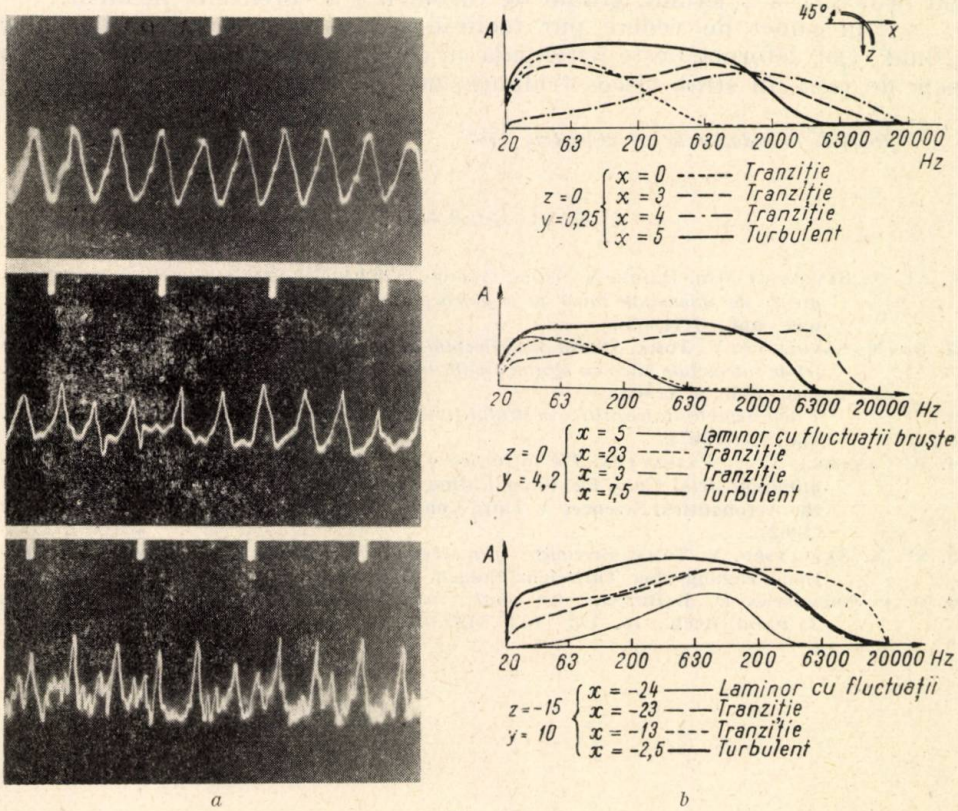
Trebuie de asemenea remarcat că, în cursul încercărilor, s-au întîlnit zone unde gradul de turbulență locală atinge valori de 25—35%, care au putut să fie măsurate cu ajutorul unui etalonaj dinamic special al firului

cald [5]. Problema practică a utilizării jeturilor laterale ca generatoare de turbulență [5] cuprinde trei aspecte : mai întîi valoarea medie a gradului de turbulență și dimensiunea zonei turbulente realizate.

Rezultatele experiențelor efectuate arată că forma orificiului jetului nu joacă un rol esențial decît probabil în privința omogenității turbulenței în zona de interacțiune.

În fine o ultimă chestiune teoretică se leagă de cîmpul de perturbații creat în jurul jetului lateral și în special în stratul-limită din jurul orificiului jetului. S-a explorat această zonă prin apropiere progresivă de orificiu și s-a observat că stratul-limită laminar al curentului principal se găsește în regim de tranziție în amonte de orificiul jetului.

În figura 9 se văd semnalele firului cald reprezentate ca oscilograme și de asemenea ca spectrograme.



a *b*

Fig. 9

Ceea ce este interesant de remarcat este frecvența stabilă a semnalelor, neatinsă cu alte perturbatoare naturale, în afara dîrei turbionare Kármán care cere însă folosirea unui obstacol. Se mai remarcă deformarea neliniară a acestor semnale și tranziția către turbulența care domnește

în jet. Se observă pe spectrograme că tranziția face să intervină game de frecvențe superioare în spectrele fluctuațiilor. Se explică acest fenomen prin instabilitatea de tip Greenspan-Benney [6], a unui profil fundamental instaționar, care este caracteristic pentru zona de frontieră a jetului.

5. CONCLUZII

Concluzia principală a acestui studiu este că forma orificiului de ieșire a jetului nu are o influență prea mare asupra geometriei jetului deformat și asupra gradului de turbulență a siajului. Cu un orificiu de ieșire cu geometrie simplă — fantă dreptunghiulară — se pot obține rezultate importante în ceea ce privește realizarea unui curent de fluid puternic turbulent. Optimizarea în acest sens comportă o alegere potrivită a parametrilor : incidența orificiului dreptunghiular, raportul vitezelor curentului principal și a jetului, gradul de turbulență a curentului incident.

Din punct de vedere pur teoretic scurgerea în jurul obstacolului „fluid" (jet deformat) este potențială cu condiții speciale la frontieră, care este de fapt un strat vîscos tridimensional.

Primită la redacție la 20 decembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. ȘT. N. SĂVULESCU, GH. DARIE, V. TOMA, *Aspecte tridimensionale ale tranziției provocate de un jet de intensitate mică pe o placă plană în scurgere incompresibilă*, St. cerc. mec. apl., *6* (1963).
2. ȘT. N. SĂVULESCU, V. TOMA, *Studiu experimental al tranziției provocate de interacțiunea unui jet de intensitate mică cu stratul-limită incompresibil al unei plăci plane*, St. cerc. mec. apl., *5* (1963).
3. — *Unele aspecte ale tranziției în stratul-limită, la numere Reynolds mici*, St. cerc. mec. apl., *5* (1967).
4. E. CARAFOLI, N. N. PATRAULEA, *The influence of Lateral Jets, Simple or Combined with Longitudinal Jets, Upon the Wing Lifting Characteristics*, International Council of the Aeronautical Sciences — Third Congres — Stockholm, Sweden 27—31 August (1962).
5. ȘT. N. SĂVULESCU, V. TOMA, *Erzeugen einer Strömung mit hohen Turbulenzgrad*, Informations Tagung über Turbulenz Fragen, Dresda, April (1967).
6. H. P. GREENSPAN D. J. BENNEY, *On shear — layer instability breakdown and transition*, J. Fluid Mech., *15*, 133—153 (1963).

ACȚIUNEA UNDELOR DE ȘOC SLABE ASUPRA OBSTACOLELOR PLANE*)

de LUCIAN Z. DUMITRESCU
Institutul de mecanică a fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

Se prezintă un studiu teoretic și experimental al difracției undelor de șoc slabe în jurul diferitelor obstacole. Se arată că procesul de difracție al undelor are loc într-un timp mult mai scurt decît cel de formare a dîrei turbulente în spatele obstacolului; de aceea, în primele momente, mișcarea indusă de unda de șoc este cvasi-potențială. Aceasta a permis elaborarea unei teorii simple, pe baza căreia se poate calcula variația în timp a distribuției de presiuni. Rezultatele experimentale, obținute într-un tub de șoc, concordă cu teoria.

INTRODUCERE

Studiul curgerii nestaționare care se produce atunci cînd o undă de șoc slabă (numărul Mach de propagare, M_s, aproape de unitate) întîlnește un obstacol bidimensional, prezintă un interes fundamental cert, mai ales deoarece constituie un model simplificat pentru multe fenomene ce se întîlnesc în practică, cum ar fi efectul exploziilor balistice asupra construcțiilor, acțiunea — asupra clădirilor — a undelor de șoc produse de trecerea la joasă altitudine a avioanelor supersonice etc. Rezultatele acestor investigații vor fi prezentate în cele ce urmează, astfel:

În prima parte se vor discuta unele aspecte calitative ale fenomenelor, care permit să se tragă concluzii importante cu privire la diferitele stadii de evoluție a curgerii.

În a doua parte se va prezenta o analiză teoretică, pe baza căreia se poate calcula distribuția presiunilor pe obstacole.

În sfîrșit, se va da un rezumat al verificărilor experimentale, efectuate într-un tub de șoc, precum și cîteva detalii asupra tehnicii măsurătorilor.

Trebuie amintit că alți autori [1], [2] au publicat studii teoretice ale unor probleme înrudite, dar că în literatura publicată nu s-au găsit

*) Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **13**, *3* (1968) (în limba engleză).

soluții complete pînă la calculul concret al distribuției de presiuni și nici rezultate experimentale. Parte din rezultatele date în această lucrare au fost prezentate pe scurt în altă parte [3].

I. EVOLUȚIA PROCESELOR NESTAȚIONARE

I. 1. INVESTIGAȚII PRELIMINARE

La începutul programului de cercetări s-a efectuat o serie de încercări preliminare care au avut drept scop verificarea întregului ansamblu de instalații experimentale și aparate de măsură, în vederea experiențelor cantitative ulterioare, precum și obținerea unor informații asupra ordinului de mărime și scării de timp a fenomenelor. Toate lucrările experimentale s-au efectuat într-un tub de șoc de secțiune constantă; detalii cu privire la acesta se vor da mai jos.

Modelul pentru experiențele preliminare, care era montat în peretele lateral al tubului de șoc, era un cub cu latura de 25 mm, avînd montat un traductor de presiune capacitiv în centrul uneia din fețele sale laterale. Modelul putea fi rotit în jurul axei sale, astfel încît să se aducă traductorul în oricare din cele trei poziții notate cu *a*, *b*, *c* (fig. 1), adică în fața undei de șoc incidente, lateral sau în spate. Tot în figura 1 s-au reprodus oscilograme tipice ale variației presiunilor pentru fiecare din cele trei poziții ale traductorului.

Rezultatele acestor încercări au dus la următoarele concluzii:

(1) Saltul maxim de presiune, pe fața anterioară a modelului, este aproximativ dublul creșterii de presiune statică produse prin trecerea

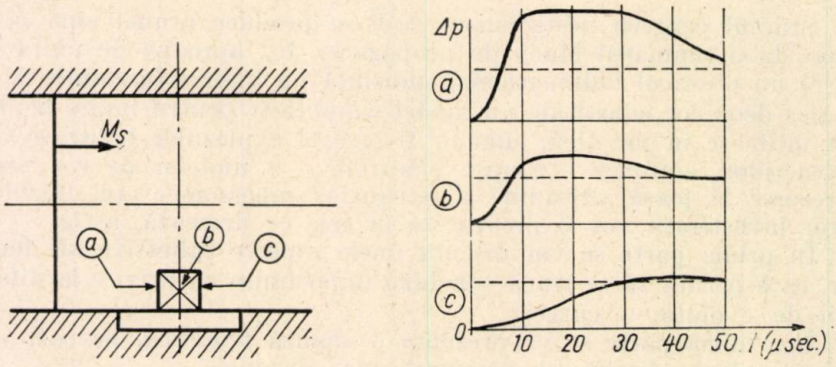


Fig. 1

undei de șoc incidente, adică este egal cu saltul de presiune din spatele unei unde de șoc reflectate. Aceasta determină intervalul de presiuni ce trebuie să corespundă sensibilității sistemului de măsurare a presiunilor.

(2) Procesul nestaționar este foarte rapid, de ordinul de durată al trecerii undei de șoc peste model. Aceasta scoate în evidență necesitatea utilizării unor traductoare de presiune cu un timp de răspuns foarte scurt,

de ordinul a cîteva microsecunde, pentru a putea urmări asemenea fluctuații rapide.

(3) Tubul de șoc existent și aparatura de măsură s-au dovedit adecvate pentru acest tip de încercări, întrucît performanțele lor îndeplinesc cerințele de mai sus.

I. 2. VIZUALIZAREA CURGERII

În urma încercărilor preliminare de mai sus, s-a întreprins un studiu sistematic al stadiilor succesive ale proceselor de difracție a undelor de șoc, care se petrec în jurul unor obstacole bidimensionale de forme diferite. Pentru aceasta s-a folosit metoda de vizualizare cu umbre, cu ajutorul unei surse de scîntei de 6 kV, declanșată de un traductor de presiune convenabil plasat în peretele tubului de șoc, prin intermediul unui circuit electronic de întîrziere. Formele de obstacole care prezintă interes practic sînt relativ complicate (de ex. fig. 2 *a*, *b*); de aceea, s-au cercetat doar cele mai simple configurații posibile; de aici însă se pot deduce și caracteristicile curgerii în jurul unor corpuri mai complexe.

Astfel, primul model încercat reprezintă o treaptă dirijată spre amonte (fig. 3*a*); din motive tehnice a trebuit să se folosească o configurație simetrică, ajungîndu-se la montajul din figura 3 *b*. Acesta are și avantajul că se evită interacțiunile dintre curgere și stratul-limită al tubului de șoc.

În imaginile următoare (fig. 4, 5; 6a; 7; 8) s-au reprodus mai multe fotografii, luate la diverse intervale de timp după trecerea undei de șoc peste model. Acestea au fost obținute în experiențe succesive cu tubul de șoc, păstrînd însă intensitatea undei de șoc constantă, cu $M_s = 1{,}10$.

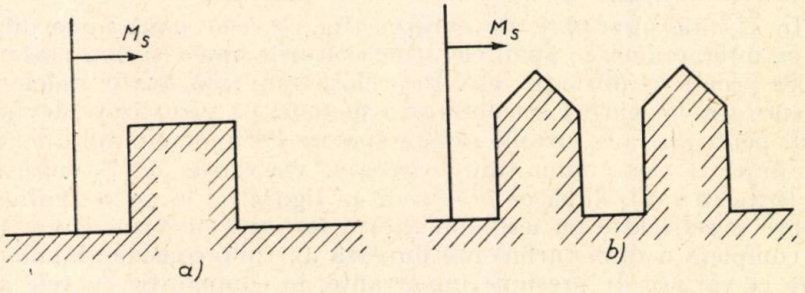


Fig. 2

Prima imagine a fost luată exact în clipa cînd unda de șoc atinge obstacolul (fig. 4); în următoarele două (fig. 5, 6a) se poate urmări evoluția zonei de difracție în jurul colțurilor modelului. În figura 6*b* se dă o schemă care redă principalele caracteristici ale acestor vizualizări. Liniile AB, $A'B'$ reprezintă unda de șoc incidentă care a înaintat pe o distanță oarecare după ce a lovit modelul. DD' este o undă de șoc reflectată, care are aceeași intensitate ca și cînd ar fi reflectată de un perete infinit și care lasă în spatele său o zonă de stagnare $DEE'D'$. Influența colțurilor modelului, O, O', se manifestă numai în interiorul domeniilor pertur-

bate $CBDE$, $C'B'D'E'$. Limitele lor sînt formate de undele de şoc BD, $B'D'$ care se propagă în zona de curgere uniformă lăsată în urma sa de unda de şoc incidentă şi de undele de rarefiere DE, $D'E'$ care înaintează în zona de stagnare. Întrucît unda de şoc are o intensitate redusă, vitezele de propagare ale tuturor undelor sînt apropiate de viteza sunetului, iar contururile $CBDE$, $C'B'D'E'$ sînt cvasi-circulare; uşoarele distorsiuni ale undelor CBD, $C'B'D'$ sînt datorite vitezei curentului din spatele undei

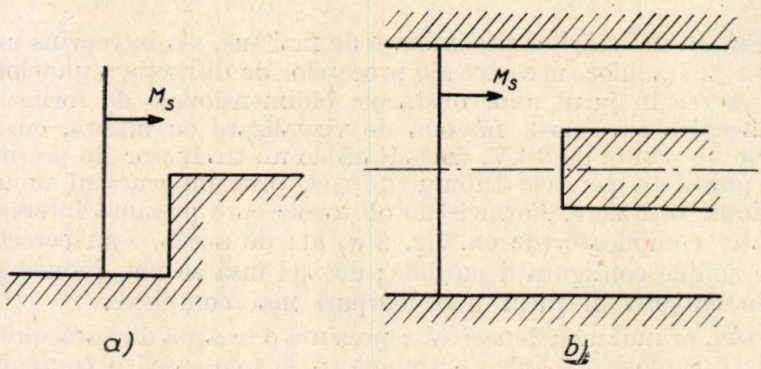


Fig. 3

de şoc, care este mică (pentru $M_s = 1{,}10$, numărul MACH al curgerii este $M = 0{,}154$), dar se adună geometric la viteza de propagare a undelor respective. În sfîrşit, se observă apariţia unor vîrtejuri legate de colţurile O, O' ale modelului; diametrul acestora creşte pe măsură ce unda de şoc incidentă se propagă în aval.

În stadiile ulterioare ale curgerii (fig. 7), cele două unde difractate încep să interacţioneze; apoi, ele ating colţurile opuse şi dau naştere unui al doilea proces de difracţie etc. În acelaşi timp însă, toate undele slăbesc ca intensitate, iar curînd sensibilitatea metodei de vizualizare devine insuficientă pentru a face vizibile aceste spectre de unde complicate. Pînă la urmă, după trecerea unui timp oarecare, vîrtejurile de la colţuri încep să fie tîrîte în aval, după cum se vede în figura 8; în acest stadiu undele incidente şi reflectate au ieşit din cadrul ferestrei de vizualizare. Dezvoltarea completă a dîrei turbulente durează un timp considerabil, dar nu dă naştere la variaţii de presiune importante, în comparaţie cu cele produse de fenomenele de difracţie.

Evoluţia fenomenelor descrisă mai sus a fost în realitate prevăzută calitativ încă înainte de efectuarea încercărilor; motivul principal pentru această comportare regulată este că procesele de difracţie a undelor şi deformarea dîrei turbulente au loc în regiuni diferite din spaţiu şi nu se interferează. În cazul altor configuraţii, cînd undele difractate se propagă chiar în zonele în care pînă la urmă se va dezvolta dîra turbulentă, prezicerea fenomenelor este mai puţin sigură.

De aceea s-a efectuat o nouă serie de experienţe cu obstacole de diferite forme, fără însă a mai urmări evoluţia mişcării în detaliu, ca în prima serie de vizualizări.

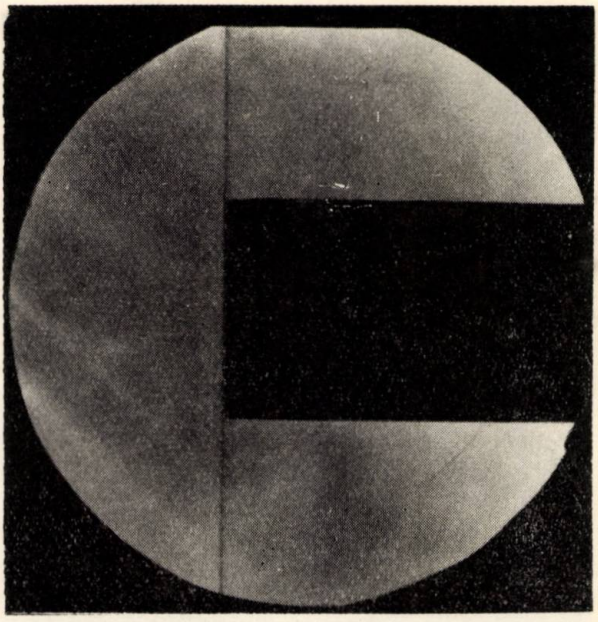


Fig. 4

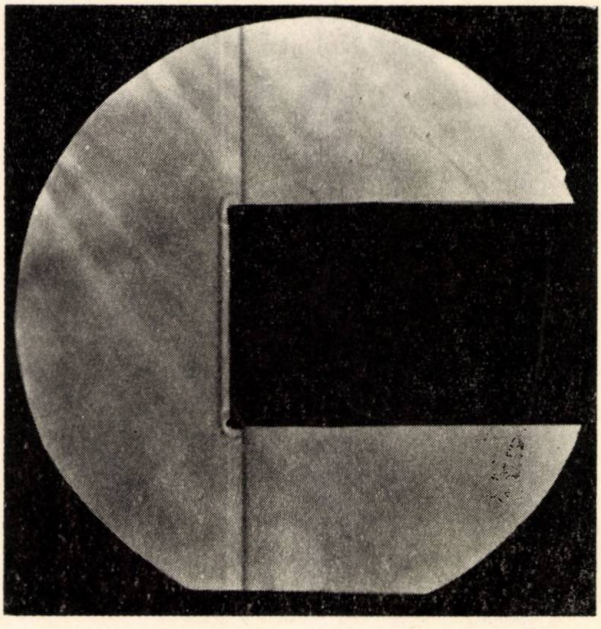
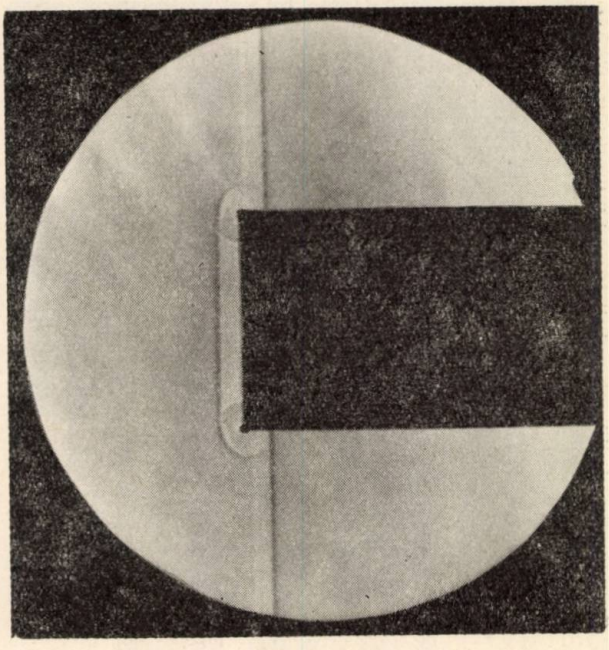
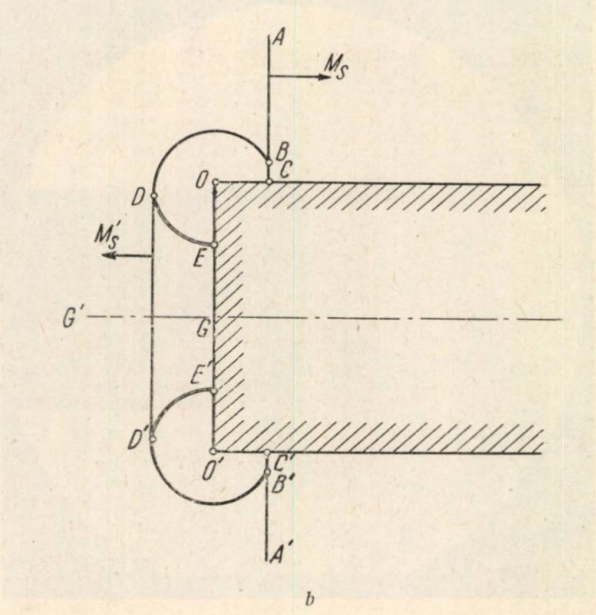


Fig. 5



a



b

Fig. 6

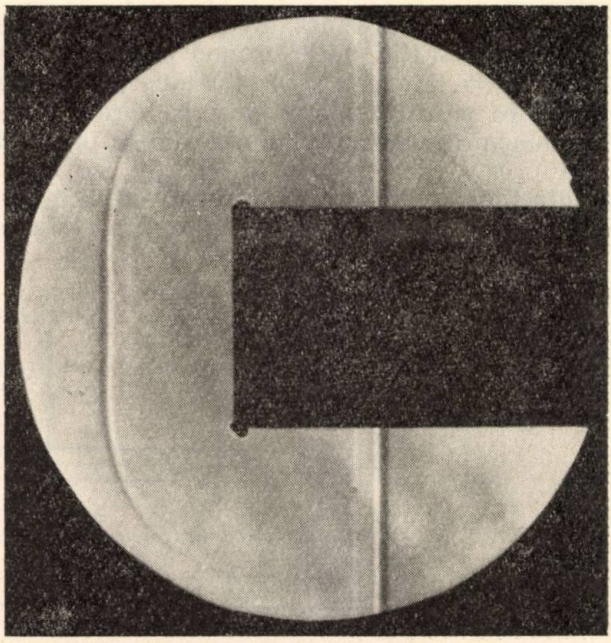


Fig. 7

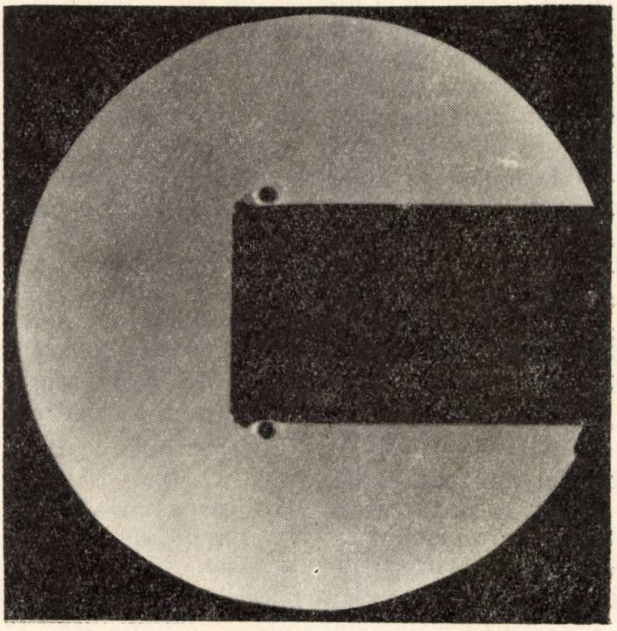


Fig. 8

A doua configurație reprezintă inversul primei, corespunzînd unei trepte îndreptate spre aval (fig. 9 *a*); în mod practic, s-a folosit un model simetric, ca în figura 9*b*. Modelul a fost luat de o lungime relativ mare, pentru a se asigura că perturbațiile produse la bordul său de atac se atenuează pînă în momentul cînd unda de șoc ajunge în dreptul ferestrei de vizualizare.

Imaginea din figura 10 arată că spectrul de difracție este oarecum similar celui descris mai sus : ia naștere un contur cvasi-circular și un vîr-

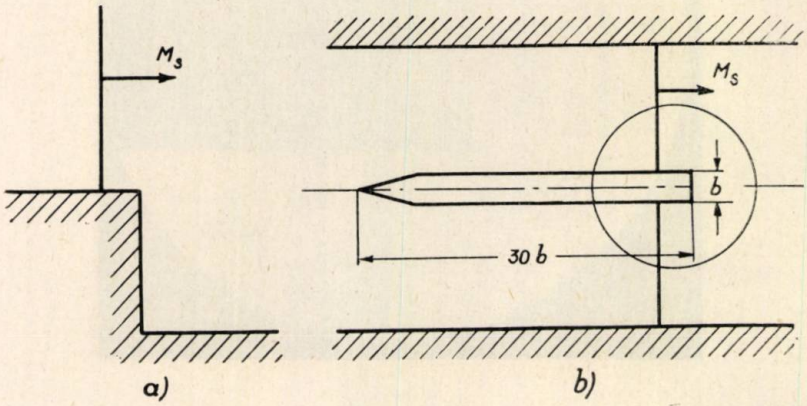


Fig. 9

tej atașat la colțul modelului. Curentul de aer urmărește colțul, fiind deflectat cu 90° ca într-o mișcare potențială, iar spectrul undelor de difracție nu este perturbat de dezvoltarea dîrei, care se produce mai tîrziu. În figura 11, se poate vedea desprinderea vîrtejului; totuși, mișcarea generală încă nu este afectată, cu excepția unei zone restrînse în vecinătatea colțului.

În scopul de a verifica măsura în care mișcarea rămîne cvasipotențială în fazele sale inițiale, s-au examinat două cazuri extreme. Primul, reprezentat în figura 12, corespunde unei plăci plane dispuse perpendicular pe curent; el constituie o combinație a mișcărilor produse de modelele din figurile 5 și 10. Este de remarcat că cele două unde de perturbație cvasicirculare, din fața plăcii (rarefiere) și din spate (compresie) au raze diferite. Acest fapt se datorește diferenței dintre valorile locale ale vitezei sunetului, viteza cu care se propagă cele două unde : în fața plăcii, perturbația se deplasează în zona de stagnare din spatele undei de șoc reflectate, unde temperatura, și deci și viteza sunetului, este mai mare decît în zona neperturbată din spatele modelului.

Exemplul cel mai caracteristic de inversare a curgerii este arătat în figura 13, în care se poate vedea că direcția curentului este rotită cu 180° în jurul unei plăci plane paralele cu direcția de propagare; se remarcă de asemenea prezența vîrtejurilor atașate.

În sfîrșit, în scopul completării seriei de configurații simple, s-au încercat și două obstacole cu pante oblice. Primul (fig. 14), nu necesită explicații speciale, fiind foarte asemănător cazului reprezentat în figura 10,

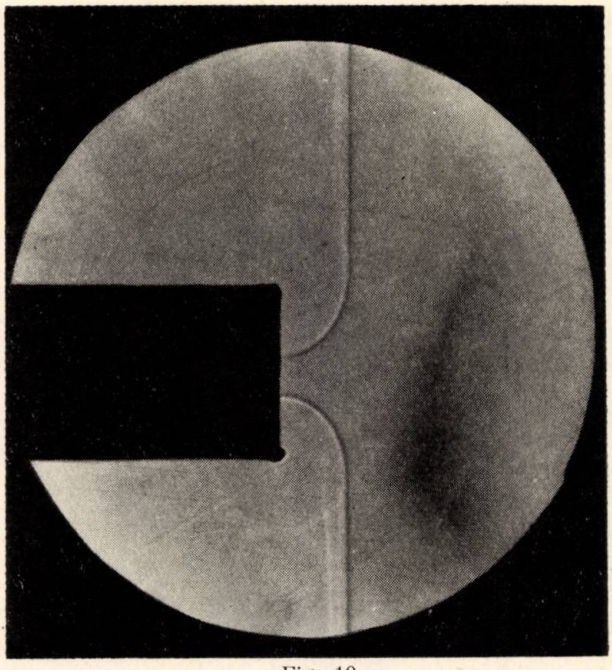


Fig. 10

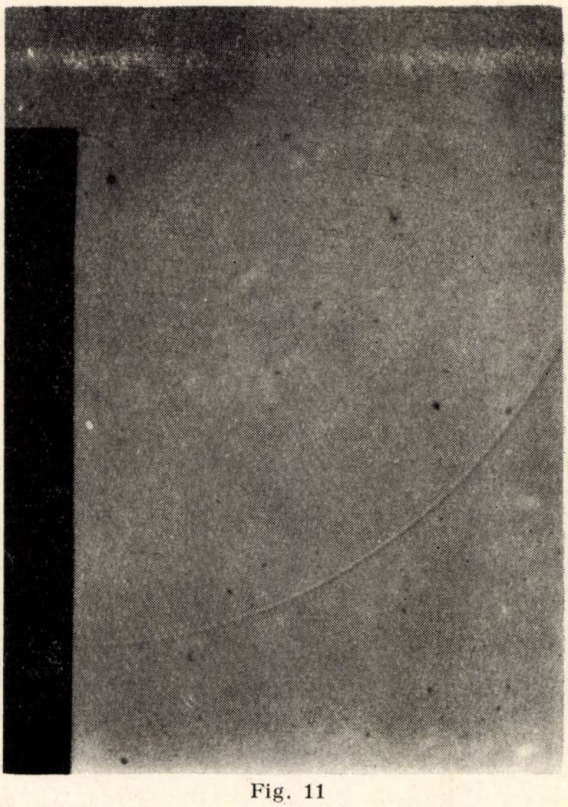


Fig. 11

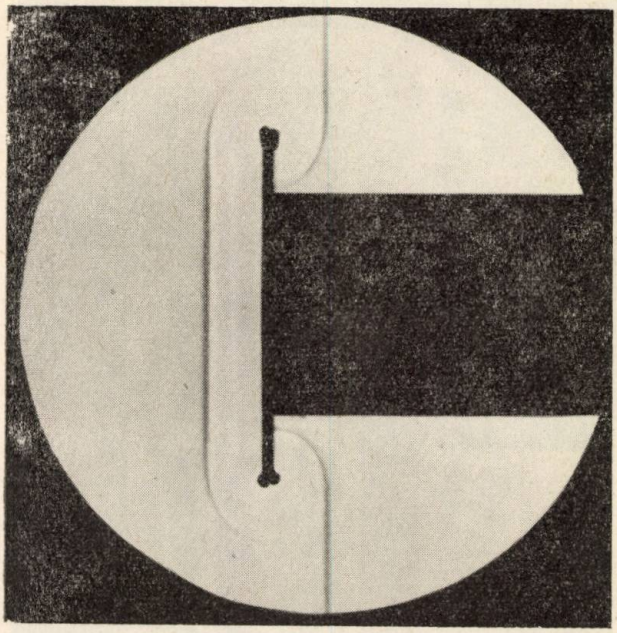


Fig. 12

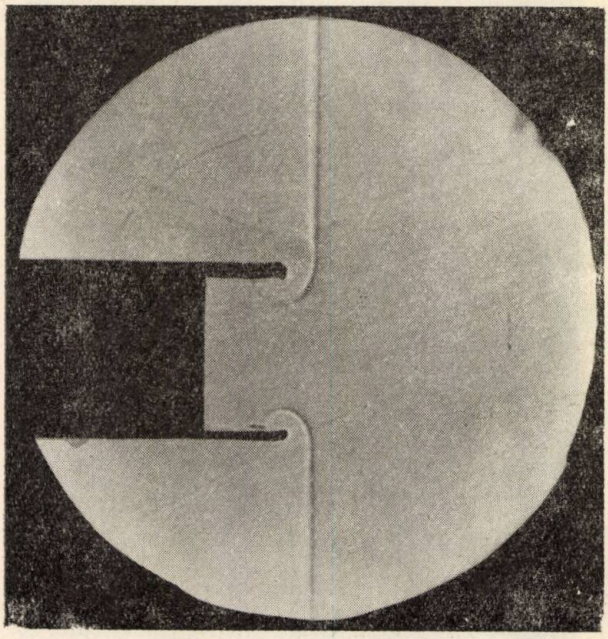


Fig. 13

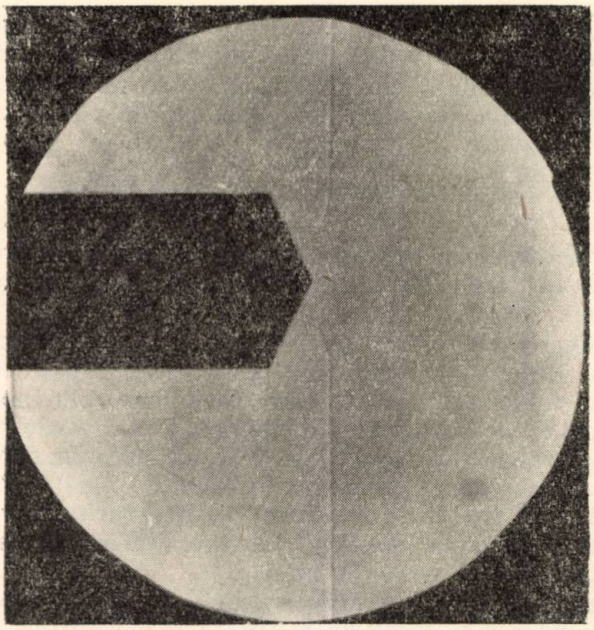


Fig. 14

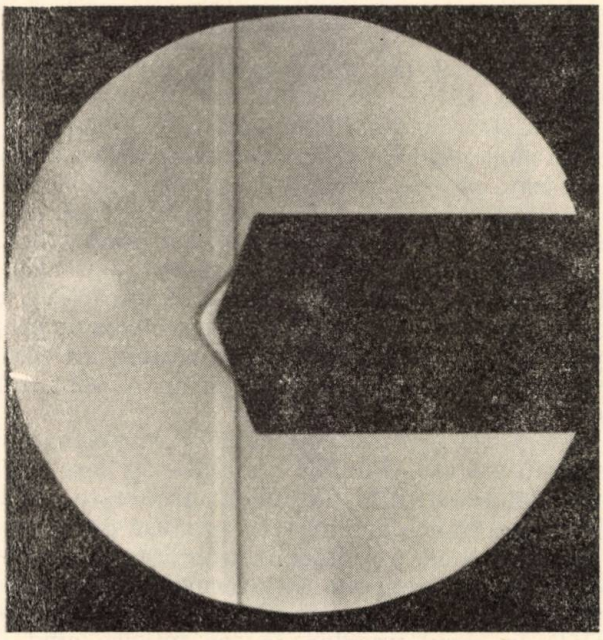


Fig. 15

Obstacolul cu muchie frontală (fig. 15) dă naştere unei mişcări mai complexe; după cum se poate vedea, unda de şoc incidentă suferă o reflexie regulată pe peretele oblic al modelului, iar unda reflectată este tangentă la unda de perturbaţie cvasi-circulară produsă de vîrf.

I. 3. DISCUŢIE. SEPARAREA SCĂRILOR DE TIMP

Principalele concluzii calitative ce pot fi trase din datele experimentale de mai sus sînt implicit conţinute în observaţiile anterioare. Ele pot fi rezumate astfel:

1) Cele două procese care au loc în cursul evoluţiei mişcării nestaţionare produse de trecerea unei unde de şoc slabe peste un obstacol şi anume difracţia undei şi formarea dîrei turbulente, nu interferează între ele într-o măsură cît de cît însemnată. De aceea, în primele stadii, mişcarea poate fi considerată ca fiind potenţială, întrucît curgerea ocoleşte colţurile, unde se formează vîrtejuri ataşate; ulterior, cînd aceste vîrtejuri se desprind şi sînt tîrîte în aval în timpul formării dîrei turbulente, undele difractate s-au depărtat deja de model şi au devenit foarte atenuate, încît nu mai joacă un rol nici în evoluţia dîrei.

Aceste fenomene pot fi explicate uşor dacă se observă că stadiul de propagare a undelor este legat de o durată caracteristică T_p, de ordinul

$$T_P = O\,(l/a_0), \tag{1}$$

unde l este o dimensiune caracteristică a obstacolului, iar a_0 este viteza sunetului; stadiul de formare al dîrei este legat de o durată T_w:

$$T_w = O\,(l/u), \tag{2}$$

unde u, este viteza curentului. Cum, pentru unde incidente slabe, u este mult mai mic decît a_0 ($M = u/a_0 = 0{,}1 \ldots 0{,}2$), raportul scărilor de timp este de acelaşi ordin, iar cele două fenomene pot fi separate. Această observaţie simplifică în mod considerabil tratarea teoretică a ambelor fenomene; trebuie însă precizat că este mărginită la cazul undelor slabe, deoarece în cazul unor unde de şoc tari, la care numărul Mach al curgerii este şi el mare (de ex. pt. $M_s = 3$, $u/a_0 = 1{,}36$), cele două scări de timp devin comparabile, iar procesele pot să interacţioneze puternic.

2) Trecînd acum la studiul procesului de difracţie a undelor, vizualizările arată că, din aceleaşi motive ca mai sus, viteza de propagare a diferitelor unde, aproximativ egală cu viteza sunetului, nu este mult afectată de prezenţa curgerii, iar undele de difracţie nu se abat mult de la forma ideală circulară.

Această observaţie permite, aşa cum se va arăta mai jos, să se înlocuiască, în studiul teoretic, limitele regiunilor în care curgerea este perturbată (şi care sînt constituite de undele difractate, a căror formă este determinată de interacţiunea cu curgerea produsă de ele însele), cu contururi circulare: în acest mod, o problemă cu limite necunoscute, ce ar trebui determinate odată cu mişcarea, este transformată într-una mult mai simplă, cu limite cunoscute. Şi aici trebuie precizat că această simplificare nu mai este valabilă în cazul undelor de şoc intense cînd trebuie urmată altă cale.

II. STUDIUL TEORETIC AL PROBLEMEI

II. 1. IPOTEZE DE BAZĂ. MODELUL SIMPLIFICAT AL MIȘCĂRII

Pentru elaborarea teoriei, se va lua în considerare mai întîi cea mai simplă configurație, și anume cea a treptei îndreptate spre amonte (fig. 6 *a*, *b*). În conformitate cu observațiile din paragraful precedent, spectrul undelor poate fi reprezentat schematic ca în figura 16 (fig. 6 b), cu un cerc,

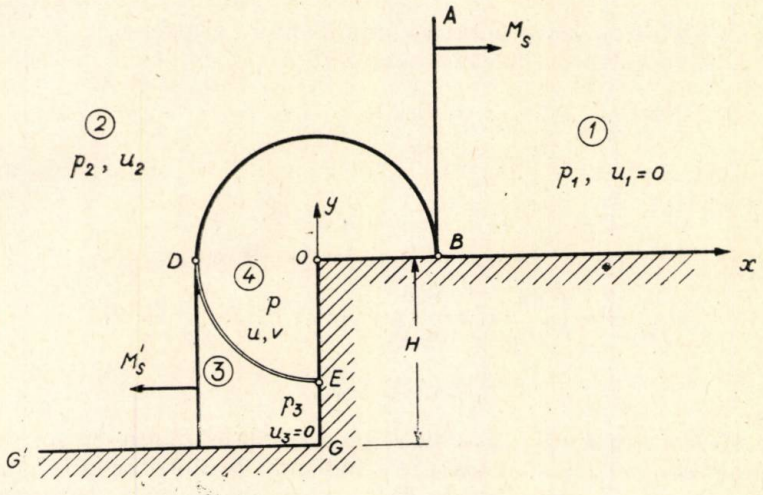


Fig. 16

avînd raza proporțională cu viteza sunetului. Unda de șoc incidentă, al cărui număr Mach de propagare este M_s, lasă în spatele său o zonă de curgere uniformă *2*; unda de șoc reflectată, avînd viteza M_s', dă naștere zonei de stagnare *3*; limita zonei perturbate *4* este formată de arcul BD, reprezentînd o undă de șoc, și de unda de rarefiere DE.

În ipoteza de bază a unei unde incidente slabe

$$M_s = 1 + \varepsilon \tag{3}$$

(cu ε mic față de unitate), teoria curentă a tuburilor de șoc [4] permite calculul tuturor parametrilor mișcării în zonele de curgere uniformă *2* și *3*; pentru aer, cu coeficientul adiabatic $x = 7/5$, se obține:

$$p_2/p_1 = \frac{1}{6}(7\,M_s^2 - 1) \cong 1 + 2{,}3\,\varepsilon, \tag{4}$$

$$M_s' = \frac{M_s}{3}\left(1 + \frac{2}{M_s^2}\right) \cong 1 - \varepsilon/3, \tag{5}$$

$$\frac{p_3 - p_1}{p_2 - p_1} = 1 + \frac{7p_2/p_1}{6 + p_2/p_1}. \tag{6}$$

Singurele mărimi necunoscute care rămîn sînt parametrii mișcării în regiunea *4*, care are limite cunoscute.

Problema va fi simplificată în continuare admițînd, în conformitate cu ipotezele de bază, că în regiunea *4*, componentele vitezei u, v, sînt mici față de viteza sunetului a_0 și liniarizînd ecuațiile de mișcare, după cum se arată în paragraful următor.

II. 2. TRANSFORMAREA ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

Ecuațiile de mișcare pentru componentele vitezei u, v (cu P, presiunea și ρ, densitatea), sînt binecunoscute:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \tag{9}$$

$$\mathrm{d}p/\mathrm{d}\rho = a^2. \tag{10}$$

Se observă însă că mișcarea reprezentată în figura 16 nu are nici o dimensiune caracteristică, cu excepția înălțimii H a obstacolului, care, însă, nu joacă nici un rol pînă cînd unda de perturbație nu atinge peretele inferior GG'.

În consecință, mișcarea este auto-modelată, iar numărul variabilelor independente poate fi redus printr-o transformare corespunzătoare

$$\left.\begin{aligned} \bar{x} &= x/a_0 t, \\ \bar{y} &= y/a_0 t. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Aci a_0 este viteza sunetului în regiunea *2*, care poate fi luată aceeași pentru toată mișcarea. Ecuațiile (7)—(9) devin atunci:

$$\bar{x}\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \bar{y}\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} - u\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} - v\frac{\partial u}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{a_0^2\,\rho}\frac{\partial p}{\partial \bar{x}}, \tag{12}$$

$$\bar{x}\frac{\partial v}{\partial \bar{x}} + \bar{y}\frac{\partial v}{\partial \bar{y}} - u\frac{\partial v}{\partial \bar{x}} - v\frac{\partial v}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{a_0^2\,\rho}\frac{\partial p}{\partial \bar{y}}, \tag{13}$$

$$\bar{x}\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} + \bar{y}\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} - a_0^2\,\rho\left(\frac{\partial u}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{y}}\right) - u\frac{\partial p}{\partial \bar{x}} - v\frac{\partial p}{\partial \bar{y}} = 0. \tag{14}$$

În acest sistem de ecuații, consecvent cu ipotezele de mai sus asupra mărimii vitezelor de perturbație, se pot neglija termenii de forma $u\dfrac{\partial u}{\partial \bar{x}}$,

$u \dfrac{\partial p}{\partial \overline{x}}$ și se poate lua $\rho = \rho_2 = \text{const}$. În acest mod, ecuațiile (12 — 14) se reduc la următorul sistem linear:

$$\overline{x} \frac{\partial u}{\partial \overline{x}} + \overline{y} \frac{\partial u}{\partial \overline{y}} = \frac{1}{a_0^2 \rho_2} \frac{\partial p}{\partial \overline{x}}, \tag{15}$$

$$\overline{x} \frac{\partial v}{\partial \overline{x}} + \overline{y} \frac{\partial v}{\partial \overline{y}} = \frac{1}{a_0^2 \rho_2} \frac{\partial p}{\partial \overline{y}}, \tag{16}$$

$$\overline{x} \frac{\partial p}{\partial \overline{x}} + \overline{y} \frac{\partial p}{\partial \overline{y}} = a_0^2 \rho_2 \left(\frac{\partial u}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial v}{\partial \overline{y}} \right). \tag{17}$$

Eliminînd din acestea componentele u, v, rezultă o ecuație pentru presiuni:

$$\Delta p = \left(\overline{x} \frac{\partial}{\partial \overline{x}} + \overline{y} \frac{\partial}{\partial \overline{y}} + 1 \right) \left(\overline{x} \frac{\partial p}{\partial \overline{x}} + \overline{y} \frac{\partial p}{\partial \overline{y}} \right). \tag{18}$$

După cum a arătat Lighthill, aceasta poate fi redusă la ecuația Laplace

$$\Delta p = 0, \tag{19}$$

prin intermediul unei transformări de tip Busemann

$$r = \frac{2R}{1 + R^2}, \tag{20 a}$$

$$\theta = \Theta, \tag{20 b}$$

care transformă planul $(\overline{x}, \overline{y})$, în care s-au introdus coordonate polare (r, θ), în planul (X, Y), cu coordonatele polare (R, Θ).

II. 3. CONDIȚII LA LIMITĂ

Prin transformările (11) și (20), limita regiunii perturbate BDE devine un arc pe cercul unitate (fig. 17).

Condițiile la limită pentru presiunea p pe acest cerc sînt următoarele:

pe BD, $(0 < \Theta < \pi)$: $p = p_2 = \text{const}$, (21)

pe DE, $\left(\pi < \Theta < \dfrac{3\pi}{2}\right) p = p_3 = \text{const}$. (22)

De-a lungul limitei solide OB, componenta normală a vitezei trebuie să se anuleze, astfel încît, din (16), se obține:

$$\Theta = 0, \frac{\partial p}{\partial \overline{y}} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \Theta} = \frac{\partial p}{\partial Y} = 0, \tag{23}$$

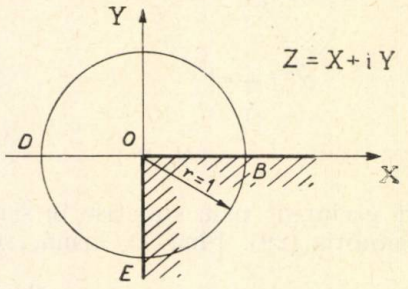


Fig. 17

şi, analog, de-a lungul liniei OE:

$$\Theta = \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\partial p}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \Theta} = \frac{\partial p}{\partial X} = 0. \tag{24}$$

Condiţiile (21)—(24) sînt suficiente pentru determinarea distribuţiei presiunilor în interiorul domeniului perturbat.

II. 4. SOLUŢIA PROBLEMEI

Se introduce un potenţial complex:

$$F(Z) = p + iq \qquad (Z = X + iY), \tag{25}$$

unde p este presiunea; acesta va fi determinat din condiţiile la limită, cu ajutorul unei transformări-conforme a domeniului din figura 17, într-un semicerc (fig. 18):

$$\zeta = Z^{2/3} \qquad (\zeta = \xi + i\eta). \tag{26}$$

În acest plan, condiţiile la limită devin

$$\zeta = e^{i\alpha} \quad \left(0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}\right), \qquad p = p_2 = \text{const}, \tag{27}$$

$$\left(\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi\right), \qquad p = p_3 = \text{const}, \tag{28}$$

$$\eta = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = 0. \tag{29}$$

Din (29) se deduce că de-a lungul diametrului BE al semicercului, $\partial q/\partial \xi = 0$, şi se poate lua $q = 0$ pe BE. Ca urmare, potenţialul $F(\zeta)$ poate

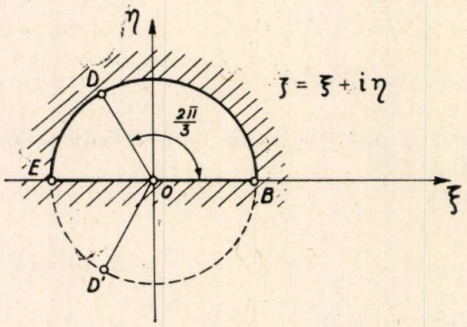


Fig. 18

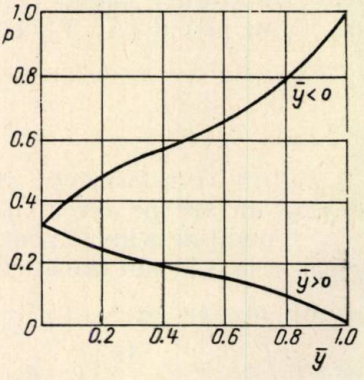


Fig. 19

fi prelungit prin simetrie în semicercul inferior, satisfăcînd astfel direct condiţia (29). Pînă la urmă, se obţine potenţialul

$$F(\zeta) = p_2 - \frac{p_3 - p_2}{\pi i}\left[\frac{\pi i}{3} + \ln\frac{\zeta - e^{2\pi i/3}}{\zeta - e^{-2\pi i/3}}\right], \tag{30}$$

din care se poate deduce distribuţia presiunilor pe axa $O\xi$; în formă adimensională, aceasta e dată de

$$P(\xi) = \frac{p - p_2}{p_3 - p_2} = \frac{1}{\pi}\left(2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{3}}{2\xi + 1} - \frac{\pi}{3}\right), \tag{31}$$

unde determinarea funcţiei arctg trebuie luată între 0 şi π.

Acum problema este rezolvată: distribuţia presiunilor în orice moment t, pe suprafeţele obstacolului, se poate obţine cu ajutorul formulei (31), ţinînd seama de relaţiile dintre coordonatele x (pe faţa superioară) sau y (pe faţa anterioară) şi ξ, prin intermediul formulelor (11), (20) şi (26).

În figura 19 se dă diagrama lui P în funcţie de $\bar{x} = x/a_0 t$ ($0 \leqslant \bar{x} \leqslant 1$), cu $\bar{y} = 0$ (adică de-a lungul liniei OB, fig. 16) şi în funcţie de $\bar{y} = y/a_0 t$ ($-1 \leqslant \bar{y} \leqslant 0$), cu $\bar{x} = 0$, de-a lungul liniei OD.

II. 5. STADIILE ULTERIOARE ALE MIŞCĂRII

În momentul $t = H/a_0$, cînd unda difractată atinge peretele inferior GG'(fig. 16) (sau cînd, în cazul unui obstacol simetric, undele pornite de la cele două colţuri se întîlnesc), spectrul mişcării se schimbă, datorită reflexiei undei, ca în figura 20*a*.

Mişcarea încetează de a mai fi auto-modelată, iar teoria de mai sus nu mai este valabilă; totuşi, întrucît variaţiile totale de presiune sînt mici, se poate folosi o metodă liniarizată de suprapunere a efectelor, pentru un calcul aproximativ, admiţînd că unda reflectată produce aceeaşi variaţie de presiune ca cea incidentă. Aceasta revine la a presupune că unda reflectată (sau unda de perturbaţie emisă de colţul opus al modelului), atunci cînd se propagă într-o regiune deja perturbată de trecerea undei incidente, va produce aceeaşi variaţie de presiune ca şi cînd s-ar fi propagat într-un mediu neperturbat.

Atunci cînd unda de perturbaţie reflectată se întoarce la colţul modelului, ia naştere un nou proces de difracţie, cu o undă de rarefiere cilindrică, centrată în colţ, care se propagă pe faţa modelului (fig. 20 b). Pînă atunci, însă, intensitatea perturbaţiilor a scăzut considerabil, iar în continuare, după o serie de interacţiuni care devin din ce în ce mai complicate, dar şi mai slabe, se stabilizează distribuţia de presiuni staţionară.

În rezumat, variaţia în timp a presiunii într-un punct de ordonată y_0 pe faţa anterioară a modelului ($x = 0$, $y_0 < 0$), are loc în mai multe stadii, descrise de ecuaţii diferite, după cum urmează:

a) $t < 0$, $\qquad p(y_0) = p_1 = \text{const}$, $\qquad (32)$

b) $0 < t < \dfrac{|y_0|}{a_0}$, $\qquad p(y_0) = p_3 = \text{const}$, $\qquad (33)$

c) $\dfrac{|y_0|}{a_0} < t < \dfrac{2H - |y_0|}{a_0}$, $\qquad p(y_0) = p_2 + (p_3 - p_2)\, P(y_0/a_0 t)$, $\qquad (34)$

d) $\dfrac{2H - |y_0|}{a_0} < t < \dfrac{2H + |y_0|}{a_0}$, $\qquad p(y_0) = p_2 + (p_3 - p_2)\left[P(y_0/a_0 t) + P\left(-\dfrac{2H - |y_0|}{a_0 t}\right) - 1\right]$. $\qquad (35)$

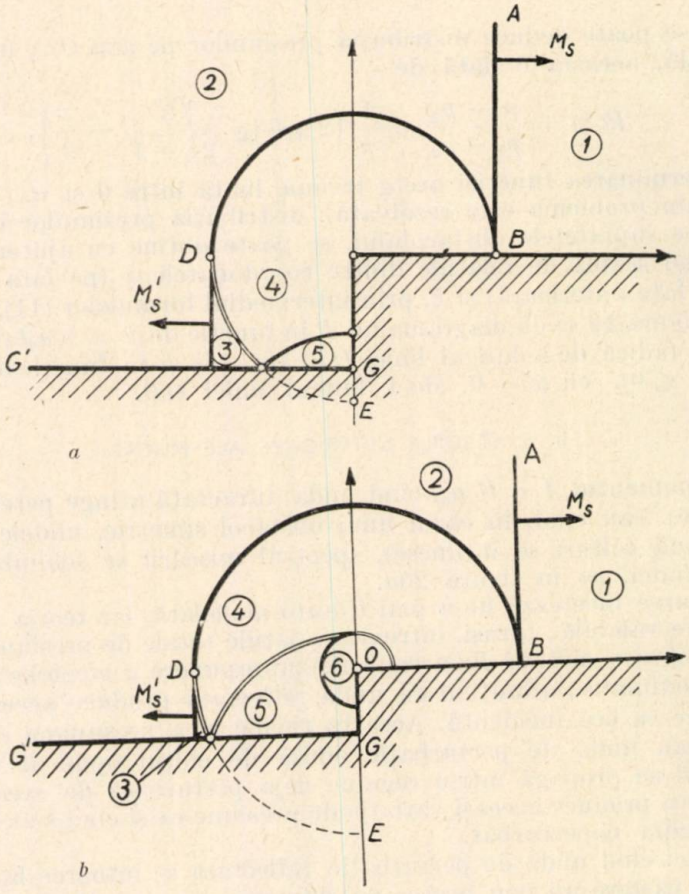

A
M_s
2
1
B
D
4
M_s'
3
5
G'
G
E
a
A
2
M_s
1
4
B
O
6
D
M_s'
5
G'
G
3
E
b

Fig. 20

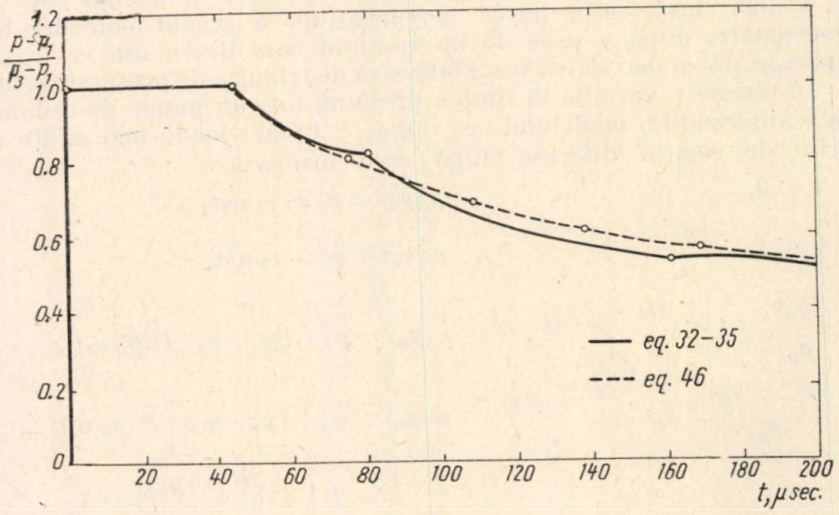

$\frac{p-p_1}{p_3-p_1}$
1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
t, μsec.
eq. 32–35
eq. 46

Fig. 21

Stadiul a) constituie starea inițială statică, înainte de sosirea undei de șoc incidente; stadiul b) reprezintă perioada cînd presiunea este egală cu cea din spatele unei unde de șoc normale reflectate și durează pînă cînd unda de difracție ajunge în punctul considerat; stadiul c) constituie procesul de difracție înainte de sosirea undei de perturbație reflectate, iar stadiul d) în care undele de difracție directe și reflectate se propagă peste punctul considerat, ia sfîrșit în momentul cînd a doua undă de difracție, emanată din colțul modelului, ajunge de asemenea în punctul respectiv.

Funcția P, din ecuația (34) și (35), se calculează cu formula (31).

În figura 21 s-a reprezentat variația în timp a presiunii, în punctul $|y_0| = H/2$, calculată cu relațiile (32—35).

II. 6. ALTE CONFIGURAȚII DE OBSTACOLE

Pentru a completa analiza de mai sus, se dau în continuare formule pentru distribuția de presiuni în jurul diverselor altor obstacole; procedura urmată pentru obținerea acestor ecuații este aceeași ca mai sus. Pentru fiecare caz se vor da numai funcția de transformare conformă și expresia potențialului complex; corespondența dintre punctele din planul fizic (x, y) și cel transformat $(\zeta = \xi + i\eta)$ se face prin intermediul relațiilor (11) și (20)

II. 6.1. TREAPTĂ ÎNDREPTATĂ SPRE AVAL (fig. 10 și 22)

$$\zeta = e^{\pi i/3}\, Z^{2/3}, \tag{36}$$

$$F(\zeta) = p_1 - \frac{p_2 - p_1}{\pi i}\left[\frac{2\pi i}{3} + \ln\frac{\zeta - e^{\pi i/3}}{\zeta - e^{-\pi i/3}}\right]. \tag{37}$$

(Aceasta este inversa primei configurații).

II. 6.2. PLACĂ PLANĂ PERPENDICULARĂ PE CURENT (fig. 12 și 23)

$$\zeta = e^{\pi i/4}\, Z^{1/2}, \tag{38}$$

$$F(\zeta) = p_1 - \frac{p_2 - p_1}{\pi i}\left[\frac{3\pi i}{4} + \ln\frac{\zeta - e^{\pi i/4}}{\zeta - e^{-\pi i/4}}\right] - \frac{p_3 - p_2}{\pi i}\left[\frac{\pi i}{4} + \ln\frac{\zeta - e^{3\pi i/4}}{\zeta - e^{-3\pi i/4}}\right]. \tag{39}$$

II. 6.3. PLACĂ PLANĂ ROTIND CURENTUL CU 180° (fig. 13 și 24)

$$\zeta = i\, Z^{1/2}, \tag{40}$$

$$F(\zeta) = p_1 - \frac{p_2 - p_1}{\pi i}\left[\frac{\pi i}{2} + \ln\frac{\zeta - i}{\zeta + i}\right]. \tag{41}$$

II. 6.4. EXPANSIUNE ÎN COLȚ (fig. 14 și 25)

$$\zeta = e^{\frac{\alpha\pi}{\pi+\alpha}i} Z^{\frac{\pi}{\pi+\alpha}}, \tag{42}$$

$$F(\zeta) = p_1 - \frac{p_2 - p_1}{\pi i}\left[\frac{\pi^2}{\pi+\alpha} i + \ln \frac{\zeta - e^{\frac{\alpha\pi}{\pi+\alpha}i}}{\zeta - e^{-\frac{\alpha\pi}{\pi+\alpha}i}}\right]. \tag{43}$$

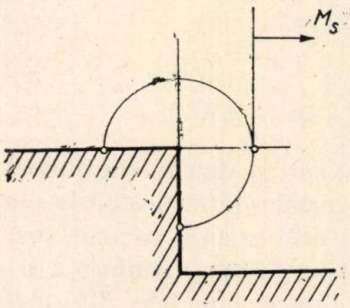


Fig. 22

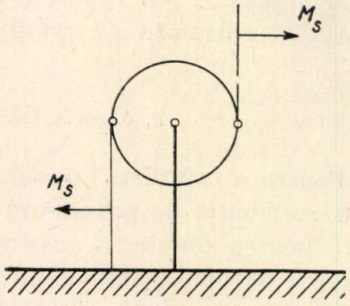


Fig. 23

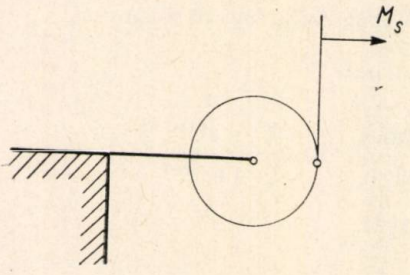


Fig. 24

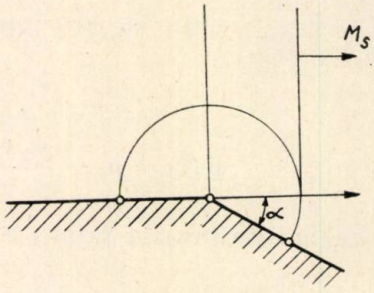


Fig. 25

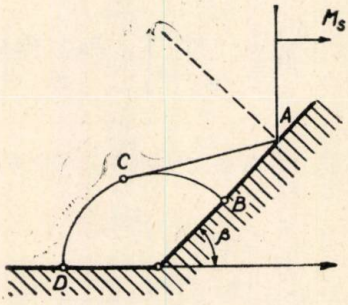


Fig. 26

II. 6.5. COLȚ ÎNCLINAT SPRE AMONTE (fig. 15 și 26)

$$\zeta = e^{-\frac{\beta\pi}{\pi-\beta}i} Z^{\frac{\pi}{\pi-\beta}}, \tag{44}$$

$$F(\zeta) = p_2 - \frac{p_3 - p_2}{\pi i}\left[\frac{\pi^2}{\pi-\beta}\, i - \ln \frac{\zeta - e^{\frac{\beta\pi}{\pi-\beta}i}}{\zeta - e^{-\frac{\beta\pi}{\pi-\beta}i}}\right]. \tag{45}$$

Aci se cuvin cîteva observații: unda de șoc incidentă suferă o reflexie regulată la perete, iar unda reflectată are aceeași intensitate. Astfel, în regiunea *3*, saltul de presiune produs de unda incidentă este dublat, avînd aceeași valoare ca în spatele unei unde de șoc reflectată normal (ec. 6), deși viteza curentului nu este nulă, ci are o direcție paralelă cu peretele. Pentru un unghi β, tinzînd spre zero, aceasta conduce la un paradox aparent, deoarece s-ar părea că, în absența oricărui obstacol, întrucît unda reflectată și cea incidentă se suprapun, saltul de presiune se dublează. Totuși, în acest caz, întreaga regiune *3* dispare, deoarece punctul C coincide cu B (și A), iar paradoxul se rezolvă.

II. 7. O TEORIE SIMPLIFICATĂ

Pentru o evaluare rapidă a tendinței de variație a presiunii pe obstacol, se pot folosi observațiile din paragraful 3, despre scara de timp a fenomenului, și relația (1); în primă aproximație, se poate admite că relaxarea presiunii după saltul inițial este exponențială, cu o constantă de timp $\tau = H/a_0$ (în cazul obstacolului în formă de treaptă, fig. 3). Rezultă următoarea formulă simplă:

$$p = p_2 + (p_3 - p_2)\, e^{-t/\tau}. \tag{46}$$

Reprezentarea grafică a acestei funcții a fost suprapusă peste diagrama exactă, dată de relațiile (32)—(35), în figura 21, și se poate vedea că cele două curbe corespund remarcabil de bine ca tendință generală. După cum se va vedea în paragraful următor, rezultatele experimentale sînt de asemenea în acord cu aceste calcule.

III. VERIFICĂRI EXPERIMENTALE

III. 1. INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ ȘI TEHNICA MĂSURĂTORILOR

Tubul de șoc folosit în acest program de încercări a fost proiectat și realizat la Institutul de Mecanica Fluidelor, și este descris într-o lucrare anterioară [5]. Aci se menționează doar că este un tub de secțiune dreptunghiulară constantă (300 × 190 mm), de circa 11 m lungime, în care se pot produce unde de șoc de intensitate moderată (M_s pînă la circa 3); în lucrările prezentate aici, numărul Mach al undelor de șoc a fost menținut aproape de unitate ($M_s = 1{,}10 \ldots 1{,}20$), la presiune inițială atmosferică. Principalul parametru de referință al mișcării, numărul Mach al undei de șoc, a fost măsurat cu ajutorul unei instalații speciale [6], care

înregistrează intervalul de timp necesar trecerii undei de șoc între doi traductori de presiune piezoelectrici, plasați la distanță de 200 mm, imediat în amonte de zona experimentală; precizia globală de măsurare a lui M_s este de circa 0,3%. Încercările au cuprins măsurarea presiunilor tranzitorii pe modele; pentru aceasta s-au folosit traductori de presiune și circuite electronice special elaborate. Circuitul electronic, de tipul repetorului catodic cu impedanță de intrare mare, a fost descris în altă lucrare [7];

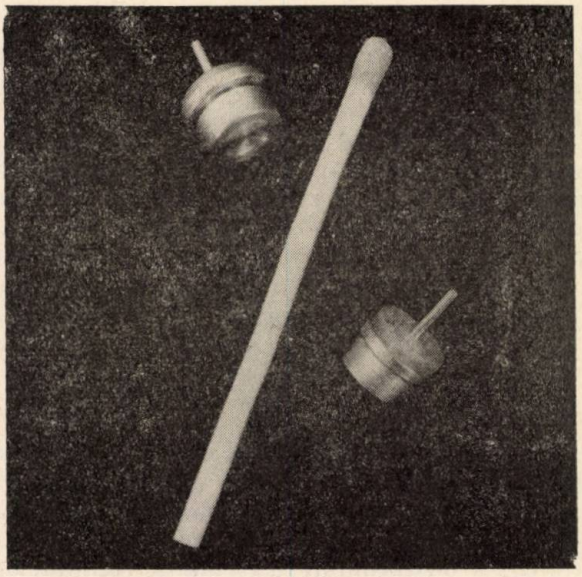


Fig. 27

sistemul de măsură este completat de blocuri speciale de declanșare și întîrziere. Traductorii de presiune, concepuți și realizați în laboratorul de tuburi de șoc al Institutului, se caracterizează printr-un timp de răspuns scurt (circa 8 microsecunde), o sensibilitate corespunzătoare, precum și o sensibilitate foarte scăzută la vibrații, avînd în același timp un gabarit redus (diametrul 8 mm) (v. fig. 27).

În altă lucrare [8], se dă o discuție a unor probleme legate de construcția traductorilor de presiune și a circuitelor electronice asociate. Acești traductori de presiune de tipul cu diafragmă au însă o amortizare scăzută a frecvenței lor proprii și de aceea s-a folosit un circuit special de corecție [9], care realizează amortizarea optimă a semnalului dat de traductor.

În figura 28 se dă o oscilogramă a răspunsului traductorului la o undă de șoc normală. Frecvența semnalului de marcaj de timp este de 200 kHz.

Se remarcă nivelul foarte scăzut al semnalelor parazite.

Etalonarea dinamică a traductorilor se face într-o instalație specială, cu ajutorul căreia se obțin salturi de presiune avînd o intensitate foarte precis cunoscută [10]; răspunsul traductorului este etalonat în funcție de un semnal standard, dat de un condensator vibrant de construcție

specială ce produce o variație mică de capacitate comparabilă cu cea a traductorului (circa 0,1 pF), foarte stabilă în timp [8].

În sfîrșit, în legătură cu tehnica experimentală, se cuvine scoasă în evidență importanța montării traductorilor cu membrana exact la nivelul suprafeței modelului; în lucrarea [8] se dă o analiză teoretică, sprijinită pe date experimentale, prin care se arată că o adîncitură de numai 0,7 mm (la un diametru al membranei traductorului de 7 mm), dă naștere unei supracreșteri a semnalului dat de traductor, de 12% peste

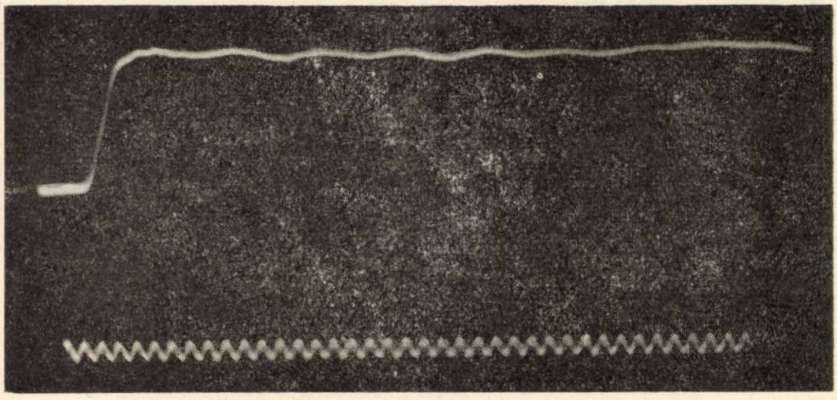


Fig. 28

valoarea corectă. Din acest motiv, s-au luat precauții speciale pentru a se asigura montarea corectă a traductorilor în modele.

III. 2. REZULTATE. COMPARAȚIE CU TEORIA

Pentru experiențele de măsurare a presiunii, s-a ales configurația de bază studiată mai sus (fig. 3*b* și 6), întrucît rezultatele sînt tipice pentru toate formele de obstacole. S-a montat un număr de traductori de presiune pe fața anterioară a modelului, la diverse distanțe de colțuri și s-a înregistrat variația presiunilor în timp în aceste puncte. În figura 29 s-a reprodus o oscilogramă tipică*); poziția traductorului a fost la $H/2$ (adică la un sfert din lățimea totală a modelului), iar numărul Mach $M_s = 1{,}12$. Pe oscilogramă s-a înregistrat și un marcaj de timp, cu frecvența de 200 kHz; durata baleiajului este de 300 microsecunde, suficientă pentru ca fenomenele tranzitorii să se atenueze.

Această oscilogramă urmează a fi comparată cu rezultatele teoretice; în figura 30, variațiile de presiune teoretice și experimentale sînt suprapuse din figurile 21 și 29. Pe aceeași figură s-au schițat de asemenea și diferitele stadii ale procesului de difracție a undelor (vezi § II.5 de mai sus).

*) Pe linia oscilogramei se poate observa o oscilație suprapusă, de frecvență înaltă și amplitudine redusă; aceasta este datorită unei armonici a frecvenței proprii de vibrație a membranei traductorului [8].

Din figura de mai sus, precum și din întreg materialul experimental obținut, se pot trage următoarele concluzii:

(1). Variația de presiune dedusă teoretic este în acord cu experiențele. În particular, se reproduc valoarea saltului maxim de presiune, existența și durata palierului de presiune pînă la trecerea primei unde de difracție în dreptul traductorului.

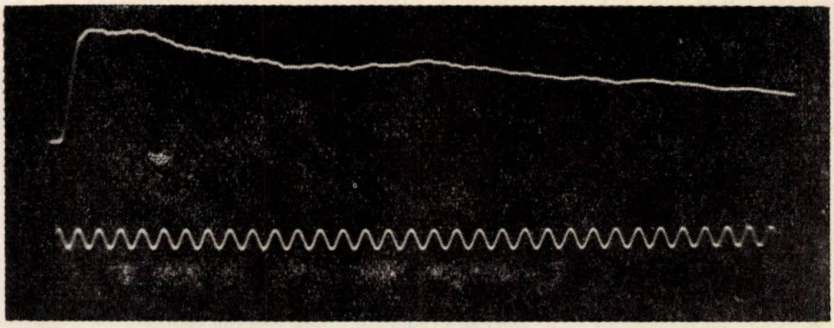


Fig. 29

(2). Valoarea asimptotică a presiunii care se atinge într-un timp scurt, în conformitate cu prevederile teoretice, este aproximativ egală cu

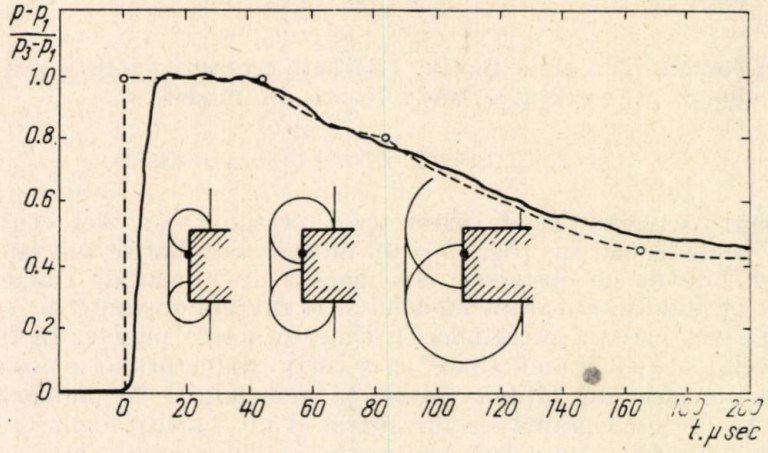


Fig. 30

$p_2 \cdot \left(1 + \frac{\varkappa}{2} M_2^2\right)$, unde M_2 este numărul Mach al curgerii uniforme din spatele undei de șoc incidente; aceasta este presiunea de impact într-o curgere staționară de viteză mică ($M_2 \ll 1$), cel de-al doilea termen din expresia de mai sus reprezentînd presiunea dinamică.

(3). Schimbările bruște ale pantei curbei variației de presiune, prezise de teorie, sînt netezite pe oscilograme; aceasta se datorește parțial timpului finit de răspuns al traductorului, precum și faptului că,

oricît de mic ar fi traductorul, suprafața sa activă este totuși finită ca dimensiuni (4,5 mm$\varnothing$) și de aceea, presiunea înregistrată este integrată pe această mică arie.

OBSERVAȚII FINALE

Analiza prezentată mai sus a fenomenelor cercetate, conduce la cîteva observații generale cu privire la acestea:

1. Acordul dintre calculele teoretice și rezultatele experimentale justifică ipotezele simplificatoare făcute la elaborarea teoriei (§ II.1); aceasta dă încredere pentru tratarea în același mod a altor probleme înrudite, ca propagarea undelor de șoc în tuburi curbe și reflexia undelor de șoc în cavități închise, care vor fi de altfel prezentate în lucrări ulterioare.

În particular, separarea scării de timp a celor două procese, de difracție a undelor și de formare a dîrei turbulente, constituie o concluzie calitativă importantă ce rezultă din lucrare.

2. Metodica experimentală pusă la punct s-a dovedit adecvată; în prezent, ea se utilizează la alte cercetări în același domeniu.

3. Din punct de vedere practic, principalul rezultat este faptul că suprapresiunea maximă care acționează pe structuri supuse unor asemenea șocuri este aproximativ egală cu dublul presiunii produse de unda de șoc primară, și că atenuarea ulterioară se produce rapid.

Analiza simplificată dată în § II.7 poate fi folosită pentru o primă evaluare a forțelor globale produse de obstacole avînd forme mai complexe, cu o aproximație destul de bună.

4. Extinderea teoriei prezentate aici la unde de șoc intense este considerabil mai dificilă, deoarece separația scărilor de timp nu mai este valabilă; totuși, cel puțin pentru anumite configurații de obstacole, se poate imagina un model simplificat al mișcării, și o tratare analitică a problemei pare posibilă. În prezent au loc lucrări teoretice și experimentale în această direcție, ce vor fi, sperăm, publicate ulterior.

Primită la redacție la 30 august 1967

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Nikolski, V. A. Smirnov, *Acțiunea undelor de șoc asupra obstacolelor* (în l. rusă), Injenernyi Journal, **2**, *1* 181 (1962).
2. E. F. Afanasiev, *Acțiunea undelor de șoc slabe asupra unui obstacol* (în l. rusă), Injenernyi Journal, **4**, *3* 451 (1964).
3. Lucian Z. Dumitrescu, *The propagation of shock waves around obstacles and in bent ducts*, V-th ICAS Congress, London, sept. 1966.
4. I. I. Glass, *Shock-tubes. Part.* I: *Theory and performance of simple shock-tubes*, UTIA Review **12**, *1* (1958).
5. Lucian Z. Dumitrescu, *Tubul de șoc pentru cercetări de aerodinamică*, St. cerc. mec. apl., **10** *1*, 271 (1959).

6. I. JAKAB, A. ZAHARESCU, L. Z. DUMITRESCU, *Metodă pentru măsurarea vitezei de propagare a undelor de şoc*, St. cerc. mec. apl., **12**, *1* (1961).

7. E. PROCOPOVICI, L. Z. DUMITRESCU, *Măsurarea presiunilor aerodinamice în tubul de şoc*, St. cerc. mec. apl., **12**, *1* (1961).

8. LUCIAN Z. DUMITRESCU, *Techniques and results of model pressure measurements in shock-tubes*, VI-th Intern. Shock-Tube Symposium, Freiburg (West-Germany), april 1967.

9. I. JAKAB, *Ein elektrisches Verfahren zur optimalen Dämpfung von Gebern mechanischer Grössen*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **7**, *6* (1962).

10. LUCIAN Z. DUMITRESCU, *A method for the dynamic calibration of pressure transducers*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mecanique Appliquée, **9**, *2* 463 (1964).

ASUPRA APARIȚIEI TURBULENȚEI LA MIȘCAREA ÎNTRE DOI PEREȚI PARALELI CU RUGOZITATE PERIODICĂ DATĂ

de D. ARSENIE și I. DAVID
Institutul politehnic, Timișoara

Plecînd de la mișcarea potențială plană între doi pereți paraleli cu un anumit tip de rugozitate periodică și trecînd la cazul lichidului real se obține o relație de dependență a numărului Reynolds critic de rugozitate relativă.

1. În lucrare se urmărește folosirea cîmpului de viteze generat de două șiruri paralele de vîrtejuri la determinarea unui criteriu de apariție a turbulenței la mișcarea între doi pereți paraleli. Rugozitatea pereților este reprezentată prin ondulații periodice exprimate cu ajutorul funcției de curent (cele două șiruri de vîrtejuri) utilizată de V. Kármán la analiza

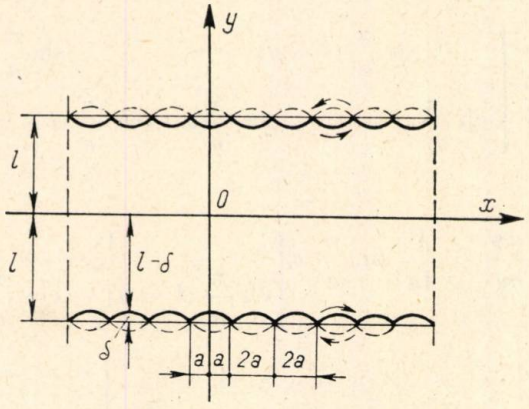


Fig. 1

aleei de vîrtejuri în dîra produsă de un fluid în mișcare paralelă în care se află un corp cilindric fix.

Suprapunînd două șiruri de vîrtejuri egale și de sens contrar (fig. 1), situate la distanțe $2l$, se obține potențialul complex al mișcării

$$f(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{\sin \frac{\pi}{2a}(z + il)}{\sin \frac{\pi}{2a}(z - il)}. \qquad (1)$$

Din relația (1) se pot explicita
— potențialul de viteze

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{arc\ tg} \frac{\sin \frac{\pi}{a} x \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} y}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} l - \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} y \cos \frac{\pi}{a} x}, \tag{2}$$

— funcția de curent

$$\Psi = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (l+y) - \cos \frac{\pi}{a} x}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (l-y) - \cos \frac{\pi}{a} x}. \tag{3}$$

Liniile de curent remarcabile sînt :
— axa reală (axa de simetrie a mișcării între cei doi pereți) $\Psi = 0$;
— cele două frontiere cărora le corespund valorile constante Ψ_f ale lui Ψ care se determină înlocuind în relația (3) $x = a$, $y = \pm l$

$$\Psi_f = \pm \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi l}{a} + 1}{2} = \pm \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi}{a} l. \tag{4}$$

Din (2) rezultă expresiile vitezelor

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{4a} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (l+y)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (l+y) - \cos \frac{\pi}{a} x} + \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a} (l-y)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (l-y) - \cos \frac{\pi}{a} x} \right], \tag{5}$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\Gamma}{4a} \sin \frac{\pi}{a} x \left[\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (l-y) - \cos \frac{\pi}{a} x} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a} (l+y) - \cos \frac{\pi}{a} x} \right]. \tag{6}$$

2. Pentru valori ale raportului l/a suficient de mari, ondulațiile pereților pot fi considerate ca rugozități periodice de înălțime absolută δ și lățime $2a$.

Aceasta permite simplificarea expresiilor vitezelor începînd chiar de la valori l/a relativ mici ($l/a > 5$). Deoarece, după cum se va vedea mai jos, înălțimea absolută a rugozității δ este direct proporțională cu dimensiunea a, rezultă că considerarea rapoartelor $l/a > 5$, corespunde considerării unei rugozități relative $2l/\delta > 28$ (teoretic eroarea comisă prin

aceste simplificări este cu atît mai mică cu cît rugozitatea relativă e mai mică, practic limitarea considerată conduce la erori sub 1/1000).

$$v_x \cong \frac{\Gamma}{4a}\left[1 + \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(l-y)}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) - \cos\frac{\pi}{a}x}\right], \tag{7}$$

$$v_y \cong \frac{\Gamma}{4a}\,\frac{\sin\frac{\pi}{a}x}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) - \cos\frac{\pi}{a}x}. \tag{8}$$

Se observă că v_x e maxim în axă și scade spre pereți iar v_y e maxim la pereți și minim în axă. Înlocuind în funcția de curent (3) expresia frontierelor (4) se obține după eliminarea logaritmilor

$$\left(\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{a}l\right)^{\pm 1} = \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l+y) - \cos\frac{\pi}{a}x}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) - \cos\frac{\pi}{a}x}, \tag{9}$$

ceea ce reprezintă ecuațiile liniilor de curent ce coincid cu frontierele mișcării (pereții laterali).

Din expresiile (9) ținînd seama că punctele de coordonate $(0,\ l-\delta)$ și $[0,\ -(l-\delta)]$ aparțin frontierei, rezultă

$$\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{a}\,l = \frac{\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}[l+(l-\delta)] - 1}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}[l-(l-\delta)] - 1}. \tag{10}$$

Prelucrînd expresia (10) se obține:

$$\sqrt{1+\operatorname{sh}^2\frac{\pi}{a}(l-\delta)}\,\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}l\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}l = \left(1+\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{a}l\right)\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(l-\delta) + \operatorname{sh}\frac{\pi}{a}l. \tag{11}$$

Rezolvînd ecuația (11) în $\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(l-\delta)$ rezultă:

$$\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(l-\delta) = \frac{-\left(1+\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{a}l\right)\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}l \pm 2\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}l\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{a}l}{1+3\operatorname{ch}^2\frac{\pi}{a}l}. \tag{12}$$

Deoarece $l - \delta > 0$ rezultă $\operatorname{sh} \frac{\pi}{a}(l - \delta) > 0$ adică în (12) se consideră numai semnul plus obținîndu-se

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{a}(l - \delta) = \frac{\operatorname{sh}^3 \frac{\pi}{a} l}{1 + 3\,\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{a} l}. \tag{13}$$

În condițiile în care ondulațiile pereților se consideră rugozități $\left(\frac{l}{a} > 5\right)$ se obține

$$\operatorname{sh} \frac{\pi}{a}(l - \delta) \cong \frac{1}{3} \operatorname{sh} \frac{\pi}{a} l \tag{14}$$

sau

$$e^{-\frac{\pi}{a}\delta} \cong \frac{1}{3}, \tag{14'}$$

de unde

$$\delta \cong 0{,}35\ a. \tag{15}$$

Ținînd seama de expresia (7) a vitezei v_x, se determină constanta Γ din condiția de continuitate, funcție de debitul q dintre cei doi pereți (pe unitatea de adîncime)

— pentru $x = a$

$$q = \int_{-l}^{l} v_x \, dy = \frac{\Gamma}{4a} \int_{-l}^{l} dy + \frac{\Gamma}{4a} \int_{-l}^{l} \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{a}(l - y)}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{a}(l - y) + 1} \, dy, \tag{16}$$

$$q = \frac{l}{2a} \Gamma + \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \left[\operatorname{ch} \frac{2\pi}{a} l + 1\right] - \frac{\Gamma}{4\pi} \ln 2. \tag{17}$$

Ținînd seama de simplificările ce se pot efectua în condițiile $\frac{l}{a} > 5$ rezultă

$$q \cong \Gamma \left[\frac{l}{2a} + \frac{1}{4\pi} \ln \left(\frac{e^{\frac{2\pi l}{a}}}{2}\right) - \frac{1}{4\pi} \ln 2\right], \tag{18}$$

de unde

$$q \cong \Gamma (0{,}7\ K - 0{,}11), \tag{19}$$

în care rugozitatea relativă

$$K = \frac{2l}{\delta}. \tag{20}$$

3. Din dezvoltările analitice anterioare rezultă existența componentei v_y, oricît de mici ar fi rugozitatea și debitul. Apare evident faptul că există tendința particulei (datorită inerției mișcării după y) de a se desprinde de pereți ($|v_y|$ maxim) și a pătrunde în straturile longitudinale învecinate.

La fluidele reale, din cauza viscozității, apar două aspecte calitativ deosebite :

— la viteze mici (debit mic) această desprindere a particulei fluide de a se deplasa după direcția y, în condițiile cînd ondulațiile se pot considera rugozități, este împiedicată de frecările de natură vîscoasă, aceasta avînd loc în regim laminar. Desigur în cazul cînd ondulațiile sînt mari mișcarea laminară nu este lipsită de viteze transversale unei direcții principale, analog cu cazul în care fluidul înconjură fără desprinderi porțiuni de obstacole sau de pereți curbi (fenomen ce se poate pune în evidență experimental cu dispozitivul = Helle-Shaw) ;

— la viteze mari (debit mare) energia particulelor datorită lui v_y, învinge frecările vîscoase, apărînd schimburi de particule între straturile longitudinale, adică fenomenul frecării aparente, caracteristic regimului turbulent (Prandtl).

Pe baza acestor considerente se scrie ecuația de echilibru energetic în zona pereților, din care rezultă un criteriu care separă cele două faze. Acest criteriu va fi analog criteriului cunoscut al lui Reynolds, putînd fi interpretat ca și acesta ca un raport între forțele de inerție și forțele de viscozitate.

Echilibrul energetic după y al paralelipipedului de laturi ($v_x\,dt$, $v_y\,dt$, 1) se scrie

$$\rho \cdot v_x\,dt \cdot v_y\,dt \cdot 1 \cdot \frac{v_y^2}{2}\, 2\tau \cdot v_y\,dt \cdot 1 \cdot v_y\,dt, \tag{21}$$

de unde rezultă τ_{lim} pentru care mișcarea după y este încă împiedicată

$$\tau_{lim} = \rho\, \frac{v_x v_y}{4}. \tag{22}$$

Pe de altă parte τ_{lim} se poate calcula pe baza legii de frecare vîscoasă a lui Newton (considerată ca valabilă și la limita de separare a celor două regimuri)

$$\tau_{lim} = \eta \frac{dv_y}{dx}, \tag{23}$$

η fiind coeficientul dinamic de viscozitate.

Din egalarea celor două expresii ale lui τ_{lim}, rezultă ecuația criterială sub forma :

$$\eta \frac{dv_y}{dx} = \rho\, \frac{v_y v_x}{4}. \tag{24}$$

Se menționează că relația (24) este independentă de tipul de rugozitate considerat, putînd fi aplicată pentru orice tip de rugozitate.

4. Se va aplica în cele ce urmează ecuația criterială (24) pentru cazul concret al curgerii între doi pereți paraleli cu rugozitate periodică dată, pentru care vom considera v_x și v_y obținute din mișcarea potențială de la punctul 2.

Din relația (8) rezultă

$$\frac{dv_y}{dx} = \frac{\Gamma\pi}{4a^2} \frac{\cos\frac{\pi}{a}x \operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) - 1}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) - \cos\frac{\pi}{a}x\right]^2}. \tag{25}$$

Ecuația criterială se consideră în punctul de pe frontiera în care $|v_y|$ este maxim.

Pentru a determina coordonatele punctului de pe frontieră în care are loc $|v_y|$ max. se pune ecuația frontierei sub forma

$$\psi - \psi_f = 0, \qquad \cos\frac{\pi}{a}x - \operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) + 2\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}l} = 0 \tag{26}$$

ce rezultă din forma (9) prin transformări simple.

Pentru determinarea $|v_y|$ max se va aplica metoda multiplicatorilor lui Lagrange pentru cazul unei funcții de două variabile ($v_y = v_y(x, y)$) între care există o legătură dată de (26).

În acest scop se consideră funcția auxiliară

$$f(x, y) = v_y(x, y) + \lambda[\psi(x, y) - \psi_f]. \tag{27}$$

Coordonatele căutate și parametrul λ se obțin din rezolvarea sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0; \quad \psi - \psi_f = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\Gamma}{4a} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \frac{\cos\frac{\pi}{a}x \operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) - 1}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) - \cos\frac{\pi}{a}x\right]^2} - \lambda \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \sin\frac{\pi}{a}x = 0, \tag{29}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\Gamma}{4a} \cdot \frac{\pi}{a} \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{a}x \cdot \operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(l-y)}{\left[\operatorname{ch}\frac{\pi}{a}(l-y) - \cos\frac{\pi}{a}x\right]^2} +$$

$$+ \lambda\frac{\pi}{a}\left[\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}(l-y) + 2\frac{ch\frac{\pi}{a}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi}{a}l}\right] = 0. \tag{30}$$

Eliminînd pe λ găsim:

$$\frac{\cos\frac{\pi}{a}x\,\mathrm{ch}\frac{\pi}{a}(l-y)-1}{\sin\frac{\pi}{a}x\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}(l-y)}=-\frac{\sin\frac{\pi}{a}x\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}l}{\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}l\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}(l-y)+2\mathrm{ch}\frac{\pi}{a}y}. \tag{31}$$

Înlocuind în (31) expresia lui $\cos\frac{\pi}{a}x$ dată de (26) se obține o ecuație în y. Ținînd seama că pe frontieră valoarea y este apropiată de valoarea lui l $\left(\text{în condițiile ipotezei } \frac{l}{a}>5\right)$ putem considera

$$\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}y\cong\mathrm{ch}\frac{\pi}{a}y\cong\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}l\cong\mathrm{ch}\frac{\pi}{a}l, \tag{32}$$

iar ecuația în y devine

$$8\,\mathrm{sh}^3\frac{\pi}{a}(l-y)-\mathrm{sh}^2\frac{\pi}{a}(l-y)+4\,\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}(l-y)-4=0. \tag{33}$$

Din rezolvarea ecuației (33) care admite o singură rădăcină reală, rezultă

$$\mathrm{sh}\frac{\pi}{a}(l-y)\cong 0{,}62. \tag{34}$$

De unde

$$l-y\cong 0{,}186\ a. \tag{35}$$

Abscisa x corespunzătoare rezultă din ecuația frontierei (26)

$$x=\frac{a}{\pi}\arccos(-0{,}824)\cong 0{,}807\ a. \tag{36}$$

În punctul de coordonate ($x=0{,}807\ a$, $1-y=0{,}186\ a$) în care $|v_y|$ e maxim se scrie ecuația de echilibru energetic (24).

După efectuarea calculelor numerice rezultă

$$\frac{\eta}{\rho}=0{,}015\ \Gamma_{\lim}. \tag{37}$$

Ținînd seama de expresia (19) se obține

$$\frac{q_{\lim}}{\nu}=46{,}6\ K-7{,}4. \tag{38}$$

Se pune în evidență în relația (38) criteriul lui Re:

$$\mathrm{Re}=\frac{\overline{v}_x\cdot 2l}{\nu}, \tag{39}$$

unde $\overline{v}_x$ este viteza medie a mișcării, ν coef. de viscozitate cinematică.

Rezultă, corespunzător limitei regimului laminar, dacă se înlocuiește $q_{\text{lim}} = \overline{v}_{x\,\text{crt}} \cdot 2\,l$:

$$\text{Re}_{\text{cr}} = \frac{\overline{v}_{x\,\text{crt}} \cdot 2l}{\nu} = 46{,}6\ K - 7{,}4. \tag{40}$$

Sau scrisă funcție de rază hidraulică R_h, care în cazul de față este l:

$$\text{Re}_{\text{cr}} = \frac{\overline{v}_{x\,\text{crt}} \cdot R_h}{\nu} = 23{,}3\ K - 3{,}7. \tag{41}$$

Observații. Din cele de mai sus rezultă că $\text{Re}_{\text{cr}} = \text{Re}_{\text{cr}}(K)$. Aceasta sugerează o dependență în cazul general (orice tip de rugozitate și independent că mișcarea are loc în conducte, canale etc.), de forma

$$\text{Re}_{\text{cr}} = AK + B, \tag{42}$$

unde A, B sînt constante (ce se pot determina și experimental) funcție de tipul de rugozitate.

Primită la redacție la 19 mai 1967, o nouă versiune la 22 noiembrie 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor*, 1955.
2. Cristea Mateescu, *Hidraulica*, 1963.
3. Ludwig Prandtl, *Guide a travers la mécanique des fluides.*

ASUPRA INFLUENȚEI COMPRESIBILITĂȚII ÎN SISTEME DE ETANȘARE ȘI LAGĂRELE CU CANALE SPIRALE*)

de V. N. CONSTANTINESCU și E. RĂDULESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

621.82

Se examinează comportarea lagărelor cu canele oblice și spirale la viteze mari luîndu-se în considerare efectul compresibilității gazului. Rezultatele obținute, arată că funcționarea acestui tip de lagăre este similară cu cea a unui lagăr în trepte obișnuit, dar are loc la valori mai mici ale parametrului de influență a compresibilității locale Λ_h. În acest mod presiunile în filmul de lubrifiant pot crește mai mult decît pentru tipurile curente de lagăre, dar tind în final către o valoare finită, corespunzătoare soluției asimptotice generale $ph = \text{const}$. De asemeni se dau indicații asupra condițiilor de funcționare, respectiv asupra valorilor parametrului de compresibilitate locală Λ_h, începînd de la care trebuie luat în considerare efectul acesteia.

Deși în principiu, cunoscute de mai multă vreme [1], sistemele de etanșare și îndeosebi lagărele cu canale spirale au început să fie examinate mai atent abia relativ recent [2]—[9]. Unele aplicații au dovedit utilitatea și posibilitățile lor funcționale, îndeosebi pentru lagăre axiale, dar și pentru alte tipuri de lagăre lubrificate cu gaze, medii lichide și chiar unsori consistente. Ca rezultat, în ultimii ani, au apărut în publicațiile de specialitate un număr relativ mare de lucrări [10]—[16], bazate îndeosebi pe o comportare cvasi-incompresibilă a lubrifiantului și pe ipoteza unui număr mare de canale. Unele din lucrările menționate, care iau aproximativ în considerare compresibilitatea lubrifiantului [12], [13] ajung însă la un rezultat oarecum surprinzător și anume că, spre deosebire de alte tipuri de lagăre lubrificate cu gaze, presiunile și rezultanta presiunilor cresc continuu cu viteza relativă a suprafețelor. Acest fapt contrazice soluția asimptotică dedusă pentru lubrificația cu gaze [17] în condiții destul de generale și, în conformitate cu care, presiunile în filmul de gaz rămîn mărginite cînd vitezele tangențiale ale suprafețelor cresc nemărginit.

* Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **13**, *3* (1968) (în limba engleză)

Problema comportării lagărelor cu canale la viteze mari ar prezenta atunci nu numai un interes teoretic ci şi un considerabil interes practic, deoarece acest tip de lagăre s-ar dovedi net superior, îndeosebi la viteze mari.

În cele ce urmează ne propunem să elucidăm această dilemă, respectiv să examinăm comportarea lagărelor cu canale la viteze foarte mari.

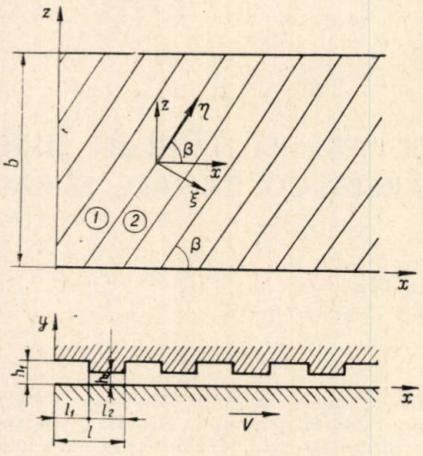


Fig. 1. — Bandă de lungime infinită cu canale oblice (notaţii).

Deoarece ne interesează comportarea calitativă a distribuţiei presiunilor la viteze mari, vom considera cazul cel mai simplu al unei benzi de lungime infinită în sensul vitezei suprafeţei mobile (fig. 1) pe care o vom considera plană ; suprafaţa fixă este compusă din suprafeţe plane paralele în trepte, grosimea filmului luînd succesiv valorile h_1, şi h_2. În sfîrşit unghiul dintre canale şi direcţia vitezei V este β.

CAZUL CVASI—INCOMPRESIBIL

Raţionamentele utilizate în lucrările citate [12], [13] şi care folosesc în fond teoria aproximativă propusă de Whipple [4], [7], se reduc, în cazul tipului simplificat de lagăr din figura 1., la următoarele :

Debitele elementare pe direcţiile x, z şi respectiv ξ, η au expresiile cunoscute.

$$\begin{aligned} \mathrm{d}m_x &= \left(-\frac{\rho h^3}{12\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\rho V h}{2}\right)\mathrm{d}z; \quad \mathrm{d}m_\xi = \left(-\frac{\rho h^3}{12\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial \xi}+\frac{\rho V h}{2}\cdot\sin\beta\right)\mathrm{d}\eta, \\ \mathrm{d}m_z &= -\frac{\rho h^3}{12\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\mathrm{d}x; \quad \mathrm{d}m_\eta = \left(-\frac{\rho h^3}{12\mu}\cdot\frac{\partial p}{\partial \eta}+\frac{\rho V h}{2}\cos\beta\right)\mathrm{d}\xi, \end{aligned} \tag{1}$$

unde între coordonatele x, z şi ξ, η există relaţiile

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \mathrm{d}\xi\sin\beta+\mathrm{d}\eta\cos\beta; \quad \mathrm{d}\xi = \mathrm{d}x\sin\beta-\mathrm{d}z\cos\beta, \\ \mathrm{d}z &= -\mathrm{d}\xi\cos\beta+\mathrm{d}\eta\sin\beta; \quad \mathrm{d}\eta = \mathrm{d}x\cos\beta+\mathrm{d}z\sin\beta, \end{aligned} \tag{2}$$

analog, între derivatele după direcțiile, x, z, și ξ, η există relațiile

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}\sin\beta + \frac{\partial}{\partial \eta}\cos\beta\,; \quad \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x}\sin\beta - \frac{\partial}{\partial z}\cos\beta,$$
$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \xi}\cos\beta + \frac{\partial}{\partial \eta}\sin\beta\,; \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial}{\partial z}\sin\beta. \tag{3}$$

La frontiera dintre zonele 1 și 2 (fig. 1) continuitatea scurgerii impune ca :

$$\frac{\partial p_1}{\partial \eta} = \frac{\partial p_2}{\partial \eta} \tag{4}$$

și

$$\mathrm{d}m_{\xi_1} = \mathrm{d}m_{\xi_2}\,; \quad h_1^3\frac{\partial p_1}{\partial \xi} - h_2^3\frac{\partial p_2}{\partial \xi} = 6\mu V(h_1 - h_2)\sin\beta. \tag{5}$$

În sfîrșit condiția de periodicitate pe direcția x impune ca

$$\int_{x_0}^{x_0+l}\frac{\partial p}{\partial x}\,\mathrm{d}x = 0. \tag{6}$$

Considerînd numărul de canale foarte mare, cu $l = \Delta x$, $l_1 = \alpha\Delta x$, $l_2 = (1-\alpha)\Delta x$, relația (6) se poate scrie de exemplu :

$$\int_{x_0}^{x_0+\alpha\Delta x}\frac{\partial p_1}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+\alpha\Delta x}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial p_2}{\partial x}\,\mathrm{d}x = 0, \tag{7}$$

dacă x_0 reprezintă începutul unei zone 1, pentru o valoare z oarecare. Totodată, ținînd seama de relațiile (3), condiția (7) se scrie :

$$\int_{x_0}^{x_0+\alpha\Delta x}\left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi}\sin\beta + \frac{\partial p_1}{\partial \eta}\cos\beta\right)\mathrm{d}x + \int_{x_0+\alpha\Delta x}^{x_0+\Delta x}\left(\frac{\partial p_2}{\partial \xi}\sin\beta + \frac{\partial p_2}{\partial \eta}\cos\beta\right)\mathrm{d}x = 0. \tag{8}$$

Acum, dacă numărul de canale este mare, derivatele presiunii pot fi considerate constante pe fiecare din porțiuni (ele sînt riguros constante în cazul incompresibil). În acest mod, condiția (8) se scrie

$$\alpha\frac{\partial p_1}{\partial \xi} + (1-\alpha)\frac{\partial p_2}{\partial \xi} = -\frac{\partial p}{\partial \eta}\operatorname{ctg}\beta, \tag{9}$$

unde s-a considerat (4) $\dfrac{\partial p_1}{\partial \eta} = \dfrac{\partial p_2}{\partial \eta} = \dfrac{\partial p}{\partial \eta}$.

Rezolvînd sistemul format din ecuațiile (5) și (9), rezultă

$$\frac{\partial p_1}{\partial \xi} = \frac{6(1-\alpha)\mu V\sin\beta\,(h_1 - h_2) - h_2^3\dfrac{\partial p}{\partial \eta}\operatorname{ctg}\beta}{(1-\alpha)\,h_1^3 + \alpha h_2^3},$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \xi} = -\frac{6\alpha\mu V \sin\beta(h_1 - h_2) + h_1^3 \frac{\partial p}{\partial \eta}\operatorname{ctg}\beta}{(1-\alpha)h_1^3 + \alpha h_2^3}. \tag{10}$$

În sfîrșit, din ecuația debitului pe direcția z se obține

$$\Delta m_z = \Delta m_{z_1} + \Delta m_{z_2} = -\frac{h_1^3}{12\mu}\int_{x_0}^{x_0+\alpha\Delta x} \rho_1 \frac{\partial p_1}{\partial x}\,dx - \frac{h_2^3}{12\mu}\int_{x_0+\alpha\Delta x}^{x_0+\Delta x} \rho_2 \frac{\partial p_2}{\partial x}\,dx. \tag{11}$$

În lucrările citate se consideră că dacă numărul canalelor este mare (Δx mic), atunci $\rho_1 \cong \rho_2 \cong \rho$ iar derivatele $\frac{\partial p_{1,2}}{\partial \xi}$; $\frac{\partial p}{\partial \eta}$ pot fi considerate în continuare aproximativ constante. Ținînd atunci seama de relațiile (3), ecuația (11) ia forma

$$\begin{aligned} -\frac{12\mu\,\Delta m_z}{\Delta x} &= \rho\alpha h_1^3\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\sin\beta - \frac{\partial p_1}{\partial \xi}\cos\beta\right) + \\ &+ \rho(1-\alpha)h_2^3\left(\frac{\partial p}{\partial \eta}\sin\beta - \frac{\partial p_2}{\partial \eta}\cos\beta\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Înlocuind derivatele $\frac{\partial p_{1,2}}{\partial \xi}$ cu valorile (10) rezultă

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{h_1^3}{h_2^3}\operatorname{ctg}^2\beta + \left[\alpha\frac{h_1^3}{h_2^3} + (1-\alpha)\right]\left[(1-\alpha)\frac{h_1^3}{h_2^3} + \alpha\right]\right\}\frac{1}{\sin\beta}\cdot\frac{\partial p}{\partial \eta}\cdot\rho - \\ &- 6\alpha(1-\alpha)\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right)\left(\frac{h_1^3}{h_2^3} - 1\right)\operatorname{ctg}\beta\frac{\rho\mu V}{h_2^2} = \\ &= -\frac{12\mu\,\Delta m_z\left[(1-\alpha)\frac{h_1^3}{h_2^3} + \alpha\right]}{h_2^3\sin\beta\,\Delta x}. \end{aligned} \tag{13}$$

În sfîrșit, dacă Δx este mic, $\frac{\partial p}{\partial x} \to 0$ iar din ultima relație (3) rezultă

$$\frac{1}{\sin\beta}\cdot\frac{\partial p}{\partial \eta} = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{p}{b}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}; \qquad \bar{p} = \frac{p}{p_a}; \qquad \bar{z} = \frac{z}{b}, \tag{14}$$

astfel încît din condiția (13) se deduce o ecuație în $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}$ de forma

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{h_1^3}{h_2^3}\operatorname{ctg}^2\beta + \left[\alpha\frac{h_1^3}{h_2^3} + (1-\alpha)\right]\left[(1-\alpha)\frac{h_1^3}{h_2^3} + \alpha\right]\right\}\bar{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} - \\ &- 6\alpha(1-\alpha)\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right)\left(\frac{h_1^3}{h_2^3} - 1\right)\operatorname{ctg}\beta\Lambda\bar{\rho} = \\ &= -\frac{12\,\mu b\,\Delta m_z}{p_a\rho_a h_2^3\,\Delta x\sin^2\beta}\left[(1-\alpha)\frac{h_1^3}{h_2^3} + \alpha\right] \end{aligned} \tag{15}$$

sau, admițînd de exemplu o evoluție izotermă a gazului $\left(\rho = p\frac{\rho_a}{p_a};\ \ \overline{\rho} = \overline{p}\right)$ ecuația (15) se scrie

$$\overline{p} + \frac{C}{K\Lambda_b}\ln\left(\overline{p} - \frac{C}{K\Lambda_b}\right) = K\Lambda_b\bar{z} + C_1, \tag{16}$$

unde C_1 este o constantă de integrare, iar

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{6\alpha(1-\alpha)\left(\frac{h_1}{h_2}-1\right)\left(\frac{h_1^3}{h_2^3}-1\right)\operatorname{ctg}\beta}{\frac{h_1^3}{h_2^3}\operatorname{ctg}^2\beta + \left[\alpha\frac{h_1^3}{h_2^3} + (1-\alpha)\right]\left[(1-\alpha)\frac{h_1^3}{h_2^3} + \alpha\right]}, \\ C &= \frac{12\mu b\,\Delta m_z}{p_a\rho_a h_1^3 l\sin^2\beta}\cdot\frac{(1-\alpha)\frac{h_1^3}{h_2^3} + \alpha}{\frac{h_1^3}{h_2^3}\operatorname{ctg}^2\beta + \left[\alpha\frac{h_1^3}{h_2^3} + (1-\alpha)\right]\left[(1-\alpha)\frac{h_1^3}{h_2^3} + \alpha\right]} \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

și:

$$\Lambda_b = \frac{\mu V b}{p_a h_2^2}. \tag{18}$$

Se constată că la valori Λ mari, presiunea variază aproximativ liniar cu $\bar{z}$ și crește aproape proporțional cu Λ respectiv cu V. Această concluzie apare ca evidentă, pentru cazul din figura 2, unde, din cauza simetriei, rezultă

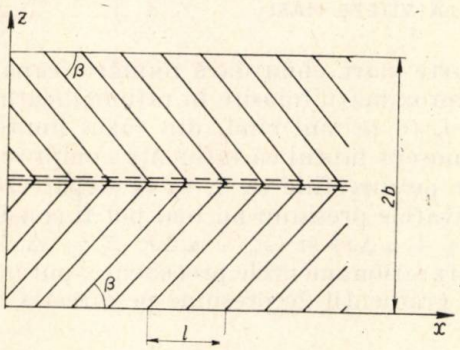


Fig. 2. — Bandă de lungime infinită cu canale simetrice dispuse în V.

$$\Delta m_z = 0,\ C = 0 \quad \text{și deci}$$
$$\overline{p} = 1 + K\Lambda_b\bar{z}, \tag{19}$$

dacă la $\bar{z} = 0$, $\overline{p} = 1$.

Analizînd relația (19), se observă că se pot obține valori optime pentru presiuni în filmul de lubrifiant la o anumită viteză și o anumită cotă z, care depind de optimul coeficientului K.

Coeficientul K este definit de relaţia (17) şi depinde de următorii parametri constructivi ai lagărului: $0° < \beta < 90°$; $1 < \frac{h_1}{h_2} < \infty$; $0 < \alpha < 1$.

Examinînd variaţia parametrului K (17) cu variabilele β, h_1/h_2 şi α, se poate arăta că acesta are un maximum pentru:

$$\left.\begin{aligned} \beta_{opt} &= 15°40', \\ \left(\frac{h_1}{h_2}\right)_{opt} &= 3{,}6533, \\ \alpha_{opt} &= 0{,}5, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

iar

$$\begin{aligned} K_{opt} &= 0{,}547 \quad \text{şi} \\ \overline{p}_{opt} &= 1 + 0{,}547 \cdot \Lambda_b \cdot \overline{z}. \end{aligned} \tag{21}$$

În consecinţă, metoda de tratare descrisă succint mai sus, conduce la concluzia că gazul lubrifiant are o comportare cvasiincompresibilă, deoarece cel puţin în cazul figurii 2., soluţia (19) pentru presiuni rezultă aceeaşi indiferent dacă lubrifiantul este incompresibil sau nu. Autorii citaţi justifică această concluzie prin ipoteza unui număr mare de canale, respectiv intervale Δx mici, pe care variaţia presiunii poate fi liniarizată. Practic însă, numărul de canale nu este infinit, astfel încît rezultatele menţionate nu pot fi considerate drept corecte, decît pentru valori Λ_b inferioare unei anumite valori Λ_{b0} de la care influenţa locală a compresibilităţii nu mai poate fi neglijată.

CAZUL COMPRESIBIL LA VITEZE MARI

În cazul valorilor Λ_b mari şi foarte mari, chiar dacă numărul canalelor este considerat mare, o serie de aproximaţii folosite în raţionamentul precedent nu mai sînt valabile. Astfel, în primul rînd, din cazul limită $\beta = 90°$ (lagăre în trepte [17]) este cunoscut faptul că influenţa compresibilităţii face ca distribuţia presiunilor pe direcţiile x, ξ, să se depărteze de una liniară (fig. 3); ca urmare derivatele presiunii nu mai pot fi considerate constante pe intervalele $(x_0, x_0 + \alpha\Delta x)$ şi $(x_0 + \alpha\Delta x, x_0 + \Delta x)$.

Pentru a păstra totuşi în linii mari raţionamentele precedente, putem de exemplu defini valori medii pentru gradienţii de presiune pe direcţia ξ (fig. 3) în modul următor:

$$\frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi} = \frac{1}{\alpha \Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \alpha\Delta x} \frac{\partial p_1}{\partial \xi}\, dx; \quad \frac{\partial p_{2m}}{\partial \xi} = \frac{1}{(1-\alpha)\,\Delta x} \int_{x_0 + \alpha\Delta x}^{x_0 + \Delta x} \frac{\partial p_2}{\partial \xi}\, dx. \tag{22}$$

De notat că integralele (22) se calculează pe direcţia x şi nu pe direcţia ξ.

În aceste condiţii, relaţia de periodicitate (9) se scrie

$$\alpha \frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi} + (1-\alpha) \frac{\partial p_{2m}}{\partial \xi} = -\chi \operatorname{ctg} \beta, \tag{23}$$

unde

$$\chi = \frac{1}{\Delta x}\left[\int_{x_0}^{x_0+\alpha\Delta x} \frac{\partial p_1}{\partial \eta}\,dx + \int_{x_0+\alpha\Delta x}^{x_0+\Delta x} \frac{\partial p_2}{\partial \eta}\,dx\right]. \tag{24}$$

Se constată că dacă am considera în continuare toate derivatele constante, am regăsi relația (9).

În plus, la frontierele dintre domeniile 1,2 există condițiile

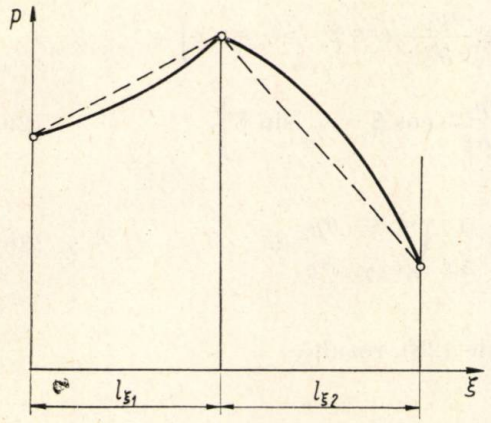


Fig. 3. — Influența compresibilității locale asupra distribuției presiunilor pe direcția ξ.

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\right)_{x=x_0} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial \eta}\right)_{x=x_0+\Delta x}; \quad \left(\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\right)_{x=x_0+\alpha\Delta x} = \left(\frac{\partial p_2}{\partial \eta}\right)_{x=x_0+\alpha\Delta x},$$
$$(p_1)_{x=x_0} = (p_2)_{x=x_0+\Delta x}; \quad (p_1)_{x=x_0+\alpha\Delta x} = (p_2)_{x=x_0+\alpha\Delta x}, \tag{25}$$

iar condiția de debit (5) se scrie corect sub forma

$$h_1^3\left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi}\right)_{x=x_0+\alpha\Delta x} - h_2^3\left(\frac{\partial p_2}{\partial \xi}\right)_{x=x_0+\alpha\Delta x} = 6\mu V(h_1 - h_2)\sin\beta, \tag{26}$$

unde derivatele sînt diferite de valorile medii (22) în cazul compresibil Dacă ne mărginim la a studia calitativ soluția, putem scrie formal

$$\left(\frac{\partial p_1}{\partial \xi}\right)_{x=x_0+\alpha\Delta x} = \gamma_1 \frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi}; \quad \left(\frac{\partial p_2}{\partial \xi}\right)_{x=x_0+\alpha\Delta x} = \gamma_2 \frac{\partial p_{2m}}{\partial \xi}, \tag{27}$$

unde γ_1, γ_2 sînt parametri necunoscuți ce pot fi considerați că depind de viteza V sau de parametrii locali de compresibilitate. De exemplu, pentru cazul cunoscut al lagărelor în trepte cu $\beta = 90°$[17], $\gamma_1 \to 1$, $\gamma_2 \to 1$ pentru $V \to 0$, dar $\gamma_1 \to \infty$, $\gamma_2 \to 0$ pentru $V \to \infty$.

Rezolvînd acum sistemul format din ecuațiile (24), (26) și (27) rezultă

$$\frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi} = \frac{6(1-\alpha)\mu V \sin\beta(h_1 - h_2) - h_2^3\gamma_2\chi \operatorname{ctg}\beta}{(1-\alpha)\gamma_1 h_1^3 + \alpha\gamma_2 h_2^3},$$
$$\frac{\partial p_{2m}}{\partial \xi} = -\frac{6\alpha\mu V \sin\beta(h_1 - h_2) + h_1^3\gamma_1\chi \operatorname{ctg}\beta}{(1-\alpha)\gamma_1 h_1^3 + \alpha\gamma_2 h_2^3}, \tag{28}$$

care înlocuiește relațiile (10).

În sfîrșit, pentru calculul debitului pe direcția z, vom renunța la ipoteza $\rho_1 \cong \rho_2 \cong \rho$. Într-adevăr dacă presiunile tind către valori mărginite cînd $V \to \infty$, atunci, deoarece h = const. pe porțiuni, este probabil ca ρ să tindă către distribuții constante în raport cu x, respectiv $\rho_1 \approx$ const., $\rho_2 \cong$ const. De altfel această ipoteză poate fi luată în cazul general, dacă se înțelege prin ρ_1, ρ_2, valorile medii ρ_{1m}, ρ_{2m} pe intervalele respective. Relația (12) se va scrie deci

$$-\frac{12\mu\,\Delta m_z}{\Delta x} = \rho_1 h_1^3\left(-\alpha\frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi}\cos\beta + \gamma_1 \sin\beta\right) + \\ + \rho_2 h_2^3\left[-(1-\alpha)\frac{\partial p_{2m}}{\partial \xi}\cos\beta + \gamma_2 \sin\beta\right], \tag{29}$$

unde

$$\gamma_1 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\alpha\Delta x}\frac{\partial p_1}{\partial \eta_1}\,dx; \quad \gamma_2 = \frac{1}{\Delta x}\int_{x_0+\alpha\Delta x}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial p_2}{\partial \eta_1}\,dx; \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma. \tag{30}$$

Înlocuind apoi $\frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial p_{2m}}{\partial \xi}$ cu valorile (28), rezultă

$$\rho_1\left\{\frac{\frac{\rho_2}{\rho_1}(1-\alpha)\gamma_1 + \alpha\gamma_2}{(1-\alpha)\gamma_1 h_1^3 + \alpha\gamma_2 h_2^3} h_1^3 h_2^3 \chi \frac{\cos^2\beta}{\sin\beta} + \left(h_1^3\gamma_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}h_2^3\gamma_2\right)\sin\beta - \right. \\ \left. - \frac{6\alpha(1-\alpha)\mu V \sin\beta\cos\beta\,(h_1-h_2)\left(h_1^3 - \frac{\rho_2}{\rho_1}h_2^3\right)}{(1-\alpha)\gamma_1 h_1^3 + \alpha\gamma_2 h_2^3}\right\} = -\frac{12\mu\,\Delta m_z}{\Delta x} \tag{31}$$

care evident se reduce la ecuația (15) dacă $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$.

De remarcat că în toate raționamentele care au condus la relația (31) nu s-a introdus nici o aproximație.

Ecuația (31) permite studiul calitativ al distribuției presiunilor în cazul limită $V \to \infty$ și după cum se va arăta, nu contrazice cunoscuta soluție asimptotică ph = const. Să admitem astfel că presiunile rămîn mărginite cînd $V \to \infty$. Atunci din relația (31) ca și din relațiile (28) rezultă în mod necesar $\gamma_1 \to \infty$. Pentru această situație limită, ecuația (31) se simplifică sub forma

$$\rho_1\left\{\frac{\rho_2}{\rho_1}h_2^3\chi\frac{\cos^2\beta}{\sin\beta} + \left(h_1^3\gamma_1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}h_2^3\gamma_2\right)\sin\beta - \right. \\ \left. - 6\alpha(1-\alpha)\mu\frac{V}{\gamma_1}\sin\beta\cos\beta\,(h_1-h_2)\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\frac{h_2^3}{h_1^3}\right)\right\} = -\frac{12\mu\,\Delta m_z}{\Delta x}, \tag{32}$$

de unde se constată că presiunile pot rămîne mărginite, dacă V/γ_1, rămîne mărginit cînd $V \to \infty$.

În continuare, pentru a determina raportul V/γ_1, ca și funcțiile χ_1, χ_2, sînt necesare anumite informații privind soluția presiunilor.

Pentru aceasta să considerăm ecuația diferențială a presiunilor care în cazul general (17) se scrie, dacă evoluția este izotermă:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial z}\right) = 6\mu V \frac{\partial (ph)}{\partial x}. \tag{33}$$

În ipoteza că presiunile rămîn mărginite, rezultă în mod necesar că

$$\frac{\partial}{\partial x}(ph) \to 0; \quad ph \to C_1(z). \tag{34}$$

Cum în cazul de față h este constant pe porțiuni, rezultă că și presiunea este constantă după x, și cel mult funcție de z.

$$p_1 = \frac{C_1(z)}{h_1}; \quad p_2 = \frac{C_1(z)}{h_2}; \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{h_1}{h_2}, \tag{35}$$

iar ecuația (32) ia forma

$$p_1\left\{h_1 h_2^2 \chi \frac{\cos^2\beta}{\sin^2\beta} + (h_1^3\chi_1 + h_1 h_2^2 \chi_2)\sin\beta - \right.$$
$$\left. - 6\alpha(1-\alpha)\mu\frac{V}{\gamma_1}\sin\beta\cos\beta(h_1 - h_2)\left(1 - \frac{h_2^2}{h_1^2}\right)\right\} = -\frac{12\mu p_a \Delta m_z}{\rho_a \Delta x}. \tag{36}$$

În același timp, conform definiției (22), pentru valori V foarte mari

$$\frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi} = \frac{1}{\alpha\Delta x}\int_{x_0}^{x_0+\alpha\Delta x}\left(\frac{1}{\sin\beta}\frac{\partial p_1}{\partial x} - \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial \eta}\right)dx =$$
$$= \frac{1}{\alpha\Delta x\sin\beta}p_1\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) - \frac{1}{a}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\chi_1. \tag{37}$$

Pe de altă parte, din condițiile (26), (27) sau din prima relație (28), rezultă V/γ_1

$$h_1^3\frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi} = 6\mu\frac{V}{\gamma_1}(h_1 - h_2)\sin\beta. \tag{38}$$

În sfîrșit, din relațiile de definiție (30) rezultă

$$\chi_1 = \frac{1}{\Delta x}\left(\cos\beta\int_{x_0}^{x_1+\alpha\Delta x}\frac{\partial p_1}{\partial x}dx + \sin\beta\int_{x_0}^{x_0+\alpha\Delta x}\frac{\partial p_1}{\partial z}dx\right) =$$
$$= \frac{\cos\beta}{\Delta x}p_1\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) + \alpha\sin\beta\frac{\partial p_1}{\partial z},$$
$$\chi_2 = \frac{1}{\Delta x}\left(\cos\beta\int_{x_0+\alpha\Delta x}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial p_2}{\partial x}dx + \sin\beta\int_{x_0+\alpha\Delta x}^{x_0+\Delta x}\frac{\partial p_2}{\partial z}dx\right) = - \tag{39}$$
$$- \frac{\cos\beta}{\Delta x}p_1\left(\frac{h_1}{h_2} - 1\right) + (1-\alpha)\sin\beta\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial p_1}{\partial z},$$

unde în ultima relaţie s-a înlocuit $\frac{\partial p_2}{\partial z} = \frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial p_1}{\partial z}$.

Explicînd acum valorile $\frac{V}{\gamma_1}$, $\frac{\partial p_{1m}}{\partial \xi}$, γ_1, γ_2 cu ajutorul relaţiilor precedente (37—39) ecuaţia (36) se scrie:

$$p_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} = - \frac{12 \mu b \, \Delta m_z}{\rho_a p_a \Delta x h_1^2 h_2 (\alpha h_1/h_2 + 1 - \alpha)}, \tag{40}$$

care, pentru cazul considerat în fig. 2 se reduce la

$$\frac{\partial p_1}{\partial z} = 0. \tag{41}$$

În consecinţă, ipoteza că presiunile rămîn finite este verificată şi de ecuaţia (37), rămînînd valabilă soluţia asimptotică (35) unde $C_1(z)$ rezultă a fi o constantă pură, respectiv acelaşi rezultat ca pentru restul tipurilor de lagăre lubrificate cu gaze [17]. Pentru alte condiţii la limită decît cele corespunzătoare lagărului din figura 2, relaţia (40) introduce aparent o contradicţie, care în fond exprimă faptul că pentru orice tip de lagăr cu canale, soluţia în cazul $V \to \infty$ este cea dată de relaţia (41). Într-adevăr, să presupunem că lagărul din figura 2 este asimetric în raport cu z, sau că avem un lagăr ca în figura 1 cu condiţii de presiune precise, la $z = 0$ şi $z = b$ (sistem de etanşare, sau un lagăr cu canale continuat cu suprafeţe paralele simple). În aceste condiţii, pentru a avea $\frac{\partial p_1}{\partial z}$ pozitiv este necesar ca $\Delta m_z < 0$ şi invers, cînd $\Delta m_z > 0$ rezultă $\partial p_1/\partial z$ negativ. În realitate, pentru calculul debitului care traversează lagărul în direcţia z este necesar un calcul la viteze mari dar finite; în cazul de faţă se poate spune numai că deoarece $V \to \infty$ debitul pe direcţia z este neglijabil faţă de debitul local în direcţia x şi deci $\frac{\partial p_1}{\partial z} = 0$ în toate cazurile.

De altfel, relaţia (40) se poate deduce şi direct din soluţia (35). Astfel, deoarece derivatele $\frac{\partial p_1}{\partial z}$ şi $\frac{\partial p_2}{\partial z}$ sînt constante pe intervalele de integrare, relaţia (11) se scrie

$$\Delta m_z = - \rho_1 \frac{h_1^3}{12\mu} \frac{\partial p_1}{\partial z} \alpha \Delta x - \rho_2 \frac{h_2^3}{12\mu} \frac{\partial p_2}{\partial z} (1 - \alpha) \Delta x, \tag{42}$$

din care rezultă imediat (40).

Faptul că soluţia asimptotică nu satisface decît o parte din condiţiile la limită ale problemei este un lucru deja demonstrat [17] şi explică de ce relaţiile (41) sînt valabile în cazul general al lagărelor în trepte, indiferent dacă $\beta = 90°$ sau are altă valoare.

Mai clar poate, soluţia (41) se deduce dacă se scrie ecuaţia diferenţială a presiunilor în coordonatele ξ, η:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(h^3 p \frac{\partial p}{\partial \eta}\right) = 6\mu V \left[\frac{\partial ph}{\partial \xi} \sin \beta + \frac{\partial (ph)}{\partial \eta} \cos \beta\right]. \tag{43}$$

Acum, dacă $V \to \infty$ iar presiunea rămîne mărginită este necesar ca simultan

$$\frac{\partial(ph)}{\partial \xi} \to 0\,; \quad \frac{\partial(ph)}{\partial \eta} \to 0, \tag{44}$$

respectiv ph și deci și p_1, p_2 tind către valori constante.

Constanta C_1 poate fi determinată prin metoda utilizată de Elrod și Burgdorfer pentru lagăre radiale [18] (și aplicată de Wildmann [16] la cazul lagărelor cu canale sinusoidale).

Să considerăm din nou în acest scop debitul care se scurge în direcția z (11). Să presupunem astfel că în cazul general, grosimea $h(x)$ are în intervalul $\Delta x = l$ o variație periodică.

Astfel, dacă scurgerea este izotermă

$$-\Delta m_z = \int_0^l \frac{h^3}{12\mu} \cdot \frac{\varrho_a}{p_a} \cdot p \frac{\partial p}{\partial z}\, \mathrm{d}x \tag{45}$$

sau

$$\int_0^l h^3 \frac{\partial p^2}{\partial z}\, \mathrm{d}x = \int_0^l \frac{\partial(p^2h^3)}{\partial z}\, \mathrm{d}x - 3\int_0^l p^2h^2 \frac{\partial h}{\partial z}\, \mathrm{d}x = -\frac{24\mu p_a}{\varrho_a}\, \Delta m_z = -M. \tag{46}$$

Integrînd în raport cu z se obține:

$$\int_0^l p^2h^3 \mathrm{d}x - 3\int_0^z \mathrm{d}z \int_0^l p^2h^2 \frac{\partial h}{\partial z}\, \mathrm{d}x = -M_z + M'. \tag{47}$$

Pentru cazul limită (41) relația (47) poate fi scrisă sub forma

$$[C_1(z)]^2 \int_0^l h \mathrm{d}x - 3\int_0^z [C_1(z)]^2 \mathrm{d}z \int_0^l \frac{\partial h}{\partial z}\, \mathrm{d}x = -M_z + M'. \tag{48}$$

Deoarece $\int_0^l \frac{\partial h}{\partial z}\, \mathrm{d}x$ este zero pentru o variație periodică a parametrului $h(x)$ relația (48) devine:

$$[C_1(z)]^2 \int_0^l h \mathrm{d}x = -M_z + M'. \tag{49}$$

Dacă se consideră $p = p_a$ pentru $z = 0$ atunci din relația (47) rezultă

$$M' = \int_0^l h^3 \mathrm{d}x. \tag{50}$$

Prin urmare

$$[C_1(z)]^2 = \frac{-M_z + \int_0^l h^3 \mathrm{d}x}{\int_0^l h \mathrm{d}x}. \tag{51}$$

S-a arătat însă că dacă $M = 0$, C_1 nu depinde de z. În acest caz (51), (41)

$$\overline{p}_1 = \frac{h_1}{h_2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha \frac{h_1^3}{h_2^3} + 1 - \alpha}{\alpha \frac{h_1}{h_2} + 1 - \alpha}}; \quad \overline{p}_2 = \sqrt{\frac{\alpha \frac{h_1^3}{h_2^3} + 1 - \alpha}{\alpha \frac{h_1}{h_2} + 1 - \alpha}}. \tag{52}$$

Se observă că pentru ca debitul să fie zero $\overline{p}_1 < 1$. Capacitatea portantă este :

$$\zeta = \frac{W}{p_a l b} = \left(\alpha \frac{h_2}{h_1} + 1 - \alpha\right) \sqrt{\frac{\alpha \frac{h_1^3}{h_2^3} + 1 - \alpha}{\alpha \frac{h_1}{h_2} + 1 - \alpha}} - 1. \tag{53}$$

Rezultă astfel că dacă se raportează capacitatea portantă la parametrul de compresibilitate Λ_b se obține pentru un lagăr cu canale în V o variație ca cea reprezentată în figura 4.

La valori joase ale lui $\Lambda_b (0 < \Lambda_b < \Lambda_{b0})$ este valabilă formula (23). Apoi, curba $\zeta(\Lambda_b)$ se depărtează de soluția incompresibilă, atinge un maximum pentru $\Lambda_b = \Lambda'_{b0}$ pe urmă descreşte tinzînd în final către soluția asimptotică (53).

Metoda prezentată în articolul de față poate fi folosită în scopul determinării presiunii și a capacității portante în domeniul în care compresibilitatea este importantă cu condiția ca parametrii γ_1 și γ_2 să poată fi determinați în alt mod. Din nefericire aceasta pare a fi foarte dificil de realizat prin metode analitice. Într-adevăr după cum este cunoscut [17] chiar pentru cel mai simplu caz al unui lagăr în trepte de lățime infinită, soluția analitică rezultă într-o formă implicită și este dificil de utilizat.

Este necesar de subliniat că aspectul curbei $\zeta(\Lambda_b)$ dat în figura 4

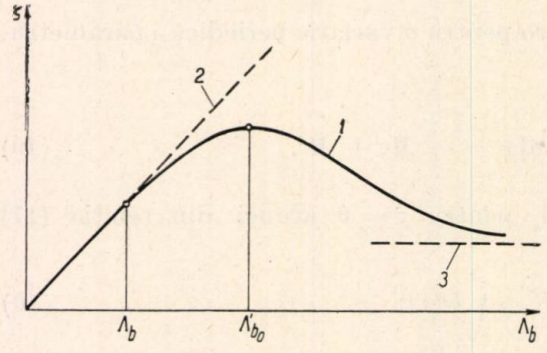


Fig. 4. — Dependența calitativă a coeficientului de încărcare ζ față de parametrul de compresibilitate Λ_b : 1. Dependența reală dintre ζ și Λ_b ; 2. Soluția cvasi-incompresibilă ; 3. Soluția asimptotică.

este același ca pentru lagărele în trepte obișnuite ($\beta = 90°$ [17]). Totuși, diferența între valoarea maximă ζ și soluția asimptotică nu este așa de mare ca în cazul lagărelor cu canale. În orice caz, faptul că debitul în direcția ζ este de aceeași natură cu cel din lagărele în trepte, oferă posibilitatea aprecierii calitative a domeniului de valabilitate a soluției cvasi-incompresibile.

Astfel, influenţa compresibilităţii locale va fi calitativ evaluată după valoarea parametrului de compresibilitate Λ_{ξ_1}.

$$\Lambda_{\xi_1} = \frac{\mu V_\xi l_{\xi_1}}{p_a h_1^2}. \tag{54}$$

Se observă că, deoarece $V_\xi = V \sin\beta$ şi $l_{\xi_1} = \alpha\, l \sin\beta$, parametrul de compresibilitate (44) este mult mai mic decît Λ_b (18), şi anume

$$\Lambda_{\xi_1} = \frac{h_2^2}{h_1^2} \cdot \alpha \cdot \frac{l}{b} \cdot \sin^2\beta \cdot \Lambda_l. \tag{55}$$

Reciproc dacă Λ_{ξ_1} este dat, parametrul Λ_b rezultă ca fiind egal cu

$$\Lambda_b = \frac{h_1^2}{h_2^2} \cdot \frac{b}{l} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2\beta} \cdot \Lambda_{\xi_1}. \tag{56}$$

Examinînd rezultatele existente pentru lagărele în trepte, de lungime infinită [17], se poate constata că pentru valorile $\frac{h_1}{h_2} = 2-4$ (care reprezintă domeniul uzual recomandat pentru aplicaţii), curba $\zeta(\Lambda_1)$ are un maximum pentru o valoare a parametrului de ordinul unităţilor, în timp ce soluţia incompresibilă poate fi utilizată pentru valori ale parametrului Λ_1 cuprinse între 0,1—0,15.

De aceea, pentru a avea o ideie asupra mărimii valorilor Λ_{b_0} şi Λ'_{b_0} (fig. 4), se poate considera că acestea corespund valorilor parametrului $\Lambda_{\xi_1} = 0{,}1-0{,}15$ şi respectiv $\Lambda_{\xi_1} \cong 1$ pe intervalul valorilor $\frac{h_1}{h_2}$ menţionat.

O altă posibilitate este aceea de a stabili variaţia parametrilor γ_1 şi γ_2 într-un lagăr în trepte.

Să considerăm atunci un lagăr în trepte cu $h = h_1$ pentru $0 < x_1 < l_1$ şi $h = h_2$ pentru $0 < x_2 < l_2$ ($l_1 + l_2 = l$).

Pentru valori h_1/h_2 apropiate de unitate (perturbaţii mici) presiunea poate fi scrisă aproximativ sub forma :

$$p \cong 1 + \varepsilon \overline{p}_{(1)}; \qquad \varepsilon = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}. \tag{57}$$

În acest caz ecuaţia diferenţială a presiunilor se reduce la

$$\frac{\partial^2 \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{x}^2} - 6\Lambda \frac{\partial \overline{p}_{(1)}}{\partial \overline{x}} = 0, \tag{58}$$

astfel încît distribuţia presiunilor pe cele două regiuni 1 şi 2 este

$$\overline{p}_{(1)_1} = C_1 \exp(6\Lambda_1 \overline{x}_1) + C_2; \quad \overline{p}_{(1)_2} = C_3 \exp(6\Lambda_2 \overline{x}_2) + C_4,$$

$$\Lambda_1 = \frac{\mu V l_1}{p_a h_1^2}; \qquad \Lambda_2 = \frac{\mu V l_2}{p_a h_2^2}. \tag{59}$$

Condiția de continuitate a debitului la trecerea de la zona 1 la zona 2 este :

$$-\frac{h_1^3}{12\mu}\cdot\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{Vh_1}{2}=-\frac{h_2^3}{12\mu}\cdot\frac{\partial p_2}{\partial x}+\frac{Vh_2}{2} \tag{60}$$

sau ținînd seama de (57) și (59)

$$C_3 = C_1 e^{6\Lambda_1} - 2. \tag{61}$$

Constantele C_1, C_2, C_3 și C_4 pot fi determinate cu ajutorul condiției (61) și a condițiilor la limită $\overline{p}_{(1)_1} = 0$ pentru $\overline{x}_1 = 0$, $\overline{p}_{(1)_2} = 0$ pentru $\overline{x}_2 = 1$, $\overline{p}_{(1)_1} = \overline{p}_{(1)_2} = \overline{p}_{(1)_3}$ pentru $\overline{x}_1 = 1$; $\overline{x}_2 = 0$. Se obține în final distribuția de presiuni (59) sub forma

$$\begin{aligned}\overline{p}_1 &= 1 + 2\varepsilon\,\frac{(e^{6\Lambda_1\overline{x}_1}-1)(e^{6\Lambda_2}-1)}{e^{6\Lambda_1}e^{6\Lambda_2}-1},\\ \overline{p}_2 &= 1 + 2\varepsilon\,\frac{(e^{6\Lambda_2}-e^{6\Lambda_2\overline{x}_2})(e^{6\Lambda_1}-1)}{e^{6\Lambda_1}e^{6\Lambda_2}-1}.\end{aligned} \tag{62}$$

Luînd în considerație relația (62) parametrii γ_1 și γ_2 definiți în relația (22) rezultă ca :

$$\gamma_1 = \frac{6\Lambda_1 e^{6\Lambda_1}}{e^{6\Lambda_1}-1}; \quad \gamma_2 = \frac{6\Lambda_2}{e^{6\Lambda_2}-1}. \tag{63}$$

Pentru exemplificare, figura 5 reprezintă variația parametrului γ_1. Se observă că γ_1 crește rapid cu Λ_1 ; de exemplu $\gamma_1 = 1{,}33$ la $\Lambda_1 = 0{,}1$.

În consecință pentru determinarea distribuției presiunilor în lagărele cu canale, se pot utiliza soluțiile incompresibile sau cvasi-incompresibile, cu condiția ca parametrul local de compresibilitate să nu depășească valorile : $\Lambda_{\xi_1} = 0{,}1 \div 0{,}15$.

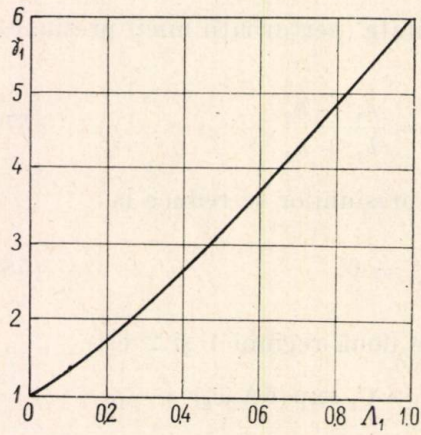


Fig. 5. — Variația parametrului γ_1 cu coeficientul de compresibilitate locală $\Lambda_1 = \frac{\mu V l_1}{p_a h_1^2}$ într-un lagăr în trepte.

Pentru a obține ordinul de mărime corespunzătoare numărului Λ_1, să considerăm valorile uzuale recomandate de [1]—[8] pentru diverse

tipuri de lagăre cu canale : $\frac{h_1}{h_2} = 2 \div 4$; $\alpha = 0{,}5 \div 0{,}7$; $\frac{b}{l} = 1 \div 2$; $\beta = 14° \div 19°$.

În aceste condiții raportul $\frac{\Lambda_{b_0}}{\Lambda_{\xi_1}}$ poate fi cuprins într-un interval larg : 5—1.000, iar parametrul Λ_{b_0} asupra căruia efectul compresibilității locale devine important, este cuprins între limitele : $\Lambda_{b_0} = 0{,}5—100$. De aceea cu toate că în majoritatea aplicațiilor acest efect local este neglijat, pot apare anumite cazuri cînd efectul compresibilității lubrifiantului trebuie luat în considerare. Astfel să considerăm un exemplu numeric pentru un lagăr axial (dat la pag. 78 în [13]) următoarele caracteristici :

$b = 18{,}27$ mm lățimea canalului,

$r_i = 32{,}5$ mm raza interioară a canalului,

$r_e = 50{,}8$ mm raza exterioară a canalului,

$l = 16{,}24$ mm lățimea totală a zonei 1 și zonei 2.,

$n = 16$ numărul de canale,

$\alpha = 0{,}655$ raportul $\frac{l_1}{l}$,

$\beta = 17{,}8°$ unghiul de înclinare a canalelor.

BUDAPESTI MŰSZAKI KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Rezultă din (47) că pentru $\Lambda_{\xi_1} = 0{,}1$ soluția cvasi-incompresibilă poate fi utilizată pînă la $\Lambda_{b_0} = 20$ (care corespunde unei turații de aproximativ 35 000 rot/min.). Pentru viteze mai mari presiunile în lagăr vor rezulta mai mici decît cele calculate cu ajutorul soluției cvasi-incompresibile. Capacitatea de încărcare va ajunge la maximum pentru un parametru $\Lambda'_{b_0} = 200$ (350 000 rot/min) și dacă viteza este mărită în continuare, capacitatea portantă scade tinzînd în final către soluția asimptotică (53).

CONCLUZII

Lagărele cu canale spirale au ca principal avantaj faptul că chiar pentru parametrii Λ_b relativ mari lucrează încă cu parametrii de compresibilitate locală Λ_{ξ_1} mici.

În felul acesta, mișcarea în stratul de lubrifiant este practic incompresibilă (19) sau cvasi-incompresibilă (17) pentru un domeniu de valori Λ_b mai mare decît alte tipuri de lagăre axiale lubrificate cu gaze. De aceea lagărele cu canale spirale pot suporta o capacitate portantă sensibil mai mare decît lagărele obișnuite.

Efectul reducerii parametrului de compresibilitate locală (45) este mai important cînd raportul h_1/h_2 are valori mari, cînd numărul de canale (raportul b/l) este ridicat și cînd unghiul β este mic.

În orice caz totuși, pentru valori ale parametrului de compresibilitate locală Λ_{ξ_1} suficient de mari, efectul compresibilității devine important.

Metoda prezentată în acest articol a fost special aleasă, pentru a urmări procedeul obișnuit care consideră un mare număr de canale. Se observă că prin evitarea anumitor aproximații și în special a ipotezei gradienților de presiune constanți, acest procedeu poate lua în considerație influența compresibilității lubrifiantului.

Principalul rezultat obținut este că pentru viteze suficient de mari soluția asimptotică ph = const. este valabilă și în cazul lagărelor cu canale spirale. În această privință, presiunea și capacitatea portantă se comportă într-un mod similar ca într-un lagăr în trepte obișnuit, dar valoarea maximă a capacității de încărcare este mai ridicată.

Majoritatea aplicațiilor practice ale lagărelor cu canale spirale sînt cuprinse în domeniul valorilor parametrilor de compresibilitate în care soluția cvasi-incompresibilă este aproximativ valabilă. Totuși anumite aplicații necesită o aproximație mai riguroasă. În acest caz este necesară integrarea numerică a ecuației diferențiale a presiunilor (33).

În sfîrșit, este de subliniat că compresibilitatea lubrifiantului influențează nu numai capacitatea portantă a lagărelor, ci și condițiile de optim în funcționare. Astfel în comparație cu valorile (20), valorile optime ale raportului h_1/h_2 și parametrului α cresc cu parametrul de compresibilitate Λ_{ξ_1}, dacă efectul compresibilității este corect luat în considerație.

Primită la redacție la 19 decembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. L. Gümbel, E. Everling, *Reibung und Schmierung im Meschinenbau*, Krayn, Berlin, 1925.
2. A. C. Hagg, *Bearing*, US Patent 2.479.349 (August 1949).
3. G. W. K. Ford, D. M. Harris, D. Pantall, *Principles and Applications of Hydrodynamic-Type Gas Bearings*, Proc. of the Institution of Mech. Eng. London, **171**, 2, 1957, pp. 93–116.
4. R. T. P. Whipple, *Theory of the spiral grooved thrust bearings with Liquid or gas lubricant*, AERE T/R 622, 1951 ; *Herring-bone pattern thrust bearing*, AERE T/M 29, 1949.
5. D. V. Wordsworth, *The viscosity plate thrust bearing*, AERE T/M R/R 2217, 1952.
6. P. Fortescue, *The derivation of a generalized chart of spiral groove thrust plate performance*, AERE M804, 1952.
7. R. T. P. Whipple, *The inclined grooved bearings*, AERE T/R 622, 1958.
8. S. Whitley, L. G. Williams, *The gas lubricated spiral-groove thrust bearings*, UKAEA, 1G Rep. 28 RD/CA, 1959.
9. E. F. Boon, S. E. Tal, *Hydrodynamische Dichtung für rotierende Wellen*, Chem. Ing. Techn. vol. 31, 1959, pp. 202–212.
10. E. A. Muydermann, *Spiral Groove Bearings*, Thesis, Delft Techn. Univ. 18 March 1964, Philips Research Reports Supplements Nr. 2, 1964.
11. G. G. Hirs, *The load capacity and stability characteristics of hydrodynamic grooved journal bearings*, ASLE Trans., vol. 8, 1965, pp. 296–305.
12. S. B. Malanovski, C. H. T. Pan, *The static and dynamic characteristics of the spiral grooved thrust bearings*, ASME Trans., Journ. of Basic Eng., Sept. 1965, pp. 547–558.

13. J. H. Vohr, C. Y. Chow, *Characteristics of herringbone-grooved gas lubricated journal bearings*, ASME Trans., Journ. of Basic Eng., Sept. 1965, pp. 558—578.
14. J. M. McGrew, J. D. McHugh, *Analysis and test of the screw seal in laminar and turbulent operation*, ASME Trans., Journ. of Basic Eng., March 1965, pp. 153—162.
15. M. L. Booy, *Influence of oblique channel ends on screw-pump performance*, ASME Trans., Journ. of Basic. Eng., March 1966, pp. 121—131.
16. M. Wildmann, *Grooved plate gas-lubricated thrust bearings, with special reference to the spiral groove bearing*, ASME Paper Nr. 64-LUB25.
17. V. N. Constantinescu, *Lubrificația cu gaze*, Edit. Academiei București, 1963.
18. H. G. Elrod A. Burgdorfer, *Refinement of the theory of gas lubricated journal bearings of infinite length*. Proc. of the First Intern. Symposium on Gas Lubricated Bearings, Washington 1959, pp. 93—118.

ASUPRA EFECTULUI DE SUPER-SKIN*)

de BODNĂRESCU DAN

Centrul de documentare al industriei Chimice și petroliere, București

632.274.4

Efectul de Super-Skin a fost observat în România la exploatarea sondelor de țiței parafinos, sub forma unor anomalii a curbelor de declin și ca o scădere mare a producției potențiale zilnice și totale din strat. Prin aplicarea tehnicelor curente de stimulare, sondele din pompaj au revenit la erupție, producția zilnică crescînd între 100 %—2000 %.

Între anii 1943—1947 în urma studiilor efectuate asupra sondelor producînd țiței parafinos a fost observat fenomenul denumit de noi super-skin. Studiile asupra sondelor productive s-au efectuat cu ajutorul curbelor

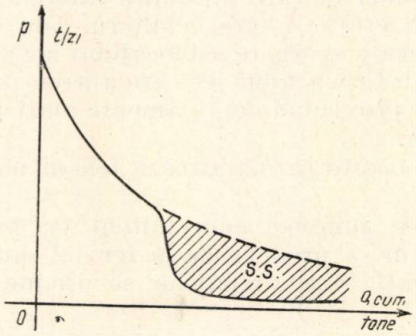


Fig. 1. — Efectul de super-skin, $P = f\ (Q_{\text{cum}})$.

de declin ale producției zilnice potențiale în funcție de producția tota extrasă din strat.

Fie producția potențială p tone/zi

$$p = f_{\exp}(P) \text{ sau } p = f_{\log}(P)$$

* Publicată și în Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **13**, *3* (1968) (în limba (engleză)

o funcţie exponenţială sau logaritmică de producţie cumulativă extrasă din strat *P* (*tone*).

Indiferent de modul cum este deschisă sonda, mai mult sau mai puţin imperfect, după producerea acesteia se constată că la un anumit cumulativ extras se produce o schimbare a alurei curbei clasice de declin, prin accentuarea declinului şi micşorarea marcantă a factorului de productivitate. În general după un anumit timp sau cumulativ extras, producţia potenţială a sondei tinde să se echilibreze dar producţia efectivă scade mult lunar din cauza unor foarte dese fenomene de înnisipare a perforaturilor. Din cele mai multe ori în aceste condiţii cum producţia efectivă a sondei este de 6—20 zile din lună, extracţia devine nerentabilă din punct de vedere economic şi bancul sau bancurile produse se închid provizoriu cu dop de nisip şi capac de ciment sau se abandonează fiind complet cimentate în mod simplu sau cu presiune. Noi am atribuit părăsirea curbei clasice urmată de declinul pronunţat şi producerea în condiţii neeconomice a sondei fenomenului de obturare parţială sau totală a căilor de drenare datorită unui efect pelicular şi de depunere a unor fracţiuni mai grele sau chiar a unor particule fine antrenate prin însăşi fenomenul de curgere în strat în zona din apropierea perforaturilor.

Am denumit acest fenomen de super-skin, deoarece el se suprapune peste acel efect de skin şi în fond reduce atît permeabilitatea cît şi porozitatea stratului în zona dimprejurul găurii de sondă, pînă la blocarea parţială sau totală, permanentă sau temporară a unora sau tuturor căilor de drenare.

Ca urmare a super-skinului regimul de curgere în apropierea găurii de sondă şi afluxul pot deveni neregulate cu întreruperi temporare de aflux în gaura de sondă. Aceste întreruperi se datoresc blocării totale a căilor de drenare. În spatele zonei blocate presiunea diferenţială scade, presiunea de strat tinzînd prin creştere spre echilibru. Din această cauză la un moment dat se produce o spargere a blocajului iar afluxul apare din nou în gaura de sondă sub forma unui jet care antrenează de cele mai multe ori nisipul din strat, provocînd deranjamente mari în jurul găurii sondei în zona perforaturilor.

Următoarele elemente caracterizează fenomenul de super-skin, spre deosebire de skin :

1. Fenomenul se produce concomitent cu producerea sondei (în timp ce efectul de skin se produce de la forajul sau deschiderea sondei).

2. Pelicula şi obturarea drenajelor se produc în sensul afluxului spre sondă.

3. Combaterea efectelor dăunătoare tehnico-economice prin aplicarea procedeelor clasice de stimulare sau prin deschidere de noi drenaje măresc spectacular atît producţia potenţială tone/zi a sondei (de 10—30 ori) cît şi recuperarea totală din strat. În loc de abandonarea stratelor respective sau izolarea lor provizorie se repune sonda în producţie revenind pînă la caracterele iniţiale de erupţie.

4. Deoarece după aplicarea tratamentelor de stimulare sau deschidere a bancurilor pe noi drenaje efectul de super-skin se reproduce, sînt necesare noi tratamente de stimulare.

Observaţiile şi descoperirea de super-skin s-au făcut la sondele din Schela Ceptura care extrag ţiţei parafinos.

În scopul remedierii efectului de super-skin s-au elaborat o serie de soluţii prin care s-a obţinut brevetul de invenţie nr.1084/40197 din 20.I.1947 (dosar OSI 38923) cu titlul,, Recuperarea ţiţeiului remanent din stratele cu ţiţei parafinos".

În conformitate cu textul acestui brevet combaterea efectului de super-skin se face astfel:

1. deschiderea unor drenaje noi prin reperforarea acestor strate se vor repeta de mai multe ori aceste operaţii, după necesitate;

2. desfundarea drenajelor prin explozie de substanţe explozive introduse cu puşca (fără gloanţe);

3. desfundarea drenajelor prin injectare sub presiune în strat a substanţelor cunoscute azi ca dizolvante ale parafinei (gazolină, benzină, motorină, gaze fierbinţi etc.);

4. în cazul cînd coloana este stricată sau se strică în timpul acestor operaţiuni astfel încît acestea nu se mai pot executa, se va face o fereastră (side-tracking) în coloană deasupra stratului, se va resăpa stratul şi se va tuba, apoi se va pune din nou în exploatare.

EVALUAREA EFECTULUI DE SUPER-SKIN

Se porneşte de la ecuaţia generală a producţiei unei sonde şi anume:

$Q = f(K, h, \mu, B, \Delta p, r, A, S, c, t)$ în care
Q = debitul potenţial,
K = permeabilitatea,
h = grosimea formaţiei,
μ = viscozitatea,
B = factorul de volum,
Δp = diferenţialul de presiune (P strat $-$ P fund),
A = aria de drenare,
r = raza de drenare,
S = factorul de skin,
C = constanta ariei de drenare,
t = timpul.

Producţia cumulativă potenţială teoretică va fi

$$\int_0^t Q \, dt = Q_{cum}.$$

Producţia cumulativă teoretică va fi

$$Q_{teor.\ cum} = \varphi(t) \cdot Q_{cum}.$$

Se trasează curba potenţială şi reală a producţiei sondei.

$$Q_{pot\ cum\ real} \text{ şi } Q_{cum\ real}.$$

Factorul de super-skin SS va fi

$SS = Q_{pot\ cum} - Q_{pot\ cum\ real}$ şi reprezintă cantitatea de ţiţei rămasă în

strat datorită efectului de super-skin, cantitate de țiței ce poate fi astfel recuperată în timpul teoretic t_f, considerînd că fenomenul de super-skin nu se reproduce. Realmente în acest caz aceasta ar coincide cu cantitatea $Q_f = SS = Q_{cum} - Q_{pot\ cum\ real}$ timpul real t_f fiind mai mare cu f durata intervențiilor reparațiilor sondei și întreruperii din producție a sondei.

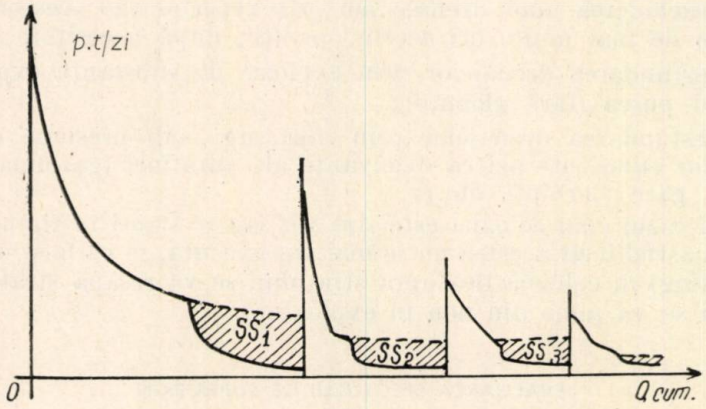


Fig. 2. — Efectul de super-skin repetat.

Însă efectul de super-skin se reproduce. Astfel curba producției potențiale va cuprinde mai multe ramuri

Q_{cum_1} , Q_{cum_2}, ..., Q_{cum_n} cărora le vor corespunde factorii de super-skin,

$$SS_1, SS_2, \ldots, SS_i, \ldots, SS_n.$$

Recuperajul total de țiței ca efect al fenomenului de super-skin va fi atunci

$$SS = \sum_1^n SS_i.$$

Limitarea aplicării combaterii efectului de super-skin este dictată de eficacitatea economică, respectiv costul țițeiului recuperat.

Recentele tratamente de stimulare precum acidizările și fisurările hidraulice etc. aplicările de gaze inerte etc. se pot aplica de asemenea cu succes pentru combaterea efectului de super-skin.

CÎTEVA REZULTATE

1. Sonda 156 SR Ceptura pornită cu 100% t/zi țiței în erupție și ajunsă în pompaj cu 7% t/zi cu circa 14 zile productive pe lună (restul zilelor fiind în intervenție din cauza înnisipărilor). S-a reperforat intervalul productiv cu 4 gloanțe pe metru liniar. După repunerea în producție sonda a redevenit eruptivă cu 87% tone pe zi deci producția a devenit de 13 ori mai mare.

2. Sonda 157 SR Ceptura pornită eruptiv cu 100% t/zi țiței și ajunsă în pompaj cu 10% t/zi ; s-a reperforat cu 4 gloanțe pe metru intervalul productiv. După repunerea în producție sonda a redevenit eruptivă cu 98% t/zi țiței.

3. Sonda 14 Suța Seacă pornită eruptiv cu 100% tone/zi țiței și ajunsă în pompaj cu 30% tone/zi. S-a reperforat intervalul productiv cu 4 gloanțe pe metru. După repunere în producție prin gas-lift timp de 7 zile producția a crescut la 61% tone/zi, apoi s-au închis gazele sonda redevenind eruptivă și producția a crescut în cîteva zile la 100% tone/zi țiței.

CONCLUZIE

Sondele din țara noastră extrăgînd țiței parafinos prezintă fenomenul de super-skin, care diminuează factorul de recuperare. Prin combaterea acestui efect pe calea deschiderii unor noi drenaje, curățirea acestora sau aplicarea tehnicelor curente de stimulare se obțin rezultate tehnice și economice importante mărindu-se mult recuperarea de țiței și durata de funcționare a sondelor.

NOTĂ

Una din formele generale de prezentare a efectului de super-skin este dată de relația:

$$Q = \alpha \sqrt[3]{a-t} + \frac{d}{c+t} + b,$$

în care α, a, b, c, și d sînt 5 parametri a căror semnificație fizică va fi arătată ulterior.

Primită la redacție la 25 mar'ie 1967.

STABILITATEA LA RĂSUCIRE A BARELOR CU REAZEME INTERMEDIARE

de D. CRAIFALEANU
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

531.3

Se deduc ecuațiile generale pentru studiul stabilității barelor cu reazeme intermediare sub acțiunea unui moment de răsucire aplicat la extremități. Se consideră că axa barei este rectilinie, iar secțiunea transversală circulară, constantă pe intervale. Se utilizează metoda parametrilor inițiali, bazată pe calculul matriceal, elaborată de autor într-o lucrare anterioară [2], adaptată la tijele cu mai multe intervale și avînd reazeme rigide. Modul de stabilire a ecuației valorilor proprii este ilustrat prin cîteva aplicații nestudiate pînă în prezent, la cele mai complicate rezultatele fiind transpuse în tabele și diagrame.

1. INTRODUCERE

Studiul stabilității unei bare solicitată printr-un moment de răsucire și avînd reazeme intermediare nu a fost abordat pînă în prezent decît în măsură redusă, mărginindu-se la cîteva cazuri particulare, cu reazemul la jumătatea lungimii. Pentru aceste cazuri s-au dat formule aproximative ale sarcinii critice [1]. Dat fiind numărul mare de asemenea piese care, prin trecerea de la poziția rectilinie la cea curbilinie de echilibru, pot fi scoase din funcțiune, se impune găsirea unei metode generale de calcul, care să conducă la rezultate exacte.

Rezolvarea problemelor se va face în această lucrare cu ajutorul metodei parametrilor inițiali, elaborată în lucrarea [2]. Se tratează bare cu secțiunea transversală circulară, constantă pe intervale, avînd inițial axa rectilinie și încărcate cu un moment de răsucire conservativ. Sînt valabile ipotezele clasice ale barelor solicitate în regim elastic. Sprijinele sînt considerate rigide.

Așa cum s-a procedat și în lucrarea [2], studiul barelor care au condiții la limite identice ca formă pe cele două direcții transversale, se face cu ajutorul mărimilor complexe. Acestor mărimi, care reprezintă para-

metrii barei, li s-a dat denumire convențională și sînt deplasarea complexă, unghiul complex de deformație la încovoiere, momentul încovoietor complex și forța tăietoare complexă. Ecuația valorilor proprii, care reprezintă condiția de pierdere a stabilității barei, se determină prin calcul matriceal.

Se utilizează notațiile :

x, y — axele secțiunii transversale,
z — axa în lungul barei,
l — lungimea barei,
$\zeta = \frac{z}{l}$ — coordonata adimensională de poziție a secțiunii,
α — rigiditatea la încovoiere a barei,
M_t — momentul de răsucire,
$\eta = \frac{M_t l}{\alpha}$ — momentul de răsucire adimensional,
M_{to} — momentul de răsucire critic,
u, v — deplasările liniei elastice pe direcțiile axelor x, respectiv y,
$\bar{u} = \frac{M_t}{\alpha} u$, $\bar{v} = \frac{M_t}{\alpha} v$ — deplasările adimensionale ale liniei elastice,
φ, ψ — unghiurile de deformație la încovoiere în planele Oxz, respectiv Oyz,
M_x, M_y — momentele încovoietoare în jurul axelor x, respectiv y, într-o secțiune oarecare,
$\bar{M}_x = \frac{M_x}{M_t}$, $\bar{M}_y = \frac{M_y}{M_t}$ — momentele încovoietoare adimensionale,
T_x, T_y — forțele tăietoare pe direcțiile axelor x, respectiv y,
$\bar{T}_x = \frac{\alpha}{M_t^2} T_x$, $\bar{T}_y = \frac{\alpha}{M_t^2} T_y$ — forțele tăietoare adimensionale.

Se mai folosesc următoarele mărimi complexe, avînd denumirea dată convențional :

$r = u + \mathrm{i}v$ — deplasarea complexă,
$\theta = \varphi + \mathrm{i}\psi$ — unghiul complex de deformație la încovoiere,
$M = M_x + \mathrm{i}M_y$ — momentul încovoietor complex,
$T = T_x + \mathrm{i}T_y$ — forța tăietoare complexă,
$\bar{r} = \bar{u} + \mathrm{i}\bar{v}$ — deplasarea complexă adimensională,
$\bar{M} = \bar{M}_x + \mathrm{i}\bar{M}_y$ — momentul încovoietor complex adimensional,
$\bar{T} = \bar{T}_x + \mathrm{i}\bar{T}_y$ — forța tăietoare complexă adimensională,
$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Alte notații vor fi specificate în text.

2. ECUAȚIILE GENERALE

2.1. BARE CARE AU CONDIȚII LA LIMITE IDENTICE ÎN PLANELE *Oxz* ȘI *Oyz*

Ecuațiile diferențiale ale liniei elastice deformate, la barele solicitate printr-un moment de răsucire M_t, sînt [3]

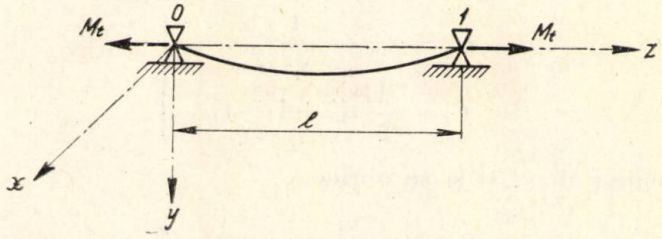


Fig. 1

$$\left.\begin{aligned} \alpha\frac{\mathrm{d}^4u}{\mathrm{d}z^4} + M_t\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}z^3} &= 0,\\ \alpha\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}z^4} - M_t\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}z^3} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Introducînd deplasarea complexă

$$r = u + \mathrm{i}v, \tag{2.2}$$

coordonata adimensională de poziție $\zeta = \frac{z}{l}$, $\zeta \in [0,1]$, momentul de răsucire adimensional η și însemnînd cu apostrof derivatele în raport cu ζ, sistemul (2.1) poate fi scris sub forma ecuației

$$r^{\mathrm{IV}} - \mathrm{i}\,\eta r''' = 0.$$

Soluția completă a acestei ecuații este

$$r = C_1 e^{\mathrm{i}\eta\zeta} + C_2 + C_3\zeta + C_4\zeta^2, \tag{2.3}$$

iar primele sale trei derivate

$$\left.\begin{aligned} r' &= C_1\,\mathrm{i}\eta e^{\mathrm{i}\eta\zeta} + C_3 + 2C_4\zeta,\\ r'' &= -C_1\eta^2 e^{\mathrm{i}\eta\zeta} + 2C_4,\\ r''' &= -C_1\mathrm{i}\eta^3 e^{\mathrm{i}\eta\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

În extremitatea barei unde se află originea sistemului de coordonate, adică la $\zeta = 0$, funcțiile (2.3) și (2.4) iau valorile

$$\left.\begin{aligned} r_{10} &= C_1 + C_2,\\ r'_{10} &= C_1\mathrm{i}\eta + C_3,\\ r''_{10} &= -C_1\eta^2 + 2C_4,\\ r'''_{10} &= -C_1\mathrm{i}\eta^3. \end{aligned}\right\}$$

De aici se deduc expresiile constantelor $C_1, \ldots, C_4$

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= \mathrm{i}\frac{1}{\eta^3} r'''_{10}, \\ C_2 &= r_{10} - \mathrm{i}\frac{1}{\eta^3} r'''_{10}, \\ C_3 &= r'_{10} + \frac{1}{\eta^2} r'''_{10}, \\ C_4 &= \frac{1}{2} r''_{10} + \mathrm{i}\frac{1}{2\eta} r'''_{10}, \end{aligned}\right\}$$

care se înlocuiesc în (2.3) şi se obţine

$$r = r_{10} + r'_{10}\zeta + \frac{\zeta^2}{2} r''_{10} - \frac{\mathrm{i}}{\eta^3}(1 + \mathrm{i}\eta\zeta - \frac{\eta^2}{2}\zeta^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\zeta}) r'''_{10}. \tag{2.5}$$

Avînd în vedere relaţiile care există între mărimile complexe r, θ şi M, demonstrate în lucrarea [2] § 3.2

$$\left.\begin{aligned} r' &= l\theta, \\ r'' &= -\mathrm{i}\frac{\eta l}{M_t} M + \mathrm{i}\eta r', \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

formula (2.5) se mai poate scrie

$$\begin{aligned} r = r_{10} + (\zeta + \mathrm{i}\frac{\eta}{2}\zeta^2) l\theta_{10} - \mathrm{i}\frac{\eta l}{2M_t}\zeta^2 M_{10} - \frac{\mathrm{i}}{\eta^3}(1 + \mathrm{i}\eta\zeta - \\ - \frac{\eta^2}{2}\zeta^2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\zeta}) r'''_{10}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Introducînd (2.7) în (2.6) rezultă

$$\left.\begin{aligned} \theta &= (1 + \mathrm{i}\eta\zeta)\theta_{10} - \mathrm{i}\frac{\eta}{M_t}\zeta M_{10} + \frac{1}{\eta^2 l}(1 + \mathrm{i}\eta\zeta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta\zeta}) r'''_{10}, \\ M &= \mathrm{i}\eta M_t \zeta\theta_{10} + (1 - \mathrm{i}\eta\zeta) M_{10} + \mathrm{i}\frac{\alpha}{l^2}\zeta r'''_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

La cealaltă extremitate a deschiderii, adică pe reazemul 1, funcţiile (2.7) şi (2.8) devin

$$\left.\begin{aligned} r_{1l} &= r_{10} + \left(1 + \mathrm{i}\frac{\eta}{2}\right) l\theta_{10} - \mathrm{i}\frac{\eta l}{2M_t} M_{10} - \frac{\mathrm{i}}{\eta^3}(1 + \mathrm{i}\eta - \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}) r'''_{10}, \\ \theta_{1l} &= (1 + \mathrm{i}\eta)\theta_{10} - \mathrm{i}\frac{\eta}{M_t} M_{10} + \frac{1}{\eta^2 l}(1 + \mathrm{i}\eta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}) r'''_{10}, \\ M_{1l} &= \mathrm{i}\eta M_t \theta_{10} + (1 - \mathrm{i}\eta) M_{10} + \mathrm{i}\frac{\alpha}{l^2} r'''_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Întrucît pe reazemele 0 și 1 săgeţile complexe r_{10} și r_{1l} sînt nule, prima ecuaţie (2.9) se reduce la

$$0 = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\eta}{2}\right) l\theta_{10} - \mathrm{i}\frac{\eta l}{2M_t} M_{10} - \frac{\mathrm{i}}{\eta^3}\left(1 + \mathrm{i}\eta - \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\right) r'''_{10},$$

din care se poate exprima r'''_{10} în funcţie de θ_{10} și M_{10}

$$r'''_{10} = -\mathrm{i}\eta^3 \frac{\left(1 + \mathrm{i}\frac{\eta}{2}\right) l\theta_{10} - \mathrm{i}\frac{\eta l}{2M_t} M_{10}}{1 + \mathrm{i}\eta - \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}. \tag{2.10}$$

Substituind (2.10) în ultimele două relaţii (2.9) se obţine

$$\left.\begin{aligned} \theta_{1l} &= \frac{1 + \mathrm{i}\eta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} - \frac{\eta^2}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}{1 + \mathrm{i}\eta - \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}\theta_{10} - \frac{\mathrm{i}\eta}{M_t}\frac{1 + \mathrm{i}\frac{\eta}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} + \mathrm{i}\frac{\eta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}{1 + \mathrm{i}\eta - \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}} M_{10}, \\ M_{1l} &= \mathrm{i}\eta M_t \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}{1 + \mathrm{i}\eta - \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}\theta_{10} + \frac{1 + \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}}{1 + \mathrm{i}\eta - \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}} M_{10}. \end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Folosind parametrii adimensionali definiţi la § 1, relaţiile (2.11) se mai pot scrie sub forma

$$\boldsymbol{p}_{1l} = \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{p}_{10}, \tag{2.12}$$

unde

$$\boldsymbol{p}_{10} = \begin{pmatrix} \theta_{10} \\ M_{10} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{p}_{1l} = \begin{pmatrix} \theta_{1l} \\ M_{1l} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}, \tag{2.13}$$

elementele matricii **F** fiind

$$\left.\begin{aligned} f_{11} &= \frac{1}{N}\left(1 + \mathrm{i}\eta - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} - \frac{\eta^2}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\right), \quad f_{12} = -\frac{\mathrm{i}\eta}{N}\left(1 + \mathrm{i}\frac{\eta}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} + \mathrm{i}\frac{\eta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\right), \\ f_{21} &= \frac{\mathrm{i}\eta}{N}(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}), \qquad\qquad f_{22} = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} + \mathrm{i}\eta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}\right), \\ N &= 1 + \mathrm{i}\eta - \frac{\eta^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

2.2. BARE CARE AU CONDIȚII LA LIMITE DIFERITE ÎN PLANELE *Oxz* ȘI *Oyz*

La barele care au condiții la limite diferite în planele *Oxz* și *Oyz*, ecuațiile trebuie descompuse în cele două plane. Pentru aceasta se înlocuiesc $\theta = \varphi + i\psi$, $\overline{M} = \overline{M}_x + i\overline{M}_y$, $e^{i\eta} = \cos\eta + i\sin\eta$, se înmulțește în (2.11) cu conjugata numitorului $1 - i\eta - \frac{\eta^2}{2} - e^{-i\eta}$ pentru a-l face real și, despărțind partea reală de cea imaginară, ecuația (2.12) devine

$$q_{1l} = \mathbf{G} \cdot q_{10}; \tag{2.15}$$

în care s-au folosit notațiile

$$q_{10} = \begin{pmatrix} \varphi_{10} \\ \psi_{10} \\ \overline{M}_{x10} \\ \overline{M}_{y10} \end{pmatrix}, \quad q_{1l} = \begin{pmatrix} \varphi_{1l} \\ \psi_{1l} \\ \overline{M}_{x1l} \\ \overline{M}_{y1l} \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$\left.\begin{aligned}
g_{11} &= g_{22} = \frac{1}{N}\left(2+\eta^2-2\cos\eta+\frac{\eta^4}{4}\cos\eta-2\eta\sin\eta-\frac{\eta^3}{2}\sin\eta\right),\\
g_{12} &= -g_{21} = \frac{1}{N}\frac{\eta^3}{2}\left(1-\cos\eta-\frac{\eta}{2}\sin\eta\right),\\
g_{13} &= g_{24} = \frac{1}{N}\eta^2\left(-1-\frac{\eta^2}{4}+\cos\eta-\frac{\eta^2}{4}\cos\eta+\eta\sin\eta\right),\\
g_{14} &= -g_{23} = \frac{1}{N}\eta\left(2-2\cos\eta+\eta^2\cos\eta-2\eta\sin\eta+\frac{\eta^3}{4}\sin\eta\right),\\
g_{31} &= g_{42} = \frac{1}{N}\eta^2\left(1-\cos\eta-\frac{\eta}{2}\sin\eta\right),\\
g_{32} &= -g_{41} = \frac{1}{N}\eta\left(-2+\frac{\eta^2}{2}+2\cos\eta-\frac{\eta^2}{2}\cos\eta+\eta\sin\eta\right),\\
g_{33} &= g_{44} = \frac{1}{N}\left(2-\frac{\eta^4}{4}-2\cos\eta+\eta^2\cos\eta-2\eta\sin\eta+\frac{\eta^3}{2}\sin\eta\right),\\
g_{34} &= -g_{43} = \frac{1}{N}\eta\left(2+\frac{\eta^2}{2}-2\cos\eta+\frac{\eta^2}{2}\cos\eta-2\eta\sin\eta\right),\\
N &= 2+\frac{\eta^4}{4}-(2-\eta^2)\cos\eta-2\eta\sin\eta.
\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

3. CONDIȚIA DE INSTABILITATE

Se examinează cazul general al unei bare așezată pe mai multe reazeme rigide (fig. 2), având deschiderile de lungimi $l_1, \ldots, l_n$. Pe fiecare interval l_j rigiditatea la încovoiere corespunzătoare α_j este constantă, iar momentul de răsucire adimensional are expresia

$$\eta_j = \frac{M_t l_j}{\alpha_j}. \tag{3.1}$$

Pentru evitarea confuziilor se vor menține simbolurile matricelor din lucrarea [2].

3.1. Se consideră că modul de rezemare și condițiile la limite sînt identice pe toate direcțiile transversale.

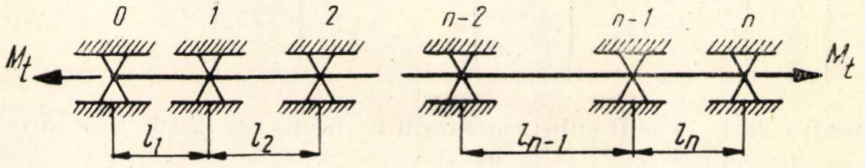


Fig. 2

Se notează cu p matricea parametrilor inițiali, iar cu p_{j0}, respectiv p_{jl} matricile parametrilor la capetele intervalului l_j $(j = 1, \ldots, n)$

$$p = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ M_0 \end{pmatrix}, \quad p_{j0} = \begin{pmatrix} \theta_{j0} \\ M_{j0} \end{pmatrix}, \quad p_{jl} = \begin{pmatrix} \theta_{jl} \\ M_{jl} \end{pmatrix}.$$

Condițiile la extremitățile 0 și n ale barei pot fi exprimate prin ecuațiile

$$\begin{aligned} p_{10} &= \mathbf{A} \cdot p, \\ \mathbf{D} \cdot p_{nl} &= \boldsymbol{O}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Între parametrii de capăt ai intervalului l_j există relația de forma (2.12)

$$p_{jl} = \mathbf{F}_j \cdot p_{j0},$$

$\mathbf{F}_j$ avînd elementele (2.14) în care s-a înlocuit η prin η_j din relația (3.1).

Pe reazemul j în originea intervalului l_j, avînd în vedere continuitatea barei, parametrii rezultă din

$$p_{j+1.0} = \mathbf{C}_j \cdot p_{jl}. \tag{3.3}$$

Conform celor arătate în [2] § 4 ecuația valorilor proprii, care reprezintă condiția de pierdere a stabilității barei, este

$$\Delta = \det (\mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{C}_{n-1} \cdot \mathbf{F}_{n-1} \ldots \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{A}) = 0. \tag{3.4}$$

Dacă $\mathbf{C}_j$ sînt egale cu matricea unitate I, (3.4) se mai poate scrie

$$\Delta = \det (\mathbf{D} \cdot \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_{n-1} \ldots \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{A}) = 0. \tag{3.4'}$$

Cea mai mică rădăcină nenulă a ecuației (3.4) dă valoarea momentului de răsucire critic, după cum se va vedea în exemplele tratate mai jos.

3.2. Dacă condițiile la limite și modul de rezemare sînt diferite pe direcțiile transversale x și y, se folosesc componentele pe axe ale parametrilor, matricele p, p_{j0}, p_{jl} înlocuindu-se respectiv prin

$$q = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \psi_0 \\ \overline{M}_{x0} \\ \overline{M}_{y0} \end{pmatrix}, \qquad q_{j0} = \begin{pmatrix} \varphi_{j0} \\ \psi_{j0} \\ \overline{M}_{xj0} \\ \overline{M}_{yj0} \end{pmatrix}, \qquad q_{jl} = \begin{pmatrix} \varphi_{jl} \\ \psi_{jl} \\ \overline{M}_{xjl} \\ \overline{M}_{yjl} \end{pmatrix}, \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

iar matricele $\mathbf{F}_j$ vor fi substituite prin $\mathbf{G}_j$ de forma (2.16), ale cărei elemente vor conține η_j (3.1) în loc de η.

Condiția de instabilitate va fi în acest caz

$$\Delta = \det (\mathbf{D} \cdot \mathbf{G}_n \cdot \mathbf{C}_{n-1} \cdot \mathbf{G}_{n-1} \ \ldots \ \mathbf{G}_2 \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{A}) = 0. \tag{3.5}$$

3.3. Pe intervalele care n-au reazeme rigide la ambele extremități, ecuațiile (2.12), respectiv (2.15) nu mai sînt valabile și trebuie utilizate relațiile generale din lucrarea [2]

$$\mathbf{p}_{jl} = \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{p}_{j0}, \tag{3.6}$$

respectiv

$$\mathbf{q}_{jl} = \mathbf{E}_j \cdot \mathbf{q}_{j0}, \tag{3.7}$$

unde

$$\mathbf{p}_{j0} = \begin{pmatrix} \overline{r}_{j0} \\ \theta_{j0} \\ \overline{M}_{j0} \\ \overline{T}_{j0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_{jl} = \begin{pmatrix} \overline{r}_{jl} \\ \theta_{jl} \\ \overline{M}_{jl} \\ \overline{T}_{jl} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_j = \begin{pmatrix} 1 & b_{j,12} & b_{j,13} & b_{j,14} \\ 0 & b_{j,22} & b_{j,23} & b_{j,24} \\ 0 & 0 & 1 & b_{j,34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} b_{j,12} &= \mathrm{i}\,(1\text{-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}), & b_{j,22} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}, \\ b_{j,13} &= -\,\mathrm{i}\,(1+\mathrm{i}\eta_j - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}), & b_{j,23} &= 1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}, \\ b_{j,14} &= \mathrm{i}\,(1 + \mathrm{i}\eta_j - \frac{\eta_j^2}{2} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}), & b_{j,24} &= -(1 + \mathrm{i}\eta_j - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_j}), \\ & & b_{j,34} &= -\,\mathrm{i}\eta_j, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$q_{j0} = \begin{pmatrix} \overline{u}_{j0} \\ \overline{v}_{j0} \\ \varphi_{j0} \\ \psi_{j0} \\ \overline{M}_{xj0} \\ \overline{M}_{yj0} \\ \overline{T}_{xj0} \\ \overline{T}_{yj0} \end{pmatrix}, \quad q_{jl} = \begin{pmatrix} \overline{u}_{jl} \\ \overline{v}_{jl} \\ \varphi_{jl} \\ \psi_{jl} \\ \overline{M}_{xjl} \\ \overline{M}_{yjl} \\ \overline{T}_{xjl} \\ \overline{T}_{yjl} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_j - b_j & c_j & b_j - c_j & -d_j \\ 0 & 1 & b_j & a_j - b_j & c_j & d_j - c_j \\ 0 & 0 & e_j - a_j & b_j & a_j - b_j & c \\ 0 & 0 & a_j & e_j - a_j & b_j & c_j - b_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 & \eta_j \\ 0 & -\eta_j \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} a_j &= \sin \eta_j, & d_j &= 1 - \frac{\eta_j^2}{2} - \cos \eta_j, \\ b_j &= 1 - \cos \eta_j, & & \\ c_j &= \eta_j - \sin \eta_j, & e_j &= \cos \eta_j. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Pe aceste intervale matricea $\mathbf{B}_j$ sau $\mathbf{E}_j$ va înlocui matricea $\mathbf{F}_j$, respectiv $\mathbf{G}_j$, în ecuația valorilor proprii (3.4) sau (3.5).

3.4. Se reamintesc condițiile la limite [2], sub forma adimensională, datorite componentelor momentului de răsucire.

Momente conservative:

moment semitangențial $$\overline{M} = \frac{1}{2}\theta, \tag{3.12}$$

moment cvasitangențial $$\overline{M}_x = \varphi, \ \overline{M}_y = 0, \tag{3.13}$$

Momente neconservative:

moment axial $$\overline{M} = 0, \tag{3.14}$$

moment tangențial $$\overline{M} = \theta. \tag{3.15}$$

4. APLICAȚII

4.1. BARE AVÎND TREI REAZEME SIMPLE ECHIDISTANTE (fig. 3)

Se consideră secțiunea barei constantă în lungul ei ($\alpha = \text{const}$). Se utilizează mărimea adimensională

$$\eta = \frac{M_t l}{2\alpha}. \tag{4.1}$$

Valoarea lui η rezultă din rezolvarea ecuației valorilor proprii (3.4) sau (3.5).

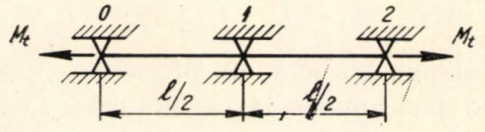


Fig. 3

Din (4.1) se obține expresia momentului de răsucire critic

$$M_{t0} = 2\eta\frac{\alpha}{l}. \tag{4.2}$$

Întrucît $l_1 = l_2 = \frac{l}{2}$, matricile $\mathbf{F}_1$ și $\mathbf{F}_2$ sînt egale între ele și se vor nota fără indici.

Ecuația (3.3) se mai scrie sub forma sistemului

$$\left.\begin{aligned} \theta_{20} &= \theta_{1l}, \\ \overline{M}_{20} &= \overline{M}_{1l}, \end{aligned}\right\}$$

din care rezultă

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}.$$

Ecuația (3.4) devine

$$\Delta = \det(\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{A}) = 0, \tag{4.3}$$

$$\mathbf{F}^2 = \begin{pmatrix} f_{11.2} & f_{12.2} \\ f_{21.2} & f_{22.2} \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

unde

$$\left.\begin{aligned} f_{11.2} &= f_{11}^2 + f_{12}f_{21}, & f_{12.2} &= f_{12}(f_{11}+f_{22}), \\ f_{21.2} &= f_{21}(f_{11}+f_{22}), & f_{22.2} &= f_{22}^2 + f_{12}f_{21}. \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

4.1.1. Bară solicitată prin moment axial.

În origine, pe reazemul O, condițiile și matricea de transformare corespunzătoare sînt

$$\left.\begin{aligned} \theta_{10} &= \theta_0, \\ \overline{M}_{10} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

iar pe reazemul 2

$$\overline{M}_{2l} = 0, \quad \mathbf{D} = (0 \quad 1).$$

Produsul matricelor din (4.3) este

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{A} = f_{21.2} = f_{21}(f_{11}+f_{22}),$$

matricea produs compunîndu-se dintr-un singur element. Introducînd expresia în (4.3) și înlocuind (2.14) se obține

$$(1-e^{i\eta})\left[i\eta(1+e^{i\eta}) - \left(\frac{\eta^2}{2}+2\right)(e^{i\eta}-1)\right] = 0,$$

care, înmulțită, cu $e^{-i\frac{\eta}{2}}$ și aplicînd formulele lui Euler, se mai poate scrie sub forma

$$\sin\frac{\eta}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} - \frac{2}{\eta}\right) = 0. \tag{4.6}$$

Cea mai mică rădăcină nenulă a ecuației (4.6) este

$$\eta = 2\pi.$$

Conform relației (4.2), momentul de răsucire critic este

$$M_{t0} = 4\pi\frac{\alpha}{l}.$$

4.1.2. Bară solicitată prin moment tangențial

În origine condițiile și matricea **A** sînt [2]

$$\left.\begin{aligned}\theta_{10} &= \theta_0,\\ \overline{M}_{10} &= \theta_0,\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

iar la extremitatea 2

$$\overline{M}_{2l} = \theta_{2l}, \qquad \mathbf{D} = (1 \quad -1),$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{A} = f_{11,2} + f_{12,2} - f_{21,2} - f_{22,2} = (f_{11} + f_{22}) \quad (f_{11} - f_{22} + f_{12} - f_{21}).$$

Introducînd ultima expresie în (4.3) și ținînd seama de (2.14) rezultă o ecuație identică cu (4.6) , deci

$$M_{t0} = 4\pi\frac{\alpha}{l}.$$

Este interesant de remarcat că problema are soluție, deși este neconservativă, ca și 4.1.1.

4.1.3. Bară solicitată prin moment semitangențial

Condițiile la extremitățile barei și matricele de transformare corespunzătoare sînt [2]

$$\left.\begin{aligned}\theta_{10} &= \theta_0,\\ \overline{M}_{10} &= \frac{1}{2}\theta_0,\end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

$$\overline{M}_{2l} = \frac{1}{2}\theta_{2l}, \qquad \mathbf{D} = \left(\frac{1}{2} \quad -1\right),$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}^2\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{2}f_{11,2} + \frac{1}{4}f_{12,2} - f_{21,2} - \frac{1}{2}f_{22,2} =$$

$$= (f_{11} + f_{22})\left(\frac{1}{2}f_{11} - \frac{1}{2}f_{22} + \frac{1}{4}f_{12} - f_{21}\right).$$

Aplicînd condiția (4.3) și înlocuind (2.14) se obține ecuația

$$\frac{3i\eta}{4}\left[i\eta\,(e^{i\eta}+1) - \left(\frac{\eta^2}{2}+1\right)(e^{i\eta}-1)\right]\cdot\left[i\frac{\eta}{6}(e^{i\eta}+1) + (e^{i\eta}-1)\right] = 0$$

sau

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{\eta}{2} - \frac{\eta}{2} - \frac{2}{\eta}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{6}\right) = 0.$$

Rădăcina cea mică rezultă din anularea celei de-a doua paranteze

$$\eta = 4{,}912$$

și în conformitate cu (4.2) momentul de răsucire critic are valoarea

$$M_{t0} = 9{,}824 \frac{\alpha}{l}.$$

4.2. BARE CU DOUĂ INTERVALE NEEGALE

Se studiază cîteva cazuri de bare care au un reazem simplu intermediar, la distanțele l_1 și l_2 de capete. Se consideră că secțiunea nu variază în lungul unui interval și M_t este constant pe întreaga bară. Pe cele două intervale momentul de răsucire adimensional are expresia (3.1) pentru $j = 1$, respectiv $j = 2$.

Se notează

$$l = l_1 + l_2, \tag{4.7}$$

$$\eta_0 = \eta_1 + \eta_2. \tag{4.8}$$

Momentul de răsucire critic rezultă din relația

$$M_{t0} = \frac{\eta_0}{\frac{l_1}{\alpha_1} + \frac{l_2}{\alpha_2}} \tag{4.9}$$

Dacă secțiunea barei este constantă pe întreaga sa lungime, atunci

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \tag{4.10}$$

și ținînd seama de (4.7), relația (4.9) capătă forma mai simplă

$$M_{t0} = \eta_0 \frac{\alpha}{l}. \tag{4.11}$$

4.2.1. Bară cu capetele încastrate (fig. 4)

În originea O condițiile și matricea de transformare corespunzătoare sînt

$$\left.\begin{aligned} \theta_{10} &= 0, \\ \overline{M}_{10} &= \overline{M}_0, \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

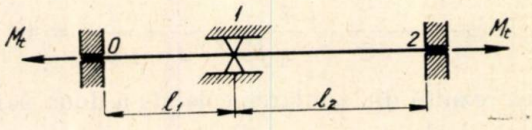


Fig. 4

Matricea de transfer a primului interval este $\mathbf{F}_1$ cu elementele $f_{1,jk}$ $(j, k = 1, 2)$, iar a celui de-al doilea interval este $\mathbf{F}_2$ cu elementele $f_{2,jk}$, $(j, k = 1, 2)$. La extremitatea 2 condiția este

$$\theta_{2l} = 0, \qquad \text{deci} \quad \mathbf{D} = (1 \quad 0).$$

Deoarece matricea **C** este egală cu matricea unitate **I** ca la problemele 4.1, ecuația (3.4) se reduce la

$$\Delta = \det\,(\mathbf{D}\cdot\mathbf{F}_2\cdot\mathbf{F}_1\cdot\mathbf{A}) = 0.$$

Efectuînd calculele se obține

$$\Delta = f_{2,11}\cdot f_{1,12} + f_{2,12}\cdot f_{1,22} = 0.$$

Introducînd (2.14) în care s-a făcut abstracție de numitor și s-a înlocuit η prin η_1, respectiv η_2, ultima ecuație devine, după gruparea termenilor,

$$\frac{1}{\mathrm{i}}\left[\frac{(\eta_1+\eta_2)^2}{2}+\frac{\eta_1^2\,\eta_2^2}{4}\right]\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\eta_1+\eta_2)}-1\right]+(\eta_1+\eta_2)\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\eta_1+\eta_2)}+1\right]-$$

$$-(\eta_1+\eta_2)\left(1+\frac{\eta_1\,\eta_2}{2}\right)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_1}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_2})-\frac{\eta_1^2-\eta_2^2}{2\,\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_1}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta_2})=0,$$

care, după înmulțire cu $-\dfrac{1}{\eta_1+\eta_2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\frac{\eta_1+\eta_2}{2}}$, se mai poate scrie sub forma

$$\mathcal{F}(\eta_1,\eta_2)=\left[\eta_1+\eta_2+\frac{\eta_1^2\,\eta_2^2}{2(\eta_1+\eta_2)}\right]\sin\frac{\eta_1+\eta_2}{2}+2\cos\frac{\eta_1+\eta_2}{2}-$$

$$-(\eta_1-\eta_2)\sin\frac{\eta_1-\eta_2}{2}-(2+\eta_1\,\eta_2)\cos\frac{\eta_1-\eta_2}{2}=0. \tag{4.13}$$

Caz particular.

Se notează cu N_1 numitorul elementelor $f_{1,jk}$, avînd forma lui N din (2.14) în care s-a înlocuit η prin η_1 și se consideră expresia

$$\mathcal{E}=\frac{\mathcal{F}(\eta_1,\eta_2)}{N_1}\cdot \tag{4.14}$$

Dacă $l_1 = 0$, căruia îi corespunde $\eta_1 = 0$, trecerea la limită a expresiei (4.14) dă

$$\lim_{\eta_1\to 0}\mathcal{E}=\frac{0}{0}\cdot \tag{4.15}$$

Nedeterminarea se ridică prin aplicarea teoremei lui l'Hôpital de trei ori succesiv, obținînd în final

$$\lim_{\eta_{i1} \to 0} \mathcal{E} = i\eta_{i2}\left(2\sin\frac{\eta_{i2}}{2} - \eta_{i2}\cos\frac{\eta_{i2}}{2}\right).$$

Egalînd cu zero ultima relație, se obține ecuația valorilor proprii, care se mai poate scrie

$$\operatorname{tg}\frac{\eta_{i2}}{2} = \frac{\eta_{i2}}{2}.$$

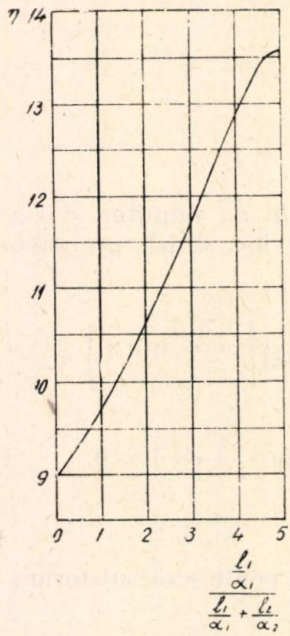


Fig. 5

Rădăcina este

$$\eta_{i2} = \eta_{i0} = 8{,}987.$$

S-a regăsit, cum era și normal, momentul de răsucire critic al barei cu o singură deschidere, avînd capetele încastrate.

În cazul general în care $\eta_{i1} \neq \eta_{i2}$, $\eta_{i1}\cdot\eta_{i2} \neq 0$, ecuația (4.13) a fost rezolvată cu ajutorul calculatorului electronic CIFA 3. Rezultatele au fost transpuse în tabela 1 și în diagrama din figura 5. Valorile lui η_{i0} au fost determinate în funcție de raportul

$$\frac{\eta_{i1}}{\eta_{i0}} = \frac{\dfrac{l_1}{\alpha_1}}{\dfrac{l_1}{\alpha_1} + \dfrac{l_2}{\alpha_2}}. \tag{4.16}$$

Datorită simetriei barei, calculele s-au efectuat numai pentru $\frac{\eta_{i1}}{\eta_{i0}} \in [0\,;\ 0{,}5]$.

Tabela 1

$\dfrac{\dfrac{l_1}{\alpha_1}}{\dfrac{l_1}{\alpha_1}+\dfrac{l_2}{\alpha_2}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
η_{i0}	8,987	9,728	10,622	11,690	12,888	13,624

Dacă are loc relația (4.10), conform (4.7) raportul (4.16) devine

$$\frac{\eta_{i1}}{\eta_{i0}} = \frac{l_1}{l}.$$

4.2.2 Bară încastrată la un capăt și având la celălalt capăt legături unghiulare pe direcțiile x și y (fig. 6)

Bara face parte din categoria de probleme menționate la § 3.3. Pentru înțelegerea modului de rezolvare, deducerea condiției de pierdere a stabilității se va face mai în detaliu.

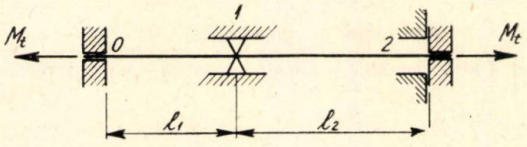


Fig. 6

Pe intervalul 0—1 se va aplica relația (2.12), care conține parametrii θ și $\overline{M}$, ca la cazurile precedente. În originea 0 sînt valabile condițiile și matricea de transformare (4.12).

Parametrii la capătul 1 al intervalului l_1 sînt dați în funcție de parametrii inițiali de relația (2.12) în care s-a înlocuit (3.2)

$$p_{1l} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \cdot p \tag{4.18}$$

în elementele (2.14) ale matricii **F** punîndu-se η_1 în loc de η.

Pe intervalul 1—2, din motivele arătate la § 3.3, se va folosi relația (3.6) pentru $j = 2$, care conține cei patru parametri $\overline{r}$, θ, $\overline{M}$ și $\overline{T}$. În originea 1 a intervalului l_2 condițiile și matricea **C** corespunzătoare (menționată la § 3.1) sînt

$$\left.\begin{aligned} \overline{r}_{20} &= 0, \\ \theta_{20} &= \theta_{1l}, \\ \overline{M}_{20} &= \overline{M}_{1l}, \\ \overline{T}_{20} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

sau sub forma matricială

$$p_{20} = \mathbf{C} \cdot \mathrm{p}_{1l} \tag{4.20}$$

La extremitatea 2 a intervalului l_2 parametrii sînt, conform (3.6),

$$p_{2l} = \mathbf{B} \cdot \mathrm{p}_{20} \tag{4.21}$$

în care, pentru simplificare, s-a suprimat indicele matricii **B**.

La capătul 2 al barei există unica condiție

$$\theta_{2l} = 0, \text{ deci } \mathbf{D} = (0\ 1\ 0\ 0)$$

sau

$$\mathbf{D} \cdot p_{2l} = \mathbf{O}. \tag{4.22}$$

Înlocuind succesiv (4.21), (4.20) și (4.18) în (4.22) și ținînd seamă de cele arătate la nr. 3, condiția de pierdere a stabilității este

$$\Delta = \det\ (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{A}) = 0. \tag{4.23}$$

Efectuînd calculele, (4.23) devine

$$b_{22} f_{12} + b_{23} f_{22} = 0.$$

Înlocuind aici (2.14) pentru $\eta = \eta_{l1}$, (3.9) pentru $j = 2$ și renunțînd la numitorul expresiilor (2.14), se obține ecuația

$$\left(\frac{\eta_1^2}{2} + 1\right)[e^{i(\eta_1+\eta_2)} + 1] - (e^{i\eta_1} + e^{i\eta_2}) + i\,\eta_{l1}\,(e^{i\eta_1} - e^{i\eta_2}) = 0,$$

care mai poate fi scrisă sub forma

$$\mathcal{F}(\eta_{l1}, \eta_{l2}) = \left(\frac{\eta_{l1}^2}{2} + 1\right) \cos\frac{\eta_{l1} + \eta_{l2}}{2} - \cos\frac{\eta_{l1} - \eta_{l2}}{2} - \eta_{l1} \sin\frac{\eta_{l1} - \eta_{l2}}{2} = 0. \tag{4.24}$$

Cazuri particulare.

a. Dacă $l_2 = 0$, adică $\eta_{l2} = 0$, ecuația (4.24) se reduce la

$$\frac{\eta_{l1}}{2} \cos\frac{\eta_{l1}}{2} - \sin\frac{\eta_{l1}}{2} = 0$$

sau

$$\operatorname{tg}\frac{\eta_{l1}}{2} = \frac{\eta_{l1}}{2}$$

cu rădăcina

$$\eta_{l1} = \eta_{l0} = 8{,}987.$$

S-a obținut expresia cunoscută a momentului de răsucire critic la o bară cu o singură deschidere, avînd capetele încastrate.

b. Dacă $l_1 = 0$, deci $\eta_{l1} = 0$, trebuie folosită expresia (4.14) în care se înlocuiește (4.24). Trecînd la limită se obține nedeterminarea (4.15). Ca și la § 4.2.1. se aplică teorema lui l'Hôpital de trei ori succesiv, rezultînd în final

$$\lim_{\eta_{l1} \to 0} \mathcal{E} = 2\,i \sin\frac{\eta_{l2}}{2}.$$

Din ecuația valorilor proprii, care se obține egalînd ultima expresie cu zero, se obține rădăcina

$$\eta_{l2} = \eta_{l0} = 2\pi.$$

S-a regăsit momentul de răsucire critic al barei cu o singură deschidere, avînd un capăt încastrat și legături unghiulare pe direcțiile x și y la celălalt.

În cazul general, soluțiile ecuației (4.24) sînt prezentate în tabela 2 și în diagrama din figura 7.

Tabela 2

$\frac{\frac{l_1}{\alpha_1}}{\frac{l_1}{\alpha_1}+\frac{l_2}{\alpha_2}}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
η_0	6,283	6,791	7,385	8,071	8,837	9,585	10,021	9,905	9,506	9,141	8,987

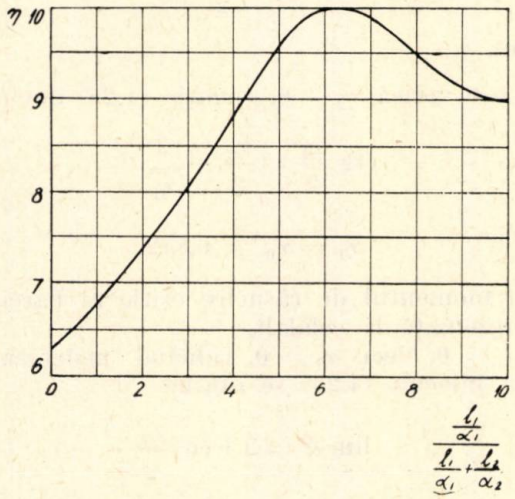


Fig. 7

4.2.3. **Bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt, solicitată prin moment semitangențial** (fig. 8)

Metoda de calcul este identică cu a problemei 4.2.2, fiind valabile

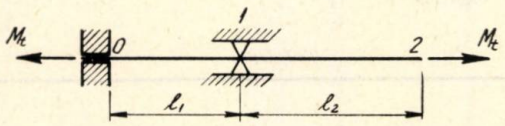


Fig. 8

relațiile (4.12), (4.18), (4.19), (4.20) și (4.21). Condiția la extremitatea 2 este [2]

$$\overline{M}_{2l} = \frac{1}{2}\,\theta_{2l}, \qquad \mathbf{D} = \left(0 \;\; \frac{1}{2} \;\; -1 \;\; 0\right).$$

Calculînd expresia (4.23) se obține ecuația

$$\frac{1}{2}(b_{22} f_{12} + b_{23} f_{22}) - f_{22} = 0$$

și substituind (2.14) și (3.9) rezultă

$$\left(\frac{\eta_1^2}{2} + 1\right)[e^{i(\eta_1 + \eta_2)} - 1] + e^{i\eta_1} - e^{i\eta_2} - i\,\eta_1 (e^{i\eta_1} + e^{i\eta_2}) = 0$$

sau

$$\mathcal{F}(\eta_1, \eta_2) = \left(\frac{\eta_1^2}{2} + 1\right) \sin\frac{\eta_1 + \eta_2}{2} + \sin\frac{\eta_1 - \eta_2}{2} - \eta_1 \cos\frac{\eta_1 - \eta_2}{2} = 0. \tag{4.25}$$

Cazuri particulare.

a. Dacă $l_2 = 0$, adică $\eta_2 = 0$, ecuația (4.25) devine

$$\operatorname{ctg}\frac{\eta_1}{2} = \frac{\eta_1}{2} + \frac{2}{\eta_1},$$

cu rădăcina

$$\eta_{11} = \eta_0 = 6{,}812.$$

Se verifică astfel momentul de răsucire critic al barei încastrată la un capăt și simplu rezemată la celălalt.

b. Pentru $l_1 = 0$, deci $\eta_{11} = 0$, ridicînd nedeterminarea expresiei (4.14) în care s-a înlocuit (4.25) se obține

$$\lim_{\eta_1 \to 0} \mathcal{E} = 2\,i \cos\frac{\eta_2}{2}$$

cu rădăcina

$$\eta_2 = \eta_0 = \pi.$$

Ultima formulă corespunde barei în consolă încărcată cu moment semitangențial.

În alte cazuri posibile, soluția ecuației (4.25) este dată în tabela 3 și în diagrama din figura 9.

Tabela 3

$\frac{l_1}{\alpha_1}$ / $\frac{l_1}{\alpha_1} + \frac{l_2}{\alpha_2}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
η_0	3,142	3,396	3,695	4,049	4,472	4,978	5,566	6,193	6,701	6,898	6,812

6. SCURTE CONCLUZII

Stabilirea expresiei momentului de răsucire critic, la barele cu reazeme intermediare, se dovedește avantajoasă prin utilizarea metodei parametrilor inițiali. Aplicarea ecuațiilor stabilite și a metodei de lucru elaborată în

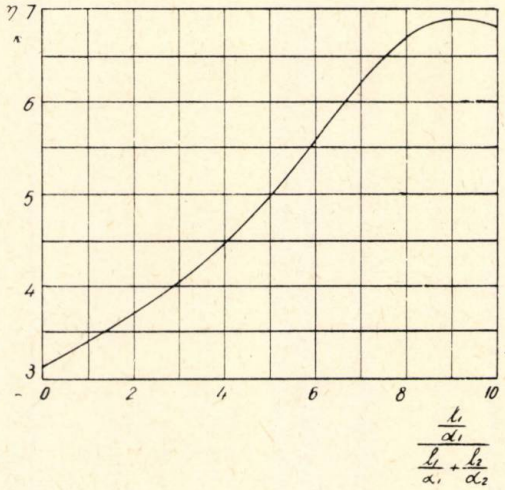


Fig. 9

lucrare a fost exemplificată prin cîteva probleme necercetate încă de alți autori, urmînd ca alte cazuri, care pot apare în cadrul vreunui studiu sau proiect, să fie tratate pe aceeași cale.

Se constată la toate problemele studiate că, așa cum era și normal, existența reazemelor intermediare contribuie la mărirea valorii critice a momentului de răsucire.

Primită la redacție la 4 iulie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. S. D. Ponomariov, V. L. Biderman, K. K. Liharev, V. M. Makusin, N. N. Malinin, V. I. Feodosiev, *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III (traducere din limba rusă). București, Edit. tehnică, 1964.
2. D. Craifaleanu, *Aplicarea metodei parametrilor inițiali la studiul stabilității barelor solicitate la răsucire*, St. cerc. mec. apl., **26**, 6 (1966).
3. В. В. Болотин, Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Москва, Физматгиз, 1961.

STUDII

CALCULUL PLASTIC AL GRINZILOR CONTINUE DE OȚEL

de VALERIU PETCU

Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC), București

539.3

În lucrare se stabilesc limitele inferioare ale valorilor coeficienților de supraîncărcare ai sarcinilor temporare care solicită grinzile continue de oțel, deduse pe baza criteriului limitei de curgere. Conform acestui criteriu, structurile de oțel calculate în domeniul plastic trebuie să se comporte elastic sub acțiunea sarcinilor de exploatare. Studiul se referă la grinzile continue cu secțiunea constantă, simplu rezemate sau încastrate perfect la extremități, solicitate de sarcini permanente și temporare uniform distribuite sau aplicate concentrat, care pot alcătui diferite scheme de încărcare. În final se dau elementele necesare pentru determinarea momentelor plastice de calcul ale acestor structuri.

I. INTRODUCERE

Conform criteriului limitei de curgere [2], o structură de oțel calculată în domeniul plastic trebuie să fie solicitată în întregime în domeniul elastic de sarcinile de exploatare, pentru toate schemele posibile de încărcare. Aplicarea acestui criteriu la structurile al căror calcul plastic se face pe baza principiilor stării limită de rezistență are ca rezultat obținerea limitelor inferioare ale valorilor coeficienților de supraîncărcare ai sarcinilor temporare, deasupra cărora structurile se comportă elastic sub acțiunea sarcinilor de exploatare [3].

În cele ce urmează se stabilesc limitele inferioare ale coeficienților de supraîncărcare ai sarcinilor temporare care solicită grinzile continue de oțel cu secțiunea constantă pe toată lungimea lor, deschiderile fiecărei grinzi putînd fi egale între ele sau de mărimi diferite. Solicitarea grinzilor este produsă de sarcini permanente și temporare uniform distribuite sau aplicate concentrat, care pot alcătui toate schemele posibile de încărcare.

Studiul are la bază principiile metodei de calcul la stări limită.

II. IPOTEZE DE CALCUL

Determinarea limitelor inferioare ale coeficienților de supraîncărcare ai sarcinilor temporare se face în următoarele ipoteze :

1. Grinzile au secțiunea constantă pe toată lungimea lor.

2. Sarcinile permanente şi temporare sînt de acelaşi tip şi au aceleaşi puncte de aplicaţie.

3. Sarcinile permanente se consideră constante şi egale cu valorile lor de calcul [3]. La grinzile solicitate de sarcini concentrate, sarcinile permanente sînt egale între ele.

4. Sarcinile temporare, aplicate static, pot varia de la zero la valorile corespunzătoare transformării grinzilor în mecanisme, în funcţie de un singur parametru. Aceste sarcini se pot aplica în una sau mai multe deschideri ale grinzilor, putînd alcătui în acest mod, împreună cu sarcinile permanente, toate schemele posibile de încărcare. La grinzile solicitate de sarcini concentrate, sarcinile temporare sînt egale între ele şi au acelaşi coeficient de supraîncărcare.

5. Sarcinile de exploatare cuprind sarcinile permanente de calcul şi sarcinile temporare normate [3].

6. Grinzile se presupun rigidizate împotriva flambajului lateral al tălpii comprimate.

7. Se neglijează influenţa forţelor tăietoare asupra valorilor momentelor plastice.

8. Se neglijează influenţa eforturilor reziduale asupra procesului de plastificare a secţiunilor.

III. NOTAŢII

În cadrul acestui studiu se folosesc următoarele notaţii:

f — coeficientul de formă al secţiunii transversale a grinzilor, egal cu raportul dintre modulul de rezistenţă plastic şi modulul de rezistenţă elastic;

g — sarcina permanentă de calcul, uniform distribuită pe unitatea de lungime;

G — sarcină permanentă de calcul, aplicată concentrat;

l — mărimea fiecărei deschideri la grinzile cu deschideri egale, respectiv mărimea deschiderii de referinţă la grinzile cu deschideri inegale;

M_1 — momentul elastic maxim în primul cîmp şi în al treilea cîmp la grinda cu trei deschideri egale, simplu rezemată la extremităţi;

M_2 — momentul elastic maxim în cîmpul al doilea al grinzii cu trei deschideri egale, simplu rezemate la extremităţi;

M_b — valoarea absolută maximă a momentului elastic pe fiecare din reazemele intermediare ale grinzii cu trei deschideri egale, simplu rezemate la extremităţi;

M_{n1} — valoarea momentului M_1 produsă de sarcinile de exploatare;

M_p — momentul plastic al secţiunii grinzilor;

p — valoarea arbitrară a sarcinii temporare, uniform distribuite pe unitatea de lungime;

P — valoare arbitrară a unei sarcini temporare, aplicate concentrat;

p_n, P_n — valorile normate ale sarcinilor p şi P;

p_m, P_m — valorile sarcinilor temporare p şi P, corespunzătoare transformării grinzilor în mecanisme;

α, β — coeficienți de influență ai limitei inferioare λ_{cm} a coeficientului de supraîncărcare al sarcinilor temporare;

γ — coeficientul de influență al deschiderilor cu mărimea diferită de cea a deschiderii de referință, la grinzile cu deschideri inegale;

λ_{cm} — limita inferioară a coeficientului de supraîncărcare al sarcinilor temporare, deasupra căreia este îndeplinită condiția privind comportarea elastică a grinzilor sub acțiunea sarcinilor de exploatare;

λ_u — coeficientul de supraîncărcare al sarcinilor temporare, dat de prescripțiile oficiale pentru calculul structurilor de oțel la starea limită de rezistență;

μ — coeficientul de influență al momentului plastic;

$$q = g + p; \quad Q = G + P; \quad k_n = \frac{p_n}{g}; \quad K_n = \frac{P_n}{G}.$$

IV. VALORILE LIMITEI INFERIOARE λ_{cm}

Grinzile continue considerate în acest studiu se împart în următoarele trei categorii:

— grinzi continue simplu rezemate la ambele extremități,

— grinzi continue simplu rezemate la o extremitate și încastrate perfect la cealaltă extremitate, și

— grinzi continue încastrate perfect la ambele extremități.

Grinzile din prima categorie pot avea deschiderile egale sau inegale

Grinzile din ultimele două categorii se consideră că au deschiderile egale.

Pentru exemplificarea procedeului de determinare a limitelor inferioare ale valorilor coeficienților de supraîncărcare ai sarcinilor temporare, în cele ce urmează se studiază grinda continuă cu trei deschideri egale, simplu rezemată la extremități. Solicitarea grinzii este produsă de sarcini permanente și temporare aplicate concentrat în mijlocul deschiderilor.

Schema grinzii este dată în figura 1 *a*.

Schemele de încărcare corespunzătoare momentelor elastice maxime (în valoare absolută), în cîmpurile și pe reazemele intermediare ale grinzii, sînt date în figurile 1*b*, *c*, *d*.

Momentele elastice maxime (în valoare absolută) au expresiile

$$M_1 = (0{,}175\ G + 0{,}213\ P)l, \tag{1}$$

$$M_2 = (0{,}100\ G + 0{,}175\ P)l, \tag{2}$$

$$M_b = (0{,}150\ G + 0{,}175\ P)l. \tag{3}$$

Din compararea valorilor acestor momente rezultă că cea mai solicitată secțiune este cea corespunzătoare momentului M_1.

Pentru $P = P_n$, expresia momentului elastic în această secțiune devine

$$M_{n1} = (0{,}175\ G + 0{,}213\ P_n)l. \tag{4}$$

Stadiul de mecanism al grinzii și diagrama de momente corespunzătoare acestui stadiu sînt reprezentate în figurile 1 *e*, *f*.

Din ecuația de echilibru plastic a unuia din cele două mecanisme de

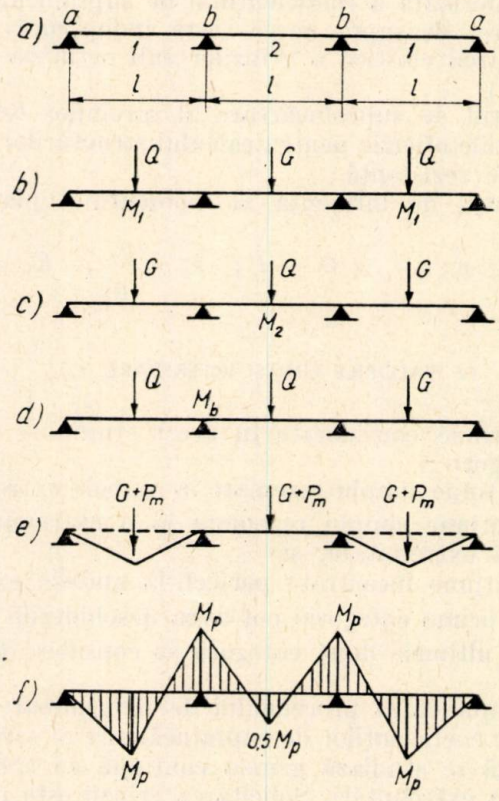


Fig. 1

cedare plastică reprezentate în figura 1*e* , rezultă că valoarea momentului plastic este dată de relația

$$M_p = 0{,}167\ (G + P_m)l. \tag{5}$$

Limita inferioară a valorii coeficientului de supraîncărcare al sarcinilor temporare se obține în ipoteza că sub acțiunea sarcinilor de exploatare se atinge limita de curgere de calcul a oțelului exclusiv în fibra extremă a secțiunii celei mai solicitate a grinzii.

Ținînd seama de această ipoteză, momentul plastic al grinzii poate fi exprimat în funcție de momentul elastic M_{n1}, după cum urmează

$$M_p = fM_{n1} = f\,(0{,}175\,G + 0{,}213\,P_n)\,l. \tag{6}$$

De asemenea, în cadrul aceleiași ipoteze, sarcina P_m are expresia

$$P_m = \lambda_{cm} P_n\,. \tag{7}$$

Cu această precizare, relația (5) devine

$$M_p = 0{,}167\,(G + \lambda_{cm}\,P_n)\,l. \tag{8}$$

Valoarea limitei inferioare λ_{cm} se obține din egalarea momentului plastic dat de relația (6) cu momentul plastic dat de relația (8).

Rezultă

$$\lambda_{cm} = \frac{f\,(1{,}05\,G + 1{,}28\,P_n) - G}{P_n}. \tag{9}$$

Cu notația

$$K_n = \frac{P_n}{G}, \tag{10}$$

Relația (9) devine

$$\lambda_{cm} = f\left(1{,}28 + \frac{1{,}05}{K_n}\right) - \frac{1}{K_n}. \tag{11}$$

Procedeul descris mai sus s-a folosit la determinarea limitei inferioare λ_{cm} pentru cele trei categorii de grinzi continue luate în considerație.

Studierea acestor grinzi a arătat că limita inferioară λ_{cm} are următoarele expresii generale

$$\lambda_{cm} = f\left(\alpha + \frac{\beta}{k_n}\right) - \frac{1}{k_n} \tag{12}$$

pentru grinzile solicitate de sarcini uniform distribuite, respectiv

$$\lambda_{cm} = f\left(\alpha + \frac{\beta}{K_n}\right) - \frac{1}{K_n} \tag{13}$$

pentru grinzile solicitate de sarcini concentrate.

În relația (12) coeficientul k_n are expresia

$$k_n = \frac{p_n}{g}, \tag{14}$$

iar în relația (13) coeficientul K_n este dat de relația (10).

În relațiile (12) și (13), α și β sînt coeficienți de influență care depind de caracteristicile statice și geometrice ale grinzilor, precum și de tipul și de poziția punctelor de aplicație ale sarcinilor.

În cele ce urmează se prezintă valorile coeficienților α și β pentru următoarele tipuri de grinzi continue:

Tipul I: grinzi cu deschideri egale, simplu rezemate la extremități. Schemele lor sînt date în figura 2. Schemele sarcinilor care le solicită, numerotate de la *A* la *F*, sînt reprezentate în figura 3.

Valorile coeficienților α și β sînt date în tabela 1.

Tipul II: grinzi cu deschideri egale, simplu rezemate la o extremitate și încastrate perfect la cealaltă extremitate. Schemele acestor grinzi

sînt date în figura 4. Sarcinile care le solicită au una din schemele *A*, *B*, *C* și *E*, reprezentate în figura 3.

Valorile coeficienților α și β sînt date în tabela 2.

Tipul III: grinzi cu deschideri egale, încastrate perfect la ambele

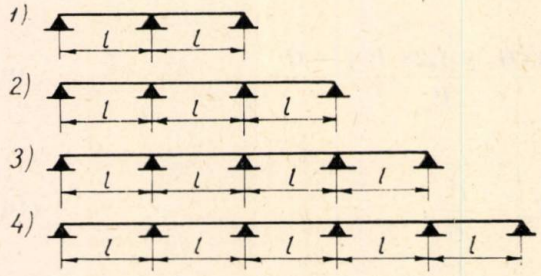


Fig. 2

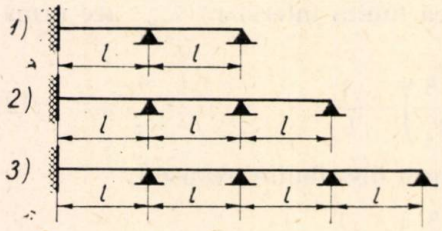


Fig. 4

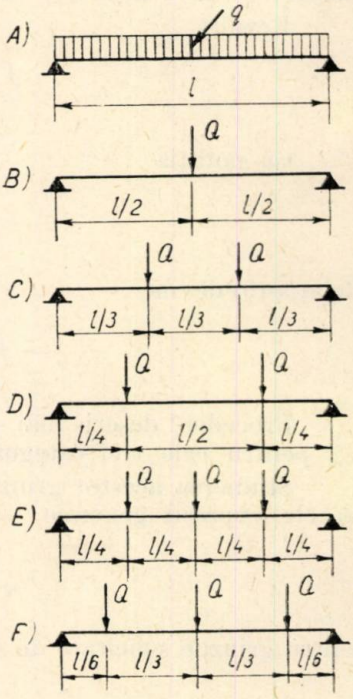


Fig. 3

extremități. Schemele acestor grinzi sînt date în figura 5. Sarcinile care le solicită au una din schemele *A*, *B*, *C* și *E*, reprezentate în figura 3.

Valorile coeficienților α și β sînt date în tabela 3.

Tipul IV: grinzi cu deschideri inegale, simplu rezemate la extremități, solicitate de sarcini uniform distribuite. Schemele lor sînt reprezentate în figura 6, unde γ este un coeficient de influență adimensional.

Valorile coeficienților α și β sînt date în tabelele 4, 5 și 6.

Tipul V: grinzi cu două deschideri inegale, simplu rezemate la extremități, solicitate de sarcini concentrate. Schemele acestor grinzi, inclusiv modul lor de solicitare, sînt reprezentate în figura 7.

Valorile coeficienților α și β sînt date în tabela 7.

Tipul VI: grinzi cu trei deschideri inegale, simplu rezemate la extremități, solicitate de sarcini concentrate. Schemele acestor grinzi, inclusiv modul lor de solicitare, sînt reprezentate în figura 8.

Valorile coeficienților α și β sînt date în tabela 8.

Tipul VII: grinzi cu patru deschideri inegale, simplu rezemate la extremități, solicitate de sarcini concentrate. Schemele acestor grinzi, inclusiv modul lor de solicitare, sînt reprezentate în figura 9.

Valorile coeficienților α și β sînt date în tabela 9.

Elementele necesare pentru calculul momentelor elastice maxime, care intervin la determinarea limitei inferioare λ_{cm}, s-au luat din lucrarea

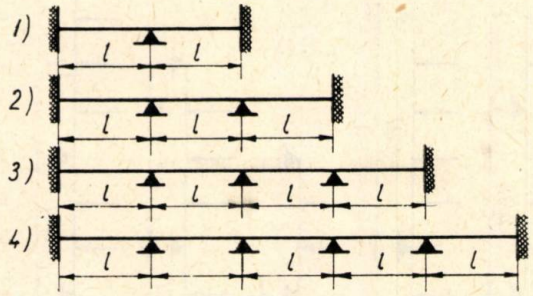


Fig. 5

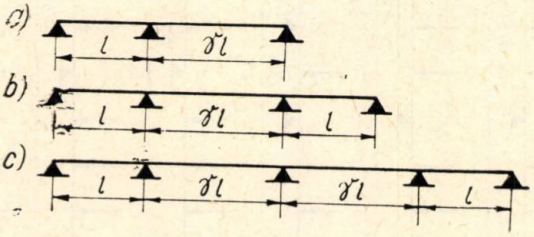


Fig. 6

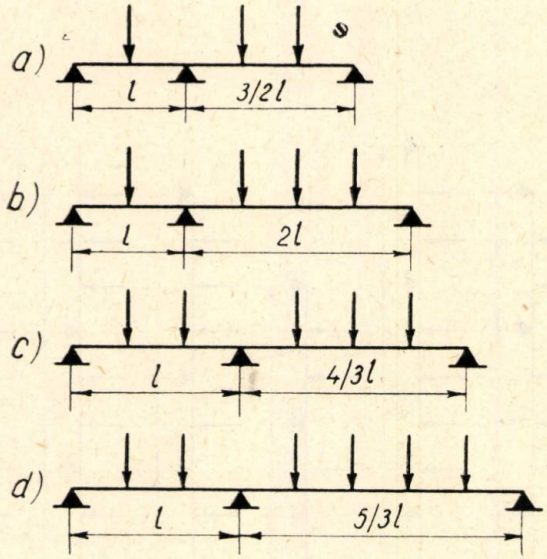


Fig. 7

[1] pentru tipurile de grinzi I, IV, V, VI și VII și din lucrarea [5] pentru tipurile de grinzi II și III.

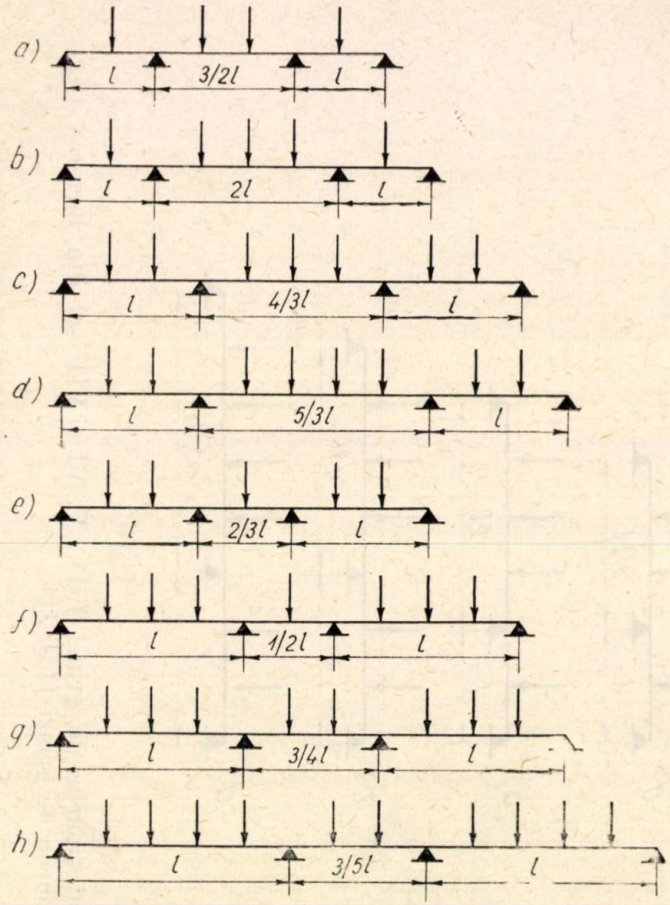

a)
l
3/2l
l
b)
l
2l
l
c)
l
4/3l
l
d)
l
5/3l
l
e)
l
2/3l
l
f)
l
1/2l
l
g)
l
3/4l
l
h)
l
3/5l
l

Fig. 8

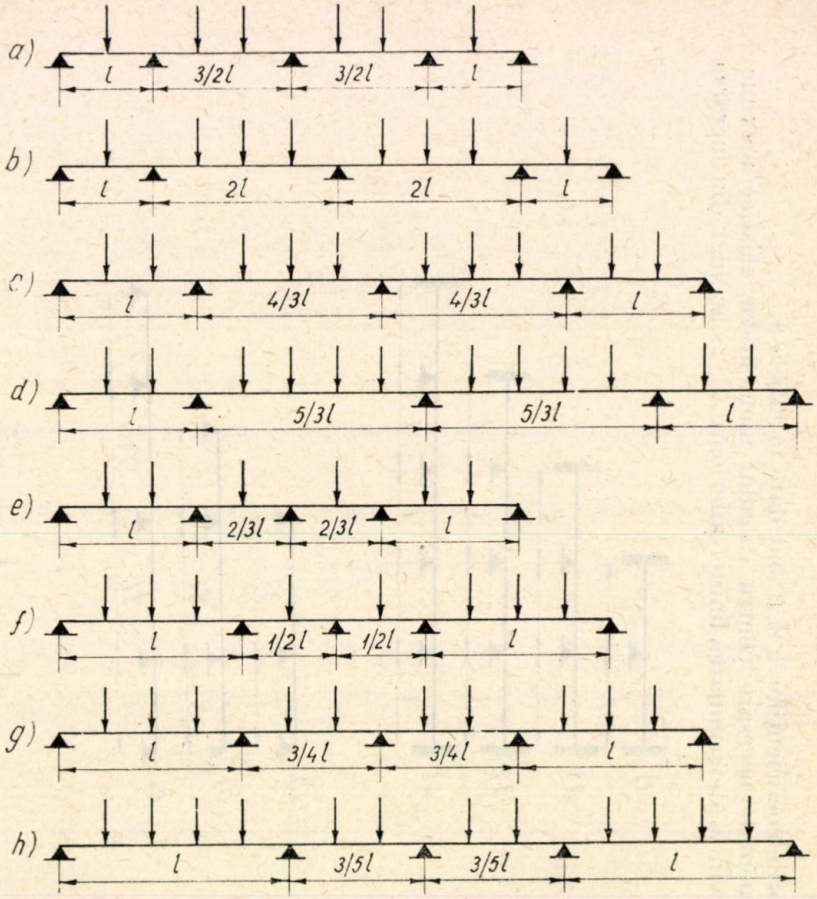

a)
l
3/2l
3/2l
l
b)
l
2l
2l
l
c)
l
4/3l
4/3l
l
d)
l
5/3l
5/3l
l
e)
l
2/3l
2/3l
l
f)
l
1/2l
1/2l
l
g)
l
3/4l
3/4l
l
h)
l
3/5l
3/5l
l

Fig. 9

Tabela 1

Coeficienții α, β și μ pentru grinzile de tipul I

a) Schema de încărcare	b) Numărul deschiderilor	α	β	μ
A	2	1,459	1,459	0,0858
	3	1,364	1,166	0,0858
	4	1,410	1,247	0,0858
	5	1,398	1,224	0,0858
B	2, (K_n <2,13)	1,128	1,128	0,1667
	2, (K_n >2,13)	1,218	0,936	0,1667
	3	1,278	1,050	0,1667
	4	1,260	1,020	0,1667
	5	1,266	1,026	0,1667
C	2	1,332	1,332	0,2500
	3	1,244	1,068	0,2500
	4	1,284	1,144	0,2500
	5	1,276	1,124	0,2500
D	2	1,405	1,405	0,2000
	3	1,315	1,125	0,2000
	4	1,355	1,205	0,2000
	5	1,345	1,185	0,2000
E	2	1,407	1,407	0,3333
	3	1,314	1,125	0,3333
	4	1,356	1,206	0,3333
	5	1,347	1,185	0,3333
F	2	1,426	1,426	0,2777
	3	1,329	1,142	0,2777
	4	1,376	1,221	0,2777
	5	1,362	1,200	0,2777

Tabela 2

Coeficienții α, β, δ și μ pentru grinzile de tipul II

a) Schema de încărcare	b) Numărul deschiderilor	α	β	μ
A	2	1,247	1,247	0,0858
	3	1,340	1,235	0,0858
	4	1,387	1,235	0,0858
B	2	1,176	1,020	0,1667
	3	1,242	1,026	0,1667
	4	1,254	1,020	0,1667
C	2	1,144	1,144	0,2500
	3	1,228	1,132	0,2500
	4	1,268	1,132	0,2500
E	2	1,206	1,206	0,3333
	3	1,296	1,194	0,3333
	4	1,341	1,191	0,3333

Tabela 3

Coeficienţii α, β şi μ pentru grinzile de tipul III

a) Schema de încărcare	b) Numărul deschiderilor	α	β	μ
A	2	1,664	1,333	0,0625
	3	1,776	1,333	0,0625
	4	1,808	1,333	0,0625
	5	1,824	1,333	0,0625
B	2	1,248	1,000	0,1250
	3	1,336	1,000	0,1250
	4	1,392	1,000	0,1250
	5	1,456	1,000	0,1250
C	2	1,668	1,332	0,1667
	3	1,782	1,332	0,1667
	4	1,806	1,332	0,1667
	5	1,824	1,332	0,1667
E	2	1,560	1,248	0,2500
	3	1,668	1,248	0,2500
	4	1,692	1,248	0,2500
	5	1,712	1,248	0,2500

Tabela 4

Coeficienţii α, β şi μ pentru grinzile de tipul IV. Grinzi cu 2 deschideri

γ	α	β	μ
1,1	1,338	1,338	0,1038
1,2	1,254	1,254	0,1236
1,3	1,200	1,200	0,1450
1,4	1,159	1,159	0,1682
1,5	1,134	1,134	0,1931
1,6	1,111	1,111	0,2196
1,7	1,105	1,105	0,2480
1,8	1,089	1,089	0,2800
1,9	1,095	1,095	0,3097
2,0	1,093	1,093	0,3432

Tabela 5

Coeficienții α, β și μ pentru grinzile de tipul IV. Grinzi cu 3 deschideri

γ	k_n	α	β	μ
0,5	<2	1,061	1,026	0,0858
	>2	1,107	0,932	0,0858
0,6	<8	1,096	1,026	0,0858
	>8	1,107	0,932	0,0858
0,7	<2,5	1,014	1,119	0,0858
	>2,5	1,142	0,956	0,0858
0,8	<∞	1,189	1,000	0,0858
0,9	<∞	1,270	1,072	0,0858
1,0	<∞	1,364	1,166	0,0858
1,1	<∞	1,480	1,282	0,0858
1,2	<∞	1,544	1,356	0,0900
1,3	<∞	1,439	1,278	0,1056
1,4	<∞	1,371	1,233	0,1225
1,5	<∞	1,316	1,195	0,1406
1,6	<∞	1,275	1,169	0,1600
1,7	<∞	1,240	1,152	0,1806
1,8	<∞	1,220	1,141	0,2025
1,9	<∞	1,201	1,130	0,2256
2,0	<∞	1,188	1,124	0,2500

Tabela 6

Coeficienții α, β și μ pentru grinzile de tipul VI. Grinzi cu 4 deschideri

γ	k_n	α	β	μ
0,5	<∞	1,154	1,131	0,0858
0,6	<∞	1,154	1,119	0,0858
0,7	<∞	1,189	1,119	0,0858
0,8	<∞	1,235	1,142	0,0858
0,9	<∞	1,305	1,189	0,0858
1,0	<∞	1,410	1,247	0,0858
1,1	<∞	1,527	1,329	0,0858
1,2	<0,444	1,589	1,367	0,0900
1,2	>0,444	1,689	1,322	0,0900
1,3	<∞	1,676	1,373	0,1056
1,4	<∞	1,657	1,412	0,1225
1,5	<∞	1,650	1,437	0,1406
1,6	<∞	1,637	1,456	0,1600
1,7	<∞	1,628	1,473	0,1806
1,8	<∞	1,620	1,486	0,2025
1,9	<∞	1,616	1,494	0,2256
2,0	<∞	1,600	1,500	0,2500

Tabela 7

Coeficienţii α, β şi μ pentru grinzile de tipul V

Schema grinzii	K_n	α	β	μ
a	$<\infty$	1,070	1,003	0,375
b	<2,87	1,023	1,023	0,667
	>2,87	1,035	0,989	0,667
c	$<\infty$	1,112	1,112	0,444
d	$<\infty$	1,049	1,049	0,429

Tabela 8

Coeficienţii α, β şi μ pentru grinzile de tipul VI

Schema grinzii	α	β	μ
a	1,240	1,140	0,250
b	1,070	1,022	0,500
c	1,287	1,158	0,333
d	1,246	1,162	0,500
e	1,116	1,060	0,250
f	1,098	1,056	0,333
g	1,173	1,041	0,333
h	1,139	1,080	0,429

Tabela 9

Coeficienţii α, β şi μ pentru grinzile de tipul VII

Schema grinzii	α	β	μ
a	1,624	1,448	0,250
b	1,488	1,412	0,500
c	1,554	1,308	0,333
d	1,632	1,488	0,500
e	1,068	1,000	0,250
f	1,086	1,065	0,333
g	1,140	1,071	0,333
h	1,097	1,059	0,429

V. EXPRESIILE GENERALE ALE MOMENTELOR PLASTICE. MOMENTE PLASTICE DE CALCUL

Pentru toate tipurile de grinzi studiate, momentele plastice au expresiile generale

$$M_p = \mu\ (g + p_m)l^2 \tag{15}$$

pentru grinzile solicitate de sarcini uniform distribuite, respectiv

$$M_p = \mu\ (G + P_m)l \tag{16}$$

pentru grinzile solicitate de sarcini concentrate.

În expresiile (15) și (16), μ este un coeficient de influență adimensional, ale cărui valori sînt date în tabelele 1—7.

Valorile de calcul ale momentelor plastice sînt date, de asemenea, de relațiile (15) și (16), în care sarcinile p_m și P_m se determină după cum urmează :

Cazul I : dacă $\lambda_u < \lambda_{cm}$, sarcinile p_m și P_m sînt date de relația (7) și de relația

$$p_m = \lambda_{cm} p_n\ . \tag{17}$$

Cazul II : dacă $\lambda_u > \lambda_{cm}$, sarcinile p_m și P_m sînt date de relațiile

$$p_m = \lambda_u p_n \tag{18}$$

și

$$P_m = \lambda_u P_n\ . \tag{19}$$

În relațiile (18) și (19), λ_u este coeficientul de supraîncărcare al sarcinilor temporare dat de prescripțiile oficiale pentru calculul construcțiilor la stări limită.

★

Rezultatele prezentate în cadrul acestui studiu au fost stabilite în ipoteza că forțele tăietoare au o influență neglijabilă asupra valorilor momentelor plastice.

În lucrarea [4] sînt date elementele necesare pentru determinarea momentelor plastice în cazurile în care forțele tăietoare influențează sensibil asupra valorilor acestor momente.

Primită la redacție la 31 ianuarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. C. N. Avram, *Grinzi continue*, Edit. tehnică, București, 1965.
2. H. A. Sawyer, Jr., *An elastic criterion for plastic design*, Journal of the Structural Division, Proceedings ASCE, 84, ST2 (1958).
3. V. Petcu, *Calculul plastic al structurilor de oțel pe baza concepției stărilor limită*, St. cerc. mec. apl., **23**, 5 (1966).
4. V. Petcu, *Momentele plastice ale secțiunilor elementelor* I *și laminate în România*, St. cerc. mec. apl., **26**, 6 (1967).
5. * * * *Справочник проектировщика—Расчетно—теоретический*, Госстройиздат, Москва, 1960.

STUDII

DOMENIUL DE REZISTENȚĂ AL STRUCTURILOR NEDETERMINATE, IDEAL ELASTO-PLASTICE*

de H. SANDI

Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (I.N.C.E.R.C.), BUCUREȘTI

539.3

Diferite încărcări aplicate unei structuri sînt reprezentate ca elemente ale unui spațiu liniar, asociat structurii. Încărcarea de rupere plastică este reprezentată sub forma unei varietăți închise. Se pune în evidență o proprietate a structurilor ideal elasto-plastice, conform căreia dacă structura rezistă fiecăreia din două încărcări luate izolat, ea va rezista și unei încărcări realizate prin interpolare liniară între cele două încărcări considerate. Proprietatea discutată este echivalentă cu aceea că mulțimea punctelor din spațiul încărcărilor pentru care structura rezistă, formează un domeniu convex. După o serie de elemente aplicative sînt discutate posibilități de extindere a proprietății de convexitate.

1. INTRODUCERE

Adoptarea unei decizii corecte în proiectarea structurilor este condiționată de disponibilitatea unor informații cuprinzătoare referitoare la comportarea diferitelor soluții de proiectare posibile, sub acțiunea diferitelor sisteme de forțe exterioare. Dezvoltarea actuală a metodelor de calcul al structurilor în diferitele stadii de solicitare, este strîns legată de necesitatea practică a obținerii unor astfel de informații. Literatura de specialitate conține un mare număr de idei, rezultate teoretice și procedee practice de analiză a comportării unei structuri în diferitele stadii de solicitare sub o schemă de încărcare dată, în schimb este mult mai puțin bogată în problema analizei structurilor în condițiile mai multor scheme de încărcări posibile.

Ținînd seama de interesul practic pe care această problemă îl prezintă, deoarece orice structură reală poate fi solicitată de diferite sisteme de forțe, în cele ce urmează sînt analizate cîteva proprietăți ale mulțimii sistemelor de forțe exterioare statice cărora o structură static nedeterminată, cu secțiuni critice ideal elasto-plastice, le rezistă.

*) Lucrare prezentată la Conferința de Mecanică, București, 1965, ca omagiu memoriei Profesorului Mihail D. Hangan.

Principalul rezultat obținut poate fi exprimat calitativ astfel: dacă o structură ideal elasto-plastică rezistă fiecăruia din două sisteme de forțe exterioare luate izolat, atunci ea rezistă și unui sistem de forțe obținute prin interpolare liniară între cele două sisteme de forțe (interpolarea liniară va fi definită prin relația (4)). Anticipînd cele arătate în continuare, trebuie amintit că proprietăți asemănătoare cu cele analizate în lucrare au fost puse în evidență de Papkovici [8] pentru mulțimea sistemelor de forțe statice sub acțiunea cărora o structură elastică se găsește în echilibru stabil. Astfel de proprietăți pot fi demonstrate cu ușurință pentru mulțimea sistemelor de forțe sub acțiunea cărora deplasările, eforturile, tensiunile etc. produse în stadiul de comportare liniară (geometric și reologic) nu depășesc în modul o limită dată.

O proprietate de natură asemănătoare a fost demonstrată de Johansen [5] pentru cazul proiectării plăcilor plane după teoria liniilor de rupere plastică. Dacă pentru o placă se determină pe rînd momentele de rupere astfel încît ea să reziste respectiv fiecăreia din încărcările $S_1, S_2, \ldots, S_n$ și apoi se sumează pentru fiecare secțiune momentele de rupere astfel determinate, placa va rezista în acest caz și sumei $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ a acestor încărcări.

Lucrarea constituie un omagiu adus memoriei profesorului Mihail D. Hangan, fost șef al Catedrei de construcții de beton armat din Institutul de construcții din București, pentru contribuția deosebită adusă la formarea școlii românești de calcul al structurilor.

În îndelungata sa activitate, profesorul Hangan a efectuat cercetări proprii și a stimulat în mod constant preocuparea colegilo rmai tineri pentru multiplele probleme ridicate de calculul structurilor. În special în ultimii ani ai vieții, preocupările sale au fost legate de perfecționarea metodelor de evaluare a siguranței structurilor, atît sub aspectul reprezentării matematice a siguranței, cît și sub acela al elaborării de metode de analiză a comportării structurilor în stadiul solicitărilor puternice, în vecinătatea ruperii. Dintre lucrările sale, cunoscute și apreciate în țară și în străinătate, unele [2], [3], [4], legate de obiectul lucrării de față, i-au sugerat în mare măsură autorului preocuparea pentru problemele abordate.

2. SPAȚIUL VECTORIAL AL ÎNCĂRCĂRILOR APLICATE UNEI STRUCTURI

În cele ce urmează, se va înțelege prin încărcare un sistem de forțe exterioare (statice) aplicate unei structuri.

Întrucît vor fi analizate unele proprietăți ale mulțimii de încărcări cărora structura le rezistă, este necesar să se pună în evidență o structură matematică a mulțimii încărcărilor care pot fi aplicate structurii.

Dacă se dă o încărcare S, se va înțelege prin αS (α : real), o încărcare în care fiecare forță a încărcării S este amplificată cu coeficientul α (fig. 1 *a*). Dacă se dau două încărcări, S_1 și S_2, se va înțelege prin $S_1 + S_2$ o încărcare constituită din toate forțele încărcării S_1 și din toate forțele încărcării S_2 (fig. 1 b).

Mulțimea $\{S\}$ a încărcărilor S, care pot fi aplicate unei structuri și pentru care s-au definit astfel operațiile de adunare și de înmulțire cu numere reale, constituie un spațiu vectorial [6].

Dacă există două încărcări S_1 și S_2, care pot fi aplicate structurii, o combinație liniară a lor,

$$S_3 = \alpha S_1 + \beta S_2 \tag{1}$$

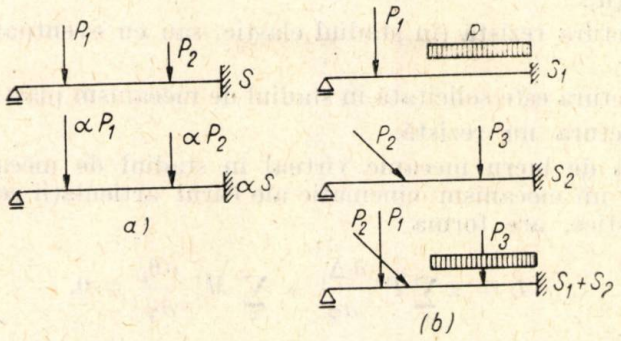


Fig. 1

(α, β : reali, arbitrari), constituie de asemenea o încărcare care poate fi aplicată structurii [1]).

3. DOMENIUL DE REZISTENȚĂ AL UNEI STRUCTURI DIN BARE CU PROPRIETĂȚI IDEAL ELASTO-PLASTICE

Se va considera o structură static determinată, solicitată în următoarele condiții :

— structura este plană și solicitată în planul ei ;

— stadiul de solicitare este determinat exclusiv de solicitarea de încovoiere, iar relația dintre momentul încovoietor într-o secțiune și curbura axei barei deformate în punctul respectiv este de tipul Prandtl ;

— deplasările punctelor structurii în stadiul apariției unui mecanism plastic prin formarea numărului corespunzător de articulații plastice, sînt suficient de reduse pentru a nu fi necesară considerarea echilibrului pe schema deformată a structurii ;

— temperatura, autotensiunile (datorite contracției sau deplasărilor de reazeme) nu afectează sensibil starea de solicitare ;

— încărcările aplicate sînt funcții liniare, $S = \sum_i \alpha_i \cdot S_i^0$, (unde S_i^0 sînt încărcări fixe date, liniar independente) în raport cu parametrii α_i ($i = 1, \ldots, n$), deci spațiul $\{S\}$ al încărcărilor poate fi considerat ca un spațiu vectorial n-dimensional (această particularizare are avantajul

[1]) Structura matematică de spațiu vectorial există și pentru sistemele de forțe dinamice, dar acest caz nu este de interes direct pentru lucrare. De asemenea, nu prezintă interes direct pentru lucrare definirea normei unei încărcări sau a produsului scalar a două încărcări, care precizează și mai mult structura matematică a mulțimilor încărcărilor aplicate.

de a permite utilizarea unor exprimări mari sugestive şi a unor reprezentări geometrice în spaţiul $\{\alpha_i\}$.

Fie o încărcare S depinzînd de un singur parametru, :

$$S = \alpha S^{\circ}, \tag{2}$$

În funcţie de valoarea luată de parametrul α pot să apară următoarele situaţii :

— structura rezistă (în stadiul elastic, sau cu eventuală plastificare parţială) ;

— structura este solicitată în stadiul de mecanism plastic ;

— structura nu rezistă.

Ecuaţia de lucru mecanic virtual în stadiul de mecanism plastic, scrisă pentru un mecanism cinematic ale cărui articulaţii coincid cu articulaţiile plastice, are forma

$$L = \alpha \sum_j P_j^0 \frac{\partial \Delta_j}{\partial \varphi} + \sum_k M_k^* \frac{\partial \theta_k}{\partial \varphi} = 0, \tag{3}$$

unde P_j^0 reprezintă sistemul de forţe exterioare aplicate în punctele şi pe direcţiile j, corespunzătoare încărcării S° ;

Δ_j — deplasările punctelor de aplicaţie ale forţelor pe direcţiile acestor forţe ;

M_k^* — momentele încovoietoare de plastificare (în sensul rotirii relative apărute) din secţiunile în care apar articulaţiile plastice ;

θ_k — rotirile relative ale articulaţiilor plastice ;

φ — parametrul care determină poziţia mecanismului considerat.

Mărimea L este o funcţie liniară de α (pentru un semn dat al acestui parametru, deci pentru un sens de acţiune dat al forţelor exterioare). Această funcţie liniară se anulează pentru valoarea care corespunde mecanismului plastic, are acelaşi semn pentru valorile α care corespund unor stări de solicitare cărora structura le rezistă ca şi pentru origine, şi are un semn opus acestuia pentru valorile α care corespund ruperii. Valorile α pentru care structura rezistă (cu eventuală plastificare parţială) formează o vecinătate a originii (iar mulţimea lor se va numi intervalul de rezistenţă). Cele două valori α' şi α'' (respectiv negativă[2]) şi pozitivă) pentru care apare stadiul de mecanism plastic, sînt limitele inferioară şi superioară ale intervalului (α', α'') de rezistenţă. Valorile α pentru care structura nu rezistă formează complementul segmentului $[\alpha', \alpha'']$. Mulţimea punctelor α pentru care structura rezistă este evident mărginită din cauza proprietăţilor materialelor de construcţie.

Nu este posibil ca mulţimea punctelor pentru care structura rezistă să nu fie un interval. În cazul cînd această mulţime nu ar fi un interval, ar exista mai mult decît două puncte frontieră, deci ecuaţia (3), care este o ecuaţie algebrică liniară în raport cu parametrul α, ar admite mai mult decît cîte o singură soluţie pentru fiecare sens de acţiune (respectiv semn al parametrului α) al încărcărilor. În teoria încărcării limită a structurilor

[2]) Valorile negative ale coeficientului α implică, evident, o schimbare a sensului de acţiune al încărcării.

ideal elasto-plastice se stabileşte următoarea teoremă cinematică [7], reprodusă cu notaţiile din lucrare :

Pentru o structură dată, supusă unei încărcări $S = \alpha S^{\circ}$, *valoarea* α *care corespunde unui mecanism plastic ipotetic este mai mare sau cel puţin egală cu valoarea* $\bar{\alpha}$ *care corespunde încărcării de rupere.*

Pentru cele ce urmează, această teoremă va fi reformulată, mai precis, în modul următor :

Pentru o structură dată supusă unei încărcări $S = \alpha S^{\circ}$, valoarea α de un semn dat (pozitiv sau negativ) care corespunde unui mecanism plastic ipotetic este mai mare sau cel puţin egală în valoare absolută cu valoarea $\bar{\alpha}$ care are aceleaşi semn (pozitiv, respectiv negativ) şi corespunde încărcării de rupere.

Dacă se consideră o încărcare S de forma

$$S = \sum_i \alpha_i S_i^0, \tag{1'}$$

ecuaţia (3) de echilibru în stadiul de mecanism plastic (pentru un mecanism ipotetic) ia forma mai generală

$$L = \sum_{i,j} \alpha_i P_{ij}^0 \frac{\partial \Delta_j}{\partial \varphi} + \sum_k M_k^{\cdot} \frac{\partial \theta_k}{\partial \varphi} = 0, \tag{3'}$$

unde P_{ij}^0 reprezintă forţa în punctul şi pe direcţia j, corespunzătoare încărcării S_i^0, în timp ce celelalte simboluri au semnificaţiile din relaţia (3).

Condiţia de echilibru în stadiul de mecanism plastic, este deci reprezentată în spaţiul $\{\alpha_i\}$ printr-un hiperplan $L = 0$ (corespunzător mecanismului plastic dat) reprezentat de ecuaţia (3').

Fie o familie de hiperplane paralele cu hiperplanul $L = 0$,

$$L_\lambda = \sum_{i,j} \alpha_i P_{ij}^0 \frac{\partial \Delta_j}{\partial \varphi} + \lambda \sum_k M_k^{\cdot} \frac{\partial \theta_k}{\partial \varphi} = 0. \tag{3''}$$

Dacă punctul reprezentativ al încărcării, α_i, se consideră aparţinînd unui astfel de hiperplan, pot apărea următoarele situaţii :

a) Pentru $0 \leqslant \lambda < 1$, atingerea stadiului de mecanism plastic prin mecanismul respectiv este imposibilă.

b) Pentru $\lambda = 1$, este satisfăcută condiţia (3') de echilibru în stadiul de mecanism plastic, pentru mecanismul considerat.

c) Pentru $\lambda > 1$, structura se rupe[3]).

Observaţiile precedente permit să se pună în evidenţă următoarea proprietate a structurilor elasto-plastice :

Dacă o structură care satisface ipotezele acceptate mai înainte rezistă fără a atinge stadiul de mecanism plastic, atît încărcării S_1 , cît şi încărcării S_2, luate separat, atunci ea rezistă fără a atinge stadiul de mecanism plastic şi încărcării S_3 obţinute prin interpolare liniară

$$S_3 = S_1 \cos^2 \psi + S_2 \sin^2 \psi, \tag{4}$$

[3]) Valorile $\lambda < 0$ nu vor fi discutate, deoarece ultimii termeni din (3), (3'), (3'') se schimbă în acest caz întrucît, în general, momentul încovoietor de formare a articulaţiei plastice într-o secţiune nu este aceeaşi pentru ambele sensuri de solicitare.

cu ψ real, arbitrar (parametrul ψ nu are nici o semnificație particulară, ci numai rolul de a asigura ca în relația (4) coeficienții lui S_1 și S_2 să fie nenegativi, iar suma lor egală cu unitatea).

Această proprietate se poate demonstra prin reducerea la absurd. Dacă structura ar rezista încărcărilor S_1 și S_2 fără a atinge stadiul de mecanism plastic, dar s-ar rupe sau ar atinge stadiul de mecanism plastic sub acțiunea încărcării S_3 (4), ar trebui să existe un mecanism plastic, respectiv un hiperplan (3″) pentru care ecuația $L_\lambda = 0$ să fie satisfăcută cu $0 < \lambda < 1$ pentru încărcările S_1 și S_2, dar cu $\lambda \geqslant 1$ pentru încărcarea S_3. Componentele $\alpha_i^{(3)}$ ale vectorului S_3 se obțin prin interpolare liniară din componentele $\alpha_i^{(1)}$ și $\alpha_i^{(2)}$ ale vectorilor S_1 și S_2

$$\alpha_i^{(3)} = \alpha_i^{(1)} \cos^2 \psi + \alpha_i^{(2)} \sin^2 \psi. \tag{4'}$$

Ținînd seama de liniaritatea expresiei (3″) în raport cu α_i și cu λ, rezultă că, pentru un mecanism ipotetic, valoarea λ_3 corespunzătoare încărcării S_3 se obține din valorile λ_1 și λ_2 prin interpolare liniară cu aceiași coeficienți

$$\lambda_3 = \lambda_1 \cos^2 \psi + \lambda_2 \sin^2 \psi. \tag{4''}$$

Deci, dacă λ_1 și λ_2 au valori pozitive subunitare, λ_3 va avea tot o valoare pozitivă subunitară, ceea ce face ruperea prin mecanismul propus imposibilă.

Această proprietate a structurilor elasto-plastice se poate exprima, cu alte cuvinte, în forma următoare: mulțimea încărcărilor cărora o structură ideal elasto-plastică le rezistă fără a atinge stadiul de mecanism plastic, este reprezentată printr-un domeniu convex în spațiul $\{\alpha_i\}$.

Întrucît proprietatea de convexitate a unui domeniu este un invariant liniar, această proprietate este independentă de sistemul de referință ales în spațiul vectorial al încărcărilor. Proprietatea de convexitate a domeniului de rezistență pentru structurile ideal elasto-plastice, pusă în evidență mai înainte, are o importanță practică considerabilă, întrucît elimină necesitatea verificării capacității portante a structurilor pentru încărcări obținute prin interpolare între două încărcări cărora structura le rezistă.

4. POSIBILITĂȚI DE GENERALIZARE A PROPRIETĂȚILOR DE CONVEXITATE

Sînt puse în prezent în evidență proprietăți de convexitate a domeniului de rezistență al structurilor pentru trei cazuri de bază:

a) În cazul solicitării (statice sau dinamice) în stadiul liniar (din punct de vedere reologic și geometric) dacă pentru două încărcări oarecare S_1 și S_2 nu este depășită în modul o limită dată a deplasărilor, eforturilor etc. într-un punct dat, atunci această limită nu este depășită nici pentru o încărcare S_3 obținută prin interpolare liniară (4) între încărcările S_1 și S_2. Liniaritatea problemei face demonstrarea acestei proprietăți banală.

b) În cazul solicitării statice în stadiul elastic, dacă pentru două încărcări oarecare S_1 și S_2 stabilitatea de ordinul I a echilibrului este asigurată, atunci ea este asigurată și pentru o încărcare S_3 obținută prin interpolare (4). Proprietatea a fost demonstrată de Papkovici [8].

c) În cazul solicitării statice a unei structuri elasto-plastice, dacă această structură rezistă fără a atinge stadiul de mecanism plastic pentru două încărcări oarecare, S_1 și S_2, ea rezistă fără a intra în stadiul de mecanism plastic și unei încărcări S_3 obținute prin interpolare (4). Proprietatea a fost demonstrată în lucrare.

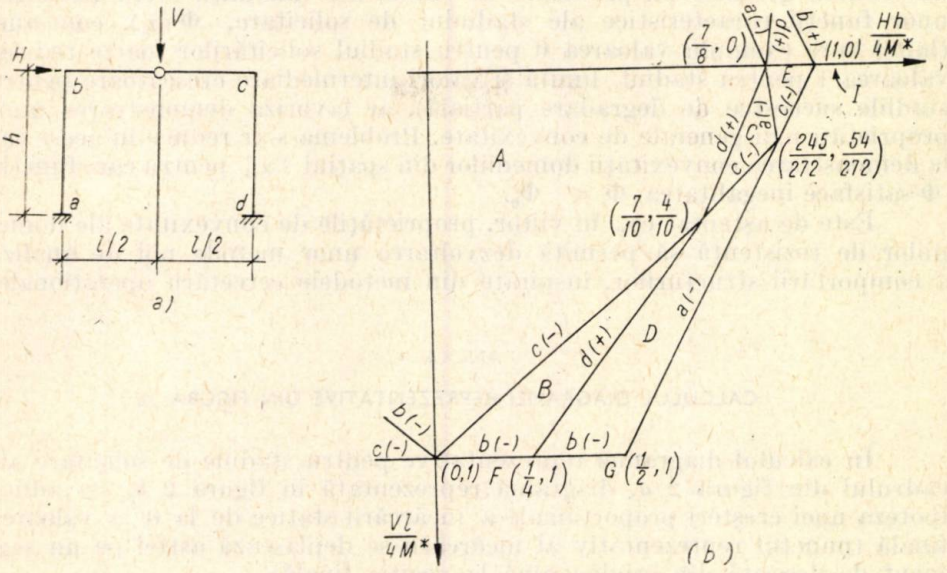


Fig. 2

Pe lîngă proprietățile de convexitate pentru cele trei cazuri de bază enumerate, se pot constata în aplicații proprietăți de convexitate pentru stadii intermediare de solicitare. Ca exemplu, se poate lua cazul cadrului din figura 2 *a*, pentru care se admite că rigiditățile celor trei bare sînt egale și că momentul de plastificare al secțiunii, M^* este constant. Dacă se consideră două încărcări independente, reprezentate respectiv prin cîte o singură forță concentrată, V și H, în figura 2*b* este reprezentat stadiul de solicitare atins, în funcție de valorile V și H, în ipoteza aplicării statice a forțelor și a creșterii proporționale de la 0 la valorile considerate.

Literele mici care notează segmentele de dreptă din figura 2 *b* indică faptul că, în cazul cînd starea de încărcare este reprezentată printr-un punct (V, H), care se găsește pe segmentul respectiv, se produce o articulație plastică în punctul de pe axa structurii (nod sau încastrare) notat cu aceeași literă. Figura 2 *b* s-a desenat numai pentru valori V și H pozitive, întrucît în cazul secțiunilor simetrice ale structurii considerate, diagrama din figura 2 *b* este simetrică în raport cu ambele axe.

În fig. 2 *b* se poate remarca faptul că nu numai domeniul elastic și domeniul de rezistență elasto-plastic sînt convexe, dar și domeniile de solicitare parțială elasto-plastică se bucură de această proprietate.

Calculele efectuate pentru trasarea diafragmei din figura 2 *b* sînt descrise detaliat în anexă.

Din punct de vedere practic ar prezenta importanţă deosebită demonstrarea unor proprietăţi cît mai generale de convexitate pentru domeniile reprezentative ale diferitelor stadii de solicitare, pentru diferite tipuri de structuri şi diferite tipuri de încărcări (spre exemplu : deformare plastică în regim dinamic, solicitări în stadiul plastic ţinînd seama de neliniaritatea geometrică, probleme de stabilitate dinamică etc.). Definirea unor funcţii caracteristice ale stadiului de solicitare, $\Phi(\alpha_i)$, continue, (luînd spre exemplu valoarea 0 pentru stadiul solicitărilor foarte reduse, valoarea 1 pentru stadiul limită şi valori intermediare crescătoare pentru stadiile succesive de degradare parţială), ar favoriza demonstrarea unor proprietăţi mai generale de convexitate. Problema s-ar reduce în acest caz la demonstrarea convexităţii domeniilor din spaţiul $\{\alpha_i\}$ pentru care funcţia Φ satisface inegalitatea $\Phi < \Phi_0$.

Este de aşteptat ca, în viitor, proprietăţile de convexitate ale domeniilor de rezistenţă să permită dezvoltarea unor metode noi de analiză a comportării structurilor, inspirate din metodele cercetării operaţionale.

ANEXA

CALCULUL DIAGRAMEI REPREZENTATIVE DIN FIGURA 2b

În calculul diagramei reprezentative pentru stadiile de solicitare ale cadrului din figura 2 *a*, diagramă reprezentată în figura 2 *b*, s-a admis ipoteza unei creşteri proporţionale a încărcării statice de la 0 la valoarea finală (punctul reprezentativ al încărcării se deplasează astfel pe un segment de dreaptă din origine pînă la poziţia finală).

Pentru a se calcula frontiera domeniului reprezentativ pentru stadiul elastic, s-au scris expresiile momentelor încovoietoare în funcţie de forţele V şi H în punctele în care apariţia articulaţiilor plastice este posibilă (colţurile şi reazemele cadrului) şi s-a pus condiţia ca, în toate aceste puncte, momentul limită să nu fie depăşit. Liniaritatea dependenţei eforturilor de forţele exterioare face ca, în stadiul elastic, orice condiţie de efort constant într-o secţiune să fie reprezentată în diagramă printr-un segment de dreaptă (şi nu o dreaptă, pentru că expresia astfel stabilită este în general valabilă numai atîta timp cît întreaga structură se găseşte în stadiul elastic). În particular, condiţia ca într-unul din punctele unde apariţia articulaţiilor plastice este posibilă, să se atingă momentul încovoietor limită, este reprezentată printr-un segment de dreaptă. Scriindu-se expresiile momentului încovoietor pentru toate punctele enumerate şi egalîndu-se aceste expresii cu momentul limită, s-a obţinut frontiera poligonală a domeniului care reprezintă stadiul elastic.

Pentru a se calcula liniile reprezentative pentru apariţiile articulaţiilor plastice în stadiul elasto-plastic, s-a observat că, în acest stadiu, în cazul creşterii proporţionale a încărcărilor, momentele încovoietoare în articulaţiile plastice existente se menţin constante şi egale cu momentul limită, iar momentele încovoietoare în celelalte secţiuni cresc în continuare peste valorile apărute la intrarea în stadiul respectiv de solicitare. Structura se comportă, cu alte cuvinte, ca o structură avînd în locul articulaţiilor plastice articulaţii osibnuite, în care s-a introdus cîte un moment egal ca valoare cu momentul limită. Atît timp cît structura se găseşte într-un stadiu

anumit de plastificare parțială, momentul încovoietor într-o secțiune va depinde tot liniar de forțele V și H, deci condiția de moment încovoietor constant sau variind liniar în raport cu încărcările va fi reprezentată tot printr-un segment de dreaptă.

Pentru a se urmări ordinea calculelor, s-a desenat în prealabil schema sintetică din figura 3, care reprezintă succesiunea posibilă de apariție a

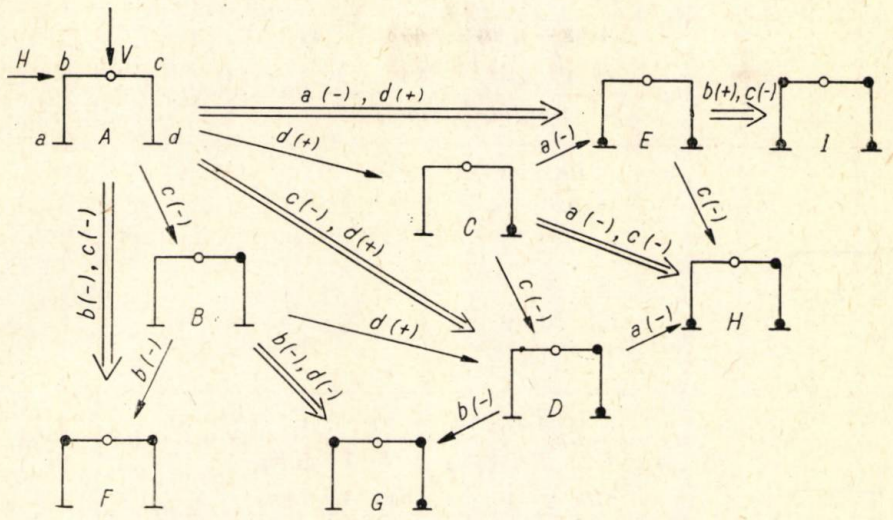
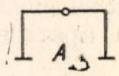


Fig. 3

articulațiilor plastice, de la stadiul elastic, pînă la atingerea stadiului de mecanism pentru diferite rapoarte $\frac{V}{H}$ (pozitive). Articulațiile plastice au fost reprezentate prin cercuri negre, pentru a nu se confunda cu articulațiile obișnuite, reprezentate printr-un cerc alb. Liniile simple leagă stadii de solicitare care diferă prin cîte o singură articulație plastică. Liniile duble leagă stadiile de solicitare care diferă prin cîte două articulații plastice (care pot apărea simultan spre exemplu în unul din cazurile $V = 0$ sau $H = 0$). Literele mici care notează legăturile indică punctul în care apare articulația plastică prin care se face trecerea între cele două stadii de solicitare, reprezentate prin scheme între care este desenată legătura. Semnele de pe fiecare legătură indică sensul de rotire relativ al articulației plastice corespunzătoare (+ reprezintă cazul rotirii relative cu întinderea intradosului cadrului).

Expresiile momentelor încovoietoare au fost calculate în diferitele stadii de solicitare ale cadrului pentru punctele a, b, c, d. S-a considerat pozitiv momentul încovoietor care întinde intradosul cadrului. Expresiile calculate au fost particularizate pentru cazul rigidităților egale ale grinzii și stîlpului $\left(i_g = i_s, \text{ unde } i_g = \frac{EI_{gs}}{l} \text{ și } i_s = \frac{EI_s}{h}\right)$. Rezultatele calculelor pentru fiecare stadiu de solicitare sînt date în figura 4. Pentru stadiile $A \ldots E$ sînt date expresiile momentelor încovoietoare. Pentru stadiile

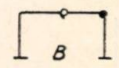


$$M_a = \frac{Hh}{4}\,\frac{1+i_s/3i_g}{1+i_s/6i_g} + \frac{V1}{8} = -\frac{2}{7}\,Hh + \frac{1}{8}V1,$$

$$M_b = \frac{Hh}{4}\,\frac{1}{1+i_s/6\,i_g} - \frac{V1}{4} = \frac{3}{14}\,Hh - \frac{1}{4}V1,$$

$$M_c = \frac{Hh}{4}\,\frac{1}{1+i_s/6i_g} - \frac{V1}{4} = -\frac{3}{14}\,Hh - \frac{1}{4}\,V1,$$

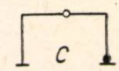
$$M_d = \frac{Hh}{4}\,\frac{1+i_s/3i_g}{1+i_s/\,6i_g} + \frac{V1}{8} = \frac{2}{7}\,Hh + \frac{1}{8}\,V1,$$



$$M_a = -\frac{Hh}{2} - \frac{V1}{8},$$

$$M_b = \frac{V1}{2},$$

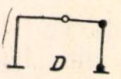
$$M_c = \frac{Hh}{2} + \frac{3\,V1}{8},$$



$$M_a = \frac{3}{8}\,Hh\,\frac{1+i_s\,/3\,i_g}{1+\,i_s/8i_g} + \frac{V1}{8}\,\frac{1}{1+\,1_s/8i_g} = -\frac{4}{9}\,Hh + \frac{1}{9}V1,$$

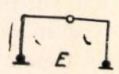
$$M_b = \frac{5Hh}{16}\,\frac{1}{1+i_s/8i_g} - \frac{3V1}{16}\,\frac{1+i_s/6i_g}{1+\,i_s/8\,i_g} = \frac{5}{18}\,Hh\,\frac{7}{36}\,V1,$$

$$M_c = -\frac{[5\,Hh}{16}\,\frac{1}{1+1_s/8i_g} - \frac{5V1}{16}\,\frac{1+i_s/10\,i_g}{1+i_s/8i_g} - \frac{5Hh}{18} - \frac{11}{36} - , \frac{18}{36}V1$$



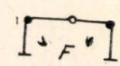
$$M_a = -\,Hh - \frac{V1}{2},$$

$$M_b = -\,\frac{V1}{2},$$

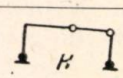


$$M_b = \frac{Hh}{2} - \frac{V1}{4},$$

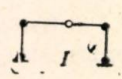
$$M_c = -\,\frac{Hh}{2} - \frac{V1}{4},$$



$$\frac{V1}{2} = 2\,M^*,$$



$$\frac{V1}{2} + Hh = 4M^*$$



$$Hh = 4\,M^*.$$

Fig. 4

limită F, H și I sînt date ecuațiile de echilibru limită (stadiul G nu este distinct de stadiul F din punctul de vedere al ecuației de echilibru limită, întrucît ruperea se produce în ambele cazuri datorită exclusiv articulațiilor plastice din nodurile b și c).

Pentru a se desena oricare din segmentele de dreaptă din figura 2 b, a fost necesară cunoașterea poziției a cîte două puncte de pe segmentul respectiv. Pentru a se obține punctele necesare s-a luat un număr suficient de raze care trec prin origine (fiecare rază reprezentînd un anumit raport $\left(\frac{V}{H}\right)$ și s-au calculat valorile încărcărilor la care apar diferitele articulații plastice succesive, pînă la stadiul de mecanism.

În figura 2 b se observă convexitatea domeniilor reprezentative pentru stadiile :

- elastic (domeniul A);
- cu orice număr de articulații plastice (în puncte și cu sensuri de rotire fixate ; exemplu : domeniile B sau D);
- în care nu apare articulație plastică într-un punct arbitrar fixat (exemple : $A \cup B$ pentru punctul d, $A \cup C \cup E$ pentru punctul c);
- în care nu apare mecanismul plastic, $A \cup B \cup C \cup D \cup E$ (conform demonstrației din lucrare).

Primită a redacție 30 ianuarie 1966

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. Bolotin, I. I. Goldenblat, A. F. Smirnov, *Sovremennie problemi stroitelnoi mehaniki*, Moscova, 1964.
2. M. Hangan, *Une méthode de calcul des structures hiperstatiques dans le domaine élasto-plastique*, Revue de Mécanique Appliquée, *3* (1959).
3. — *Ordinea de apariție și rotirea articulațiilor plastice*, St. cerc. mec. apl., *6* (1960).
4. — *Le calcul des structures hiperstatiques en béton armé dans l'hypothése d'une plastification partielle*, Acta Tehnica, 1962.
5. E. Hognestad, *Yield line theory for the ultimate flexural strength of reinforced concrete slabs*, Journal ACI, March, 1953.
6. G. Marinescu, *Spații vectoriale normale*, București, 1956.
7. B. G. Neal, *The plastic methods of structural analysis* 1956. (Trad. în limba rusă). Moscova, 1961.
8. R. F. Papkovici, *Stroitelnaia mehanika korablia*, Moscova, 1941.

MATRICE DE INFLUENȚĂ PENTRU CALCULUL LA FORȚE ORIZONTALE AL DIAFRAGMELOR CU GOLURI LA CONSTRUCȚII MULTIETAJATE

EINAR KEINTZEL
D.S.A.P.C. Brașov

539.3

Se tratează integrarea numerică a ecuației diferențiale a lunecărilor, caracteristică diafragmelor cu un șir vertical de goluri, acționate de sarcini orizontale. Se dau tabele cu coeficienți de influență, ce permit calculul direct al lunecării într-un punct arbitrar al unei diafragme, pentru o distribuție oarecare a sarcinilor orizontale pe înălțimea diafragmei.

Calculul la sarcini orizontale al diafragmelor cu goluri ale construcțiilor multietajate duce la rezolvarea ecuației diferențiale a lunecării $L(x)$, preluată de un buiandrug situat la nivelul x,

$$L'' - \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 L = -\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \frac{Sh}{I} Q, \tag{1}$$

condițiile la limită fiind $L(0) = 0$, L', $(H) = 0$. În această ecuație s-au introdus următoarele notații, folosite și în [3],

Q — forța tăietoare în diafragmă la nivelul considerat,

A_1, A_2 — ariile secțiunilor celor două elemente verticale ale diafragmei,

I_1, I_2 — momentele de inerție ale acestor elemente,

$S = \dfrac{2c}{\dfrac{1}{A_1} + \dfrac{1}{A_2}}$ — momentul static al ariei A_1, sau A_2 față de centrul de greutate al diafragmei,

$I = I_1 + I_2 + 2cS$ — momentul de inerție al diafragmei,

$\alpha = \dfrac{3E_b I_b}{a^3 E} \dfrac{c}{I_1 + I_2} \dfrac{I}{Sh}$ — coeficientul de monolitism al diafragmei,

I_b — momentul de inerție al buiandrugilor între goluri,

E_b, E — modulul de elasticitate al buiandrugilor, resp. al elementelor verticale ale diafragmei.

Semnificaţiile notaţiilor a, c, H, h rezultă din figura 1.

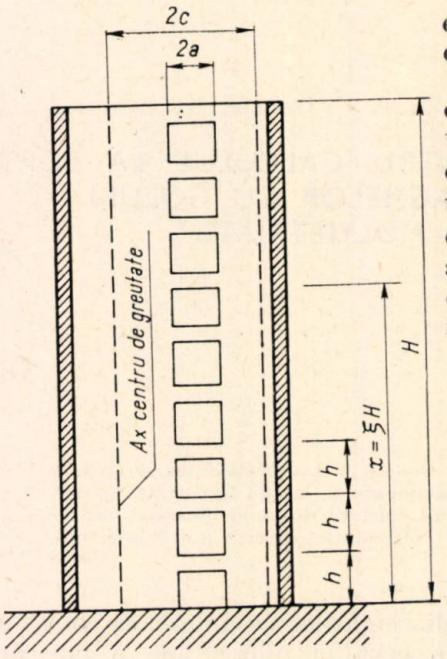


Fig. 1

În [1], [2], [6], [7] se dau soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (1) pentru diferite cazuri particulare de încărcare.

Pentru cazul general de încărcare orizontală a diafragmei, caz ce intervine de exemplu la considerarea conlucrării a mai multor diafragme cu caracteristici α diferite [4], valorile L se determină prin integrarea numerică, cu ajutorul diferenţelor finite, a ecuaţiei diferenţiale (1), adică prin rezolvarea sistemului de ecuaţii

$$\begin{aligned} L_1 - tL_2 &= F_1, \\ -tL_1 + L_2 - tL_3 &= F_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -tL_{n-2} + L_{n-1} - tL_n &= F_{n-1}, \\ -2tL_{n-1} + L_n &= F_n, \end{aligned} \tag{2}$$

unde s-a notat

$$t = \frac{1}{2 + \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \left(\Delta x\right)^2},$$

$$F_m = \frac{\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \left(\Delta x\right)^2}{2 + \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \left(\Delta x\right)^2} \frac{Sh}{I} Q_m = b \frac{Sh}{I} Q_m,$$

punctul $m = 0$ corespunzînd nivelului incastrării diafragmei în fundaţie ($L_0 = 0$), iar punctul $m = n$ corespunzînd vîrfului diafragmei. În ultima ecuaţie (2) s-a introdus $L_{n-1} = L_{n+1}$, corespunzînd condiţiei $L'(H) = 0$.

Pentru cele ce urmează considerăm o împărţire a înălţimii diafragmei în 10 părţi egale ($n = 10$, $\Delta x = 0{,}1\, H$).

Scriind sistemul de ecuaţii (2) sub formă matriceală

$$AL = F, \tag{3}$$

unde se notează

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t & 1 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 1 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t & 1 & -t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 1 & -t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 1 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -t & 1 & -t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2t & 1 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ L_{10} \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{10} \end{pmatrix},$$

rezultă

$$L = A^{-1} F. \tag{4}$$

Notînd cu a_{ij} elementul din linia i și coloana j a matricei inverse A^{-1} lunecarea L_i într-un punct arbitrar i, sub acțiunea unor sarcini orizontale, avînd o distribuție oarecare pe înălțimea diafragmei, se poate exprima direct în funcție de valorile F_j prin relația

$$L_i = \sum_{j=1}^{10} a_{ij} F_j. \tag{5}$$

Elementele a_{ij} reprezintă deci coeficienții de influență pentru calculul lunecării L_i, iar matricea A^{-1} o vom denumi matrice de influență. Cunoscînd matricea A^{-1} posedăm soluția generală a sistemului de ecuații (2).

După cum se arată în [9], exprimînd lunecările $L(x)$ în funcție de forța axială $N(x)$ în elementele verticale ale diafragmei

$$N(x) = \frac{1}{h} \int_x^H L(u)\, du,$$

ecuația (1) ia forma

$$N'' - \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 N = -\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \frac{S}{I} M, \tag{6}$$

$M(x)$ fiind momentul sarcinilor exterioare, aplicate deasupra secțiunii x, în raport cu această secțiune, iar condițiile la limită devin $L(0) = N'(0) = 0$, $N(H) = 0$.

Se observă că partea omogenă a ecuației (6) este identică ca formă cu cea a ecuației (1), iar condițiile la limită, corespunzînd ecuației (6), se pot obține din cele corespunzînd ecuației (1), înlocuind x prin $H - x$. Rezultă că, introducînd

$$G_m = \frac{\left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \left(\Delta x\right)^2}{2 + \left(\frac{\alpha}{H}\right)^2 \left(\Delta x\right)^2}, \quad \frac{S}{I} M_m = b \frac{S}{I} M_m,$$

forța axială N_i se poate exprima direct cu ajutorul coeficienților a_{ij}, prin relația

$$N_i = \sum_{j=1}^{10} a_{11-i,\ 11-j} G_j. \tag{7}$$

Cunoscînd forțele axiale $N(x)$, momentele în elementele verticale pline 1, 2 se calculează din relațiile

$$M_1(x) = \frac{I_1}{I_1 + I_2} \left[M(x) - 2cN(x) \right],$$

$$M_2(x) = -\frac{I_2}{I_1 + I_2} \left[M(x) - 2cN(x) \right].$$

În anexă se dau valorile a_{ij}, tabulate pentru valorile întregi α, cuprinse în domeniul $1 \leqslant \alpha \leqslant 10$, în care se recomandă după [3] folosirea ecuației (1) și valorile $b(\alpha) = \dfrac{0{,}01\alpha^2}{2 + 0{,}01\alpha^2}$.

La calculul matricei de influență A^{-1} nu s-a putut folosi dezvoltarea în serie de matrice, aplicată la stabilirea matricelor de influență pentru calculul cadrelor etajate [5], convergența acestei serii fiind extrem de lentă pentru domeniul considerat. De aceea, elementele a_{ij} s-au determinat prin rezolvarea sistemului de ecuații (2) în care s-a pus

$$F_r = 1 \text{ pentru } r = i,$$

$$F_r = 0 \text{ pentru } r \neq i.$$

Valorile a_{ij} se dau pentru 10 valori ale parametrului α, tabelele din anexă sintetizînd ca atare soluțiile a 100 sisteme de ecuații cu cîte 10 necunoscute.

EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră o diafragmă cu un șir vertical de goluri, avînd coeficientul de monolitism $\alpha = 4$, încărcată cu o sarcină unitară, aplicată la vîrf. Se calculează valorile L_i și N_i pentru $i = 5$.

Avînd

$$F_m = b\frac{Sh}{I} \times 1 = 0{,}0741\frac{Sh}{I}$$

$$G_m = b\frac{S}{I} \times 1 \times (n-m)\,\Delta x = 0{,}00741\frac{SH}{I}(n-m),$$

rezultă din aplicarea relațiilor (5) și (7), folosind valorile a_{ij} din anexă,

$$L_5 = (0{,}29 + 0{,}63 + 1{,}07 + 1{,}67 + 2{,}65 + 1{,}82 + 1{,}28 + 0{,}95 + 0{,}77 + $$

$$+ 0{,}36) \times 0{,}0741\frac{Sh}{1} = 0{,}850\frac{Sh}{I},$$

$$N_5 = (0{,}54 \times 9 + 1{,}16 \times 8 + 1{,}44 \times 7 + 1{,}93 \times 6 + 2{,}74 \times 5 + 1{,}83 \times 4 +$$

$$+ 1{,}15 \times 3 + 0{,}74 \times 2 + 0{,}43 \times 1 + 0{,}20 \times 0) \times$$

$$\times\, 0{,}00741\frac{SH}{I} = 0{,}460\frac{SH}{I}.$$

Valorile corespunzătoare, obținute prin rezolvarea exactă a ecuației diferențiale (1), respectiv (6), sînt după [8]

$$L_5 = 0{,}862\frac{Sh}{I} \qquad N_5 = 0{,}467\frac{SH}{I}.$$

Primită la redacție la 16 iunie 1967, unele completări la 30 decembrie 1967.

ANEXA

Valorile a_{ij}

$\alpha = 1$, $b = 0{,}0050$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,90	1,80	1,72	1,65	1,60	1,54	1,51	1,47	1,45	0,72
2	1,80	3,61	3,45	3,31	3,21	3,10	3,02	2,96	2,90	1,45
3	1,72	3,45	5,21	4,99	4,83	4,67	4,56	4,46	4,38	2,18
4	1,65	3,30	4,99	6,71	6,50	6,27	6,13	6,00	5,89	2,93
5	1,59	3,18	4,81	6,46	8,20	7,92	7,73	7,58	7,43	3,70
6	1,54	3,09	4,67	6,27	7,96	9,62	9,38	9,20	9,02	4,49
7	1,50	3,02	4,56	6,12	7,76	9,38	11,11	10,90	10,68	5,31
8	1,47	2,96	4,48	6,01	7,62	9,20	10,90	12,66	12,42	6,18
9	1,46	2,93	4,44	5,94	7,55	9,10	10,80	12,53	14,29	7,10
10	1,45	2,92	4,42	5,91	7,52	9,07	10,75	12,47	14,22	8,06

$\alpha = 2,\ b = 0{,}0196$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,68	2,36	1,17	0,98	0,83	0,72	0,64	0,58	0,54	0,27
2	1,40	2,85	2,38	2,00	1,70	1,47	1,30	1,18	1,11	0,55
3	1,17	2,38	3,69	3,10	2,64	2,27	2,01	1,83	1,73	0,85
4	0,98	2,01	3,11	4,33	3,68	3,17	2,81	2,56	2,41	1,18
5	0,84	1,71	2,65	3,69	4,88	4,20	3,72	3,38	3,19	1,57
6	0,73	1,48	2,30	3,20	4,23	5,41	4,78	4,34	4,09	2,01
7	0,64	1,31	2,03	2,84	3,74	4,78	6,02	5,48	5,17	2,54
8	0,59	1,19	1,85	2,58	3,40	4,35	5,49	6,85	6,45	3,17
9	0,55	1,13	1,74	2,43	3,21	4,10	5,17	6,45	8,00	3,93
10	0,54	1,10	1,71	2,38	3,14	4,02	5,07	6,32	7,84	4,85

$\alpha = 3,\ b = 0{,}0431$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,55	1,15	0,86	0,64	0,49	0,37	0,30	0,24	0,22	0,10
2	1,15	2,40	1,79	1,35	1,02	0,78	0,62	0,51	0,45	0,22
3	0,86	1,79	2,89	2,17	1,65	1,26	1,00	0,82	0,73	0,35
4	0,64	1,34	2,17	3,20	2,42	1,86	1,47	1,21	1,07	0,51
5	0,49	1,02	1,64	2,42	3,41	2,62	2,08	1,71	1,51	0,72
6	0,37	0,78	1,26	1,86	2,62	3,62	2,87	2,37	2,09	1,00
7	0,30	0,62	0,99	1,47	2,07	2,86	3,92	3,24	2,86	1,37
8	0,25	0,51	0,82	1,21	1,71	2,36	3,24	4,41	3,88	1,87
9	0,22	0,45	0,72	1,07	1,50	2,08	2,85	3,88	5,26	2,55
10	0,21	0,43	0,69	1,02	1,44	1,99	2,73	3,71	5,04	3,43

$\alpha = 4,\ b = 0{,}0741$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,45	0,98	0,65	0,44	0,30	0,21	0,15	0,11	0,09	0,04
2	0,98	2,11	1,41	0,95	0,65	0,45	0,32	0,24	0,19	0,09
3	0,66	1,41	2,40	1,60	1,11	0,76	0,54	0,40	0,32	0,15
4	0,44	0,94	1,61	2,52	1,74	1,20	0,84	0,63	0,51	0,24
5	0,29	0,63	1,07	1,67	2,65	1,82	1,28	0,95	0,77	0,36
6	0,20	0,43	0,74	1,15	1,83	2,74	1,93	1,44	1,16	0,54
7	0,14	0,31	0,52	0,83	1,29	1,93	2,89	2,14	1,74	0,81
8	0,11	0,23	0,39	0,61	0,96	1,44	2,15	3,20	2,60	1,20
9	0,09	0,18	0,31	0,50	0,78	1,17	1,74	2,59	3,86	1,79
10	0,08	0,17	0,29	0,46	0,72	1,08	1,61	2,40	3,58	2,66

$\alpha = 5,\ b = 0{,}1111$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,37	0,83	0,50	0,31	0,19	0,12	0,07	0,05	0,04	0,01
2	0,84	1,88	1,14	0,69	0,42	0,26	0,16	0,11	0,08	0,03
3	0,51	1,15	2,07	1,26	0,77	0,47	0,30	0,20	0,14	0,06
4	0,31	0,70	1,26	2,14	1,31	0,80	0,50	0,33	0,24	0,11
5	0,19	0,43	0,77	1,30	2,17	1,34	0,84	0,55	0,40	0,18

$\alpha = 5, = 0{,}1111$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	0,12	0,26	0,47	0,80	1,34	2,21	1,39	0,91	0,67	0,30
7	0,07	0,16	0,30	0,50	0,84	1,38	2,28	1,50	1,10	0,49
8	0,05	0,11	0,20	0,33	0,55	0,91	1,50	2,47	1,81	0,80
9	0,04	0,08	0,14	0,24	0,40	0,67	1,10	1,81	2,98	1,32
10	0,03	0,07	0,13	0,22	0,36	0,59	0,98	1,61	2,64	2,17

$\alpha = 6, \ b = 0{,}1524$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,31	0,72	0,40	0,22	0,12	0,07	0,04	0,02	0,02	0,01
2	0,73	1,71	0,95	0,52	0,29	0,16	0,09	0,05	0,04	0,02
3	0,40	0,95	1,83	1,01	0,56	0,31	0,18	0,10	0,07	0,03
4	0,22	0,53	1,02	1,87	1,04	0,58	0,33	0,19	0,13	0,05
5	0,12	0,29	0,56	1,04	1,88	1,05	0,59	0,35	0,23	0,10
6	0,07	0,16	0,31	0,58	1,05	1,90	1,07	0,63	0,42	0,18
7	0,04	0,09	0,18	0,33	0,59	1,08	1,94	1,14	0,75	0,32
8	0,02	0,05	0,11	0,19	0,35	0,63	1,14	2,06	1,36	0,57
9	0,02	0,04	0,07	0,13	0,23	0,42	0,76	1,37	2,46	1,04
10	0,01	0,03	0,06	0,11	0,20	0,36	0,64	1,16	2,09	1,88

$\alpha = 7, \ b = 0{,}1968$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,26	0,63	0,32	0,16	0,08	0,04	0,02	0,01	0,01	0,00
2	0,63	1,58	0,79	0,40	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01
3	0,32	0,80	1,66	0,83	0,42	0,21	0,11	0,06	0,03	0,01
4	0,16	0,40	0,84	1,68	0,85	0,43	0,22	0,12	0,07	0,03
5	0,08	0,20	0,42	0,85	1,68	0,85	0,43	0,23	0,14	0,05
6	0,04	0,10	0,21	0,43	0,85	1,69	0,86	0,45	0,27	0,11
7	0,02	0,05	0,11	0,22	0,43	0,86	1,71	0,90	0,53	0,21
8	0,01	0,03	0,06	0,12	0,23	0,45	0,90	1,79	1,06	0,43
9	0,01	0,02	0,03	0,07	0,14	0,27	0,54	1,06	2,11	0,85
10	0,01	0,01	0,03	0,05	0,11	0,22	0,43	0,85	1,69	1,68

$\alpha = 8, \ b = 0{,}2424$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,21	0,56	0,26	0,12	0,05	0,02	0,01	0,01	0,00	0,00
2	0,56	1,47	0,67	0,31	0,14	0,07	0,03	0,01	0,01	0,00
3	0,26	0,67	1,52	0,70	0,32	0,15	0,07	0,03	0,02	0,01
4	0,12	0,31	0,70	1,53	0,70	0,32	0,15	0,07	0,04	0,01
5	0,05	0,14	0,32	0,70	1,53	0,71	0,33	0,16	0,08	0,03
6	0,02	0,07	0,15	0,32	0,70	1,54	0,71	0,34	0,18	0,07
7	0,01	0,03	0,07	0,15	0,32	0,71	1,55	0,74	0,39	0,15
8	0,01	0,01	0,03	0,07	0,15	0,34	0,73	1,60	0,85	0,32
9	0,00	0,01	0,02	0,04	0,08	0,18	0,39	0,85	1,86	0,70
10	0,00	0,01	0,01	0,03	0,06	0,08	0,30	0,65	1,41	1,53

$\alpha = 9,\ b = 0{,}2882$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,18	0,49	0,21	0,09	0,04	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00
2	0,49	1,38	0,58	0,24	0,10	0,04	0 02	0,01	0,00	0,00
3	0,21	0,58	1,42	0,59	0,25	0,10	0,04	0,02	0,01	0,00
4	0,09	0,24	0,59	1,42	0,60	0,25	0,10	0,05	0,02	0,01
5	0,04	0,10	0,25	0,60	1,43	0,60	0,25	0,11	0,05	0,02
6	0,02	0,04	0,10	0,25	0,60	1,43	0,60	0,26	0,12	0,04
7	0,01	0,02	0,04	0,10	0,25	0,60	1,44	0,62	0,29	0,10
8	0,00	0,01	0,02	0,05	0,11	0,26	0,62	1,48	0,70	0,25
9	0,00	0,00	0,01	0,02	0,05	0,12	0,30	0,70	1,67	0,60
10	0,00	0,00	0,01	0,02	0,04	0,09	0,21	0,50	1,19	1,43

$\alpha = 10,\ b = 0{,}3333$

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1,15	0,44	0,17	0,06	0,02	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00
2	0,44	1,31	0,50	0,19	0,07	0,03	0,01	0,00	0,00	0,00
3	0,17	0,50	1,34	0,51	0,19	0,07	0,03	0,01	0,00	0,00
4	0,06	0,19	0,51	1,34	0,51	0,20	0,07	0,03	0,01	0,00
5	0,02	0,07	0,20	0,51	1,34	0,51	0,20	0,08	0,03	0,01
6	0,01	0,03	0,07	0,20	0,51	1,34	0,51	0,20	0,08	0,03
7	0,00	0,01	0,03	0,07	0,20	0,51	1,35	0,52	0,22	0,07
8	0,00	0,00	0,01	0,03	0,08	0,20	0,52	1,37	0,59	0,19
9	0,00	0,00	0,00	0,01	0,03	0,09	0,22	0,59	1,54	0,51
10	0,00	0,00	0,00	0,01	0,02	0,06	0,15	0,39	1,03	1,34

BIBLIOGRAFIE

1. M. Albigès, J. Goulet, *Contreventement des bâtiments*, Annales de L'institut technique du bâtiment et des travaux publics *5*, 1960.
2. M. Arcan, *O metodă de calcul al diafragmelor cu un șir de goluri*, St. cerc. mec. apl., *2* (1962).
3. M. Hangan, *Construcții de beton armat*, București, 1963.
4. E. Keintzel, *Contribuții la sistematizarea calculului la forțe orizontale al diafragmelor cu goluri la construcții multietajate*, St. cerc. mec. apl., *5* (1967).
5. — *Matrice de influență pentru calculul cadrelor etajate la forțe orizontale*, St. cerc. mec. apl., *2* (1968).
6. C. Mîrșu, L. Vuc, *Metode de calcul al diafragmelor al acțiuni seismice*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții *6* (1963).
7. R. Rosman, *Systeme aus durchbrochenen Wänden und Stockwerkrahmen*, Die Bautechnik *2* (1964).
8. — *Die statische Berechnung von Hochauswänden mit Öffnungsreihen*, Berlin, München, 1965.
9. E. Keintzel, *Calculul diafragmelor cu goluri, rezemate elastic, la sarcini orizontale*, St. cerc. mec. apl., *1* (1968).

CERCETĂRI DE LABORATOR ASUPRA COEFICIENȚILOR DE ABSORBȚIE A ENERGIEI OSCILAȚIILOR

de M. SIMONICI
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (I.N.C.E.R.C.), București

539.3

Studiul cuprinde rezultatele cercetărilor efectuate pentru elaborarea metodologiei de determinare a caracteristicilor dinamice ale zidăriilor. Se arată metoda folosită și se demonstrează posibilitatea determinării în laborator a coeficientului de absorbție a energiei oscilațiilor la diferite zidării, precum și posibilitățile de diferențiere a acestora sub raportul comportării la solicitări dinamice și în special la cele seismice.

O dată cu creșterea numărului de tipuri și sortimente de materiale de zidărie și de tipuri de structuri de zidării, folosite în regiuni seismice, problema găsirii unor criterii de diferențiere a acestora sub raportul comportării lor la solicitări dinamice și în special la cele seismice, devine din ce în ce mai actuală.

Pe de altă parte, adîncirea cunoștințelor asupra caracteristicilor dinamice ale acestor materiale, capătă un rol hotărîtor în stabilirea domeniilor și modalităților raționale de folosire a lor.

Una dintre aceste caracteristici fundamentale este coeficientul de absorbție specifică a energiei oscilațiilor, care exprimă capacitatea materialului de a absorbi, într-o formă ireversibilă, o parte din energia deformațiilor ciclice.

În legătură cu aceasta, se știe că amortizarea are o importanță deosebită în calculul antiseismic, întrucît are o influență directă asupra modificării răspunsului dinamic al structurii și deci al efectului produs de cutremur. Structurile cu grad de amortizare ridicat, adică acelea care au o capacitate mare de a disipa energia, au o comportare favorabilă la acțiunea solicitărilor seismice.

Problema disipării energiei oscilațiilor a fost tratată în ultimii ani în numeroase lucrări remarcabile ca acelea ale lui J. A. Blume [3], G. V. Berg [2], L. S. Jacobsen [6] , K. Kaneta [7], G. W. Housner [5], Kenneth Medearis și D. H. Young [9], E. S. Sorokin [14] ș.a.

Cercetările experimentale s-au făcut însă în special pe betoane, metale, materiale sintetice, lemn etc.; mult mai puțină atenție s-a acordat zidăriilor.

În cadrul cercetărilor făcute de autor în scopul elaborării metodologiei de determinare a caracteristicilor dinamice ale zidăriilor, experimentările referitoare la absorbția energiei oscilațiilor, au permis să se tragă o serie de concluzii asupra posibilităților de utilizare a coeficientului de absorbție a energiei oscilațiilor, ca un criteriu de diferențiere a zidăriilor.

Aceste cercetări au arătat că în timp ce în practica curentă criteriul general de diferențiere a zidăriilor sub raportul domeniilor de folosire a acestora îl constituie marca zidăriei, ele se deosebesc fundamental sub raportul comportării la sarcini dinamice.

Dacă numărul încercărilor efectuate este insuficient pentru ca valorile obținute să poată fi tratate ca niște valori de calcul, în schimb analiza lor ne permite să facem o serie de considerații utile din punct de vedere teoretic și practic.

★

Proprietatea materialelor de a absorbi energia oscilațiilor poate fi explicată (mecanismul intim al acestui fenomen este încă necunoscut) prin deformațiile plastice locale ale particulelor de material, datorite structurii sale eterogene. În consecință, coeficientul ψ de absorbție a energiei oscilațiilor exprimă procesele neelastice care se produc în material în timpul solicitărilor dinamice. Această mărime este strîns legată de o altă caracteristică dinamică, mult mai bine cunoscută — decrementul logaritmic al amortizării oscilațiilor.

Să considerăm înfășurătoarea vibrogramei [14] oscilațiilor proprii din figura 1, care este o funcție de timp monoton descrescătoare $y = y(t)$. Energia sistemului fiind $W = \frac{c}{2} y^2(t)$, unde c este coeficientul de rigiditate, în intervalul de timp dt, ea scade cu $-\mathrm{d}W$. Raportul $-\frac{\mathrm{d}W}{W}$ este absorbția specifică de energie în timpul dt, iar coeficientul ψ fiind absorbția într-o perioadă a oscilațiilor, avem:

$$\psi = -\int_t^{t+T} \frac{\mathrm{d}W}{W},$$

de unde, înlocuind pe W,

$$\psi = -\int_t^{t+T} 2\frac{\mathrm{d}y}{y} = -2\left|\ln y\right|_t^{t+T} = 2\ln\frac{y_n}{y_{n+1}}$$

sau

$$\psi = 2\gamma, \tag{1}$$

unde $\gamma = \ln\frac{y_n}{y_{n+1}}$ este decrementul logaritmic al amortizării, iar y_n și y_{n+1} reprezintă amplitudinile oscilațiilor, corespunzătoare începutului și sfîrșitul oscilației a n—a.

Admiţînd explicaţia dată mai sus fenomenelor care stau la baza proprietăţii materialului de a absorbi într-o formă ireversibilă o parte a energiei aplicată din exterior, coeficientul ψ poate fi exprimat prin raportul dintre energia absorbită de material într-un ciclu de deformaţie şi energia elastică corespunzătoare deformaţiei maxime.

Întrucît relaţia dintre eforturi unitare şi deformaţii $\sigma - \varepsilon$ este neliniară, diferită la încărcare şi descărcare, ea poate fi reprezentată printr-o buclă histerezis (fig. 2).

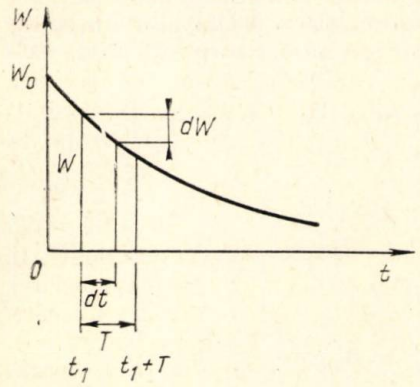


Fig. 1. — Variaţia energiei sistemului la oscilaţii amortizate.

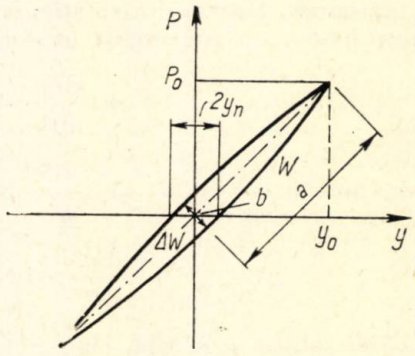


Fig. 2. — Bucla histerezis şi caracteristicile materialului care pot fi determinate pe buclă.

Această relaţie a fost exprimată de E. S. Sorokin [15], sub forma

$$\sigma = E\,\varepsilon + \frac{\psi}{2\pi}\,E\varepsilon_0\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}}\,, \tag{2}$$

unde

σ şi ε reprezintă efortul unitar, respectiv deformaţia specifică variabilă,

ε_0 — amplitudinea deformaţiei specifice.

Lucrul mecanic ΔW, absorbit de material într-un ciclu de deformaţie, este tocmai aria buclei hysterezis, astfel că din (2) rezultă

$$\Delta W = \int_{-\varepsilon_0}^{+\varepsilon_0}\sigma_1 d\varepsilon - \int_{-\varepsilon_0}^{+\varepsilon_0}\sigma_2\,d\varepsilon = \frac{\psi}{\pi}\,E\varepsilon_0\int_{-\varepsilon_0}^{+\varepsilon_0}\left[\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}}\right]d\varepsilon = \frac{\psi}{2}\,E\varepsilon_0^2.$$

Energia elastică, corespunzătoare deformaţiei maxime, este aria triunghiului din figura 2, expresia sa fiind

$$W = \frac{E\varepsilon_0^2}{2}\,.$$

Astfel, conform definiţiei dată anterior coeficientului ψ,

$$\frac{\Delta W}{W} = \frac{\psi}{2}\,E\varepsilon_0^2 = \frac{E\varepsilon_0^2}{2} = \psi. \tag{3}$$

Admiţînd că bucla este o elipsă*), cu notaţiile din figura 2, avem :

$$\psi = \frac{2\pi \cdot ab}{P_0 y_0} \text{ sau } \psi = 2\pi \frac{y_p}{y_0},$$

de unde se vede că coeficientul ψ se poate exprima prin raportul dintre amplitudinea deformaţiei neelastice y_p şi amplitudinea deformaţiei elastice y_0, înmulţit cu 2π.

În sfîrşit, o modalitate de deducere a relaţiei dintre coeficientul ψ şi coeficientul de amortizare vîscoasă, utilă pentru aplicaţiile practice, este următoarea. După cum se ştie, ecuaţia diferenţială a oscilaţiilor libere ale unui sistem cu un singur grad de libertate cu amortizare vîscoasă, este

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + r \frac{dy}{dt} + cy = 0$$

sau, notînd $\frac{r}{m} = 2\varepsilon$ şi $\frac{c}{m} = \omega^2$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = 0$$

a cărei soluţie generală, cînd $\varepsilon < \omega$ şi $y_0 = 0$, este

$$y = e^{-\varepsilon t} \frac{\dot{y}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t, \tag{4}$$

$$\dot{y} = e^{-\varepsilon t}\left(\dot{y}_0 \cos \omega_1 t - \frac{\varepsilon \dot{y}_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t\right), \tag{5}$$

unde $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$ este frecvenţa circulară a oscilaţiilor proprii amortizate.

Plecînd de la ecuaţiile de mai sus, lucrul mecanic absorbit de material într-o jumătate a ciclului de oscilaţie ΔW, se poate exprima ca fiind diferenţa dintre energia cinetică a sistemului la timpul $t = 0$ şi la $t = \frac{T}{2}$; ţinînd seama de (5) avem :

$$\Delta W = \frac{1}{2} m \dot{y}_0^2 (1 - e^{-\varepsilon T}). \tag{6}$$

Energia elastică, corespunzătoare deformaţiei maxime, se poate lua egală cu suma energiei cinetice şi energiei potenţiale la $t = \frac{T}{4}$

$$W = \frac{1}{2} m \frac{\varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon T}{2}} \dot{y}_0^2}{\omega_1^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{e^{-\frac{\varepsilon T}{2}} \dot{y}_0^2}{\omega_1^2} = \frac{1}{2} m e^{-\frac{\varepsilon T}{2}} \dot{y}_0^2 \frac{\varepsilon^2 + \omega^2}{\omega_1^2}. \tag{7}$$

*) Relaţiile deduse în această ipoteză sînt valabile numai pentru valori reduse ale raportului dintre cele două axe ale elipsei.

Deci

$$\frac{\Delta W}{W} = (e^{\frac{\varepsilon T}{2}} - e^{-\frac{\varepsilon T}{2}}) \cdot \frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2 + \omega^2}. \tag{8}$$

Procedînd analog cu [9] și ținînd seama că ε^2 este mic, (8) se poate scrie sub forma

$$\frac{\Delta W}{W} = 2 \operatorname{sh} \frac{\varepsilon T}{2} \cdot \left(\frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2 + \omega^2}\right)$$

sau

$$\frac{\Delta W}{W} = 2 \operatorname{sh} \frac{\varepsilon 2\pi}{2\omega_1} \cdot \left(\frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2 + \omega^2}\right) = 2\operatorname{sh} \frac{\frac{\varepsilon\pi}{\omega}}{\sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{\omega^2}}} \left(\frac{\omega_1^2}{\varepsilon^2 + \omega^2}\right).$$

Admițînd că raportul $\frac{\varepsilon^2}{\omega^2}$ este practic neglijabil

$\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{2\varepsilon\pi}{\omega}$ (decrementul logaritmic al amortizării).

Luînd acum ΔW corespunzător întregii arii a buclei, conform definiției,

$$2\frac{\Delta W}{W} \approx \frac{4\varepsilon\pi}{\omega} \approx \psi = 2\gamma. \tag{9}$$

Ținînd seama că $\eta = \frac{\varepsilon}{\omega}$ este coeficientul de amortizare vîscoasă, deducem de aici relația dintre ψ și η

$$\psi = 4\pi\eta. \tag{10}$$

Din cele arătate mai sus, rezultă că analiza comparativă a buclelor hysterezis ale materialelor permite determinarea unor caracteristici importante cum este capacitatea de absorbție a lucrului mecanic de deformație, valoarea energiei elastice corespunzătoare deformațiilor maxime, amplitudinea deformației neelastice, modulul de elasticitate, coeficientul de amortizare vîscoasă și coeficientul de absorbție a energiei oscilațiilor. O primă problemă la care cercetările de laborator trebuiau să dea un răspuns era dacă mărimile menționate mai sus pot fi determinate ca niște constante ale zidăriei, deci dacă valorile lor se stabilizează îndeajuns pentru a putea fi luate în considerare ca atare.

La alegerea procedeului de lucru în laborator, s-a ținut seama de rezultatele cercetărilor anterioare cu privire la influența condițiilor de încercare asupra valorii coeficientului ψ.

Cercetările făcute încă în 1927 de A. L. Kimball și D. E. Lovell (publicate în articolul „Internal friction in solids" din The Physical Review) și cele mai recente ale lui E. S. Sorokin [14, 15] ș.a. au arătat

că coeficientul ψ este independent de frecvența oscilațiilor și deci de viteza de deformație

$$\psi\ (\dot{y}) = \text{const}; \quad \Delta W\ (\dot{y}) = \text{const}.$$

Aceasta a permis încărcarea și descărcarea ciclică a probelor cu o perioadă de cca 180 s (perioadă ce a fost folosită la TNIPS-URSS la încercările pe beton, metale și lemn) ceea ce prezintă avantaje deosebite din punctul de vedere al organizării încercărilor.

De asemenea, s-a ținut seama de faptul că aria buclei este independentă de intensitatea stării de efort

$$\psi(\sigma) \approx \text{const},$$

cu excepția domeniului eforturilor unitare foarte mici [14] așa cum se poate vedea din figura 3, unde σ_0 este amplitudinea efortului unitar dinamic. Dincolo însă de $\sigma_0 = 2{,}5\ \%\ \sigma_{st}$, valoarea coeficientului ψ nu mai este influențată de valoarea lui σ.

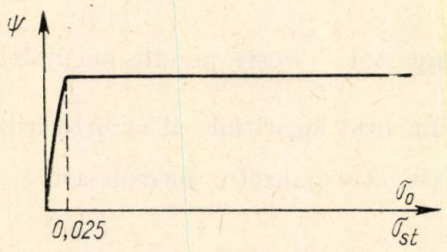


Fig. 3. — Relația generală aproximativă (pentru diferite materiale) dintre coeficientul ψ și amplitudinea eforturilor unitare din încovoiere [14].

Încercările, în care determinarea valorilor lui ψ s-a făcut pe baza analizei vibrogramelor oscilațiilor proprii, au confirmat întru totul această observație. Totodată, s-a ținut seama că la un material dat și la o anumită stare de efort, valoarea coeficientului ψ este independentă de dimensiunile și forma probei. Ținînd seama de aceasta, probele au fost dimensionate astfel ca să fie asigurată obținerea unor rezultate comparabile, pentru diferite materiale.

Cercetările au fost făcute pe cîte 10 stîlpi din zidărie obișnuită de cărămidă de argilă arsă marca 125 cu mortar $M25$, din cărămidă silico-calcară marca 100, din blocuri mici de beton celular autoclavizat, din zidărie vibrată de cărămidă plină și cu găuri verticale. În total au fost încercați 50 stîlpi, la care s-au făcut cca 30.000 citiri și s-au înregistrat cca 20 vibrograme.

Adoptîndu-se o aceeași înălțime pentru toți stîlpii, $l = 200$ cm (stîlpii fiind încastrați într-o fundație continuă, masivă, de beton armat, pe o adîncime de 30 cm), celelalte dimensiuni ale stîlpilor s-au determinat din condiția ca frecvențele lor circulare fundamentale să fie aceleași (pentru ca rezultatele să fie comparabile) [12]

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_n \text{ unde } \omega_i = \frac{3{,}5151}{l^2}\sqrt{\frac{E_i I_i}{\overline{m}_i}}, \qquad (11)$$

de unde rezultă condițiile

$$\left.\begin{aligned} &\overline{m}_1 = \overline{m}_2 = \ldots = \overline{m}_n , \\ &l_1 = l_2 = \ldots = l_n , \\ &E_1 I_1 = E_2 I_2 = \ldots = E_n I_n . \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Din condiția a treia din (12) rezultă

$$E_1 \frac{b_1 h_1^3}{12} = E_2 \frac{b_2 h_2^3}{12} = \ldots = E_n \frac{b_n h_n^3}{12}$$

și

$$h_n^3 = \frac{E_1 b_1 h_1^3}{E_n b_n} .$$

Din prima condiție din (12) rezultă

$$h_1 b_1 \rho_{a1} = h_2 b_2 \rho_{a2} = \ldots = h_n b_n \rho_{an}$$

(ρ_a este densitatea aparentă a zidăriei),
de unde

$$\frac{b_1}{b_n} = \frac{h_n \rho_n}{h_1 \rho_1} .$$

În relațiile de mai sus cu indicele 1 s-au notat caracteristicile și dimensiunile zidăriei-etalon din cărămidă obișnuită. Pe baza relațiilor de mai sus, secțiunile transversale ale stîlpilor au fost dimensionate cu formulele :

$$h_n = h_1 \sqrt{\frac{E_1 \rho_n}{E_n \rho_1}} \quad \text{și} \quad b_n = b_1 \frac{h_1 \rho_1}{h_n \rho_n} . \qquad (13)$$

În figurile 4, 5 și 6 se văd stîlpii de zidărie înainte de încercarea lor.

Stîlpii dimensionați astfel au fost încercați după 28 zile de la executarea lor la încovoiere ciclică, în cîte 5 trepte egale cu cîte a zecea parte din sarcina de rupere, astfel că sarcina maximă aplicată a fost egală cu jumătate din sarcina de rupere. Sarcinile s-au aplicat la capătul superior al stîlpului, într-un sens și în celălalt, perioada unui ciclu complet de încărcare-descărcare fiind de cca 180 s (fig. 7).

Pentru a realiza modul de încărcare descris mai sus, pe capătul superior al stîlpului s-a montat o brățară prevăzută cu două cuțite (de o parte și alta a stîlpului) pentru transmiterea sarcinei la stîlp. Transmiterea sarcinei la cuțit se făcea printr-un cablu, legat de acesta, și petrecut peste un scripete montat pe rulmenți. La capetele libere ale celor două cabluri se afla cîte un platan care se încărca cu greutăți alese în mod convenabil, conform treptelor de încărcare stabilite. Pentru susținerea întregului dispozitiv s-a folosit cadrul din figura 8, care se deplasa de la un stîlp la altul.

Citirea deformațiilor capătului liber al stîlpului s-a făcut cu un comparator cu precizia de 0,01 mm.

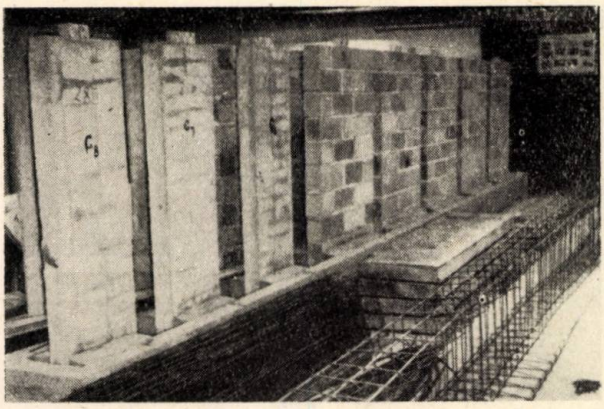


Fig. 4

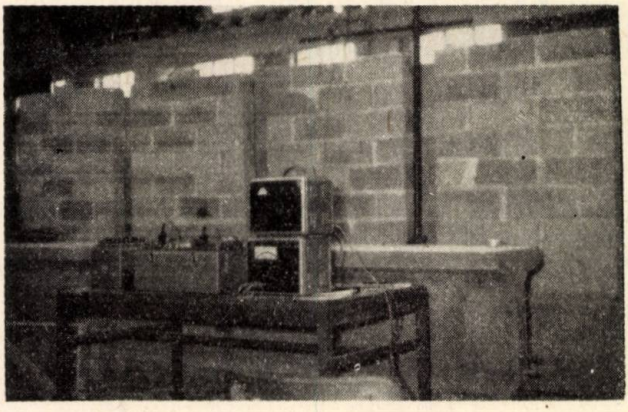


Fig. 5

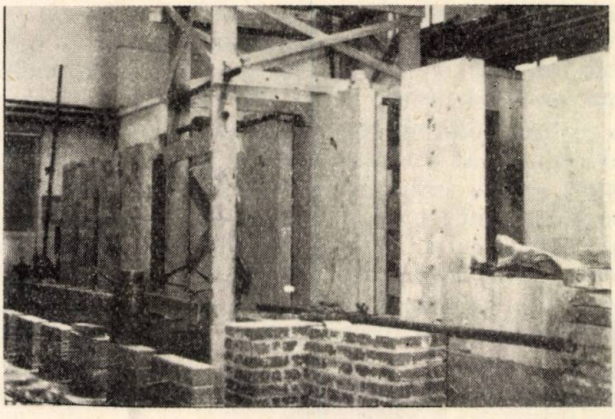


Fig. 6

Reprezentarea grafică a deformațiilor corespunzătoare fiecărei trepte a încărcării ciclice a permis construirea buclelor histerezis din fig. 12, 13 și 14.

Interpretarea buclelor (calculul mărimilor ΔW, W și ψ) s-a făcut prin integrare numerică, începînd din momentul în care aria ΔW a buclei devenea constantă.

Paralel cu aceste încercări, s-au înregistrat vibrogramele oscilațiilor proprii ale stîlpilor.

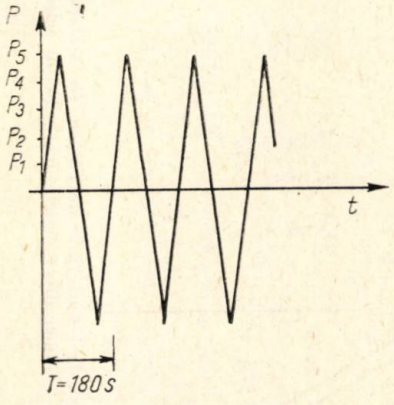


Fig. 7. — Schema de încărcare ciclică.

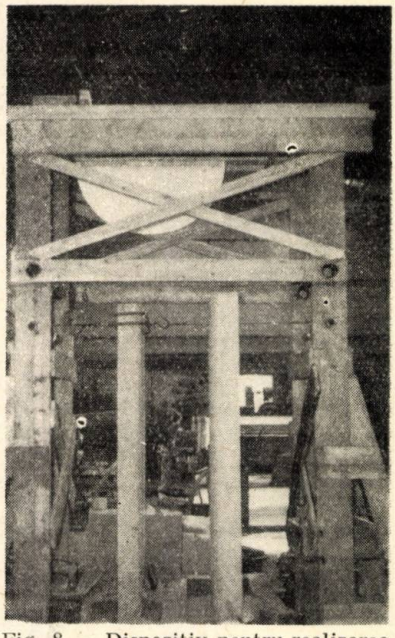


Fig. 8. — Dispozitiv pentru realizarea încărcării ciclice a stîlpilor.

CONCLUZII

Coeficientul ψ

Rezultatele obținute au arătat că sub aspectul comportării la sarcini ciclice, zidăriile cu caracteristici statice destul de apropiate și folosite, practic, în aceleași condiții, se diferențiază net, iar coeficientul de absorbție a energiei oscilațiilor poate constitui un criteriu obiectiv pentru diferențierea lor. Comportarea diferită a zidăriilor se datorește structurii materialului de zidărie, alcătuirii zidăriei și conlucrării dintre material (cărămidă, bloc) și mortar.

Acest lucru este ilustrat în figura 9 în care se dau trei bucle hysterezis stabilizate : pentru zidăria obișnuită de cărămidă, pentru zidăria vibrată și pentru cea din blocuri mici de beton celular autoclavizat. Caracteristicile dinamice ale acestor zidării, ca : deformabilitatea la sarcini ciclice, coeficientul de absorbție specifică a energiei oscilațiilor, lucrul mecanic cores-

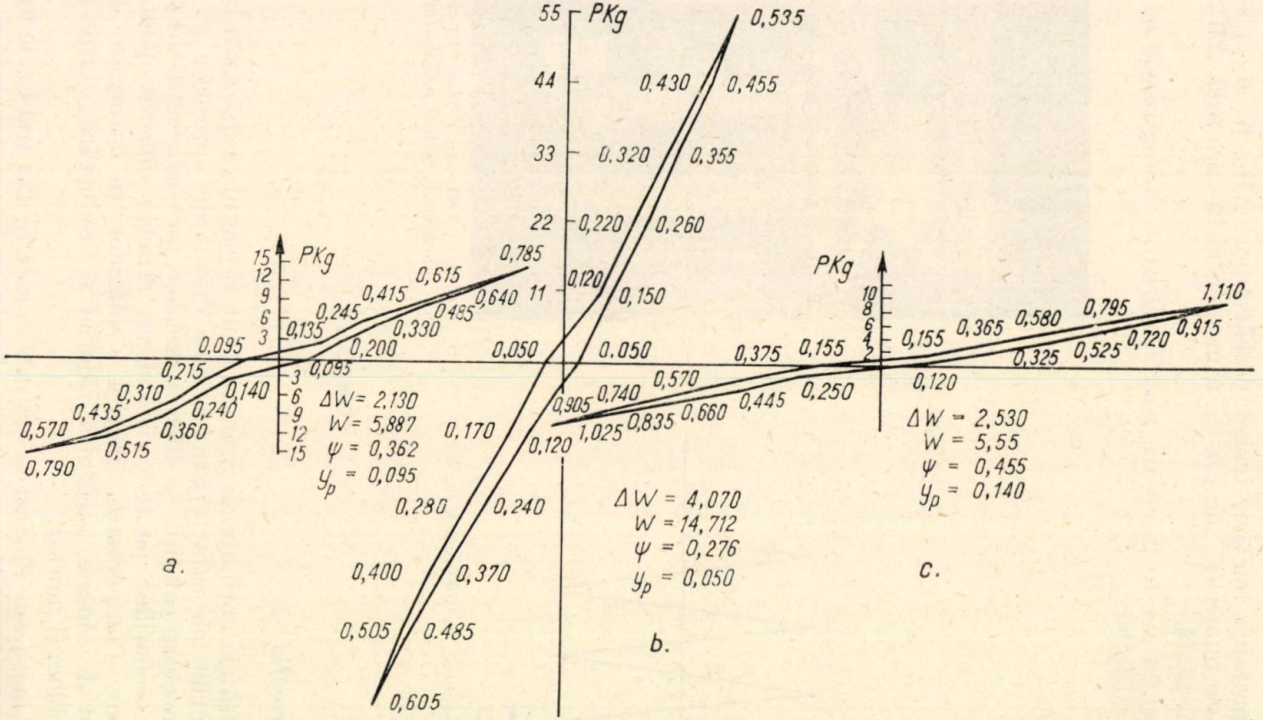


Fig. 9. — Bucle hysterezis caracteristice pentru trei materiale de zidărie (*a* — zidărie obişnuită de cărămidă ; *b* — zidărie vibrată de cărămidă ; *c* — zidărie din blocuri mici de beton celular autoclavizat.

punzător deformației elastice maxime, deformațiile neelastice, sînt atît de diferite încît impun de la sine ideea reconsiderării domeniilor și modalităților folosirii lor în zone seismice.

După cum rezultă din figura 10, și fig. 12, 13, 14, stabilizarea buclelor histerezis și deci a valorilor coeficientului ψ nu se produce nici atît de rapid și nici atît de net ca la materialele mai omogene (oțel, beton, etc). Dacă la acestea din urmă valoarea lui ψ devine constantă după 2—3 cicluri, la zidăria obișnuită aceasta se produce după 8—9 cicluri, la cea vibrată (care are o structură ceva mai omogenă) — după 6 cicluri, iar la zidăria din blocuri mici de beton celular autoclavizat, se poate vorbi doar de o tendință de stabilizare.

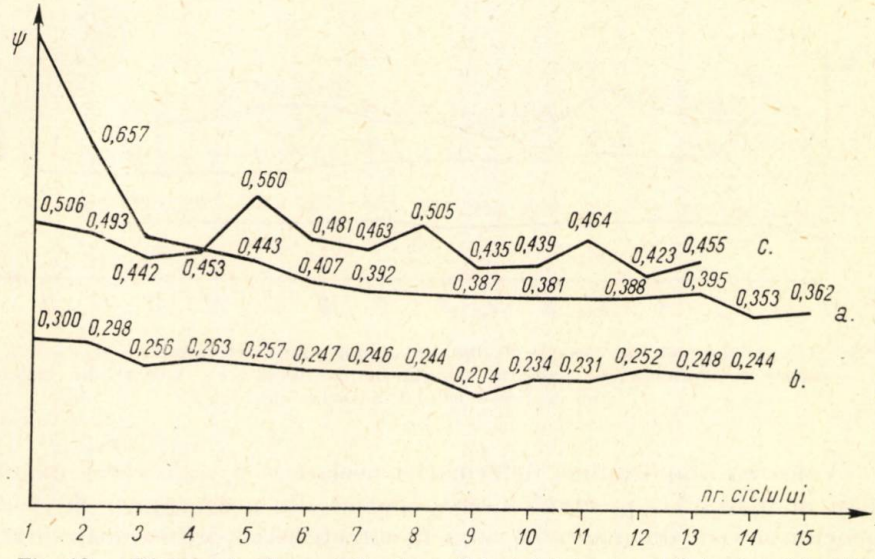


Fig. 10. — Diagramele de variație ale coeficientului ψ: *a* — zidărie de cărămidă obișnuită; *b* — zidărie vibrată de cărămidă; *c* — zidărie din blocuri mici de beton celular autoclavizat.

Totuși, o astfel de stabilizare are loc, ceea ce confirmă posibilitatea aplicării metodei descrise la determinarea în laborator a coeficientului ψ la zidării ca și la alte materiale.

În general, valoarea inițială a lui ψ este mare, ceea ce se explică, evident, prin deformațiile neelastice inițiale mari, apoi scade treptat.

La un același material coeficientul ψ prezintă o anumită împrăștiere, datorită neomogenității, atît a materialului cît și a execuției zidăriei, însă se încadrează între limite caracteristice materialului respectiv.

Din analiza datelor obținute se poate trage concluzia că cercetarea coeficientului ψ, o dată cu varierea diferiților parametri ca: proprietățile fizico-mecanice ale materialului de zidărie, adeziunea dintre mortar și

cărămidă, alcătuirea zidăriei, tehnologia de execuție etc. poate oferi vaste posibilități de cercetare a procedeelor de îmbunătățire a zidăriilor destinate pentru zone seismice.

Amplitudinea deformației neelastice, y_p

După cum se știe, la oțelurile moi, cu alungiri remanente mari, creșterea rezistenței de rupere la șoc față de rezistența de rupere la încărcări statice, este mai mare decît la oțelurile casante. Este de așteptat ca și zidăriile care prezintă deformații neelastice mari să aibă o comportare bună la acțiunea impulsului seismic.

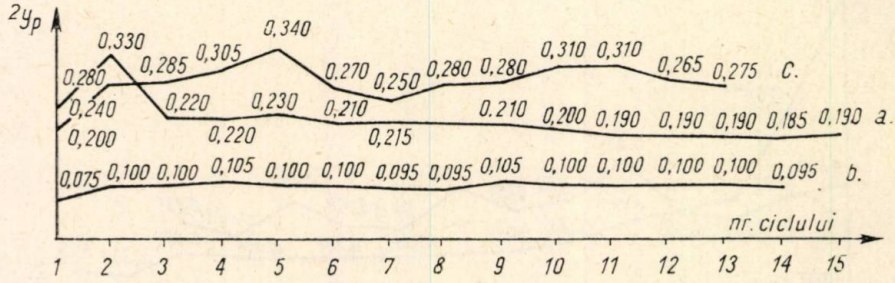


Fig. 11. — Diagramele de variație ale dublului amplitudinei deformației neelastice $2y_p$; *a* — zidărie de cărămidă; *b* — zidărie vibrată de cărămidă; *c* — zidărie din blocuri mici de beton celular autoclavizat.

Valoarea amplitudinei deformației neelastice y_p, ale cărei diagrame se dau în figura 11, prezintă interes tocmai din acest punct de vedere. După cum se vede din diagrame, această caracteristică are o valoare maximă la zidăria din beton celular autoclavizat, ceea ce de altfel coincide cu concluzia unor cercetări că acest material are o comportare la șoc mai bună decît betonul obișnuit.

Caracteristica y_p, după ce trece printr-un maximum la ciclul 2, crescînd de la ciclul 1, se stabilizează încă de la primele cicluri la materiale cu structură mai omogenă și mai lent — la cele neomogene (cu excepția zidăriei din beton celular la care are doar o tendință de stabilizare).

Valoarea lui y_p este minimă la zidăria vibrată ($y_p = 0{,}05$) la care umplerea completă a rosturilor dintre cărămizi cu mortar vibrat, reduce deformațiile neelastice, este aproape dublă la zidăria obișnuită $y_p = 0{,}095$ și maximă la cea din beton celular $y_p = 0{,}147$.

La un același material, pe diferite probe, y_p are o valoare pronunțat constantă, abaterile fiind neglijabile.

Energia consumată pentru procese neelastice, într-un volum unitar de material și într-un ciclu de oscilație, ΔW și energia elastică corespunză-

toare deformației maxime W. Aceste caracteristici așa cum se poate vedea din diagrame prezintă următoarele particularități :

— valorile lui ΔW corespunzătoare celor trei materiale nu diferă de la un material la altul ca valorile lui W :

— variația valorilor lui ΔW la un același material este ceva mai accentuată, iar la zidăria din beton celular prezintă un traseu caracteristic în „dinți de fierăstrău" cu tendință de atenuare, spre deosebire de valoarea lui W, care are valori aproape constante pentru fiecare material.

★

Cercetările asupra caracteristicilor dinamice menționate ale diferitelor materiale de zidărie deschid perspectivele unor posibilități noi de abordare a unei vaste game de aspecte teoretice și practice legate de folosirea zidăriilor în zone seismice.

Una dintre aceste aplicații o constituie analiza dinamică a structurilor pe baza metodei energetice. O astfel de analiză a unui perete din lemn, o fac Kenneth Medearis și D. H. Young [9]. Această metodă de verificare la sarcini seismice constă din determinarea săgeții elastice maxime și a celei remanente, care apoi se compară cu cele admisibile pentru elementul de construcție considerat.

Primită la redacție la 1 aprilie 1966, unele completări la 27 mai 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Beleș, D. M. Ifrim, *Elemente de seismologie inginerească*, Edit. tehnică, 1962.
2. G. V. Berg, S. S. Thomaides, *Energy Consumption by Structures in Strong Motion Earthquakes*, Proceedings, Second Conf. on Earthquakes Engrg., Tokyo, Japan, 1960.
3. J. A. Blume, *Structural Dynamics in Earthquakes Resistance Design*, Transaction, ASCE, vol. 125, 1960.
4. E. Ch. Crede, *Vibration and Shock Isolation*, John Willey, New-York, 1952.
5. G. W. Housner, *Behavior of Structures During Earthquakes*, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 85, 1959.
6. L. S. Jacobsen, R. S. Ayre, *Engineering-Vibration*, Mc Graw Hill, New-York, 1958.
7. K. Kaneta, *Study of Structural Damping and Stiffness in Nailed Joints*, Engineer's Thesis — Stanford Univ. Sept. 1958.
8. H. Kolsky, *Stress Waves in Solids*, Oxford, 1953.
9. K. Medearis, D. H. Young, *Energy Absorbtion of Structures under cyclic loading*, Journal of the Structural Division, Proceedings of the ASCE, 1964.
10. G. S. Pisarenko, *Kolebania uprughih sistem s uciotom rasseivania energhii v materiale*, Kiev, 1955.
11. L. Rogers, *An Introduction to the Dynamics of Framed Structures*, John Willey, N. York, 1960.
12. V. V. Seringhiulean, *O Seismostoikosti krupnoporistovo betona*, din culeg. Stroitelstvo v seismiceskih raionah, Moscova 1957.
13. M. Simonici, *Dinamica Construcțiilor*, Edit. tehnică, 1958.
14. E. S. Sorokin, *Dinamiceskii rasciot nesuscih konstrukții*, Gosstroiizdat, 1956.
15. — *Metod uciota neuprugovo soprotivlenia v materiale pri rasciote konstrukții na kolebania*, din „Issledovania po dinamike soorujenii", Stroiizdat, 1954.

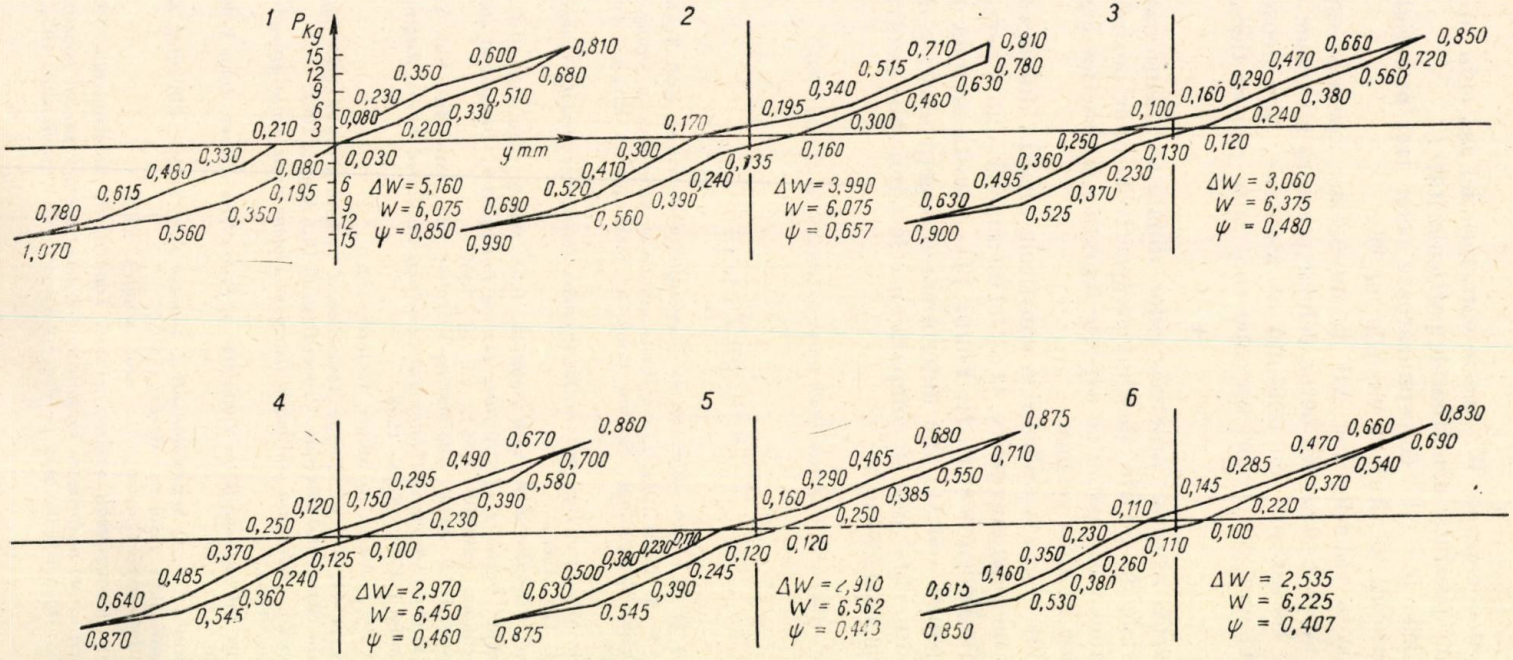

1
2
3
4
5
6
P Kg
y mm
ΔW = 5,160
W = 6,075
ψ = 0,850
ΔW = 3,990
W = 6,075
ψ = 0,657
ΔW = 3,060
W = 6,375
ψ = 0,480
ΔW = 2,970
W = 6,450
ψ = 0,460
ΔW = 2,910
W = 6,562
ψ = 0,443
ΔW = 2,535
W = 6,225
ψ = 0,407

Fig. 12

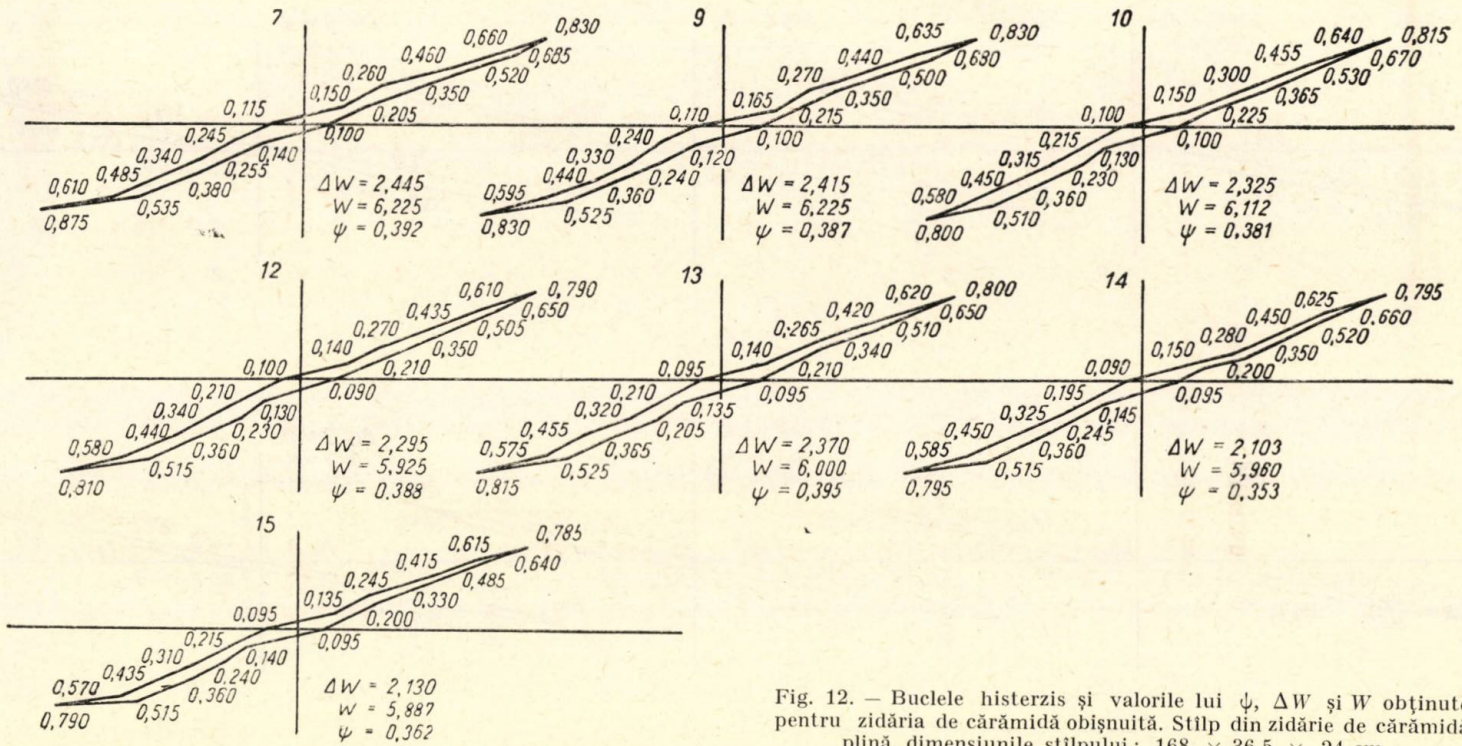


Fig. 12. — Buclele histerzis şi valorile lui ψ, ΔW şi W obţinute pentru zidăria de cărămidă obişnuită. Stîlp din zidărie de cărămidă plină, dimensiunile stîlpului: 168 × 36,5 × 24 cm.

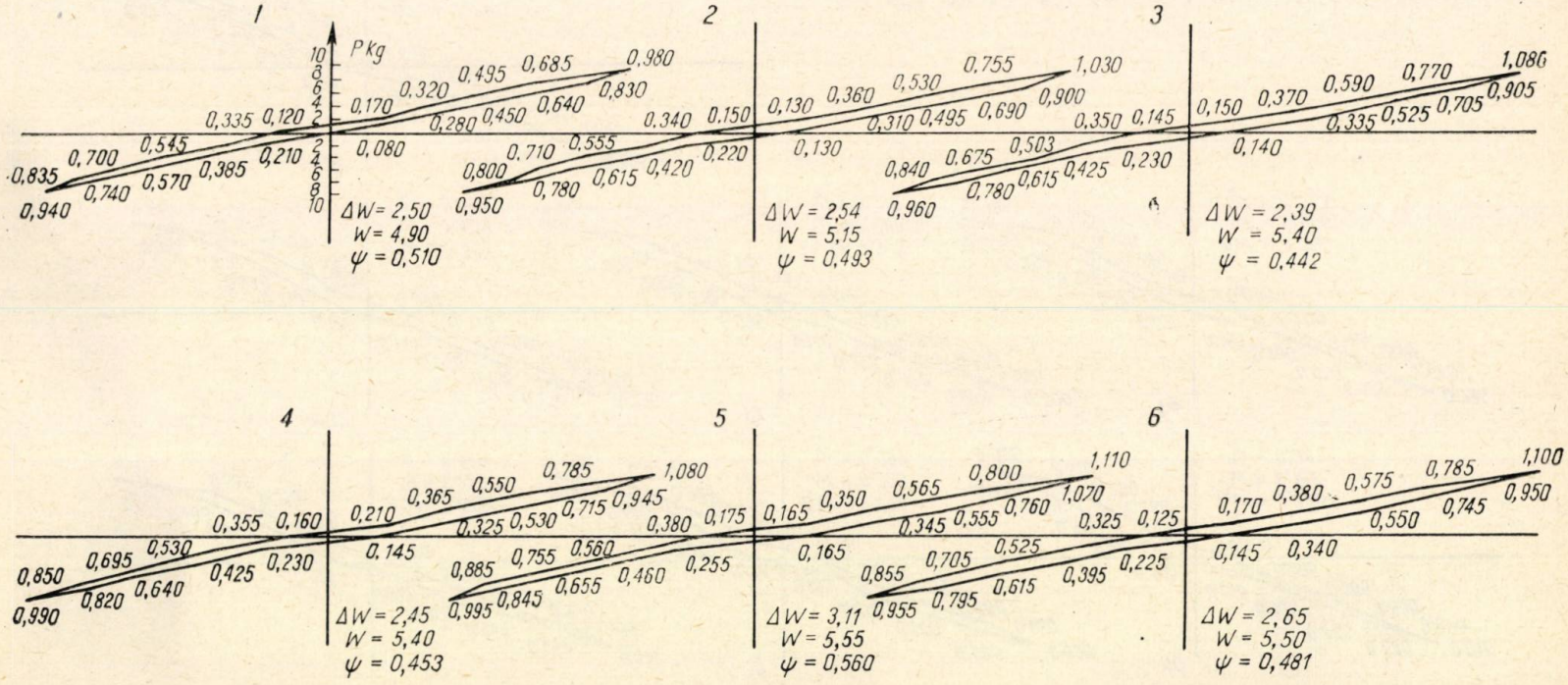

1
2
3
P kg
10
8
6
4
2
0
2
4
6
8
10
0,835
0,700
0,545
0,385
0,210
0,940
0,740
0,570
0,335
0,120
0,170
0,320
0,495
0,685
0,980
0,280
0,450
0,640
0,830
0,080
0,710
0,555
0,340
0,150
0,800
0,780
0,615
0,420
0,220
0,950
ΔW = 2,50
W = 4,90
ψ = 0,510
0,130
0,360
0,530
0,755
1,030
0,310
0,495
0,690
0,900
0,350
0,145
0,130
0,840
0,675
0,503
0,230
0,960
0,780
0,615
0,425
ΔW = 2,54
W = 5,15
ψ = 0,493
0,150
0,370
0,590
0,770
1,080
0,335
0,525
0,705
0,905
0,140
ΔW = 2,39
W = 5,40
ψ = 0,442
4
5
6
0,850
0,695
0,530
0,425
0,230
0,990
0,820
0,640
0,355
0,160
0,210
0,365
0,550
0,785
1,080
0,325
0,530
0,715
0,945
0,380
0,175
0,145
0,885
0,755
0,560
0,460
0,255
0,995
0,845
0,655
ΔW = 2,45
W = 5,40
ψ = 0,453
0,165
0,350
0,565
0,800
1,110
0,345
0,555
0,760
1,070
0,325
0,125
0,165
0,855
0,705
0,525
0,395
0,225
0,955
0,795
0,615
ΔW = 3,11
W = 5,55
ψ = 0,560
0,170
0,380
0,575
0,785
1,100
0,550
0,745
0,950
0,145
0,340
ΔW = 2,65
W = 5,50
ψ = 0,481

Fig. 13

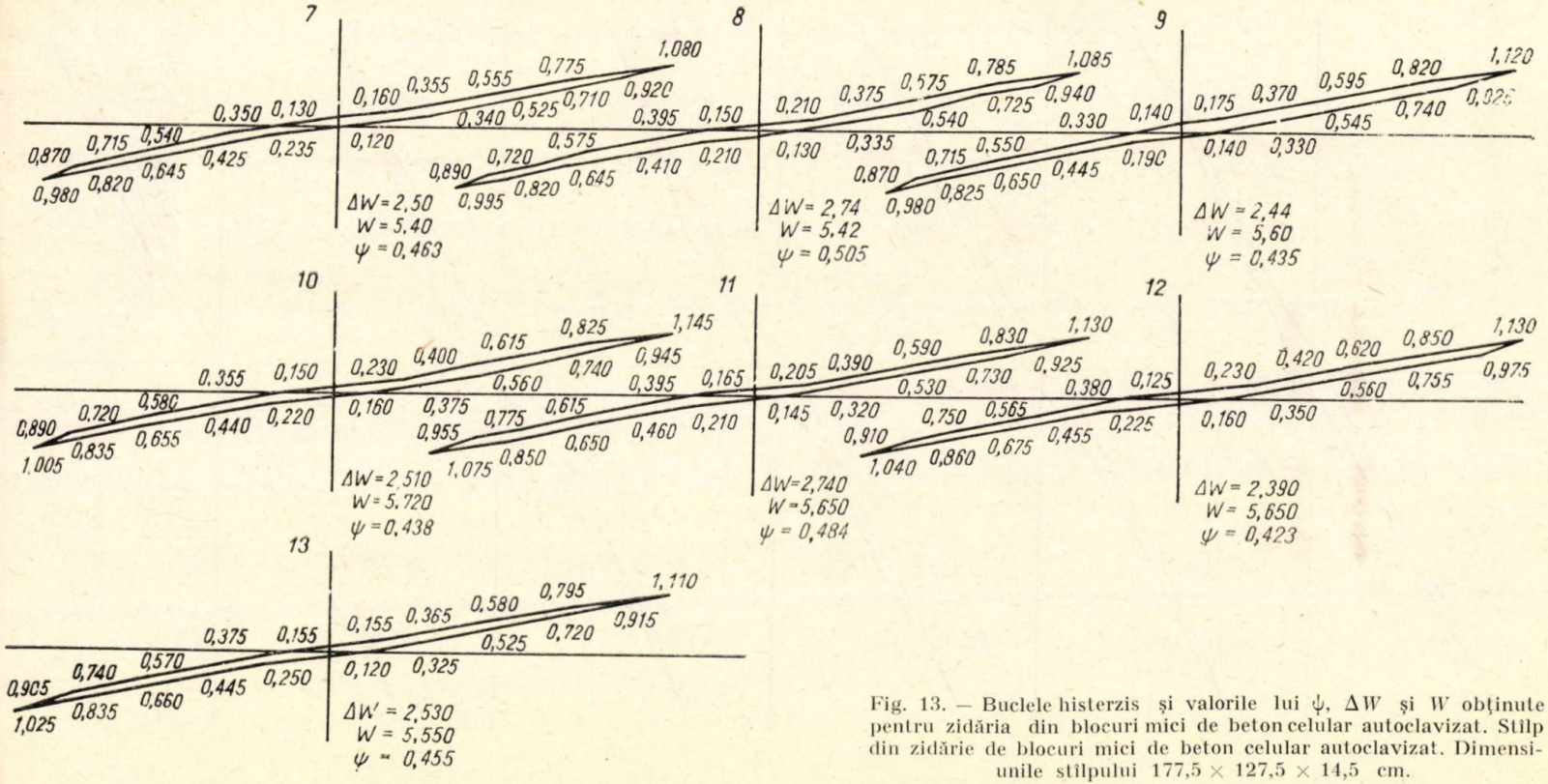


Fig. 13. — Buclele histerzis și valorile lui ψ, ΔW și W obținute pentru zidăria din blocuri mici de beton celular autoclavizat. Stîlp din zidărie de blocuri mici de beton celular autoclavizat. Dimensiunile stîlpului 177,5 × 127,5 × 14,5 cm.

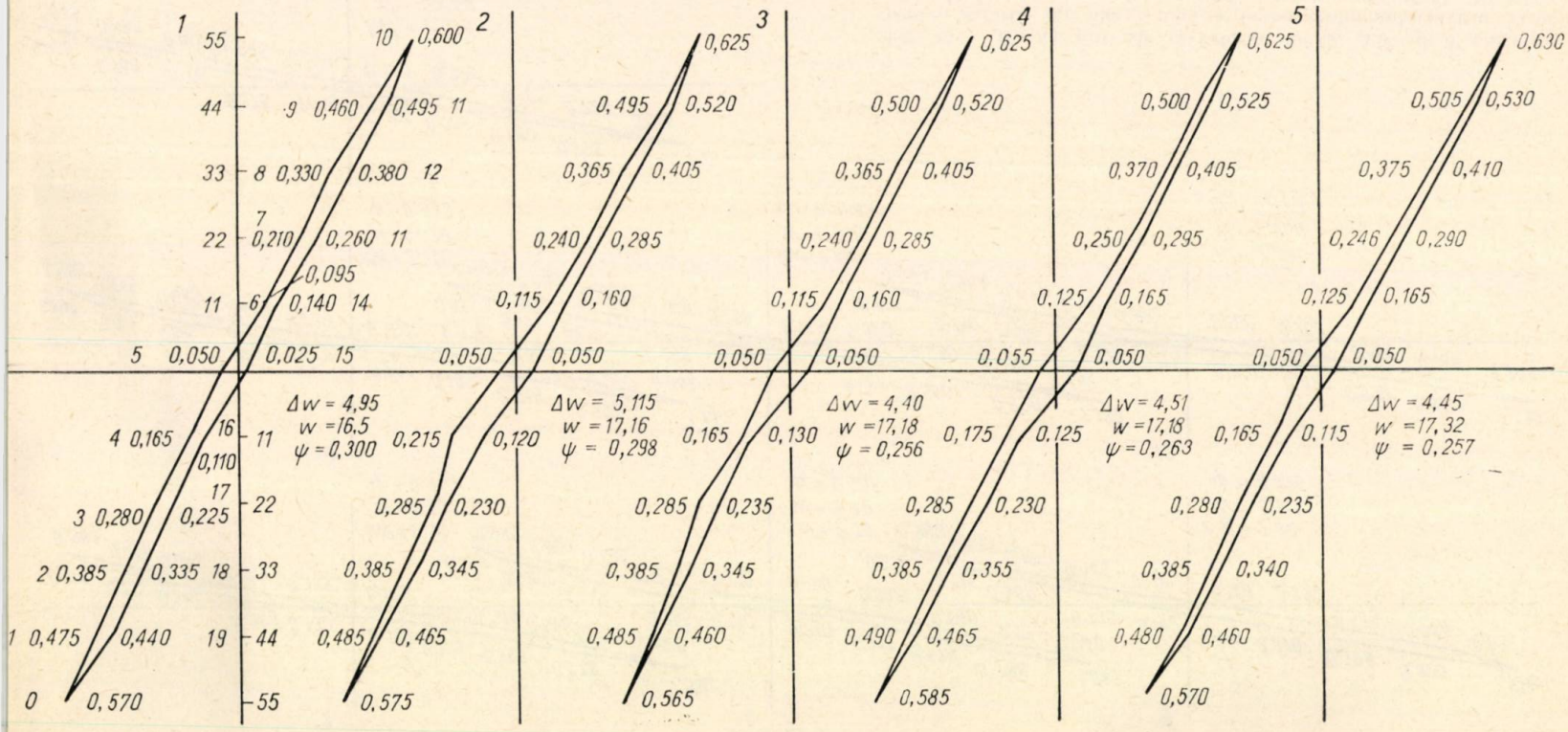

1
2
3
4
5
Δw = 4,95
w = 16,5
ψ = 0,300
Δw = 5,115
w = 17,16
ψ = 0,298
Δw = 4,40
w = 17,18
ψ = 0,256
Δw = 4,51
w = 17,18
ψ = 0,263
Δw = 4,45
w = 17,32
ψ = 0,257

Fig. 14

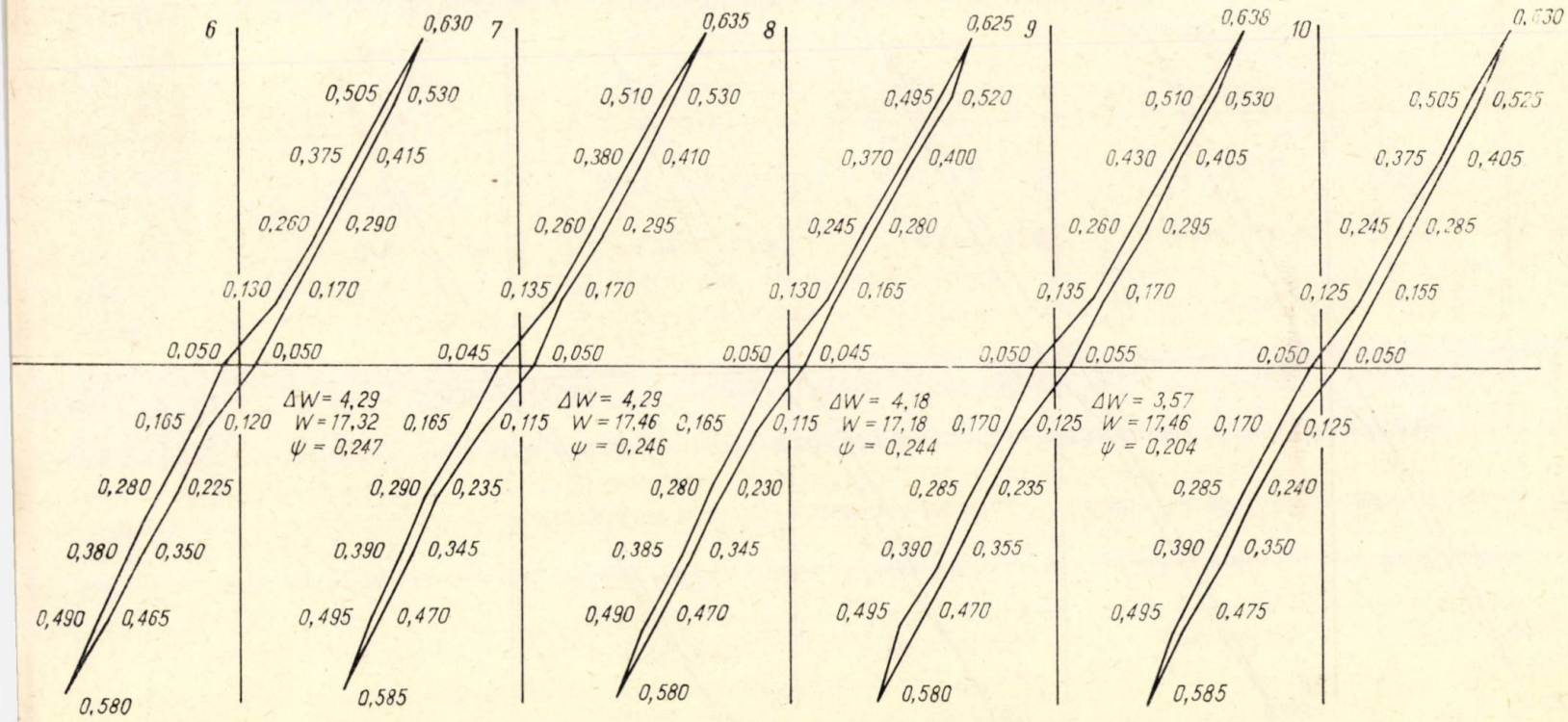

6
0,630
0,505
0,530
0,375
0,415
0,260
0,290
0,130
0,170
0,050
0,050
ΔW = 4,29
W = 17,32
ψ = 0,247
0,165
0,120
0,280
0,225
0,380
0,350
0,490
0,465
0,580
7
0,635
0,510
0,530
0,380
0,410
0,260
0,295
0,135
0,170
0,045
0,050
ΔW = 4,29
W = 17,46
ψ = 0,246
0,165
0,115
0,290
0,235
0,390
0,345
0,495
0,470
0,585
8
0,625
0,495
0,520
0,370
0,400
0,245
0,280
0,130
0,165
0,050
0,045
ΔW = 4,18
W = 17,18
ψ = 0,244
0,165
0,115
0,280
0,230
0,385
0,345
0,490
0,470
0,580
9
0,638
0,510
0,530
0,430
0,405
0,260
0,295
0,135
0,170
0,050
0,055
ΔW = 3,57
W = 17,46
ψ = 0,204
0,170
0,125
0,285
0,235
0,390
0,355
0,495
0,470
0,580
10
0,630
0,505
0,525
0,375
0,405
0,245
0,285
0,125
0,155
0,050
0,050
0,170
0,125
0,285
0,240
0,390
0,350
0,495
0,475
0,585

Fig. 14

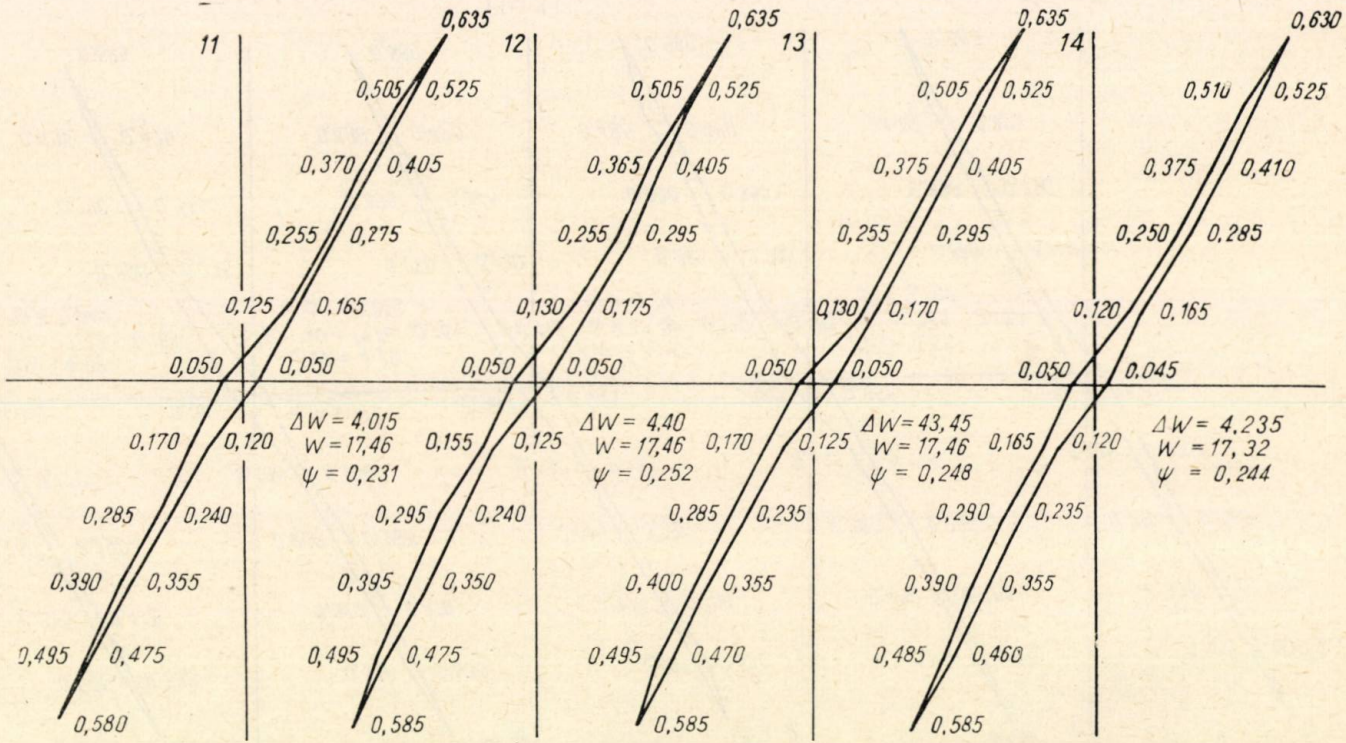


Fig. 14. — Buclele histerezis şi valorile lui ψ, ΔW şi W obţinute pentru zidăria vibrată. Stîlp din zidărie vibrată de cărămidă; dimensiunile stîlpului : 168,5 × 60 × 14 cm.

ACȚIUNEA SEISMICĂ ASUPRA CADRELOR PLANE, DE FORMĂ OARECARE, AVÎND MASE CONCENTRATE LA NODURI

de NICOLAE ȚOPA
Institutul de construcții București

624.042

Considerînd mișcarea terestră de o direcție oarecare în planul cadrului, se ajunge la exprimarea oscilațiilor forțate prin formele proprii de oscilație ale structurii. Expresiile forțelor de inerție care iau naștere, pun în evidență două tipuri de componente : una care este funcție liniară de accelerația seismică și o a doua care este funcție liniară de așa numitul spectru al accelerațiilor seismice. Se demonstrează apoi că primele componente determină numai forțe axiale în structură. Pentru cel de-al doilea tip de componente se alcătuiesc expresiile de calcul care pun în evidență direcțiile forțelor seismice pentru fiecare nod.

Pentru dezvoltarea problemei enunțate în titlu vom face apel la cîteva elemente stabilite în lucrările [4], [5], [6]. În aceste lucrări se prezintă o metodă de studiu a oscilațiilor proprii și forțate pentru cadrele plane de formă oarecare (cum ar fi cele din figura 1), avînd masele concentrate la noduri, în ipoteza inextensibilității barelor și a neglijării inerției de rotație a maselor.

Notațiile și expresiile de calcul care ne vor fi necesare în prezenta lucrare sînt :

Notațiile folosite

$a, b, c, \ldots, l$ — nodurile cadrului ;

$m_a, m_b, \ldots m_l$ — masele concentrate din nodurile cadrului ;

$1, 2, 3, \ldots, j, g, \ldots, n$ — indicii unor deplasări arbitrare liniar independente care caracterizează deformabilitatea cadrului (grade de libertate) ;

$Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_j, Z_g, \ldots, Z_n$ — parametrii care caracterizează gradele de libertate (și care sînt rotiri de bare) ;

I, II, III, ..., i, h, ..., n — indicii pulsațiilor proprii și ai formelor proprii de oscilație;

$\bar{r}_a$, $\bar{r}_b$, ..., $\bar{r}_k$ — deplasările totale necunoscute ale maselor a, b, ..., k, la timpul t al mișcării;

$\bar{r}_{ai}$, $\bar{r}_{ah}$, ..., $\bar{r}_{ki}$, $\bar{r}_{kh}$ ... — deplasările totale ale maselor a, ..., k la timpul t al mișcării în formele proprii de oscilație i, h, ...;

$\bar{r}_{a1}$, $\bar{r}_{b1}$, ..., $\bar{r}_{k1}$, $\bar{r}_{a2}$, $\bar{r}_{b2}$, ..., $\bar{r}_{k2}$, ..., $\bar{r}_{aj}$, $\bar{r}_{bj}$, ... $\bar{r}_{kj}$ — deplasările totale ale maselor a, b, ..., k la timpul t cauzate de gradele de libertate 1, 2, ..., j (care sînt cunoscute deoarece gradele de libertate 1, 2, ..., j sînt alese arbitrar).

Între diversele deplasări notate mai sus au fost stabilite relațiile

$$\begin{aligned} \bar{r}_a &= \sum_{q=1}^{n} \bar{r}_{aq} Z_q , \\ &\vdots \\ \bar{r}_k &= \sum_{q=1}^{n} \bar{r}_{kq} Z_q . \end{aligned} \tag{1}$$

Pornind apoi de la considerarea că prin explicitarea forțelor de inerție echilibrul sistemului în mișcare poate fi considerat ca un echilibru static și exprimînd acest echilibru cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale se ajunge la sistemul omogen de ecuații:

$$\begin{aligned} &Z_1 L_{11}^* + Z_2 L_{12}^* + \ldots + Z_n L_{1n}^* = 0 , \\ &\vdots \\ &Z_1 L_{j1}^* + Z_2 L_{j2}^* + \ldots + Z_n Z_{jn}^* = 0 , \end{aligned} \tag{2}$$

unde

$$\vdots$$

$$L_{jg}^* = L_{jg} + \omega^2 I_{jg} , \tag{3}$$

În relațiile (2), (3) ω reprezintă pulsația proprie, L_{jg} reprezintă lucrul mecanic efectuat de eforturile provenite din deformarea elastică a cadrului corespunzătoare parametrului $Z_g = 1$ care parcurg deplasările cinematice corespunzătoare parametrului $Z_j = 1$ (cadrul fiind transformat într-un mecanism cu un grad de libertate [3]), iar I_{jg} este definit mai jos

$$I_{gj} = \sum_{k=a}^{l} m_k \bar{r}_{kg} \bar{r}_{kj} . \tag{4}$$

Sistemul (2) ne conduce nemijlocit la

$$D = \begin{vmatrix} L_{11}^* L_{12}^* \ldots L_{1n}^* \\ \vdots \\ L_{n1}^* L_{n2}^* \ldots L_{nn}^* \end{vmatrix} = 0 , \tag{5}$$

ecuație în ω care ne dă valorile pulsațiilor proprii.

S-a stabilit apoi că ortogonalitatea între două forme proprii de oscilație se poate exprima prin:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{g=1}^{n} I_{jg} a_{ji} a_{gh} = 0 \qquad (i \neq \mathrm{h}), \tag{6}$$

unde a_{ji} și a_{gh} sînt coeficienții formelor proprii de oscilație i și h a gradelor de libertate j și g (adică reprezintă de fapt mărimile parametrilor Z_j și Z_g în forma proprie de oscilație i și h).

Se poate constata ușor că relația (6) poate fi scrisă și vectorial:

$$\sum_{k=a}^{l} m_k \bar{r}_{ki} \bar{r}_{kh} = 0 \qquad (i \neq h), \tag{7}$$

relație echivalentă cu (6) dar mai greu de folosit în calculele practice.

Trecem acum la examinarea problemei propuse. Fie o masă oarecare a cadrului plasată în nodul k, masa m_k (fig. 1).

Toate legăturile (reazemele) cadrului sînt supuse unei mișcări forțate, variabile în timp $\bar{U}_0(t)$ de o direcție oarecare.

Dacă ne referim la masa m_k (pe care o considerăm redusă la un punct) deplasarea totală la un moment dat este

$$\bar{\Delta}(t) = \bar{U}_0(t) + \bar{r}_k(t), \tag{8}$$

iar forța de inerție corespunzătoare este

$$\bar{F}_k = - m_k \ddot{\bar{U}}_o(t) - m_k \ddot{\bar{r}}_k(t) \tag{9}$$

sau folosind (1)

$$\bar{F}_k = - m_k \ddot{\bar{U}}_0(t) - m_k \sum_q \bar{r}_{kq} \ddot{Z}_q . \tag{10}$$

Luînd în considerare și influența amortizării sub forma unei forțe de reținere proporțională cu viteza (și avînd deci și direcția ei) așa cum se accepta în lucrările de specialitate, avem

$$\bar{R}_k(t) = - 2 m_k \varepsilon_k \dot{\bar{r}}_k = - 2 m_k \varepsilon_k \sum_q \bar{r}_{kq} \dot{Z}_q . \tag{11}$$

Considerînd cadrul încărcat cu forțele de inerție $\bar{F}_k$ și forțele de reținere $\bar{R}_k$ ($k = a, b, \ldots, l$) putem scrie n ecuații de echilibru dinamic exprimat cu ajutorul principiului deplasărilor virtuale, deplasările folosite fiind parametrii $Z_1 \; Z_2 \ldots Z_j \ldots Z_n$.

Ecuația de rang j este

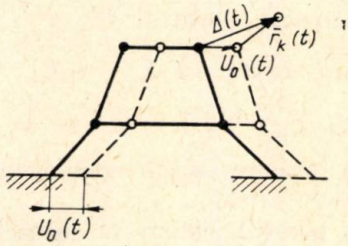


Fig. 1

$$L_j = \sum_q L_{jq} Z_q + L_j(F) + L_j(R) = 0 . \tag{12}$$

În relația (12) L_{jq} este deja definit mai înainte, $L_j(F)$ este lucrul mecanic realizat de forțele de inerție prin deplasarea cinematică $Z_j = 1$ iar $L_j(R)$ lucrul mecanic realizat de forțele de reținere prin aceeași deplasare.

Expresiile acestor doi termeni sînt

$$L_j(F) = -\sum_k m_k \bar{r}_{kj} \ddot{\bar{U}}_0(t) - \sum_k m_k \bar{r}_{kj} \sum_q \bar{r}_{kq} \ddot{Z}_q , \tag{13}$$

$$L_j(R) = -\sum_k 2\varepsilon_\kappa m_k \bar{r}_{kj} \sum_q \bar{r}_{kq} \dot{Z}_q . \tag{14}$$

Presupunînd pentru, simplificare, $\varepsilon_k = \varepsilon_a = \varepsilon_b = \ldots = \varepsilon$ pentru toate masele, notînd

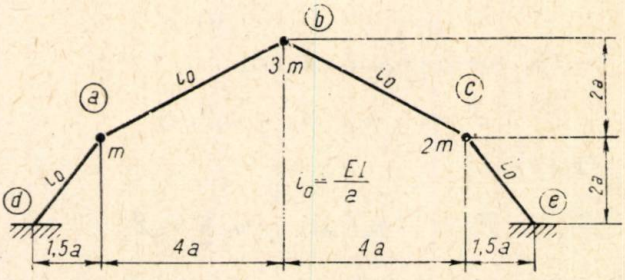


Fig. 2

$$\bar{v}_j = \sum_k m_k \bar{r}_{kj} \tag{15}$$

și folosind (4) avem

$$L_j(F) = -\sum_q I_{jq} \ddot{Z}_q - \ddot{\bar{U}}_0(t) \cdot \bar{v}_j , \tag{16}$$

$$L_j(R) = -2\varepsilon \sum_q I_{jq} \dot{Z}_q . \tag{17}$$

Ecuația (12) va căpăta aspectul

$$\begin{aligned} L_{j1}Z_1 + L_{j2}Z_2 + \ldots + L_{jn}Z_n - I_{j1}\ddot{Z}_1 - I_{j2}\ddot{Z}_2 - \ldots - 2\varepsilon(I_{j1}\dot{Z}_1 + \\ + I_{j2}\dot{Z}_2 + \ldots) - \ddot{\bar{U}}_0(t)\bar{v}_j = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Ecuația (18) reprezintă un sistem neomogen de ecuații diferențiale de ordinul doi ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Pentru rezolvarea acestui sistem să încercăm o descompunere în forme proprii deci o soluție de forma

$$Z_j = \sum_i Z_{ji} f_i(t) , \tag{19}$$

(coeficienții Z_{ji} sau a_{ji} fiind presupuși cunoscuți iar funcțiile $f_i(t)$ necunoscute).

Derivînd avem

$$\dot{Z}_j = \sum_i Z_{ji} \dot{f}_i(t),$$

$$\ddot{Z}_j = \sum_i Z_{ji} \ddot{f}_i(t). \tag{20}$$

Ecuația (18) devine

$$\sum_i f_i \sum_g L_{jg} Z_{gi} - \sum_i \ddot{f}_i \sum_g I_{jg} Z_{gi} - 2\varepsilon \sum_i \dot{f}_i \sum_g I_{jg} Z_{gi} - \ddot{U}_0(t)\, \overline{v}_j = 0. \tag{21}$$

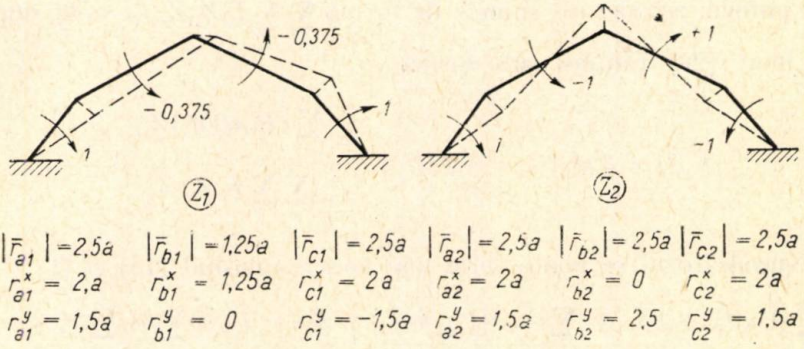


Fig. 3

Menționăm că aici coeficienții Z_{yi} sînt niște constante care descriu formele proprii.

Pentru a restrînge relația (21) să considerăm relația (18) fără termen liber. Sîntem deci în cazul oscilațiilor libere iar relația va fi valabilă pentru toate formele proprii de oscilație. În plus de data aceasta să neglijăm termenul cu ε față de ceilalți (neglijare folosită și în cazurile obișnuite de cadre etajate.

Rămîne deci valabilă relația

$$\sum_g L_{jg} Z_g - \sum_g I_{jg} \ddot{Z}_g = 0, \tag{22}$$

care pentru o formă proprie de oscilație i se poate scrie

$$\sum_g L_{jg} Z_{gi}(t) - \sum_g I_{jg} \ddot{Z}_{gi}(t) = 0. \tag{23}$$

Întrucît $Z_{gi}(t) = Z_{gi} \cos(\omega_i t - \nu_i)$

deci $\ddot{Z}_{gi}(t) = -\omega_i^2 Z_{gi}(t) = -\omega_i^2 Z_{gi} \cos(\omega_i t - \nu_i)$,

relația (23) ne dă după simplificarea cu $\cos(\omega_i t - \nu_i)$

$$\sum_g L_{jg} Z_{gi} = -\omega_i^2 \sum_g I_{jg} Z_{gi}. \tag{24}$$

Introducînd relaţia (24) în (21) obţinem

$$\sum_i [\ddot{f}_i(t) + 2\varepsilon \dot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t)] \sum_g I_{jg} Z_{gi} = -\ddot{\bar{U}}_0(t)\, \bar{v}_j . \tag{25}$$

Relaţia (25) scrisă pentru $j = 1, 2, \ldots, n$ ne conduce la un număr de n egalităţi. Înmulţim prima din aceste relaţii ($j = 1$) cu Z_{1i}, a doua ($j = 2$) cu Z_{2i}, a treia ($j=3$) cu Z_{3i} ... a „n"$-a$ ($j=n$) cu Z_{ni} şi le adunăm între ele :

$$[\ddot{f}_I(t) + 2\varepsilon \dot{f}_I(t) + \omega_I^2 f_I(t)] \sum_j \sum_g I_{jg} Z_{gI} Z_{ji} + \ldots + [\ddot{f}_i(t) +$$

$$+ 2\varepsilon \dot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t)] \sum_j \sum_g I_{jg} Z_{gi} Z_{ji} + \ldots = -\sum_j (\ddot{\bar{U}}_0(t) \cdot \bar{v}_j) Z_{ji} . \tag{26}$$

Conform relaţiei (6) sumele de forma $\sum_j \sum_g I_{jg} Z_{ji} Z_{gh}$ $(i \neq h)$ sînt nule astfel încît (26) rămîne sub forma

$$\ddot{f}_i(t) + 2\varepsilon \dot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t) = -\frac{\sum_j (\ddot{\bar{U}}_0(t)\, \bar{v}_j) Z_{ji}}{\sum_j \sum_g I_{jg} Z_{gi} Z_{ji}} . \tag{27}$$

Numărătorul se poate scrie mai concis folosind (15) şi (1)

$$\sum_j (\ddot{\bar{U}}_0(t) \cdot \bar{v}_j) Z_{ji} = \sum_j \left[\ddot{\bar{U}}_0(t) \sum_k m_k \bar{r}_{kj} \right] \cdot Z_{ji} = \ddot{\bar{U}}_0(t) \sum_k m_k \sum_j \bar{r}_{kj} Z_{ji} =$$

$$= \ddot{\bar{U}}_0(t) \sum_k m_k \bar{r}_{ki} . \tag{28}$$

Numitorul este deja condensat în trecerea de la (6) la (7) pentru $i = h$ (pentru care expresiile (6) şi (7) nu sînt nule)

$$\sum_j \sum_g I_{jg} Z_{gi} Z_{ji} = \sum_{k=a}^{l} m_k \bar{r}_{ki}^2 . \tag{29}$$

În final (27) se scrie :

$$\ddot{f}_i(t) + 2\varepsilon \dot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t) = -\ddot{\bar{U}}_0(t) \cdot \frac{\sum_k m_k \bar{r}_{ki}}{\sum_k m_k \bar{r}_{ki}^2} . \tag{30}$$

Dacă introducem pentru necesităţi practice versorul $\bar{s}$ de direcţia mişcării seismice şi notăm

$$\frac{\sum_k m_k (\bar{s} \cdot \bar{r}_{ki})}{\sum_k m_k \bar{r}_{ki}^2} = C_{is} , \tag{31}$$

atunci ecuaţia (30) se scrie

$$\ddot{f}_i(t) + 2\varepsilon \dot{f}_i(t) + \omega_i^2 f_i(t) = -\ddot{\bar{U}}_0(t) \cdot C_{is} . \tag{32}$$

Analog cu rezolvarea în cazul cadrelor etajate (vezi [1]) soluția ecuației (32) este

$$f_i(t) = -\frac{1}{\omega_i} C_{is} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau) \cdot e^{-\varepsilon(t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t - \tau) \, d\tau . \tag{33}$$

Să introducem notația

$$\int_0^t \ddot{U}_0(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \cdot \sin \omega_i (t - \tau) \, d\tau = D_u(t) . \tag{34}$$

Deci

$$f_i(t) - \frac{C_{is}}{\omega_i} D_u(t). \tag{35}$$

Știind că pentru o funcție $I(t) = \int_0^t f(t, \tau) \, d\tau$

derivata sa este $\frac{dI}{dt} = f(t, t) + \int_0^t \frac{d f(t, \tau)}{dt} d\tau$,

vom obține neglijînd termenii care au în factor pe ε

$$\begin{aligned} \dot{f}_i(t) &= - C_{is} \int_0^t \ddot{U}_0(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \cos \omega_i (t - \tau) \, d\tau, \\ \dot{f}_i(t) &= - C_{is} \ddot{U}_0(t) + \omega_i C_{is} D_u(t) . \end{aligned} \tag{36}$$

Să determinăm acum forțele de inerție care se nasc în timpul cutremurului pentru o masă oarecare m_k .

Pornim de la (10) și (20)

$$\overline{F}_k = - m_k \ddot{\overline{U}}_0(t) - m_k \sum_q \overline{r}_{kq} \sum_i \ddot{f}_i(t) Z_{qi}$$

sau

$$\overline{F}_k = - m_k \ddot{\overline{U}}_0(t) - m_k \sum_i \ddot{f}_i(t) \sum_q \overline{r}_{kq} Z_{qi} .$$

Avînd în vedere relațiile (1) putem scrie

$$\overline{F}_k = - m_k \ddot{\overline{U}}_0(t) - m_k \sum_i \ddot{f}_i(t) \overline{r}_{ki} . \tag{37}$$

Relațiile (37) și (36) ne dau

$$\overline{F}_k = - m_k \ddot{\overline{U}}_0(t) - m_k \sum_i [- C_{is} \ddot{U}_0(t) + \omega_i C_{is} D_u(t)] \overline{r}_{ki}$$

sau :

$$\overline{F}_k = m_k \left[\sum_i C_{is} \ddot{U}_0(t) \overline{r}_{ki} - \ddot{\overline{U}}_0(t) \right] - m_k \sum_i \omega_i C_{is} D_u(t) \overline{r}_{ki} . \tag{38}$$

În cazurile studiate curent de cadre etajate forțele de inerție se exprimă numai în funcție de integrala Duhamel $D_u(t)$.

Acest lucru ne sugerează faptul că primul termen din (38) care ex-

primă o cotă parte a forței seismice corespunzătoare masei k se bucură de o anumită particularitate (în cazul cadrelor etajate el fiind nul). În cazul cadrelor de formă oarecare acest termen nu poate fi nul întrucît el se compune din suma a doi vectori în general de direcții diferite care nu poate fi nulă. Examinînd însă ansamblul forțelor reprezentate de pri-

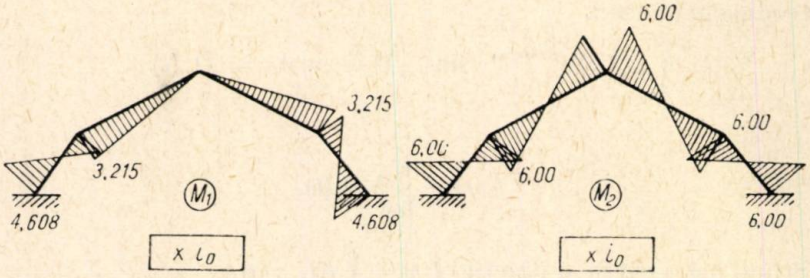


Fig. 4

mul termen din relația (38) care acționează pe toată structura ajungem la o concluzie interesantă și anume : întrucît în primul termen al relației (38) apare direct $\ddot{U}_0(t)$ iar în al doilea termen accelerația seismică apare indirect prin intermediul integralei (34) $D_u(t)$ ceea ce exprimă o modificare a accelerației datorită flexibilității structurii, putem bănui că structura se comportă față de forțele reprezentate de primul termen cu un element rigid, indeformabil, iar față de forțele reprezentate de cel de-al doilea termen ca un element elastic.

Într-adevăr pentru forțele reprezentate de primul termen vom nota

$$\overline{F}'_k = m_k \left[\sum_i C_{is} \ddot{U}_0(t) \overline{r}_{ki} - \overline{\ddot{U}}_0(t) \right] \tag{39}$$

și vom denumi aceste forțe, forțe suplimentare.

Să considerăm cadrul încărcat la noduri cu aceste forțe F'_k. Pentru a cerceta influența forțelor asupra cadrului (în speță a vedea diagrama de momente) să utilizăm metoda deplasărilor fixîndu-ne ca necunoscute

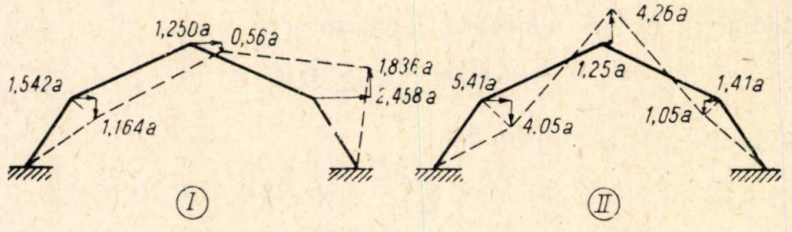


Fig. 5

numai gradele de libertate. Se știe că alegerea necunoscutelor este o operație arbitrară cu condiția ca acestea să fie liniar independente. Or, acest lucru se poate realiza fie alegînd un număr de n parametri arbitrari dar liniari independenți, fie alegîndu-ne chiar formele proprii de oscilație (acestea fiind prin însăși natura lor distincte).

Aplicînd principiul deplasărilor virtuale vom alcătui un sistem de ecuații (necunoscute fiind valorile parametrilor Z — grade de libertate). Dacă exprimăm „echilibrul" cu ajutorul formei proprii de oscilație h în maniera aplicării principiului deplasării virtuale obținem

$$L_h = Z_1 L_{h1} + Z_2 L_{h2} + \ldots + L_h(F') = 0. \tag{40}$$

Lucrul mecanic corespunzător masei m_k este (vezi și (39))

$$L_h(F'_k) = \bar{r}_{kh}\, m_k \left[\sum_i C_{is}\, \ddot{U}_0(t)\, \bar{r}_{ki} - \ddot{\bar{U}}_0(t)\right], \tag{41}$$

iar lucrul mecanic al tuturor forțelor de pe sistem determinate de gradul de libertate h

$$L_h(F')_{,} = \sum_k \bar{r}_{kh}\, m_k \left[\sum_i C_{is}\, \ddot{U}_0(t)\, \bar{r}_{ki} - \ddot{\bar{U}}_0(t)\right]. \tag{42}$$

Primul termen din (42) este

$$A = \ddot{U}_0(t) \cdot \sum_k m_k \bar{r}_{kh} \sum_i C_{is}\, \bar{r}_{ki} = \ddot{U}_0(t) \sum_i C_{is} \sum_k m_k\, \bar{r}_{kh} \cdot \bar{r}_{ki}.$$

Dar

$\sum_k m_k\, \bar{r}_{kh}\, \bar{r}_{ki} = 0$ pentru $i \neq h$ conform relației (7) deci din $\sum_i$ nu rămîne decît un singur termen ($i = h$).

Folosind deci, și (31):

$$A_h = \ddot{U}_0(t)\, C_{is} \sum_k m_k\, r_{kh}^2 = \ddot{U}_0(t)\, \frac{\sum_k m_k\, (\bar{s} \cdot \bar{r}_{kh})}{\sum_k m_k\, r_{kh}^2} \sum_k m_k\, r_{kh}^2$$

sau: $A_h = \ddot{U}_0(t) \sum_k m_k\, (\bar{s} \cdot \bar{r}_{kh})$.

Al doilea termen din (42) este

$$B_h = -\sum_k \bar{r}_{kh}\, m_k\, \ddot{\bar{U}}_0(t) = -\ddot{U}_0(t) \sum_k m_k\, (\bar{r}_{kh} \cdot \bar{s}).$$

Se constată deci că

$$L_h(F') = A_h + B_h = 0. \tag{43}$$

Repetînd de n ori procedeul (h = I, II, ..., i, h, ..., n) vom obține analog:

$$L_I(F') = L_{II}(F') = \ldots = L_n(F') = 0,$$

deci: $Z_1 = Z_2 = \ldots = Z_n = 0$.

În concluzie sub acțiunea acestor forțe nu avem deformații, deci structura se comportă ca un rigid. Forțele F'_k constituie deci un sistem pentru care configurația cadrului este curba lor de presiune. Dacă aplicăm tot ce am spus în cazul unei console verticale sau cadru etajat, observăm că în relația (39) $\bar{r}_{ki}$ și $\ddot{\bar{U}}_0(t)$ fiind vectori paraleli, orizontali, rezultă că F'_k este orizontal. Pe de altă parte forțele F'_k trebuie să constituie un sistem

a cărui curbă de presiune să fie însăși structura ceea ce în cazul nostru e imposibil. Rezultă că paranteza e nulă :

$$\sum_i C_{is} \ddot{U}_0(t) r_{ki} - \ddot{U}_0(t) = 0$$

sau :

$$\sum_i \frac{\sum_\rho m_\rho r_{\rho i}}{\sum_\rho m_\rho r_{\rho i}^2} r_{ki} = 1. \tag{44}$$

Pentru relația (44) vezi și [2].

La această relație se poate ajunge și direct, analog cu precedentele, arătînd că lucrul mecanic printr-un grad de libertate oarecare este nul. Or acest grad de libertate poate fi exprimat ca o combinație liniară a formelor proprii de oscilație.

Am demonstrat că prima parte a expresiei (38) nu produce deformări ale structurii. Înseamnă că pentru calculul momentelor încovoietoare trebuie să considerăm numai membrul al doilea din (38) pe care să o prelucrăm după normativele românești [7].

Funcția $D_u(t)$ definită în (34) intervine în calculele construcțiilor etajate, obișnuite. În aceste cazuri se lucrează curent cu așa-numitul spectru al vitezelor. După cum se știe se reține numai maximul acestei funcții (34) indiferent de timpul la care s-ar produce, rezultatul fiind o funcție

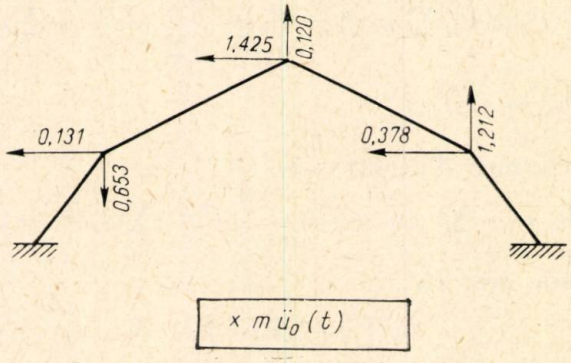


Fig. 6

de ω_i sau, ceea ce este egal, de $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$ (perioada). Am obținut astfel spectrul vitezelor corespunzător seismului respectiv. Dacă schimbăm caracteristicile seismului ($U_0(t)$) și considerăm o medie a unui număr suficient de mare de caracteristici $U_0(t)$ dintr-o regiune obținem spectrul mediu al vitezelor pentru regiunea respectivă.

Se știe iarăși că se pot obține spectre seismice pentru accelerație și deplasare legate de precedentul ca mai jos (cu aceasta vom introduce și notațiile).

$$S_v = \max |D_u(t)| = f(T_i) \quad \text{spectrul vitezelor,}$$

$$S_d = \frac{1}{\omega_i} S_v \quad \text{spectrul deplasărilor,} \tag{45}$$

$$S_a = \omega_i S_v \quad \text{spectrul acceleraţiilor.}$$

Considerînd deci termenul al doilea din (38) vom nota (folosind şi (45))

$$\overline{S}_k = - m_k \sum_i \omega_i C_{is} D_u(t) \cdot \overline{r}_{ki} = - m_k \sum_i C_{is} \cdot S_a \overline{r}_{ki}. \tag{46}$$

Relaţia (46) se mai poate pune, neglijînd semnul, sub forma din normativele româneşti:

$$\overline{S}_k = m_k \cdot k_s \cdot g \cdot \sum_i \frac{S_a}{k_s \cdot g} \cdot C_{is} \cdot \overline{r}_{ki} = k_s \sum_i \beta_i \overline{\eta}_{ki} Q_k, \tag{47}$$

unde

k_s este intensitatea cutremurului exprimată prin raportul între acceleraţia lui şi acceleraţia gravităţii;

$\beta_i = \dfrac{S_a}{k_s g} = f(T_i)$ — coeficientul care ţine seama de caracteristicile structurii prin perioada şi care marchează în ce mod „prelucrează" structura acceleraţia seismică.

$\overline{\eta}_{ki} = C_{is} \cdot \overline{r}_{ki} = \dfrac{\sum_\rho m_\rho (\overline{s} \cdot \overline{r}_{\rho i})}{\sum_\rho m_\rho r_{\rho i}^2} \overline{r}_{ki}$ — un vector care ţine seama de raportul dintre direcţia cutremurului şi mişcarea posibilă a masei m_k. El este un vector cu direcţia $\overline{r}_{ki}$ şi dă direcţia lui $\overline{S}_k$. Acest vector poate fi interpretat ca fiind elementul ce crează echivalenţa cu pendulul cu o singură masă.

$Q_k = m_k g$ — sarcina gravitaţională a masei m_k.

După cum se vede principalele caracteristici ale calculului cadrelor de forma oarecare (de care ne ocupăm în această lucrare) sînt:

1. Apariţia forţelor de nod F' (pe care le-am denumit suplimentare) care aduc numai forţe axiale fără a provoca deformări transversale în bare şi deci nici momente încovoietoare; intensitatea acestor forţe F' şi deci a forţelor axiale corespunzătoare este direct proporţională cu $\ddot{U}_0(t)$.

2. Expresia specifică a forţelor seismice (47) în care este pus în evidenţă caracterul vectorial prin coeficientul $\overline{\eta}_{ki}$, care indică şi direcţia forţei seismice, expresia fiind astfel organizată încît să aibă o structură similară cu aceea din cazul cadrelor etajate.

3. Calculul nu face nici o restricţie cu privire la direcţia cutremurului (acceptat, în general, ca o mişcare forţată, simultană a tuturor legăturilor în aceeaşi direcţie $\overline{s}$); rezultatele sînt deci aplicabile şi pentru mişcarea verticală a scoarţei terestre.

4. Pentru determinarea forțelor seismice suplimentare F' rezultă că este necesară determinarea unor valori de calcul medii a accelerației efective $\ddot{U}_0(t)$ care intervin direct în expresia acestor forțe.

5. Pentru cazul determinării solicitărilor seismice provenind dintr-o

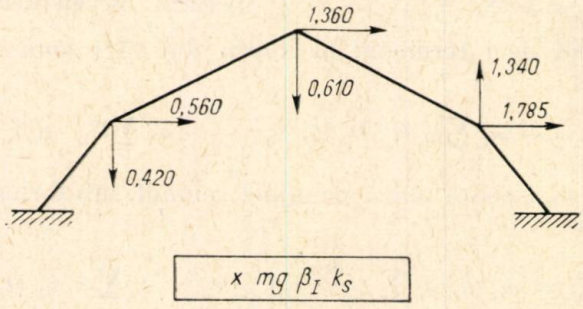


Fig. 7

mișcare verticală a scoarței pământești apare necesară studierea unor spectre corespunzătoare, specifice pentru deplasarea pe verticală, în mod analog cu cele studiate pentru deplasarea pe orizontală.

EXEMPLIFICARE

Se cere determinarea solicitărilor seismice pentru structura din figura 2. Masele nu au o dispoziție simetrică.

REZOLVARE

a) Alegerea necunoscutelor și deplasările $\bar{r}_{kj}$ sînt date în figura 3.

b) Calculul elementelor I_{gj}

$$I_{11} = m(2{,}5a)^2 + 3m(1{,}25a)^2 + 2m(2{,}5a)^2 = 23{,}445\ ma^2,$$

$$I_{12} = m(2{,}5a)^2 + 3m.0 - 2m(2{,}5a)^2 = -6{,}25\ ma^2,$$

$$I_{22} = m(2{,}5a)^2 + 3m(2{,}5a)^2 + 2m(2{,}5a)^2 = 37{,}50\ ma^2.$$

c) Calculul elementelor L_{gj}

Pentru calculul elementelor L_{gj} se determină în prealabil diagramele de momente din $Z_1 = 1$ și $Z_2 = 1$. Diagramele sînt trecute în figura 4.

$$L_{11} = [-2(4{,}608 + 3{,}215)\cdot 1 - 2(-3{,}215)(-0{,}375)]i_0 = -18{,}056\ i_0.$$

$$L_{12} = 0,$$

$$L_{22} = [-2(6{,}00 + 6{,}00)\cdot 1 - 2(-6-6)(-1)]i_0 = -48\ i_0.$$

d) Ecuația frecvențelor

$$\begin{vmatrix} -18{,}056 + 23{,}445\ \lambda & -6{,}25\ \lambda \\ -6{,}25\ \lambda & -48 + 37{,}5\ \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sau

$$842\,\lambda^2 - 1805\,\lambda + 868 = 0,$$

unde

$$\lambda = \frac{ma^2}{i_0}\,\omega^2.$$

Rădăcinile sînt :

$$\lambda_I = 0{,}733 \qquad \text{deci } \omega_I = 0{,}855\sqrt{\frac{EI}{ma^3}},$$

$$\lambda_{II} = 1{,}412 \qquad \text{deci } \omega_{II} = 1{,}190\sqrt{\frac{EI}{ma^3}}.$$

e) Formele proprii de oscilație (exprimate în coeficientul a_{gi})

Forma I

Grad de libertate	Masa și direcția	a		b		c	
		x	y	x	y	x	y
$a_{1I} = 1$		2a	1,5a	1,25 a	0	2a	−1,5a
$a_{2I} = -0{,}224$		−0,458a	−0,336a	0	0,56a	0,458a	−0,336a
Total		1,542a	1,164a	1,25a	0,56a	2,458a	−1,836a

Forma II

Grad de libertate	Masa și direcția	a		b		c	
		x	y	x	y	x	y
$a_{1II} = 1$		2a	1,5a	1,25a	0	2a	−1,5a
$a_{2II} = 1{,}702$		3,41a	2,55a	0	−4,26a	−3,41a	2,55a
Total		5,41 a	4,05a	1,25a	−4,26a	−1,41a	1,05a

Reprezentarea formelor proprii (schematic) este dată în figura 5.

f) Determinarea forțelor seismice suplimentare F'_k (conform expresiei 39)

Coeficienții C_{is} (31)

$$C_{I_8} = \frac{m\ (1{,}542a + 3m\ (1{,}25a) + 2m\ (2{,}458a)}{m\ [(1{,}542a)^2 + (1{,}164a)^2] + 3m\ [(1{,}25a)^2 + (0{,}56a)^2] + 2m[(2{,}458a)^2 + [(1836a)^2] = 0{,}363a^{-1}},$$

$$C_{II_8} = \frac{m\ 5{,}41a + 3m\ 1{,}25a + 2m\ (-1{,}41a)}{m\ [(5{,}410a)^2 + (4{,}05a)^2] + 3m\ [(1{,}25a)^2 + (4{,}23a)^2] + 2m\ [(1{,}41a)^2 + (1{,}05a)^2] = 0{,}0572a^{-1}}$$

$$F'_{ah} = m \cdot \ddot{U}_0(t)\ [0{,}363 \cdot 1{,}542 + 0{,}0572 \cdot 5{,}41 - 1] = -0{,}131\ m\ \ddot{U}_0(t),$$

$$F'_{av} = m \cdot \ddot{U}_0(t)\ [0{,}363 . 1{,}164 + 0{,}0572 \cdot 4{,}05] = 0{,}653\ m\ \ddot{U}_0(t),$$

$$F'_{bh} = 3m\ \ddot{U}_0(t)\ [0{,}363 \cdot 1{,}25 + 0{,}0572 \cdot 1{,}25 - 1] = -1{,}425\ m\ \ddot{U}_0(t),$$

$$F'_{bv} = 3m\ \ddot{U}_0(t)\ [0{,}363 \cdot 0{,}56 + 0{,}0572\ (-4{,}26)] = -0{,}120\ m\ \ddot{U}_0(t),$$

$$F'_{ch} = 2m\ \ddot{U}_0(t)\ [0{,}363 \cdot 2{,}458 + 0{,}0572\ (-1{,}41) - 1] = -0{,}378\ m\ddot{U}_0(t),$$

$$F'_{cv} = 2m\ \ddot{U}_0(t)\ [0{,}363\ (-1{,}836) + 0{,}0572\ (1{,}05)] = -1{,}212\ m\ \ddot{U}_0(t).$$

Reprezentarea forțelor de inerție este dată în figura 6. Verificarea relațiilor (43). Pentru a arăta că structura nu se deformează sub influența forțelor suplimentare F' considerăm arcul cu trei articulații (în d, b și e). Pentru structura static determinată constatăm că dacă trasăm curba de presiune ea coincide perfect cu arcul.

Într-adevăr se poate calcula ușor

$$V_d = 0{,}950\ m\ \ddot{U}_0(t),$$

$$H_d = 0{,}718\ m\ \ddot{U}_0(t),$$

$$V_e = -1{,}628\ m\ \ddot{U}_0(t),$$

$$H_e = -1{,}212\ m\ \ddot{U}_0(t).$$

Reprezentarea grafică a forțelor care solicită structura este dată în figura 8 unde se constată și grafic coincidența curbei de presiune cu axa arcului. Menționăm, așa cum am mai remarcat, că pentru cunoașterea stării de solicitare completă (inclusiv forțele axiale) trebuie să cunoaș-

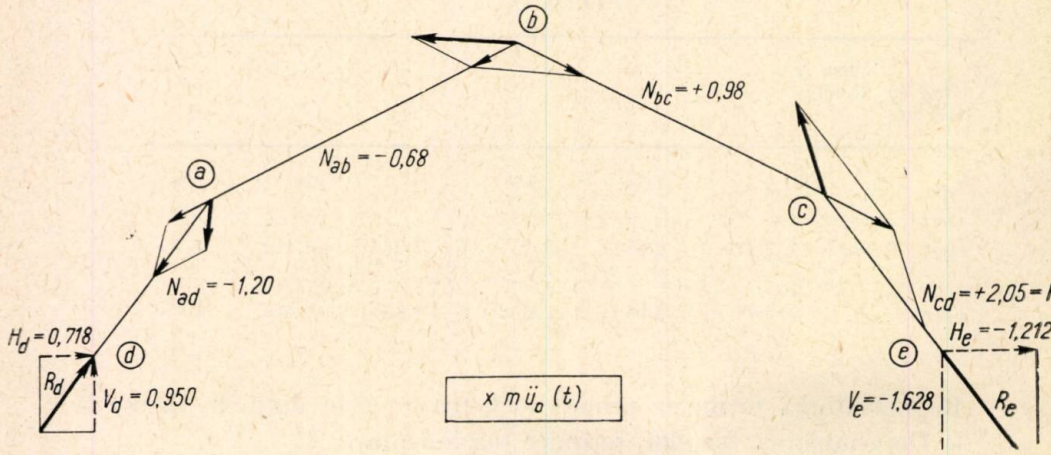


Fig. 8

tem $\ddot{U}_0(t)$. Tot în figura 8 sînt trecute valorile forțelor axiale pe diversele porțiuni ale arcului.

Existența forțelor de inerție suplimentare F'_k trebuie pusă în legătură cu faptul că barele de legătură cu terenul nu sînt perpendiculare pe direcția cutremurului caracterizată de versorul $\bar{s}$. În cazul cînd aceste bare de legătură sînt perpendiculare pe direcția de acționare a mișcării seismice, forțele suplimentare sînt nule [6].

g) Determinarea forțelor seismice S_k.

Analog cu calculele precedente, folosind relațiile (47) vom obține forțele seismice corespunzătoare formei I prin componentele pe orizontală și verticală

$$S^I_{ah} = 0{,}363 \cdot 1{,}542\, mg\, \beta_I\, k_s = 0{,}56\, mg\, \beta_I\, k_s,$$

$$S^I_{av} = 0{,}363 \cdot 1 \cdot 164\, mg\, \beta_I\, k_s = 0{,}424\, mg\, \beta_I\, k_s,$$

$$S^I_{bh} = 3 \cdot 1{,}25 \cdot 0{,}363\, \text{mg}\, \beta_I\, k_s = 1{,}36\, mg\, \beta_I\, k_s,$$

$$S^I_{bv} = 3 \cdot 0{,}56 \cdot 0{,}363\, mg\, \beta_I\, k_s = 0{,}61\, mg\, \beta_I\, k_s,$$

$$S^I_{ch} = 2 \cdot 2{,}458 \cdot 0{,}363\, mg\, \beta_I\, k_s = 1{,}785\, mg\, \beta_I\, k_s,$$

$$S^I_{cv} = 2 \cdot (-1{,}836) \cdot 0{,}363\, mg\, \beta_I\, k_s = -1{,}340\, mg\, \beta_I\, k_s.$$

Forțele de inerție din forma I sînt trecute în figura 7.

Analog se calculează și forțele de inerție din forma II. Sensul forțelor seismice nu trebuie considerat în legătură cu cel din figura 6 al forțelor suplimentare, deoarece pe parcursul studiului am neglijat semnul și am introdus valorile absolute ale caracteristicii de mișcare a terenului. Evident, între aceste două categorii de forță există însă o corelație de sens, care s-ar fi evidențiat dacă nu am fi făcut abstracție de semn. Corelația de sens poate fi însă ușor restabilită prin examinarea directă a acțiunii fizice a mișcării seismice asupra structurii respective.

Primită la redacție la 24 mai 1967

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Beleș, D. M. Ifrim, *Elemente de seismologie inginerească*, București, 1962.
2. I. L. Korcinski ș.a., *Bazele proiectării clădirilor în regiuni seismice*, București, 1960.
3. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. II, București, 1959.
4. N. Țopa, *Cu privire la determinarea oscilațiilor proprii ale cadrelor avînd bare înclinate, cu mase concentrate la noduri*, St. cerc. mec. apl., **15**, *1* (1964).
5. — *Determinarea oscilațiilor forțate la cadrele de formă oarecare avînd masele concentrate la noduri*, St. cerc. mec. apl. **15**, *2* (1964).
6. — *Contribuții la generalizarea metodei deplasărilor pentru studiul oscilațiilor cadrelor plane de formă oarecare cu aplicații la calculul solicitărilor seismice*, (Institutul de Construcții București, 1965). Teză de doctorat.
7. * * * *Normativ condiționat P13—63 pentru proiectarea construcțiilor civile și industriale din regiuni seismice.*

OPTIMIZAREA LEGILOR DE FUNCȚIONARE ALE MECANISMELOR DE DISTRIBUȚIE

de CHR. PELECUDI, I. SAVA și A. MATHEESCU
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531.1

Lucrarea se referă la sinteza mișcării tachetului de la mecanismele cu came, ținînd seama de condițiile de continuitate, de optimizarea cronosecțiunii și de limitarea valorilor maxime ale vitezei, accelerației și supraaccelerației.

1. **Introducere.** Funcționarea camelor de la mecanismele de distribuție cu supape ale motoarelor este supusă, din punct de vedere cinematic, unor restricții puțin severe. Aceste mecanisme fac parte din categoria acelora care trebuie să realizeze numai o anumită deplasare a elementului condus — tachet — față de o anumită deplasare a elementului conducător — cama—. Perioadele active de lucru, respectiv, ridicarea sau coborîrea tachetului, sînt despărțite prin perioadele pasive de repaus. Forma generală de funcționare cuprinde deci perioadele de $PRPCP$ la care poate lipsi pauza superioară rămînînd $PRCP$. Reducînd problema numai la cursa activă, legea de mișcare corespunde unei sinteze bazată pe prescrierea unor valori numai în punctele de început și de sfîrșit ale cursei. Între aceste puncte extreme s-ar putea utiliza pentru funcționare orice lege de mișcare.

Din punct de vedere dinamic, pentru reducerea forțelor de inerție sau a șocurilor care apar în mecanismul de distribuție în special la capetele de intrare sau ieșire dintr-una din perioadele active, trebuie să se realizeze o racordare cît mai lină prin respectarea continuității deplasării, vitezei, accelerației și supraaccelerației. Practic se urmărește deci continuitatea funcției și a primelor trei derivate y, y', y'', y''', dar o funcționare mai liniștită cere continuitate și a derivatelor superioare.

De asemenea, chiar pe intervalul activ se impune ca deplasarea să fie mereu crescătoare și deci viteza pozitivă și totodată viteza, accelerația și supraaccelerația să fie limitate. Se cunosc pentru utilitatea lor legi de mișcare simetrice sau asimetrice, iar după forma mișcării, cursa totală a tachetului este împărțită în sectoarele de accelerare și decelerare, completate uneori între ele cu sectorul de mișcare uniformă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 3, P. 617–643, BUCUREȘTI, 1968

Desigur, la viteze ridicate, elasticitatea elementelor mecanismului de distribuție începe să se manifeste prin modificarea valorilor parametrilor cinematici, reducîndu-i sau amplificîndu-i în raport cu impedanța mecanică a modelului respectiv, ceea ce poate conduce la valori necorespunzătoare ale forței de inerție sau șocurilor. Din punct de vedere funcțional se urmărește să se obțină valoarea maximă a cronosecțiunei care este integrala deplasării, pe intervalul de lucru. Aceasta corespunde unei optimizări a capacității de trecere a gazelor în regiunea supapelor. În același fel s-ar putea pune problema ca uzura care se pare că este influențată de valorile mari ale șocului (supraacceleratiei) să rămînă în timp în limitele admisibile și să nu influențeze în rău caracteristicile legilor respective.

2. **Formularea problemei.** În cele ce urmează se utilizează pentru parametrii cinematici variabile adimensionale definite astfel:

$$\Sigma = \int_0^t s\,dt = \sigma_0 \int_0^x y\,dx; \quad s(t) = s_0\, y(x), \tag{1}$$

$$v = \dot{s} = v_0\, y'; \quad a = \ddot{s} = a_0\, y''; \quad \alpha = \dddot{s} = \alpha_0\, y'''$$

în care constantele dimensionale de proporționalitate sînt

$$\sigma_0 = s_0 t_0 = \frac{s_0 \varphi_0}{\omega}; \quad v_0 = \frac{s_0}{t_0} = \frac{s_0}{\varphi_0}\,\omega,$$

$$a_0 = \frac{s_0}{t_0^2} = \frac{s_0}{\varphi_0^2}\,\omega^2; \quad \alpha_0 = \frac{s_0}{t_0^3} = \frac{s_0}{\varphi_0^3}\,\omega^3. \tag{2}$$

S-a notat prin s_0 = cursa totală a tachetului, φ_0 = deplasarea activă a camei și t_0 = timpul perioadei active de ridicare sau de coborîre. În ipoteza mișcării uniforme a camei, viteza unghiulară constantă și variabila adimensională independentă sînt:

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{\varphi_0}{t_0}; \quad x = \frac{t}{t_0} = \frac{\varphi}{\varphi_0}. \tag{3}$$

Cu aceste indicații, problema prezentei lucrări constă în determinarea legii de mișcare $y(x)$ astfel ca valoarea cronosecțiunii totale

$$\sigma = \int_0^1 y\,dx \tag{4}$$

să fie maximă, dar respectînd condițiile următoare:

— la capetele intervalului

$$x = 0; \; y = 0; \; y_0' = 0 \ldots = y_0^{(p)} = 0, \tag{5}$$

$$x = 1; \; y_1 = 1; \; y_1' = \ldots = y_1^{(p)} = 0,$$

— pe intervalul

$$0 - 1 \qquad 0 < y < 1$$

$$0 < y' < v; \quad -a < y'' < a; \quad -\alpha < y''' < \alpha. \tag{6}$$

Unele soluţii exacte sau aproximative sînt cunoscute din literatura de specialitate, altele sînt introduse prin această lucrare, dar împreună sînt redate într-o sistematizare nouă. S-au urmărit rezolvările cele mai simple avînd în vedere optimizarea cronosecţiunii.

3. **Rezolvare.** Un mod de rezolvare constă în determinarea funcţiilor generale care respectă condiţiile la capete dimpreună cu caracteristicile lor importante. Ele se pot sistematiza în tabele şi în raport cu proprietăţile lor se pot alege la proiectare legile convenabile. Se poate considera soluţia generală

$$Y(x) = y(x) + \overline{y}(x), \tag{7}$$

în care $y(x)$ respectă condiţiile (6) şi are forma

$$y(x) = \int_0^x \xi^p (1-\xi)^p Q_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi \text{ cu } y(1) = 1, \tag{8}$$

iar funcţia suplimentară $\overline{y}(x)$ este

$$\overline{y}(x) = x^{p+1}\ (1-x)^{p+1}\ R_0(x) \tag{9}$$

îndeplineşte condiţiile omogene la capetele perioadei active.
Funcţiile Q şi R sînt arbitrare şi modifică, după alegere, caracteristicile legilor de mişcare.

3.1. Utilizînd numai funcţia $y(x)$ derivatele acesteia se pot pune sub forma

$$y^{(s)}(x) = x^{p-s+1}\cdot(1-x)^{p-s+1}\cdot Q_s(x), \tag{10}$$

unde funcţiile succesive $Q_s(x)$ sînt legate prin relaţia de recurenţă

$$Q_{s+1}(x) = (p-s+1)(1-2x)Q_s(x) + x(1-x)\,Q_s'(x), \tag{11}$$

iar $Q_1(x) > 0$ este pozitivă în intervalul $0-1$.

Aceste funcţiuni sînt întrebuinţate la determinarea valorilor maxime ale vitezei, acceleraţiei şi supraacceleraţiei. Dacă se notează prin x_0 abscisa în care $Q_{s+1}(x_0) = 0$ se anulează, rezultă valoarea maximă

$$\max y^{(s)}(x_0) = -\frac{[x_0(1-x_0)]^{p-s+2}}{1-2x_0}\cdot\frac{Q_s'(x_0)}{p-s+1}. \tag{12}$$

Cele mai simple legi sînt cele simetrice la care $Q_1(\xi) = K$ este o constantă şi se determină din condiţia $y_1(1) = 1$ adică

$$K\int_0^1 \xi^p (1-\xi)^p\,\mathrm{d}\xi = 1$$

şi deci

$$K(p) = \frac{1}{\sum_{\lambda=0}^{p}\frac{(-1)^\lambda C_p^\lambda}{\lambda+p+1}}, \tag{13}$$

respectiv

$$K_1 = 6\,;\ K_2 = 30\,;\ K_3 = 140\,;\ K_4 = 630.$$

Rezultă

$$y = K \sum_{\lambda=0}^{p} \frac{(-1)^\lambda C_p^\lambda x^{\lambda+p+1}}{\lambda + p + 1},$$

$$y' = K \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda C_p^\lambda x^{\lambda+p} = Kx^p (1-x)^p,$$

$$y'' = K \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda C_p^\lambda (\lambda + p) x^{\lambda+p-1} = pKx^{p-1} \cdot (1-x)^{p-1} \cdot (1-2x),$$

$$y''' = K \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda C_p^\lambda (\lambda + p)(\lambda + p - 1) x^{\lambda+p-2} = \tag{14}$$

$$= K_p x^{p-2} \cdot (1-x)^{p-2} \cdot [(p-1) - 2(2p-1)x + 2(2p-1)x^2],$$

$$y'' = K \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^\lambda C_p^\lambda (\lambda + p)(\lambda + p - 1)(\lambda + p - 2) x^{\lambda+p-3} =$$

$$= Kp(p-1) x^{p-3} \cdot (1-x)^{p-3} \cdot [(p-2) -$$

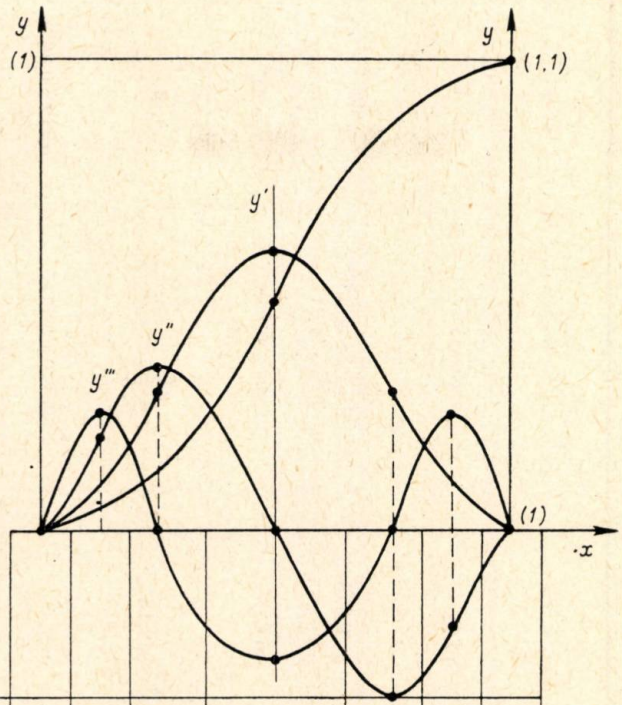
$$- 2(2p-1)x + 2(2p-1)x^2] (1-2x).$$

Diagramele și valorile maxime ale parametrilor cinematici sînt redate în figura 1 și tabela 1.

Toate aceste legi au aceeași cronosecțiune $\sigma = 0{,}5$, deoarece sînt legi simetrice. Viteza este maximă în centrul intervalului (0,5) și crește odată cu ordinul racordării (p). În același fel crește și accelerația maximă și se apropie totodată de centrul intervalului. Deci o racordare superioară înrăutățește valorile vitezei și accelerației (cresc) fără să aibă influență asupra cronosecțiunei. Tabloul legilor cu șocuri slabe $p = 1$ cuprinde pe lîngă legea polinominală 2—3 și legile cosinusoidală, trapezoidală (dreptunghică) și dreptunghiulară (parabolică) care au expresii simple și sînt ușor de utilizat în proiectare. La acestea (tab. 3) vitezele maxime cresc iar accelerațiile maxime scad de la legea 2—3 spre legea dreptunghiulară. Supraaccelerațiile sînt infinite.

În același fel tabelul legilor fără șocuri $p = 2$ (tab. 4) cuprinde legea 3—4—5 și legile sinusoidală, trapezoidală (isoscelă) și triunghiulară (isoscelă). Vitezele maxime sînt aproape de aceeași valoare, iar accelerațiile maxime scad și supraaccelerațiile maxime cresc de la legea triunghiulară spre legea 3—4—5. Se verifică și în aceste tabele că vitezele și accelerațiile sînt mai mari la legile fără șocuri $p = 2$ decît la cele cu șocuri $p = 1$.

3.2. Modificarea valorilor maxime se poate face prin transformarea acestor legi de la formele simetrice la formele asimetrice. Considerînd coeficientul de asimetrie $k = \dfrac{1-u}{u} > 1$, raportul între durata sectorului de decelare față de sectorul de accelerare, legea de mișcare este formată



x	0	$0,5-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2p-1}}$	$0,5-\frac{1}{2\sqrt{2p-1}}$	$0,5$	$0,5+\frac{1}{2\sqrt{2p-1}}$	$0,5+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2p-1}}$	1
y'	0		$\frac{k(p)}{2^{2p}}\left[\frac{p-1}{2(2p-1)}\right]^{(p-1)}$		$\frac{k(p)}{2^{2p}}\left[\frac{p-1}{2(2p-1)}\right]^{(p-1)}$		0
y''	0	$-\frac{pk}{\sqrt{2p-1}}\left[\frac{p-1}{2(2p-1)}\right]^{(p-2)}$		0		$-\frac{pk}{\sqrt{2p-1}}\left[\frac{p-1}{2(2p-1)}\right]^{(p-2)}$	0
y'''	0	$pk\left[\frac{p-2}{2(2p-1)}\right]^{(p-2)}$	0	$-\frac{pk(p)}{2^{(2p-3)}}$	0	$pk\left[\frac{p-2}{2(2p-1)}\right]^{(p-2)}$	0
y^{IV}		0		0		0	

Fig. 1

Tabela 1

Legi de mişcare simetrice polinomiale $\sigma = 0{,}5$

	Legea	v max.	a max.	α max.	
$p = 1$	$3x^2 - 2x^3$	1,5 (0,5)	± 6 (0 ; 1)	$+\infty$ (0 ; 1)	-12 $(0 \div 1)$
$p = 2$	$10x^3 - 15x^4 + 6x^5$	$\frac{15}{8} = 1{,}875$ (0,5)	$\pm \frac{10}{\sqrt{3}} = \pm 5{,}777$ (0,211 ; 0,789)	$+60$ (0 ; 1)	-30 (0,5)
$p = 3$	$35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7$	$\frac{35}{16} = 2{,}187$ 0,5	$\pm \frac{84}{5\sqrt{5}} = \pm 7{,}52$ (0,276 ; 0,724)	$+42$ (0,112 ; 0,888)	$-52{,}5$ (0,5)
$p = 4$	$126x^5 - 420x^6 + 540x^7 - 315x^8 + 70x^9$	$\frac{315}{128} = 2{,}460$ (0,5)	$\pm \frac{8505}{343\sqrt{7}} = \pm 9{,}36$ (0,311 ; 0,689)	$+51{,}4$ (0,1725 ; 0,8275)	$-78{,}75$ (0,5)

Tabela 2

Legi de mişcare simetrice (accelerare–decelerare)

Şocuri slabe $p = 1$ — Cronosecţiune $\sigma = 0{,}5$

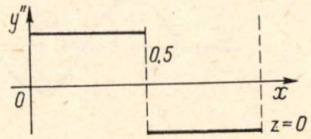
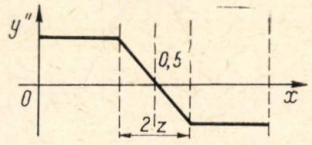
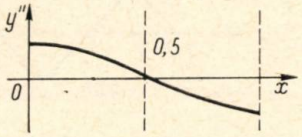
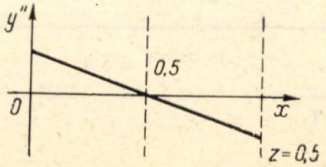
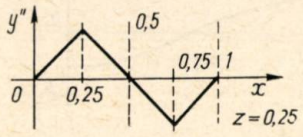
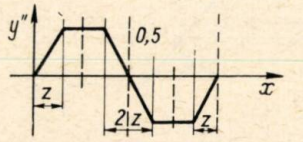
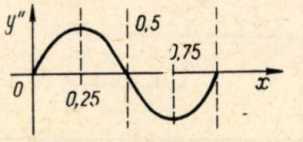
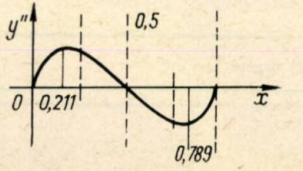
Legea	Graficul acceleraţiei	Interval		Deplasarea y	Valori maxime	
					Viteza y'	Acceleraţia y''
Dreptunghiulară (parabolică)		0	0,5	$2x^2$	2	$+4$
		0,5	1	$1 - 2(1-x)^2$		-4
Trapezoidală		0	$0{,}5-z$	$\frac{6}{3-4z^2}\cdot x^2$	$\frac{6(1-z)}{3-4z^2}$	$\frac{12}{3-4z^2}$
		$0{,}5-z$	$0{,}5+z$	$\frac{6x^2 - \frac{2}{z}(x+z-0{,}5)^3}{3-4z^2}$		
		$0{,}5+z$	1	$1-\frac{6}{3-4z^2}(1-x)^2$		$-\frac{12}{3-4z^2}$
Cosinusoidală		0	1	$\frac{1-\cos\pi x}{2}$	$\frac{\pi}{2}=1{,}57$	$\frac{\pi^2}{2}=4{,}92$
						$-\frac{\pi^2}{2}=-4{,}92$
Legea 2–3		0	1	$3x^2 - 2x^3$	1,5	6
						-6

Tabela 3

Legi de mişcare simetrice (accelerare – decelerare)

Fără şocuri $p = 2$ — Cronosecţiune $\sigma = 0{,}5$

Legea	Graficul acceleraţiei	Interval		Deplasarea y	Valori maxime		
					Viteza y'	Acceleraţia y''	Supraacceler. y'''
Triunghiulară		0	0,25	$\frac{16}{3}x^3$		$+8$ (0,25)	32 (0)
		0,25	0,75	$\frac{16}{3}(0{,}5 - x)^3 + 2x - 0{,}5$	2		-32 (0,5)
		0,75	1	$1 - \frac{16}{3}(1 - x)^3$		-8 (0,75)	32 (1)
Trapezoidală		0	z	$\frac{2}{3z}\cdot\frac{x^2}{1-2z}$		$\frac{4}{1-2z}$; (z)	$\frac{4}{z(1-2z)}$; (0)
		z	$0{,}5-z$	$\frac{2}{1-2z}\left[(x-0{,}5z)^2+\frac{z^2}{12}\right]$	2		$-\frac{4}{z(1-2z)}$; (0,5)
		$0{,}5-z$	$0{,}5+z$	$\frac{2}{3z}\cdot\frac{(0{,}5-x)^3}{1-2z}+2x-0{,}5$		$-\frac{4}{1-2z}$;(1−z)	$\frac{4}{z(1-2z)}$; (1)
Sinusoidală		0	1	$x - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}$	2	2π (0,25) -2π (0,75)	$4\pi^2$ (0) $-4\pi^2$ (0,5) $4\pi^2$ (1)
Legea 3–4–5		0	1	$10x^3 - 15x^4 + 6x^5$	1,875	5,77 (0,211) $-5{,}77$ (0,789)	60 (0) -30 (0,5) $+60$ (1)

din două funcții $y_1(x_1)$ și $y_2(x_2)$ cu $x_2 = 1 - kx_1$, corespunzătoare celor două sectoare (fig. 5), care se pot deduce una din alta prin relațiile

$$\begin{aligned} &ky_1(x) + y_2(1 - kx) = 1, \\ &y_1'(x) - y_2'(1 - kx) = 0, \\ &y_1''(x) + ky_2''(1 - kx) = 0, \\ &y_1'''(x) - k^2 y_2'''(1 - kx) = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Cu aceste legături, dacă funcțiunea y_1 respectă condițiile de la capătul de intrare, automat funcțiunea y_2 respectă condițiile de la capătul de ieșire. În punctul de joncțiune $x = u$ ale celor două sectoare, accelera-

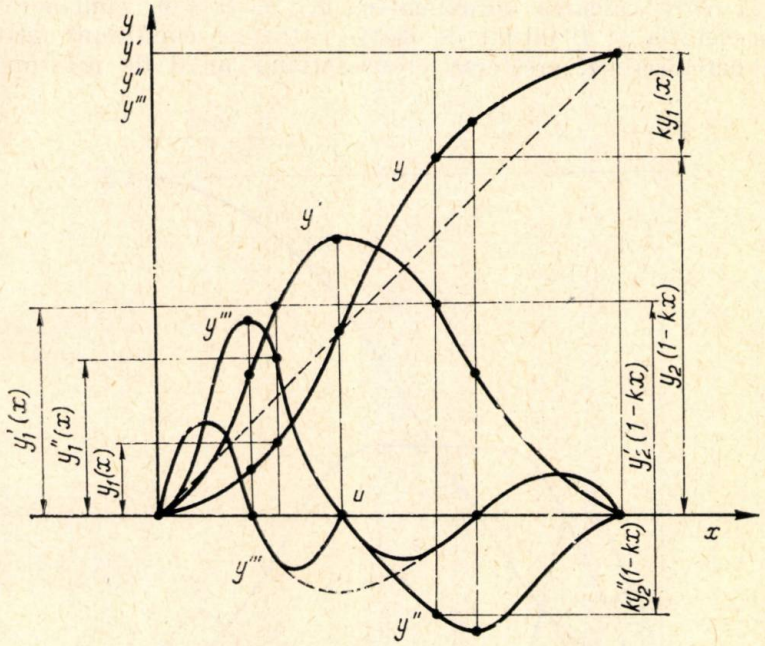


Fig. 2

ția este nulă, viteza are valoarea maximă, iar deplasările adimensionale ale elementelor condus și conducător sînt egale

$$\begin{aligned} &y_1''(u) = y_2''(u) = 0, \\ &y_1'(u) = y_2'(u), \\ &y_1(u) = y_2(u) = u. \end{aligned} \tag{16}$$

Pentru a avea și continuitatea derivatelor superioare dacă $u \neq 0{,}5$ trebuie ca $y_1^{(p)}(u) = y_2^{(p)}(u) = 0$ pentru $p \geqslant 2$. În cazul simetriei această condiție trebuie satisfăcută numai de derivatele de ordin par, iar cele de ordin impar au valori egale dar pot fi diferite de zero. Legile cu șocuri slabe sau fără șocuri ($p = 1$; 2) pot avea deci astfel de forme asimetrice (tab. 4 și 5).

Calculul cronosecțiunii se face după formula

$$\sigma = \int_0^u y_1(x_1)\,dx_1 + \int_u^1 y_2(x_2)\,dx_2$$

care după transformări devine

$$\sigma = 1 - u - \frac{1-2u}{u^2}\int_0^u y\,dx < 1 - u \quad (u < 0{,}5), \qquad (17)$$

și arată că valoarea obținută este mai mică decît $(1-u)$.

Cronosecțiunea crește de la legea 2—3 către legea dreptunghiulară (tab. 4) sau de la legea 3—4—5 către legea triunghiulară (tab. 7) tinzînd la limită către valoarea aproximativă 0,7, la $u = 0$, cînd accelerația și supraaccelerația ar fi infinit de mari. În aceste condițiuni extreme, dar practic nerealizabile, creșterea cronosecțiunii ar fi de maximum 40%.

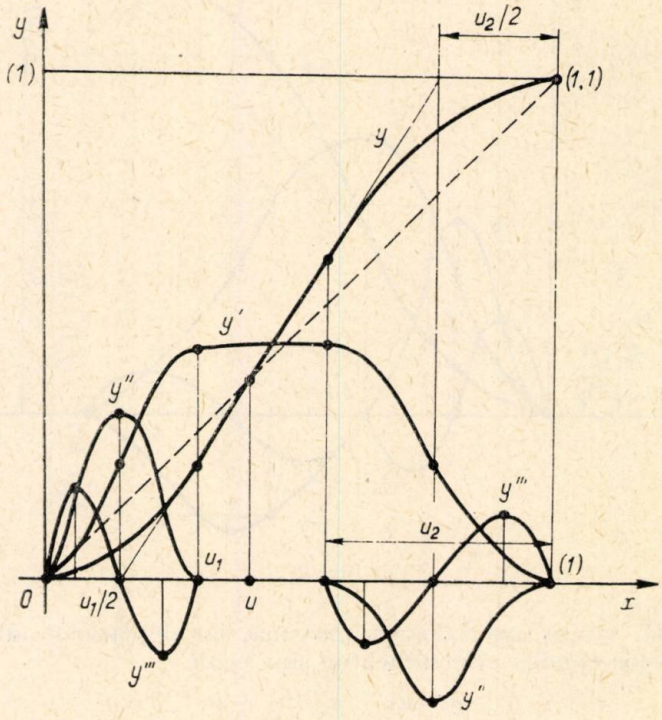


Fig. 3

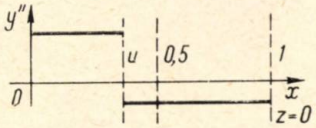
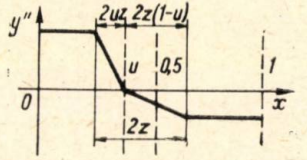
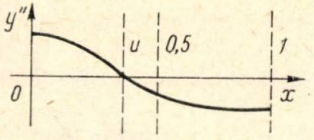
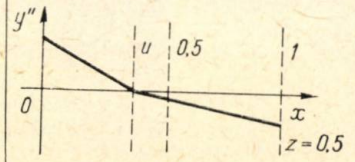
Față de legile corespunzătoare simetrice, legile asimetrice au aceleași viteze maxime, dar deplasate spre începutul intervalului, ceea ce atrage mărirea accelerațiilor și supraaccelerațiilor maxime.

3.3. Legi asimetrice se obțin și prin particularizarea legilor cu trei sectoare, accelerare — mișcare uniformă-decelerare, în care caz sînt respectate condițiile ca derivatele superioare să fie nule în punctul de joncțiune (16). Într-adevăr, pentru legile cu trei sectoare (fig. 3), dacă se notează cu $y_1(x)$

Tabela 4

Legi de mişcare asimetrice (accelerare – decelerare)

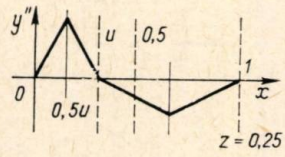
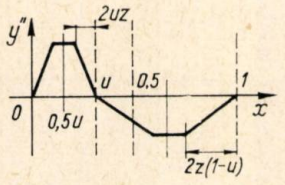
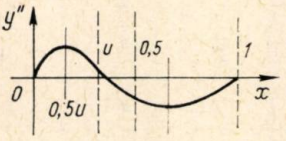
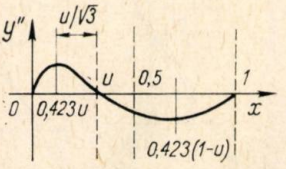
Şocuri slabe $p = 1$

Legea	Graficul acceleraţiei	Cronosecţiune	Interval		Deplasarea y	Valori maxime: Viteza y'	Valori maxime: Acceleraţie y''
Dreptunghiulară parabolică		$\frac{2-u}{3} = 0{,}5 + \frac{1-2u}{6}$	0	u	$\frac{x^2}{u}$	2	$\frac{2}{u}$
			u	1	$1 - \frac{(1-x)^2}{1-u}$		$-\frac{2}{1-u}$
Trapezoidală		$0{,}5 + \frac{1-4z^2+4z^3}{2(3-4z^2)} + (1-2u)\frac{1-4z^2+4z^3}{2(3-4z^2)}$	0	$u(1-2z)$	$\frac{3}{u(3-4z^2)}x^2$	$\frac{6(1-z)}{3-4z^2}$	$\frac{6}{u(3-4z^2)} - \frac{6}{(1-u)(3-4z^2)}$
			$u(1-2z)$	u	$\frac{3x^2 - \frac{1}{2uz}[x-u(1-2z)]^3}{u(3-4z^2)}$		
Cosinusoidală		$u + \frac{2(1-2u)}{\pi}$	0	u	$u\left(1-\cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{u}\right)$	$\pi/2 = 1{,}57$	$\frac{\pi^2}{4u}$
		$0{,}5 + 0{,}136(1-2u)$	u	1	$u + (1-u)\cos\frac{\pi}{2}\frac{1-x}{1-u}$		$-\frac{\pi^2}{4(1-u)}$
Legea 2–3		$\frac{5-2u}{8} = 0{,}5 + \frac{1-2u}{8}$	0	u	$\frac{3x^2}{2u} - \frac{x^3}{2u^2}$	$1{,}5$	$\frac{3}{u}$
			u	1	$1 - \frac{3(1-x)^2}{2(1-u)} + \frac{(1-x)^3}{2(1-u)^2}$		$-\frac{3}{1-u}$

Tabela

Legi de mișcare asimetrice

Fără șocuri

Legea	Graficul accelerației	Cronosecțiune	Interval	
Triunghiulară		$\frac{17-10u}{24} = 0,5 + \frac{5(1-2u)}{24}$	0 0,5u	0,5u u
Trapezoidală		$0,5 + \frac{(1-2u)(1+2z-4z^2)}{6}$	0 2zu u (1 − 2z)	2zu u (1 − 2z) u
Sinusoidală		$0,5 + \frac{2(1-2u)}{\pi^2}$	0 u	u 1
Legea 3—4—5		$\frac{11-6u}{16} = 0,5 + \frac{3(1-2u)}{16}$	0 u	u 1

5

(accelerare – decelerare)

$p = 2$

Deplasarea y	Valori maxime		
	Viteza y'	Accelerația y''	Supraacceler. y'''
$\frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{u^2}$		$+\frac{4}{u}$	$\frac{8}{u^2}$ (0)
	2		$-\frac{8}{u^2}$ $-\frac{8}{(1-u)^2}$ } (u)
$\frac{4}{3}\cdot\frac{(u-x)^3}{u^2}+2x-u$		$-\frac{4}{1-u}$	$\frac{8}{(1-u)^2}$ (1)
$\frac{1}{6z(1-2z)}\cdot\frac{x^3}{u^2}$		$\frac{2}{u(1-2z)}$	$\frac{1}{z(1-2z)u^2}$ (0)
$\frac{1}{u(1-2z)}\left[(x-uz)^2+\frac{u^2z^2}{3}\right]$	2		$-\frac{1}{z(1-2z)u^2}$ $-\frac{1}{z(1-2z)(1-u)^2}$ } (u)
$\frac{1}{6z(1-2z)}\cdot\frac{(u-x)^3}{u^2}+2x-u$		$-\frac{2}{(1-u)(1-2z)}$	$\frac{1}{z(1-2z)(1-u)^2}$ (1)
$x-\frac{u}{\pi}\sin\cdot\pi\frac{x}{u}$		$\frac{\pi}{u}$	$\frac{\pi^2}{u^2}$ (0)
	2		$-\frac{\pi^2}{u^2}$ $-\frac{\pi^2}{(1-u)^2}$ } (u)
$x-\frac{1-u}{\pi}\sin\cdot\pi\frac{1-x}{1-u}$		$-\frac{\pi}{1-u}$	$\frac{\pi^2}{(1-u)^2}$ (1)
$\frac{5}{2}\cdot\frac{x^3}{u^2}-\frac{15}{8}\cdot\frac{x^4}{u^3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{u^4}$		$-\frac{5}{\sqrt{3}\,u}$	$\frac{15}{u^2}$ (0)
$1-\frac{5}{2}\cdot\frac{(1-x)^3}{(1-u)^2}+\frac{15}{8}\cdot\frac{(1-x)^4}{(1-u)^3}-$	$\frac{15}{8}=1{,}875$		$-\frac{15}{2u^2}$ $-\frac{15}{2(1-u)^2}$ } (u)
$-\frac{3}{8}\cdot\frac{(1-x)^5}{(1-u)^4}$		$-\frac{5}{\sqrt{3}\,(1-u)}$	$\frac{15}{(1-u)^2}$ (1)

și $y_2(x)$ racordările polinomiale din sectoarele de accelerare u_1 și decelerare u_2 ale legii liniare $y_3(x) = vx + w$ din sectorul central al mișcării uniforme, condițiile continuității pînă la derivata de ordinul p sînt :

$$\begin{aligned} &x = 0, \quad y_1 = y_1' = \ldots = y_1^{(p)} = 0, \\ &x = u_1 \quad y_1 = y_3;\ y_1' = y_3';\ y_1'' = y_1''' = \ldots = y_1^{(p)} = 0, \\ &x = 1 - u_2 \quad y_2 = y_3;\ y_2' = y_3';\ y_2'' = y_2''' = \ldots = y_2^{(p)} = 0, \\ &x = 1 \quad y_2 = 1;\ y_2' = y_2'' = \ldots = y_2^p = 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Considerînd pentru accelerație sau decelerație legi simetrice în sectoarele respective, ceea ce conduce la situarea centrelor de greutate ale diagramelor lor în mijlocul intervalelor u_1 sau u_2 viteza maximă este dată prin expresia

$$v_{max} = \frac{2}{2 - (u_1 + u_2)} = v. \tag{19}$$

Centrul de asimetrie determinat prin condițiunea $k = \frac{u_2}{u_1} = (1 - u)/u$ se găsește în sectorul mișcării uniforme și este $u = u_1/(u_1 + u_2)$. Pe baza acestui centru se determină din (17) o altă relație între coeficienții legii din acest sector $vu + w = u$ și deci

$$w = -u(v - 1) = -\frac{vu_1}{2}. \tag{20}$$

Pentru această serie de legi se alege accelerația sub forma simplă

$$y_1'' = \frac{K}{u_1^{2p-1}} [x(u_1 - x)]^{p-1} = \frac{K}{u_1} \sum_{\lambda=0}^{p-1} (-1)^\lambda C_{p-1}^\lambda \left(\frac{x}{u_1}\right)^{p+\lambda-1}, \tag{21}$$

astfel că viteza și deplasarea au formele

$$y_1' = K \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{(-1)^\lambda C_{p-1}^\lambda}{\lambda + p} \left(\frac{x}{u_1}\right)^{\lambda+p}, \tag{22}$$

$$y_1 = K u_1 \sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{(-1)^\lambda C_{p-1}^\lambda}{(\lambda + p)(\lambda + p + 1)} \cdot \left(\frac{x}{u_1}\right)^{\lambda+p+1},$$

iar supraaccelerațiile sînt :

$$y_1''' = \frac{K(p-1)}{u_1^{2p-1}} [x(u_1 - x)]^{p-2} (u_1 - 2x), \tag{23}$$

$$y_1^{IV} = \frac{K(p-1)}{u_1^{2p-1}} [x(u_1 - x)]^{p-3} [2(2p-3)x^2 - 2(2p-3)u_1 x + (p-2)u_1^2].$$

Determinarea constantei K se face din condiția ca la $x = u_1$ să avem viteza $y_1'(u_1) = v$ și se verifică prin relația

$$y_1(u_1) = vu_1 + w = \frac{vu_1}{2},$$

adică

$$K(p) = \frac{v}{\sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{(-1)^\lambda C_{p-1}^\lambda}{\lambda + p}} = \frac{v}{2\sum_{\lambda=0}^{p-1} \frac{(-1)^\lambda C_{p-1}^\lambda}{(\lambda + p)(\lambda + p + 1)}} \tag{24}$$

cu $K_1 = v$; $K_2 = 6v$; $K_3 = 30\ v$; $K_4 = 140\ v$.

Accelerația maximă $\frac{K/u_1}{2^2(p-1)}$ se află la mijlocul sectorului $x = 0{,}5\ u_1$ iar supraaccelerația maximă $\frac{K(p-1)}{u_1^2\sqrt{2p-3}}\left[\frac{p-2}{2(2p-3)}\right]^{(p-2)}$ se află de o parte și de alta a centrului, respectiv la $x = \left(0{,}5 \mp \frac{1}{2\sqrt{2p-3}}\right)u_1$. De altfel acești parametri ai legilor simetrice pentru viteza pe intervalul $0 - u_1$ (fig. 3, tab. 6) se pot pune în corespondență cu parametrii legilor simetrice pentru deplasare pe intervalul $0-1$ (fig. 1, tab. 1).

Primele legi polinomiale din categoria mișcărilor cu trei sectoare ($u_1 + u_2 < 1$) sînt redate în tabela 6.

Prin particularizare se obțin legi asimetrice polinomiale cu două sectoare ($u_1 + u_2 = 1$) la care viteza are aceeași mărime (2), iar accelerația, supraaccelerația și cronosecțiunea cresc cu ordinul racordării (p) și totodată cu micșorarea sectorului de accelerare (u). Ca și în cazul anterior maximul realizabil al cronosecțiunii este de cca. 0,7.

Comparînd legile simetrice din această grupă ($u_1 = u_2 = 0{,}5$) cu cele anterioare polinomiale se constată că accelerațiile sînt mai reduse dar supraaccelerațiile sînt mai mari. Totodată expresia lor analitică este mai simplă ca de exemplu la $p = 4$ legea $5-6-7-8$ (tab. 6) față de legea $5-6-7-8-9$ (tab. 1). Ele au însă forme diferite pe sectoarele de accelerare sau decelerare, calculîndu-se una din alta prin relațiile formelor asimetrice cu $k = 1$ (15). În tabelele $7-10$ sînt reluate legile simple cu sau fără șocuri ($p = 1\ ;\ 2$), simetrice sau asimetrice, și sînt transpuse în forme cu trei sectoare.

După cum reiese și din tabele viteza maximă are forma generală :

$$v_{max} = \frac{1}{1 - \psi(u_1 + u_2)}, \tag{25}$$

iar legea în sectorul mișcării uniforme poate avea formele

$$y_3 = v(x - u) + u, \tag{26}$$

$$y_3 = u_1 v\left(\frac{x}{u_1} - \psi\right).$$

Tabela 6

Legi de mișcare asimetrice polinomiale
(cu două sau trei sectoare)

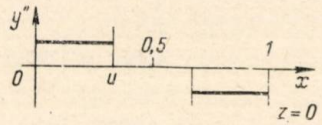
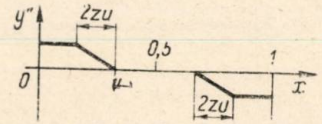
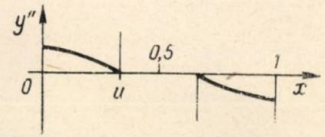
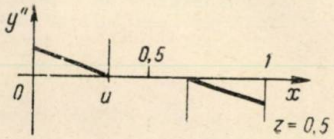
	Forma legii în sectorul de accelerare $(0-u_1)$	Sectoare		v max.	a. max.	α max.	σ
$p=1$	$\frac{vx^2}{2u_1}$	$u_1+u_2<1$	$u_1 \neq u_2$	$v=\frac{2}{2-(u_1+u_2)}$	$+\frac{v}{u_1}$	$\pm\infty \begin{pmatrix}0\\u_1\end{pmatrix}$	$0{,}5+(u_2-u_1)\frac{(4-v)}{12}$
			$u_1=u_2=u$	$\frac{1}{1-u}$	$\frac{1}{u(1-u)}$	$\pm\infty$	0,5
			$u_1=u$ $u_2=1-u$	2	$+\frac{2}{u}$	$\pm\infty$	$0{,}5+\frac{1-2u}{6}$
	$2x^2$	$u_1+u_2=1$	$u_1=u_2=0{,}5$	2	$+4$	$\pm\infty$	0,5
$p=2$	$\frac{vx^3}{2u_1^3}(2u_1-x)$	$u_1+u_2<1$	$u_1 \neq u_2$	$v=\frac{2}{2-(u_1+u_2)}$	$\frac{3v}{2u_1}$ $(0{,}5\,u_1)$	$\pm\frac{6v}{u_1^2}\begin{bmatrix}0\\u_1\end{bmatrix}$	$0{,}5+(u_2-u_1)\frac{(6-v)}{20}$
			$u_1=u_2=u$	$\frac{1}{1-u}$	$\frac{3}{2u(1-u)}$	$\pm\frac{6}{u^2(1-u)}$	0,5
	$8x^3(1-x)$	$u_1+u_2=1$	$u_1=u$ $u_2=1-u$	2	$\frac{3}{u}$	$\pm\frac{12}{u^2}$	$0{,}5+\frac{1-2u}{5}$
			$u_1=u_2=0{,}5$	2	6	± 48	0,5

$p = 3$	$\frac{vx^4}{2u_1^5}(5u_1^2 - 6u_1x + 2x^2)$	$u_1 + u_2 < 1$	$u_1 \neq u_2$	$v = \frac{2}{2 - (u_1 + u_2)}$	$\frac{15v}{8u_1}$	$\pm \frac{10v}{\sqrt{3}\,u_1^2}$ $\begin{matrix}(0{,}211u_1)\\ (0{,}789u_1)\end{matrix}$	$0{,}5 + (u_2 - u_1)\frac{(8-v)}{28}$
			$u_1 = u_2 = u$	$\frac{1}{1-u}$	$\frac{15}{8u(1-u)}$	$\pm \frac{10}{\sqrt{3}\,u^2(1-u)}$	$0{,}5$
	$8x^4(5 - 12x + 8x^2)$	$u_1 + u_2 = 1$	$u_1 = u$ $u_2 = 1 - u$	2	$\frac{15}{4u}$	$\pm \frac{20}{\sqrt{3}\,u^2}$	$0{,}5 + \frac{1-2u}{14/3}$
			$u_1 = u_2 = 0{,}5$	2	$7{,}5$	$\pm \frac{80}{\sqrt{3}} = 46{,}24$	$0{,}5$
$p = 4$	$\frac{vx^5}{2u_1^7}(14u_1^3 - 28u_1^2x + 20u_1x^2 - 5x^3)$	$u_1 + u_2 < 1$	$u_1 \neq u_2$	$v = \frac{2}{2 - (u_1 + u_2)}$	$\frac{35v}{16u_1}$	$\pm \frac{84v}{5\sqrt{5}\,u_1^2}$ $\begin{matrix}(0{,}276u_1)\\ (0{,}724u_1)\end{matrix}$	$0{,}5 + (u_2 - u_1)\frac{(10-v)}{36}$
			$u_1 = u_2 = u$	$\frac{1}{1-u}$	$\frac{35}{16u(1-u)}$	$\pm \frac{84}{5\sqrt{5}\,u^2(1-u)}$	$0{,}5$
	$32x^5(7 - 28x + 40x^2 - 20x^3)$	$u_1 + u_2 = 1$	$u_1 = u$ $u_2 = 1 - u$	2	$\frac{35}{8u}$	$\pm \frac{168}{5\sqrt{5}\,u^2}$	$0{,}5 + \frac{1-2u}{9/2}$
			$u_1 = u_2 = 0{,}5$	2	$8{,}75$	$\pm \frac{672}{5\sqrt{5}} = \pm 60{,}11$	$0{,}5$

Tabela 7

Legi de mişcare simetrice (accelerare-m.uniformă-decelerare)

şocuri slabe $p = 1$ cronosecţiune $\sigma = 0{,}5$

Legea	Graficul acceleraţiei	Interval		Deplasare y	Valori maxime	
					Viteza y'	Acceler. y''
Dreptunghiulară (parabolică)		0	u	$\frac{x^2}{2u(1-u)}$	$\frac{1}{1-u}$	$\frac{1}{u(1-u)}$
		u	$1-u$	$v\left(x-\frac{u}{2}\right)$		$-\frac{1}{u(1-u)}$
Trapezoidală		0	$u(1-2z)$	$\frac{vx^2}{2u(1-z)}$	$v=\frac{1}{1-2\Psi(z)u}$	$\frac{v}{u(1-z)}$
		$u(1-2z)$	u	$\frac{v}{2u(1-z)}\left[x^2-\frac{1}{6uz}[x-u(1-2z)]^3\right]$		
		u	$1-u$	$v(x-0{,}5)+0{,}5$	$\Psi(z)=\frac{3-6z+4z^2}{6(1-z)}$	$-\frac{v}{u(1-z)}$
Cosînusoidală		0	u	$\frac{2vu}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2u}\right)$	$v=\frac{\pi}{\pi-2(\pi-2)u}$	$\frac{\pi v}{2u}$
		u	$1-u$	$v\left(x-\frac{\pi-2}{\pi}u\right)$		$-\frac{\pi v}{2u}$
Legea 2—3		0	u	$\frac{3ux^2-x^3}{u^2(3-2u)}$	$\frac{3}{3-2u}$	$\frac{6}{u(3-2u)}$
		u	$1-u$	$v\left(x-\frac{u}{3}\right)$		$-\frac{6}{u(3-2u)}$

Legi de mişcare asimetrice (accelerare-uniform.-decelerare) şocuri slabe $p = 1$

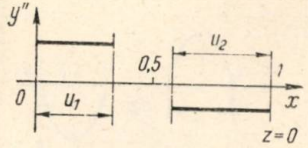
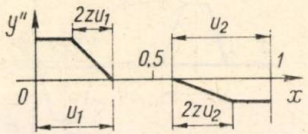
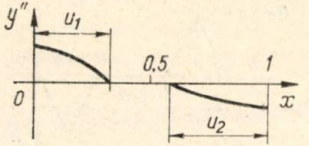
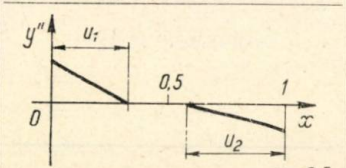
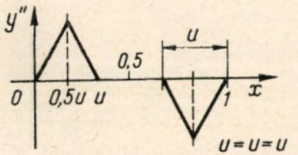
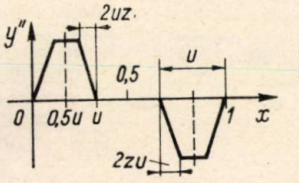
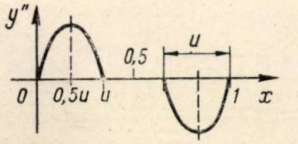
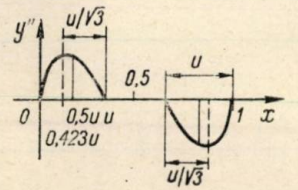
Legea	Graficul acceleraţiei	Cronosecţiune	Interval		Deplasare y	Valori maxime	
						Viteza y'	Acceleraţie y''
Dreptunghiulară		$0{,}5 +$	0	u_1	$\frac{u_1 v_1}{2}\left(\frac{x}{u_1}\right)^2$	$v = \frac{2}{2-(u_1+u_2)}$	$+\frac{v}{u_1}$
		$+\frac{(u_2-u_1)}{12}(4-v)$	u_1	$1-u_2$	$u_1 v\left(\frac{x}{u_1}-\frac{1}{2}\right)$		$-\frac{v}{u_2}$
Trapezoidală		$0{,}5+\frac{(u_2-u_1)}{12}[f(z)-h(z)v]$	0	$u_1(1-2z)$	$\frac{u_1 v}{2(1-z)}\cdot\left(\frac{x}{u_1}\right)^2$	$v = \frac{1}{1-\Psi(z)(u_1+u_2)}$ $\Psi(z) = \frac{3-6z+4z^2}{6(1-z)}$	$\frac{v}{u_1(1-z)}$
		$f(z) = \frac{2(1-2z+2z^2)}{\Psi(z)}$	$u_1(1-2z)$	u_1	$\frac{u_1 v}{2(1-z)}\left[\left(\frac{x}{u_1}\right)^2-\frac{1}{6z}\left(\frac{x}{u_1}-1+2z\right)^3\right]$		
		$h(z) = f(z) - 6\Psi(z)$	u_1	$(1-u_2)$	$u_1 v\left[\frac{x}{u_1}-\Psi(z)\right]$		$-\frac{v}{u_2(1-z)}$
Cosinusoidală		$0{,}5 +$	0	u_1	$\frac{2u_1 v}{\pi}\left(1-\cos\frac{\pi x}{2u_1}\right)$	$v = \frac{\pi}{\pi-(\pi-2)(u_1+u_2)}$	$\frac{\pi v}{2u_1}$
		$\frac{(u_2-u_1)}{2\pi(\pi-2)}[(\pi^2-8)-4(\pi-3)v]$	u_1	$1-u_2$	$u_1 v\left[\frac{x}{u_1}-\frac{\pi-2}{\pi}\right]$		$-\frac{\pi v}{2u_2}$
Legea 2 – 3		$0{,}5 +$	0	u_1	$\frac{u_1 v}{3}\left(\frac{x}{u_1}\right)^2\left(3-\frac{x}{u_1}\right)$	$v = \frac{3}{3-(u_1+u_2)}$	$\frac{2v}{u_1}$
		$\left(\frac{u_2-u_1}{12}\right)(3-v)$	u_1	$1-u_2$	$u_1 v\left[\frac{x}{u_1}-\frac{1}{3}\right]$		$-\frac{2v}{u_2}$

Tabela 9

Legi de mişcare simetrice (accelerare — m. uniformă — decelerare)

Fără şocuri $p = 2$ cronosecţiune $\sigma = 0{,}5$

Legea	Graficul acceleraţiei	Interval		Deplasarea	Valori maxime: Viteza	Acceler.	supraaccel.
Triunghiulară		0	$0{,}5\,u$	$\frac{2}{3}\,uv\left(\frac{x}{u}\right)^3$	$v=\frac{1}{1-u}$	$\frac{2}{u\,(1-u)}$	$\pm\frac{4}{\mp\,u^2\,(1-u)}$
		$0{,}5\,u$	u	$uv\left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{x}{u}\right)^3+\left(\frac{x}{u}-\frac{1}{2}\right)\right]$			
		u	$1-u$	$uv\left[\frac{x}{u}-\frac{1}{2}\right]$			
Trapezoidal		0	$2zu$	$\frac{uv}{12z\,(1-2z)}\left[\frac{x}{u}\right]^3$	$v=\frac{1}{1-u}$	$\frac{1}{(1-2z)\,u\,(1-u)}$	$\pm\frac{1}{\mp\,2z\,(1-2z)u^2\,(1-u)}$
		$2\,zu$	$u\,(1-2z)$	$\frac{uv}{2\,(1-2z)}\left[\left(\frac{x}{u}-z\right)^2+\frac{z^2}{3}\right]$			
		$u\,(1-2z)$	u	$uv\left[\frac{1}{12\,(1-2z)}\left(1-\frac{x}{u}\right)^3+\left(\frac{x}{u}-\frac{1}{2}\right)\right]$			
		u	$1-u$	$uv\left[\frac{x}{u}-\frac{1}{2}\right]$			
Sinusoidală		0	u	$\frac{uv}{2}\left[\frac{x}{u}-\frac{1}{\pi}\sin\pi\frac{x}{u}\right]$	$v=\frac{1}{1-u}$	$\frac{\pi}{2u\,(1-u)}$	$\pm\frac{\pi}{\mp\,2}\cdot\frac{1}{u^2\,(1-u)}$
		u	$1-u$	$uv\left[\frac{x}{u}-\frac{1}{2}\right]$			
Legea 3 — 4 — 5		0	u	$\frac{8}{15}\,uv\left[\frac{5}{2}\left(\frac{x}{u}\right)^3-\frac{15}{8}\left(\frac{x}{u}\right)^4+\frac{3}{8}\left(\frac{x}{8}\right)^5\right]$	$v=\frac{15}{15-14u}$	$\frac{40}{\sqrt{3u(15-14u)}}$	$+\frac{120}{+\,u^2(15-14u)}$
		u	$1-u$	$uv\left[\frac{x}{u}-\frac{7}{15}\right]$			$-\frac{60}{-\,u^2\,(15-14u)}$

Coeficientul ψ se determină din suprafața diagramei accelerației (sau decelerației) și reprezintă raportul între abscisa centrului de greutate și lungimea totală a sectorului de accelerație (1).

3.4. O altă cale de obținere a legilor nesimetrice sau de modificare convenabilă a parametrilor cinematici caracteristici este de a considera diverse forme pentru funcțiunea $Q(x)$ a legilor polinomiale (8). Astfel, urmărind deplasarea vitezei maxime către începutul intervalului, se poate lua

$$Q_1(x) = K(1 - mx) \tag{27}$$

$$\text{cu } K > 0 \quad \text{și } 1 > m > 0$$

sau chiar $Q_1(x) = K(1 - mx)^n$ cu $n > 1$ și $Q_1(x) = K(1 - mx^\nu)$ cu $0 < \nu < 1$.

Soluția generală are forma

$$y = Kx^{p+1}\left[\sum_{\lambda=0}^{p} \frac{(-1)^\lambda C_p^\lambda x^\lambda}{\lambda + p + 1} - m \sum_{\lambda=0}^{p} \frac{(-1)^\lambda C_p^\lambda x^{\lambda+1}}{\lambda + p + 2}\right]. \tag{28}$$

Valoarea constantei K se determină din $y(1) = 1$ adică

$$K = \frac{1}{\sum_{\lambda=0}^{p} \frac{(-1)^\lambda C_p^\lambda x^\lambda}{\lambda + p + 1} - m \sum_{\lambda=0}^{p} \frac{(-1)^\lambda C_p^\lambda x^{\lambda+1}}{\lambda + p + 2}} \tag{29}$$

și deci

$$K_1 = \frac{12}{2-m}\ ;\ K_2 = \frac{60}{2-m}\ ;\ K_3 = \frac{280}{2-m}\ ;\ K_4 = \frac{1260}{2-m}\cdot$$

Pentru diverse ordine de racordări (tab. 11) se obțin legi q mai complicate decît în cazul simetric (tab. 1) și cu atît mai mult față de cele asimetrice cu trei sectoare $-k$ (tab. 6). Cronosecțiunea mărită atinge valorile maxime la $m = 1$, scade cu ordinul racordării (p) și nu depășește valoarea 0,6 $(p = 1)$. Vitezele, accelerațiile și supraaccelerațiile sînt superioare acelora care corespund legilor simetrice, cu care se confundă dacă $m = 0$.

3.5. Pe aceeași cale, mai semnalăm utilizarea funcțiilor de corecție $\overline{y}(x)$ față de legile simetrice $y(x)$. În acest caz cronosecțiunea maximă devine

$$\sigma = 0{,}5 + \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p+1}.\, R_0(x), \tag{30}$$

iar deplasarea și derivatele (8—9—10) sînt

$$Y(x) = y(x) + \overline{y}(x), \tag{31}$$

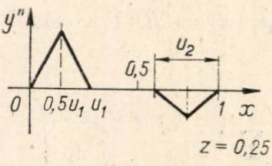
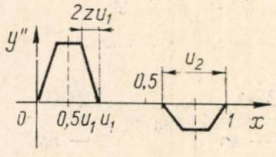
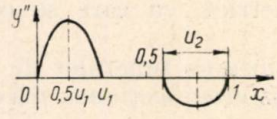
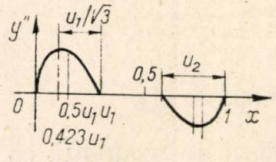
$$Y^{(p)}(x) = x^{p-s+1}.(1 - x)^{p-s+1}.(Q_s + R_s). \tag{32}$$

Funcțiile R_s sînt legate prin aceleași relații de recurență ca și funcțiile Q_s (11). Este necesar ca să avem $Q_1 + R_1 > 0$ și dacă $Q_1 = K$ (13) și considerăm R_0 tot o constantă, atunci, pentru că $R_1 = (p + 1)(1 -$

Tabela

Legi de mişcare asimetrice

Fără şocuri

Legea	Graficul acceleraţiei	Cronosecţiunea	Interval	
Triunghiulară		$0{,}5 + \frac{(u_2 - u_1)}{24}(7 - v)$	0 0,5u_1 u_1	0,5u_1 u_1 $1 - u_2$
Trapezoidală		$0{,}5 + \frac{(u_2 - u_1)}{12}\left[\begin{array}{l}[4(1 - z + 2z^2) - \\ - v(1 - 4z + 8z^2)\end{array}\right]$	0 2zu_1 $u_1(1 - 2z)$ u_1	2zu_1 $u_1(1 - 2z)$ u_1 $1 - u_2$
Sinusoidală		$0{,}5 + \frac{(u_2 - u_1)}{4\pi^2}\left[\begin{array}{l}2(\pi^2 - 4) - \\ - (\pi^2 - 8)v\end{array}\right]$	0 u_1	u_1 $1 - u_2$
Legea 3 — 4 — 5	 acceler. nesimetrică	$0{,}5 + \frac{u_2 - u_1}{210}[60 - 11v]$	0 u_1	u_1 $1 - u_2$

(accelerare — m. uniformă — decelerare)

$p = 2$

Deplasarea	Valori maxime		
	Viteza	Acceler.	Supraaccler.
$\frac{2}{3} u_1 v \left(\frac{x}{u_1}\right)^3$			
$u_1 v \left[\frac{2}{3}\left(1-\frac{x}{u_1}\right)^3 + \left(\frac{x}{u_1} - \frac{1}{2}\right)\right]$	$v = \frac{2}{2-(u_1+u_2)}$	$\frac{2v}{u_1}$	$\pm \frac{4v}{u_1^2}$
$u_1 v \left(\frac{x}{u_1} - \frac{1}{2}\right)$		$-\frac{2v}{u_2}$	$\mp \frac{4v}{u_2^2}$
$\frac{u_1 v}{12z(1-2z)} \cdot \left(\frac{x}{u_1}\right)^3$			
$\frac{u_1 v}{2(1-2z)}\left[\left(\frac{x}{u_1} - z\right)^2 + \frac{z^2}{3}\right]$	$v =$	$+\frac{v}{(1-2z)u_1}$	$\pm \frac{v}{2z(1-2z)u_1^2}$
$u_1 v\left[\frac{1}{12z(1-2z)}\left(1-\frac{x}{u_1}\right)^3 + \left(\frac{x}{u_1} - \frac{1}{2}\right)\right]$	$\frac{2}{2-(u_1+u_2)}$	$-\frac{v}{(1-2z)u_2}$	$\mp \frac{v}{2z(1-2z)u_2^2}$
$u_1 v \left(\frac{x}{u_1} - \frac{1}{2}\right)$			
$\frac{u_1 v}{2}\left(\frac{x}{u_1} - \frac{1}{\pi} \sin \pi \frac{x}{u_1}\right)$	$v =$	$+\frac{\pi v}{2u_1}$	$\pm \frac{\pi^2 v}{2u_1^2}$
$u_1 v \left(\frac{x}{u_1} - \frac{1}{2}\right)$	$\frac{2}{2-(u_1-u_2)}$	$-\frac{\pi v}{2u_2}$	$\mp \frac{\pi^2 v}{2u_2^2}$
$\frac{8}{15} u_1 v \left[\frac{5}{2}\left(\frac{x}{u_1}\right)^3 - \frac{15}{8}\left(\frac{x}{u_1}\right)^4 + \frac{3}{8}\left(\frac{x}{u_1}\right)^5\right]$	$v =$	$+\frac{8v}{3\sqrt{3}\,u_1}$	$+\frac{8v}{u_1^2}$
$u_1 v \left[\frac{x}{u_1} - \frac{7}{15}\right]$	$\frac{15}{15-7(u_1+u_2)}$	$-\frac{8v}{3\sqrt{3}u_2}$	$-\frac{4v}{u_1^2}$ $-\frac{4v}{u_2^2}$ $+\frac{8v}{u_2^2}$

Tabela 11

Legi de mișcare asimetrice polinomiale q

	Legea y	Cronosecțiune	$m = 1$; σ. max.	v. max. y'max.	A. max. y'' max.
$p = 1$	$\frac{2(3x^2-2x^3)-(4x^3-3x^4)m}{2-m}$	$0{,}5 + \frac{m}{10(2-m)}$	$6x^2-8x^3+3x^4$ $\sigma = 0{,}6$	$\frac{16}{9} = 1{,}777$ $\left(\frac{1}{3} = 0{,}333\right)$	$12 \quad (0)$ $-4 \quad (0{,}666)$ $0 \quad (1)$
$p = 2$	$\frac{2(10x^3-15x^4+6x^5)-(15x^4-24x^5+10x^6)m}{2-m}$	$0{,}5 + \frac{m}{14(2-m)}$	$20x^3-45x^4+36x^5-10x^6$ $\sigma=0{,}572$	$\frac{1296}{625} = 2{,}073$ $\left(\frac{2}{5} = 0{,}4\right)$	$0{,}72(3\pm 8\sqrt{6})$ $+16{,}266\,;\ -11{,}946$ $\left[\begin{matrix}\frac{(4\mp\sqrt{6})}{10} \\ 0{,}155\,;\ 0{,}645\end{matrix}\right]$
$p = 3$	$\frac{2(35x^4-84x^5+70x^6-20x^7)-(56x^5-140x^6+120x^7-35x^8)m}{2-m}$	$0{,}5 + \frac{m}{18(2-m)}$	$70x^4-224x^5+280x^6-$ $-160x^7+35x^8$ $\sigma=0{,}555$	$2{,}35$ $\left(\frac{3}{7} = 0{,}428\right)$	$+9{,}403\,;\ -7{,}935$ $\left[\begin{matrix}\frac{(3\mp\sqrt{2})}{7} \\ 0{,}227\,;\ 0{,}63\end{matrix}\right]$
$p = 4$	$\frac{2(126x^5-420x^6+540x^7-315x^8+70x^9)-(210x^6-720x^7+945x^8-560x^9+126x^{10})m}{2-m}$	$0{,}5 + \frac{m}{22(2-m)}$	$252x^5-1050x^6+1800x^7-$ $-1575x^8+700x^9-126x^{10}$ $\sigma = 0{,}545$	$2{,}601$ $\left(\frac{4}{9} = 0{,}444\right)$	$+10{,}871 \quad -9{,}475$ $\left[\begin{matrix}\frac{8\mp\sqrt{10}}{18} \\ 0{,}268\,;\ 0{,}62\end{matrix}\right]$

$-2x)\ R_0$, trebuie ca $(p+1)\ (1-2x)\ R_0 + K > 0$ pe intervalul $0-1$, respectiv, $K \geqslant (p+1)\ R_0$. Această inegalitate determină valorile maxime ale lui R_0 care cresc cu ordinul racordării p, spre exemplu

$$R_0(1) \leqslant 3,\quad R_0(2) \leqslant 10;\quad R_0(3) \leqslant 35$$

$$R_0(4) \leqslant 128.$$

Este mai simplu de a pune aceste forme de funcții în legătură cu cele anterioare (25), respectiv

$$\frac{2K}{2-m}(1-mx) = (p+1)\ (1-2x)\ R_0 + K,$$

adică

$$0 < m = \frac{2(p+1)\ R_0}{K + (p+1)\ R_0} < 1 \tag{33}$$

sau

$$R_0 = \frac{K}{p+1} \cdot \frac{m}{2-m} \leqslant \frac{K}{p+1}$$

rezultat în concordanță cu cel de mai sus.

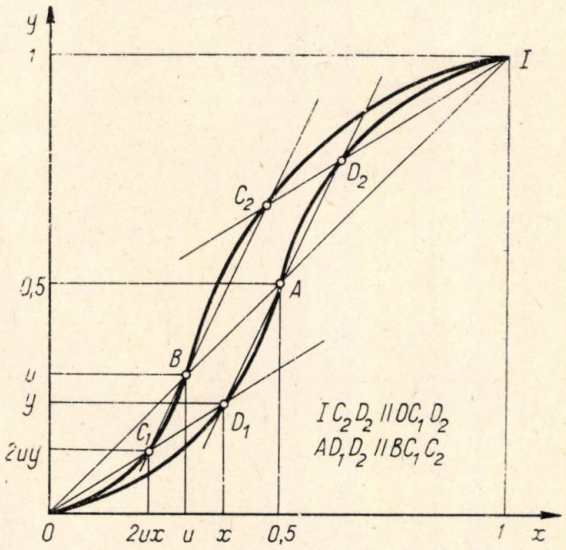


Fig. 4

4. În încheiere se mai face o comparație a diverselor legi de mișcare simetrice din punct de vedere al valorilor funcțiunii deplasărilor (tab. 12). Se subliniază că la aceeași abscisă, ordonatele diferitelor legi sînt foarte apropiate, deși viteza, accelerația și în special supraaccelerația pot avea valori maxime foarte diferite. Legile asimetrice k, provin din cele

Tabela

Legi simetrice

Valori	Legea liniară $p = 0$	Legi cu şocuri slabe $p = 1$			Legi fără	
		Dreptunghiulară	Cosinusoidală	Legea 2—3	Triunghiulară	Sinusoidală
0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,1	0,02	0,024471	0,028000	0,005333	0,006452
0,2	0,2	0,08	0,095491	0,104000	0,042666	0,048635
0,3	0,3	0,18	0,206107	0,216000	0,142666	0,148635
0,4	0,4	0,32	0,345491	0,352000	0,305333	0,306452
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,6	0,6	0,68	0,654509	0,648000	0,694667	0,693548
0,7	0,7	0,82	0,793893	0,784000	0,857334	0,851365
0,8	0,8	0,92	0,904509	0,896000	0,957334	0,951365
0,9	0,9	0,98	0,975529	0,972000	0,994667	0,993548
1	1	1	1	1	1	1

simetrice prin transformarea $x = X/2u$ şi $y = Y/2u$ adică graficele respective se transformă proiectiv (fig. 4), punctele corespondente avînd abscisele şi ordonatele multiplicate cu $2u$ în sectorul de accelerare. Mai general, legile asimetrice k cu mişcare uniformă, se obţin din cele simetrice prin transformarea $x = X/2X_{max}$ şi $y = Y/2Y_{max}$, unde $X_{max} = u_1$ iar $Y_{max} = u_1(1 - \psi)$ v. Ultima valoare se obţine din legea mişcării uniforme (26) pentru $X = u_1$.

Primită la redacţie la 11 ianuarie 1968

12

(două sectoare)

șocuri $p = 2$	Legi polinomiale q		Legi polinomiale k		
Legea 3—4—5 $p = 2$	Legea 4—5—6—7 $p = 3$	Legea 5—6—7—8—9 $p = 4$	Legea 3—4 $p = 2$	Legea 4—5—6 $p = 3$	Legea 5—6—7—8 $p = 4$
0	0	0	0	0	0
0,008560	0,002728	0,000890	0,007200	0,003204	0,001465
0,057920	0,033344	0,019581	0,051200	0,038976	0,029094
0,163080	0,126036	0,098808	0,151200	0,145476	0,144161
0,317440	0,289792	0,266565	0,307200	0,303104	0,302449
0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
0,682560	0,710208	0,733435	0,692800	0,696896	0,697551
0,836920	0,873964	0,901192	0,848700	0,854524	0,855839
0,942080	0,966656	0,980419	0,948800	0,961024	0,970906
0,991440	0,997272	0,999110	0,992800	0,996796	0,998535
1	1	1	1	1	1

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, I. Sava, *Asupra analizei și sintezei unitare a mecanismelor cu cuple superioare*, St. Cerc. de mec. apl., *3* (1966).
2. — *Legile generale ale mecanismelor cu came*, St. cerc. mec. apl., *4* (1966).
3. — *Asupra analizei și sintezei mecanismelor cu came*, Construcția de mașini *8—9* (1967).
4. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, Edit. Academiei, București, 1967.
5. N. I. Levitski, *Kulacicovie mexanizmi*, Mașinostroenie-Moscova, 1964.
6. L. V. Korcemnîi, *Mexanizmi gazoraspredilenia dvigatelea*. Mașinostroenie, 1964.

CONTRIBUȚII LA SINTEZA STRUCTURALĂ A MECANISMELOR SPAȚIALE

de A. RAICU
Institutul de petrol, gaze și geologie

621.231.1

În lucrare se dă o metodă de determinare a tuturor variantelor structurale de bază adică a variantelor caracterizate prin n elemente și $c = \Sigma C_j$ cuple cinematice fără a ține seama de dispunerea relativă a acestora. În acest scop este propusă *tabela structurală*. Se dau și relații de calcul a numărului variantelor de bază care pot fi formate din n elemente și c cuple cinematice.

1. GENERALITĂȚI

Complexitatea problemelor legate de studiul structural, cinematic și dinamic al mecanismelor spațiale a făcut ca rezultatele cercetărilor efectuate în acest domeniu să nu fie la nivelul celor dorite. Deocamdată, ele sînt departe de a fi satisfăcătoare.

Folosirea pe scară mai largă în domeniul construcției de mașini a mecanismelor spațiale impune existența unei bibliografii corespunzătoare care să ușureze munca de proiectare. Literatura tehnică de specialitate însă este deocamdată săracă în materiale din domeniul structurii, cinematicii și dinamicii mecanismelor spațiale.

În activitatea sa de concepție, inginerul proiectant trebuie să pornească de la schema structurală a mecanismului și pe baza acesteia s-o conceapă pe cea constructivă care să îndeplinească rolul funcțional dorit. Acest lucru este neglijat în practică și conceperea mecanismelor se face mai mult pe baza experienței dobîndite.

Prezenta lucrare are ca scop să dea o metodă de determinare a numărului variantelor structurale de bază ale unui mecanism cu n elemente și c cuple cinematice, înțelegînd prin variantă de bază, varianta structurală caracterizată prin n elemente și $c = \Sigma C_j$ cuple cinematice. Este evident că varianta structurală de bază nu ține seama de modul de dispunere al elementelor și din acest motiv, aceasta poate fi considerată ca o clasă de variante structurale concrete adică de variante care să țină seama de dispunerea relativă a elementelor și cuplelor, precum și de familia din care face parte mecanismul.

Pentru exemplificare să considerăm mecanismele din figurile 1 şi 2. Dacă se simbolizează variantele de bază prin numărul *nc* atunci ambele mecanisme fac parte din varianta tip 04.04 deşi variantele structurale concrete corespunzătoare sînt

$$CTTC \tag{1}$$

din familia 0, respectiv

$$CPPC \tag{2}$$

din familia I, unde s-a notat cu C cupla de clasa V, cu T cupla de clasa III şi cu P cupla de clasa IV.

Tot din aceeaşi variantă tip fac parte şi mecanismele din figura 3 cu simbolul literal $CTPC$ şi figura 4 cu simbolul literal $CPCT$ care însă reprezintă una şi aceeaşi variantă de bază.

2. CONSTATĂRI DIN PRACTICĂ

Problemele legate de analiza şi sinteza mecanismelor plane sînt mult mai simple şi în mare măsură rezolvate faţă de cele ale mecanismelor spaţiale. Această stare de lucruri, precum şi lipsa unor surse de documentare, sînt principalele motive pentru care proiectanţii evită mecanismele spaţiale chiar şi în cazurile cînd acestea prezintă avantaje evidente.

Practica a dovedit că pentru un acelaşi scop funcţional pot fi concepute mai multe variante de mecanisme şi aceasta depinde de inventivitatea proiectanţilor, neexistînd în acest sens reguli de proiectare precise şi obligatorii. Alegerea variantei finale este condiţionată de latura economică a execuţiei şi întreţinerii maşinii.

Astfel, pentru transmiterea mişcării de rotaţie între doi arbori necoplanari se pot folosi fie mecanismul cu roţi dinţate cu dinţi bombaţi reprezentat în figura 5, fie mecanismul cu cruce cardanică reprezentat în fig. 6, fie mecanismele cu bare din figurile 1 şi 7. Din analiza structurală a mecanismelor reprezentate se poate întocmi tabela I.

Tabela I

Mecanismul	Fig.	n	Numărul de cuple din clasa				
			V	IV	III	II	I
Mecanism cu roţi dinţate spaţiale	5	3	2	0	0	0	1
Mecanism cu cruce cardanică	6	6	6	0	0	0	0
Mecanism cu bare	1	4	2	0	2	0	0
Mecanism cu bare	7	4	2	1	1	0	0

Se observă de aici că există mecanisme cu acelaşi număr de elemente dar cu cuple cinematice diferite şi mecanisme cu alt număr de elemente care îndeplinesc acelaşi rol funcţional. Există însă şi mecanisme care au aceeaşi structură (fig. 1 şi fig. 8) dar cu rol funcţional diferit. Apare de aici întrebarea dacă mai există şi alte mecanisme cu acelaşi număr de elemente dar care să difere de acestea numai prin clasa cuple-

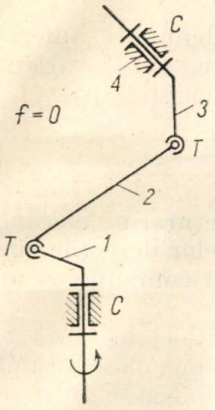


Fig. 1

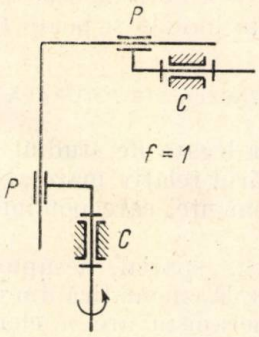


Fig. 2

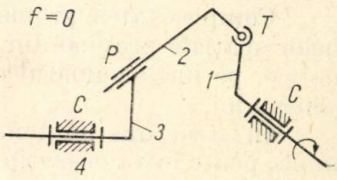


Fig. 3

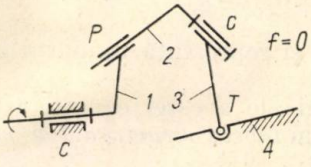


Fig. 4

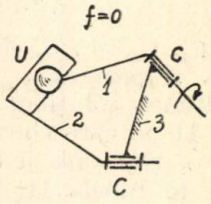


Fig. 5

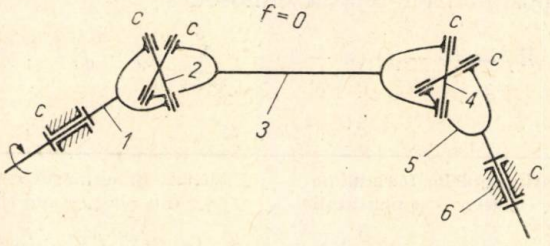


Fig. 6

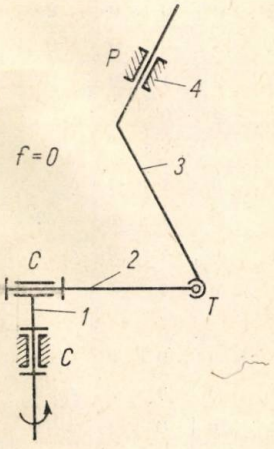


Fig. 7

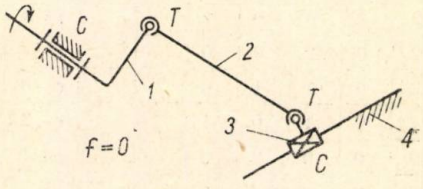


Fig. 8

lor cinematice şi care este numărul acestor variante denumite anterior variante de bază. Răspunsul este afirmativ în sensul că mai există variante structurale şi că numărul lor este limitat şi poate fi calculat.

3. TABELA STRUCTURALĂ

Complexitatea problemelor legate de studiul structural al mecanismelor spaţiale provine din numărul relativ mare al claselor de cuple cinematice, pe lîngă numărul de elemente, care pot intra în compunerea mecanismului.

În structura unui mecanism spaţial, nesupus la vreo legătură comună, poate intra orice tip de cuplă cinematică din cele cinci clase posibile.

Să presupunem că un mecanism are n elemente legate între ele prin c cuple. Este evident că trebuie să fie satisfăcută relaţia :

$$C_5 + C_4 + C_3 + C_2 + C_1 = c, \tag{3}$$

unde C_5, C_4, C_3, C_2, C_1 sînt numere întregi şi reprezintă numărul cuplelor din clasa respectivă.

Mulţimea soluţiilor în numere întregi ale acestei ecuaţii este dată în tabela II pe care convenim s-o denumim *tabela structurală a mecanismului cu n elemente şi c cuple cinematice.*

Tot în tabela II, pentru cazul concret studiat, trebuie trecute şi gradele de mobilitate ale tuturor variantelor structurale, calculate pentru cele 5 familii posibile, cu relaţia cunoscută :

$$M_f = (6 - f)(n - 1) - \sum_{j=f+1}^{5} (j - f) C_j . \tag{4}$$

Tabela II

Nr.	Clasa şi numărul cuplelor din clasa respectivă					Gradul de mobilitate		Nr.	Clasa şi numărul cuplelor din clasa respectivă					Gradul de mobilitate	
	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	M_i	fig.		C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	M_i	fig.
1	c	0	0	0	0			15	$c-2$	0	0	0	2		
2	$c-1$	1	0	0	0			16	$c-3$	3	0	0	0		
3	$c-1$	0	1	0	0			17	$c-3$	2	1	0	0		
4	$c-1$	0	0	1	0			18	$c-3$	2	0	1	0		
5	$c-1$	0	0	0	1			⋮							
6	$c-2$	2	0	0	0			i	0	0	1	2	$c-3$		
7	$c-2$	1	1	0	0			$i+1$	0	0	1	1	$c-2$		
8	$c-2$	1	0	1	0			$i+2$	0	0	1	0	$c-1$		
9	$c-2$	1	0	0	1			$i+3$	0	0	0	c	0		
10	$c-2$	0	2	0	0			⋮							
11	$c-2$	0	1	1	0			$c-3$	0	0	0	3	$c-3$		
12	$c-2$	0	1	0	1			$c-2$	0	0	0	2	$c-2$		
13	$c-2$	0	0	2	0			$c-1$	0	0	0	1	$c-1$		
14	$c-2$	0	0	1	1			c	0	0	0	0	c		

Tabela structurală astfel întocmită servește proiectanților în sinteza mecanismelor prin faptul că aceasta redă imaginea clară și precisă a posibilităților (combinațiile de cuple) de a obține variante structurale cu gradul de mobilitate $M = 1$. Folosirea în practică a uneia din variantele prezentate, necesită în prealabil un studiu cinematic și dinamic, ceea ce nu constituie obiectul acestei lucrări dar pe care proiectantul îl poate face cînd pe baza variantei structurale stabilite se concep mai multe variante constructive care diferă între ele prin dimensiunile elementelor și prin poziția relativă a cuplelor (fig. 3 și fig. 4).

4. NUMĂRUL VARIANTELOR DE BAZĂ ALE UNUI MECANISM CU n ELEMENTE ȘI CU c CUPLE (VARIANTE DE TIP nc)

Tabela structurală scoate în evidență că un mecanism cu n elemente are o mulțime finită de variante structurale care diferă între ele numai prin clasa și numărul cuplelor din aceeași clasă care intră în compunerea acestuia. Mulțimea de variante structurale poate fi cunoscută efectuînd toate combinațiile posibile între cele c cuple din cele cinci clase de cuple existente. Presupunem că în structura mecanismului nu intră elemente și cuple pasive. Analiza atentă a tabelei structurale conduce la următoarele constatări importante :

a) Dacă toate cele c cuple sînt din clasa V sau mecanismul face parte din familia IV, în sens Dobrovolski, numărul variantelor structurale de bază ale mecanismului este

$$k_4 = 1 \tag{5}$$

Această afirmație este scoasă în evidență de linia 1 din tabela structurală (tabela II). Toate cuplele fiind de clasa V înseamnă că există o singură variantă structurală de bază cu simbolul literal de forma

$$CCC \ldots C \tag{6}$$

unde cuplele C de clasa V sînt în număr de c.

De asemenea, dacă mecanismul face parte din familia IV înseamnă că în structura sa intră numai cuple de clasa V deci cuple de un singur tip cu care, evident, se poate forma o singură variantă de bază.

b) Dacă în compunerea mecanismului intră cuple din clasa V și cuple din clasa IV sau mecanismul face parte din familia III atunci numărul de variante de bază este

$$k_3 = c + 1. \tag{7}$$

Această relație este suma seriei

$$k_3 = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1 = c + 1. \tag{8}$$

Variantele structurale de bază ale unui mecanism, în structura căruia intră cuple de clasa V și cuple de clasa IV, notate cu C respectiv P, în număr de c, sînt de forma

$$\underbrace{CCC \ldots C}_{c-k}\underbrace{PPPP \ldots P}_{k} \tag{9}$$

unde $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, c$.

Este evident că numărul total al acestor variante este dat de relația (7).

De asemenea, dacă mecanismul face parte din familia III înseamnă că în structura sa intră numai cuple de clasa V și cuple de clasa IV deci cuple de două tipuri cu care, evident, se pot forma $c+1$ variante.

În tabela II variantele de bază cu cuple C și cuple P sînt date de liniile 1, 2, 6, 16,... adică liniile de forma $C_5 = c-k$ și $C_4 = k$.

c) Dacă în compunerea mecanismului intră cuple din clasele V, IV și III sau mecanismul face parte din familia II, atunci numărul variantelor este

$$k_2 = \frac{(c+1)(c+2)}{2}. \tag{10}$$

Această relație este suma seriei

$$k_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + c + c + 1. \tag{11}$$

Variantele structurale de bază în care intră cuple C, P și T sînt de forma

$$\underbrace{CCC \ldots C}_{l}\,\underbrace{PPP \ldots P}_{m}\,\underbrace{TTT \ldots T}_{n}, \tag{12}$$

unde $l+m+n = c$ și $1, m, n, = 0, 1, 2, 3, \ldots, c$.

Se observă de aici că dacă $l = c$ (linia 1 din tabela II) rezultă o singură variantă de forma

$$\underbrace{CCC \ldots C}_{l=c} \tag{13}$$

Dacă $l=c-1$ atunci numărul variantelor este 2 și acestea sînt de forma

$$\underbrace{CCC \ldots C}_{l=c-1}P; \quad \underbrace{CCCC \ldots C}_{l=c-1}T \tag{14}$$

și sînt date de liniile 2 și 3 din tabela II.

Dacă $1 = c - 2$ atunci numărul variantelor este 3 și anume

$$\underbrace{CCC \ldots C}_{l=c-2}PP; \quad \underbrace{CCC \ldots C}PT \text{ și } \underbrace{CCC \ldots C}TT \tag{15}$$

Aceste variante sînt date de liniile 6, 7 și 10 din tabela II.

Continuarea raționamentului pînă la $l = 0$ conduce la seria (11) deci la relația (10).

d) Dacă în compunerea mecanismului intră cuple cinematice din clasele V, IV, III și II sau mecanismul face parte din familia I atunci numărul de variante de bază este

$$k_1 = \sum_{i=1}^{c+1} u_i = \sum_{i=1}^{c+1} (u_{i-1} + i), \tag{16}$$

unde u_i este termenul de rang i al sumei și $u_0 = 0$.

Această relaţie provine din seria

$$k_1 = 1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + \ldots \tag{17}$$

obţinută printr-un raţionament similar ca la punctul precedent. Termenul general al seriei (17) este

$$u_i = u_{i-1} + i. \tag{18}$$

e) Dacă în compunerea mecanismului intră cuple din toate clasele sau mecanismul face parte din familia 0 atunci numărul variantelor este dat de relaţia

$$k_0 = \sum_{i=1}^{c+1} u_i = \sum_{i=1}^{c+1} \left\{ u_{i-1} + \frac{i\,(i+1)}{2} \right\}, \tag{19}$$

unde u_i este termenul de rang i al sumei şi $u_0 = 0$.

Această relaţie provine din seria

$$k_0 = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + \ldots \tag{20}$$

în care fiecare termen reprezintă de fapt numărul variantelor din tabela II corespunzătoare la $C_5 = c$; $C_5 = c-1$; $C_5 = c-2$ etc.

Termenul general al seriei (20) este

$$u_i = u_{i-1} + \frac{i\,(i+1)}{2}. \tag{21}$$

5. EXEMPLU NUMERIC

Să considerăm un mecanism cu $n = 3$ elemente şi $c = 3$ cuple.

Tabela structurală a acestui mecanism este dată în tabela III.

Conform relaţiilor stabilite anterior se obţine:

Cazul a: $k_4 = 1$.

Pe tabel, acest caz este dat de linia 1 sau coloana M_4.

Cazul b: $k_3 = c + 1 = 3 + 1 = 4$.

Pe tabel, acest caz este dat de liniile 1, 2, 6, 16 respectiv coloana M_3.

Cazul c:

$$k_2 = \frac{(c+1)\,(c+2)}{2} = \frac{(3+1)\,(3+2)}{2} = 10.$$

Pe tabel, acest caz este dat de liniile 1, 2, 3, 6, 7, 10, 16, 17, 20, 26 respectiv coloana M_2.

Cazul d:

$$k_1 = \sum_{i=1}^{c+1} (u_{i-1} + i) = 1 + 3 + 6 + 10 = 20.$$

Pe tabel, acest caz este dat de liniile 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 23, 26, 27, 29, 32 respectiv coloana M_1.

Cazul e:

$$k_0 = \sum_{i=1}^{c+1} \left\{ u_{i-1} + \frac{i\,(i+1)}{2} \right\} = 1 + 4 + 10 + 20 = 35.$$

Pe tabel, acest caz este dat de liniile $1 \div 35$, respectiv coloana M_0.

Tabela III

Nr.	Numărul cuplelor din clasa c_i					Gradul de mobilitate al mecanismului din familia i								
	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	M_0	fig.	M_1	fig.	M_2	fig.	M_3	fig.	M_4	fig.
1	3	0	0	0	0	−3		−2		−1		0		1	
2	2	1	0	0	0	−2		−1		0		1		×	
3	2	0	1	0	0	−1		0		1		×		×	
4	2	0	0	1	0	0		1		×		×		×	
5	2	0	0	0	1	1		×		×		×		×	
6	1	2	0	0	0	−1		0		1		2		×	
7	1	1	1	0	0	0		1		2		×		×	
8	1	1	0	1	0	1		2		×		×		×	
9	1	1	0	0	1	2		×		×		×		×	
10	1	0	2	0	0	1		2		3		×		×	
11	1	0	1	1	0	2		3		×		×		×	
12	1	0	1	0	1	3		×		×		×		×	
13	1	0	0	2	0	3		4		×		×		×	
14	1	0	0	1	1	4		×		×		×		×	
15	1	0	0	0	2	5		×		×		×		×	
16	0	3	0	0	0	0		1		2		3		×	
17	0	2	1	0	0	1		2		3		×		×	
18	0	2	0	1	0	2		3		×		×		×	
19	0	2	0	0	1	3		×		×		×		×	
20	0	1	2	0	0	2		3		4		×		×	
21	0	1	1	1	0	3		4		×		×		×	
22	0	1	1	0	1	4		×		×		×		×	
23	0	1	0	2	0	4		5		×		×		×	
24	0	1	0	1	1	5		×		×		×		×	
25	0	1	0	0	2	6		×		×		×		×	
26	0	0	3	0	0	3		4		5		×		×	
27	0	0	2	1	0	4		5		×		×		×	
28	0	0	2	0	1	5		×		×		×		×	
29	0	0	1	2	0	5		6		×		×		×	
30	0	0	1	1	1	6		×		×		×		×	
31	0	0	1	0	2	7		×		×		×		×	
32	0	0	0	3	0	6		7		×		×		×	
33	0	0	0	2	1	7		×		×		×		×	
34	0	0	0	1	2	8		×		×		×		×	
35	0	0	0	0	3	9		×		×		×		×	

6. CONCLUZII

Folosirea în practică pe o scară mai largă a mecanismelor spațiale impune mai întîi o clarificare a problemelor legate de analiza și sinteza structurală a acestora. În acest scop este propusă *tabela structurală* pentru variantele de bază care reunește toate variantele de bază ale mecanismului cu n elemente și c cuple, din care proiectantul alege pentru studiul cinematic și dinamic pe cele cu gradul de mobilitate $M = 1$ sau în anumite cazuri, pe cele cu $M = 2$, iar din acestea se remarcă cele în structura cărora intră și o cuplă de clasa V deoarece acționarea este mai simplă.

O mare atenție trebuie să se acorde de la început analizei structurale pentru a se evita mișcările parazite care pot induce în eroare asupra gradului de mobilitate real, utilizabil în practică.

Relațiile date în lucrare pentru determinarea numărului variantelor structurale de bază în cazul cel mai general al unui mecanism spațial cu n elemente și c cuple cinematice ajută la verificarea întocmirii corecte a tabelei structurale corespunzătoare. Tabela structurală propusă în această lucrare constituie prima etapă în rezolvarea problemelor legate de sinteza structurală a mecanismelor deoarece dă toate variantele de bază ale unui mecanism cu $c = \sum_{j=1}^{5} C_j$ cuple cinematice. Cu alte cuvinte, dîndu-se n elemente pe care vrem să le unim cu c cuple cinematice, din tabela structurală putem să determinăm clasa și numărul cuplelor din fiecare clasă astfel ca să obținem un mecanism cu un grad de mobilitate dorit. Este evident că tabela structurală în forma propusă indică numai posibilitatea formării unui mecanism din n elemente și c cuple, ea nu arată însă și modul de succesiune, de dispunere a elementlor și cuplelor din fiecare clasă astfel ca să obținem un mecanism.

Asupra determinării variantelor structurale concrete (a grafurilor asociate) pentru mecanismele plane s-au scris suficiente lucrări și s-au propus metode concrete de lucru, problema putînd fi considerată aproape rezolvată [6]. Extinderea rezultatelor obținute în domeniul mecanismelor plane și la mecanismele spațiale va constitui un pas înainte în rezolvarea problemelor legate de analiza și sinteza structurală a acestora.

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Structura și cinematica mecanismelor*, Edit. tehnică, 1959.
2. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor și mașinilor*. Edit. tehnică, 1955.
3. V. A. Zinoviev, *Mecanisme spațiale* (lb. rusă), Gostehizdat, 1952.
4. N. I. Manolescu, *O metodă unitară de alcătuire a lanțurilor cinematice și a mecanismelor plane articulate de diferite grade de libertate și mobilitate*, St. cerc. mec. apl., *6* (1964).
5. E. Bugajevski, R. Bogdan, Cr. Pelecudi, *Contribuții la clasificarea mecanismelor spațiale*, St. cerc. mec. apl., **X**, *1* (1959).
6. R. Voinea, M. Atanasiu, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, Edit. tehnică, 1964.
7. A. Raicu, *Analiza structurală a mecanismului patrulater spațial*, Comunicare la Sez. șt. I.P.G.G., mai, 1967.

RECENZII

Le rôle de la mécanique des fluides dans les progrès récents des techniques. 846 p. + 530 fig, 103 photos, 38 tabele Eyrolles, Paris, 1967

Această lucrare monumentală este constituită din rapoartele prezentate la Conferința Societății Hidrotehnice din Franța, Paris, Iunie 1967, și este consacrată numeroaselor procese naturale și industriale de transport și transmisie a materiei, energiei și informației cu ajutorul fluidelor. Ea cuprinde șapte capitole : Transportul fluidelor prin conducte pe distanțe mari ; Lagăre cu aer și articulații etanșe, Transmisii hidraulice de putere ; Automatizare și comandă prin fluide (pneumonică) ; Tehnică auto ; Tehnică navală ; Tehnică de chimie industrială.

Printre lucrările primului capitol menționăm pe cele care se referă la studiul loviturii de berbec în conducte, transportul fluidelor ne-newtoniene în conducte relativ lungi, traseele optime ale conductelor magistrale și în sfîrșit curgerea lichidelor calde prin sonde. Lucrările au un caracter de aplicabilitate în industria extractivă de petrol și gaze precum și în cea chimică, studiindu-se problemele la un înalt nivel științific, preconizîndu-se soluții efective care pot fi aplicate în practică. În acest sens remarcăm lucrarea „Transportul fluidelor ne-newtoniene prin conducte care permite determinarea presiunii de vehiculare a fluidelor ne-newtoniene pentru un debit dat, printr-o conductă cu caracteristici cunoscute". De asemenea menționăm studiul asupra distribuției de temperaturi într-un tub vertical în condițiile regimului termic nestaționar, care a permis să se determine timpul de stabilizare a temperaturii la extremitatea tubului în funcție de perturbația de la celălalt capăt.

În al doilea capitol se prezintă o serie de articole interesante care conțin aplicații remarcabile de mașini pe lagăre cu aer. Menționăm astfel realizările firmei Rateau, cu privire la instalațiile nucleare (cu puteri pînă la 250 HP turații 24 000 rot/min și timp de funcționare 300—500 ore), de asemenea realizarea firmei Sulzer privind compresoarele de gaze pe lagăre cu aer, turbo-suflantele pe lagăre cu aer realizate de CEM-SNECMA, Rateau și Hispano-Suiza, ca și unele lucrări care analizează probleme de calcul și proiectare a lagărelor cu aer în vederea altor aplicații.

În capitolul al treilea consacrat transmisiilor hidraulice de putere sînt tratate probleme în legătură cu transmisia unei anume cantități de energie într-un organ motor și un receptor cu ajutorul unui fluid, fie prin presiunea (transmisii hidrostatice) fie prin energia cinetică (transmisii hidrocinetice) a acestuia. Sînt prezentate realizări și studii asupra organelor de transmisie hidrostatică, hidrocinetică (convertizoare cu transmisie la distanță), asupra distribuitoarelor ca și diverse alte aplicații (transmisii hidraulice la SNCF, comenzi de zbor ale avionului, ale corpurilor balistice, tren de aterisaj etc.).

La capitolul IV — comandă și automatizare prin fluide — se relevă rolul deosebit de important și actual jucat de servo-comenzile hidraulice și pneumatice în diferitele ramuri ale tehnicii (turbine, mașini unelte, pneumonică etc). Se desprinde astfel expunerea automatelor pentru uzinele generatoare electrice, ca reglajul hidraulic al turbinelor Pelton de la marea suflerie

Modano-Avrieux (50 MW) sau sistemul de reglaj al turbinelor Pierre-Bénite. De asemenea menționăm automatele hidraulice și pneumatice pentru fabricile de mașini unelte (comenzi pneumatice și oleo-pneumatice), apoi aplicațiile particulare la comenzile unui automobil, la o mașină de forjat resoarte, ca și la automatizarea unui furnal. În aceeași categorie intră și descrierea aparatelor automate destinate uzinelor electrice ca cele care asigură reglajul debitelor în zonele de variații puternice sau comanda pneumatică de amorsare a instalațiilor sifon.

De o factură mai științifică se prezintă aplicațiile din automatizare cu jeturi fluide (Pneumonică) prezentate cu studii experimentale asupra unui amplificator fluid proporțional sau calcule privind devierea jeturilor pe pereții curbi, precum și schemele circuitelor logice cu comenzi electropneumatice.

Foarte utile și spectaculare sînt aplicațiile din tehnica automobilului (capitolul V), cu privire la două aspecte:

— alimentarea cu aer a motoarelor;

— utilizarea fluidelor în organele care realizează funcțiuni de transmitere, suspensie și frînare.

Sînt prezentate rezultatele teoretice, scheme de calcul și date tehnice privitoare la supraalimentare, efectul Kadenacy, transmisii hidrocinetice cu convertizor de cuplu, suspensii oleopneumatice, pneumatice și hidro-pneumatice, corector de frînare etc. De asemenea sînt remarcabile aplicațiile hidraulice la tractoarele agricole precum și la bancurile de încercări pentru motoare termice.

Aplicațiile hidraulicei în tehnica navală sînt evidente și lucrarea cuprinde ultimele noutăți în materie (capitolul VI), ca: reducerea rezistenței de val a navelor, caracteristici hidrodinamice optime ale profilelor imerse, optimizarea sistemelor de propulsie pentru hidroptere, naviplanul aeroglisor marin cu perne de aer multiple (proiecte și modele), vehicule diverse cu pernă de aer, platforme flotante de foraj, propulsia prin jeturi a navelor.

În ultimul capitol sînt arătate aplicații ale mecanicii fluidelor în chimia industrială, referitoare la tehnica specială de transport și dozaj al fluidelor (ca elevator cu bule de aer, aparate cu jet și pînze speciale), tehnici de amestec, separare și contact (centrifugele), tehnici de schimbare de stare (evaporare-distilare) (ca cicloanele, evaporatoare tubulare etc.), tehnici de filtrare și fluidizare.

Lucrarea se încheie cu discuții care îmbogățesc conținutul lucrării în date tehnice și perspective de aplicații.

În ansamblu se poate spune că această lucrare nu numai că demonstrează grandios rolul mecanicii fluidelor în tehnica actuală și cea de perspectivă, dar poate servi direct proiectantului, inginerului, cercetătorului și oricui are contingență activă cu aspectele tehnicii moderne.

Șt. Săvulescu

CHRISTOF ROHRBACH, *Handbuch für elektrisches Messen mechanischer Grössen* (*Manual pentru măsurarea electrică a mărimilor mecanice*), *VDI-Verlag, Düsseldorf, 1967.*

În lucrarea citată, autorul, ajutat de o serie de colaboratori, tratează ampla problemă a măsurării prin metode electrice a variatelor mărimi din mecanica solidelor sau a fluidelor.

Într-un prim capitol, intitulat „Generalități" se face o comparație între măsurarea mecanică și cea electrică, se descrie organizarea unei măsurări și se definesc mărimile care intervin în această problemă.

Al doilea capitol se ocupă de materialele elastice care se folosesc în construcţia aparatelor de măsură, descriind proprietăţile acestora şi factorii care le pot modifica.

Capitolul al treilea este intitulat „dinamica traductorilor (captorilor)". Aici se examinează cele mai variate probleme ale dinamicii captorilor : comportarea la acţiuni periodice şi neperiodice a captorilor cu arc de masă neglijabilă, a celor cu element elastic cu masă continuă, corecţii, etalonări.

În al patrulea capitol se descriu principalele tipuri de captori folosiţi în tehnică : rezistivi, capacitivi, inductivi, transformatori, de inducţie, magnetostrictivi, piezoelectrici, fotoelectrici etc.

Capitolul următor descrie montajele în care se leagă captorii, în vederea amplificării şi transmiterii semnalelor. Se descriu diferitele montaje în circuite de măsurare, amplificatorii, transmiterea semnalelor fără fir, contactoarele rotative, transformatoare analogice şi digitale.

Capitolul al şaselea se ocupă de aparatele indicatoare şi înregistratoare pentru semnale : aparate indicatoare analogice, digitale şi înregistratoare, aparate înregistratoare digitale, înregistratoare cu bandă magnetică.

Ultimul capitol este intitulat „metode şi dispozitive de măsurare". Se arată aici metodele de măsurare pentru principalele mărimi : timp, deplasări, lungimi, deformaţii, unghiuri, viteze şi turaţii, acceleraţii liniare şi unghiulare, forţe, cupluri, presiuni.

Lucrarea se încheie cu o amplă listă bibliografică, de 50 pagini, clasificată după materialul tratat.

Monografia reprezintă rezultatul unei îndelungate experienţe a autorului şi a colaboratorilor săi, precum şi sinteza celor mai noi lucrări din literatură în acest domeniu. Expunerea este bine sistematizată, concisă şi clară, iar ilustraţiile sînt executate în cele mai bune condiţiuni. Notăm că autorul a mai publicat, în 1958, împreună cu K. Fink, o carte despre tensometrie, cunoscută la noi şi bine apreciată de cercurile de specialişti.

Noua lucrare este deosebit de utilă specialiştilor care lucrează în laboratoare şi uzine şi va contribui la progresul tehnicei măsurării mărimilor mecanice.

Prof. Gh. Buzdugan

Dr. Ing. FRIEDRICH MANG, *Berechnung und Konstruktion ringversteifter Druckrohrleitungen* (Calculul şi construcţia conductelor forţate rigidizate cu inele), Springer-Verlag, Berlin (Heidelberg) New York, 120 fig., 175 pag., 1966.

În domeniul construcţiilor hidroenergetice, literatura de specialitate a cunoscut o îmbogăţire considerabilă în ultimile decenii cu publicaţii într-un număr impresionant, repartizate însă mai puţin egal pe diferitele obiecte ale amenajărilor hidrotehnice şi hidroenergetice. Un domeniu în care există încă puţine cărţi de sinteză i este şi cel al conductelor forţate.

De la apariţia cărţii devenită clasică a lui Hruschka din 1929, „Druckrohrleitungen" apare abia după circa 25 ani o carte care tratează aceeaşi problemă : U. Belometti „Condotte forzate", iar după cîţiva ani o nouă contribuţie tratînd însă numai o problemă restrînsă din diversitatea problemelor complexe anume „Calculul şi construcţia pieselor de ramificaţie" *).

Recent literatura tehnică a fost îmbogăţită cu o nouă carte scrisă de un specialist format în cadrul politehnicii din Karlsruhe cunoscută prin cercetările şi din domeniul construcţiilor metalice hidroenergetice ale profesorului Dr. Ing. Steinhardt.

*) Recenzat St. cerc. mec. apl., **17**, *5* (1964).

Cartea a fost concepută ca un îndrumător pentru calcule statice, de rezistență și de concepție constructive, privind realizarea conductelor forțate sau a unor construcții metalice similare.

Problema modului de rezemare a conductelor, parte importantă a calculului și a alcătuirii constructive a conductei, este obiectul unic, precizîndu-se încă de la început cadrul de strictă specialitate în cadrul căreia se desfășoară expunerea.

Problemele statice care apar în zona rezemării unei suprafețe cilindrice subțiri sînt analizate cu minuțiozitate, insistîndu-se asupra bazelor de calcul ale mărimilor statice și ale deformațiilor, ținînd seama de faptul că în dreptul unui inel de rezemare continuitatea eforturilor este modificată prin introducerea unui element portant, care transmite eforturile la fundație (șei).

Miezul problemei însă îl constituie analiza sistematică și exhaustivă la nivelul cunoștințelor tehnice actuale a sistemelor de rezemare ale inelelorconductelor.

Plecînd de la procedeul de calcul al lui Karlsson, prin care se determină repartiția momentelor la un inel datorit unor forțe de rezemare orizontale și verticale se cercetează prin calcule detaliate, opt cazuri de rezemare. Calculul momentelor și a elementelor statice s-a făcut pentru fiecare caz separat. La calculul practic s-au folosit formulele deduse cu ajutorul unui calculator automat tip Z 22 al politehnicii din Karlsruhe, iar rezultatele s-au transpus în grafice care fac parte din ultimul capitol al cărții. Programele au fost transpuse în limbajul ALGOL.

Prin vastitatea cazurilor date, prin procedeele clare de calcul, orice sistem inelar cu orice gen de forțe este succesibil unui calcul relativ nu prea complicat, punîndu-se în mîna inginerului o carte de o deosebită valoare, avînd posibilitatea de a aplica considerațiile generale și asupra unor sisteme de conducte care au o altă destinație decît cea din hidroenergetică.

Acestea găsesc din ce în ce mai mult o întrebuințare multiplă datorită importanței rețelelor tehnice în etapa actuală de dezvoltare a industriei și anume conducte metalice îngropate în pămînt.

Măsurători efectuate la conducte îngropate cu inele de rigidizare au arătat o concordanță bună cu elementele determinate prin calcul astfel încît ipotezele de calcul pot fi considerate ca juste.

Materialul grafic prezentat sub formă de anexă, întregește această lucrare de o deosebită utilitate pentru inginerul proiectant dar și pentru cercetătorul din domeniul staticei construcțiilor speciale, căruia i se deschid perspective noi de cercetare și perfecționare a construcțiilor.

Mai trebuie menționată o listă bibliografică cu enumerarea a 110 lucrări originale.

Și de data aceasta Editura Springer are o binemeritată contribuție, îmbinînd armonios prezentarea materialului bogat grafic cu redarea impecabilă a simbolismului matematic. Prin aceasta, dovedește din nou grija pentru îmbinarea armonioasă a conținutului profund științific al cărții cu prezentare de înalt nivel.

Ing. Robert Möckesch

R #2557
4-6
46
927

4

TOMUL 27
1 9 6 8

1968 DEC 2 8

STUDII SI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. **E. CARAFOLI** — *redactor responsabil,*
Acad. **D. DUMITRESCU** — *redactor responsabil adjunct,*
Prof. **I. ANTON**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **CONSTANTIN AVRAM**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. **ȘTEFAN BĂLAN**,
Prof. **GH. MANEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **GR. MATEESCU**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. **N. PATRAULEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **N. TIPEI**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. **RADU VOINEA**, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Conf. **RADU C. BOGDAN**,
T. OROVEANU, *secretar de redacție.*

Pentru a se asigura colecția completă și primirea la timp a revistei, reînnoiți abonamentul dv. pe anul 1969.
În țară, abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la CARTIMEX, București, Căsuța poștală 134 — 135, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN
Redacția: **București,**
str. Const. Mille 15, tel. 13.83.26

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2553
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

1989

CONFERINȚA INTERNAȚIONALĂ ASUPRA TORSIUNII, FORFECĂRII ȘI ADERENȚEI ÎN BETONUL ARMAT ȘI PRECOMPRIMAT

14 — 17 ianuarie 1969

Conferința internațională asupra forfecării, torsiunii și aderenței în betonul armat și preconprimat, organizată de Colegiul de tehnologie P S G, Universitatea Madras și de Centrul de cercetări asupra ingineriei construcțiilor, Consiliul cercetărilor științifice și industriale al Guvernului Indian, va avea loc între 14 și 17 ianuarie 1969 la Colegiul de tehnologie P S G, Coimbatore — 4, India.
Invitația de a trimite articole originale, nepublicate și avînd legătură directă cu subiectul conferinței este adresată tuturor țărilor.
Propunerile autorilor, conținînd un titlu scurt al articolului, numele, funcția și adresa împreună cu un rezumat scurt dar suficient de amănunțit pentru aprecierea și acceptarea lucrării trebue să fie trimise pînă la 31 iulie 1968.
Autorii vor fi încunoștiințați asupra acceptării pînă la 15 septembrie 1968.
Manuscrisele complete, pregătite în conformitate cu amănuntele de publicare ce vor fi trimise o dată cu notificarea de acceptare, trebuie să parvină Secretariatului de organizare înainte de 15 noiembrie 1968.
Toate articolele acceptate, indiferent dacă sînt prezentate oral sau nu, vor fi cuprinse în dările de seamă ale Conferinței ce se vor publica mai tîrziu.

Vă rugăm a trimite orice comunicare pe adresa

Dr. V. RAMAKRISHNAN
ORGANIZING SECRETARY PROFESSOR AND HEAD
DEPARTMENT OF CIVIL ENGINEERING P S G COLLEGE OF TECHNOLOGY
COIMBATORE 4
INDIA

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratolvasó
249/1969

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 27, nr. 4 1968

SUMAR

STUDII

Pag.

E. CARAFOLI, D. PANTAZOPOL, Scurgerea supersonică plană a doi curenţi gazoşi separaţi printr-o pînză de jet 661

IOAN ANTON, OCTAVIAN POPA, Incipienţa fenomenului de cavitaţie în mişcări plane şi periodice 677

T. OROVEANU, Asupra utilizării metodei caracteristicilor în studiul unor scurgeri lente ale gazelor 699

I. SPULBER, Influenţa variaţiei viscozităţii asupra curgerii gazelor prin medii poroase 711

R. CHALÉAT, M. N. OGUZTÖRELI, D. MANGERON, Analiza numerică a micilor oscilaţii în funcţie de amplitudinea lor 723

T. HACKER, E. MĂLAIU, Unele probleme ale stabilizării optimale a zborului . . . 745

FL. DIMOFTE, Asupra influenţei unor cîmpuri electrice transversale şi cîmpuri magnetice tangenţiale în lubrificaţia cu gaze 757

GH. VASILCA, VETURIA RASZILLIER, Influenţa procesului de alunecare asupra suprafeţelor lubrifiate cu apă 771

OLGA BIŢĂ, I. DINCĂ, Aspecte experimentale ale influenţei mediului lubrifiant asupra rezistenţei la oboseală a oţelului de rulmenţi 783

S. RĂUTU, V. BĂNUŢ, Utilizarea calculatoarelor electronice în calculul static al structurilor formate din bare 791

TOMA PANĂ, Calculul barelor cu pereţi subţiri avînd profilul închis încărcate cu sarcini perturbatoare periodice 803

A. ORĂNESCU, Aplicarea metodei schimbării elementului conducător pentru rezolvarea cinetostaticei mecanismelor complexe 811

I. SZÉKELY, V. HANDRALUCA, Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale cu mai multe grade de mobilitate cu ajutorul funcţiilor de transmitere 821

NOTE

MARIA ARSENIE, DUMITRU ARSENIE, Consideraţii variaţionale asupra pierderilor de energie în curgerea laminară a lichidelor newtoniene în conducte rectilinii de secţiune circulară 829

I. ILIUC, Importanţa purităţii lubrifiantului în reproductibilitatea măsurătorilor coeficientului de frecare 835

RECENZII 841

St. cerc. mec apl., Tom. 27, Nr. 4, p. 659 — 844, Bucureşti, 1968

SCURGEREA SUPERSONICĂ PLANĂ A DOI CURENȚI GAZOȘI SEPARAȚI PRINTR-O PÎNZĂ DE JET

de E. CARAFOLI și D. PANTAZOPOL
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

533

În lucrare se consideră două scurgeri supersonice plane de gaze ideale, separate printr-un perete solid rectiliniu, care se termină într-un punct oarecare. Din acest punct țîșnește un jet în formă de pînză subțire, cu o înclinare oarecare față de direcția peretelui (fig. 1). În avalul acestui punct, cele două scurgeri vor fi deviate, iar jetul deviator (*jet-flap*) apare în planul mișcării ca o linie curbă, necunoscută apriori. Determinarea acestei curbe constituie obiectul lucrării de față. Metoda prezentată este bazată pe o formulă stabilită într-o lucrare anterioară [3], care dă coeficientul de presiune în funcție de deviație sub o formă foarte simplă, permițînd astfel fără dificultate determinarea ecuațiilor parametrice ale liniei de jet. De îndată ce această linie este determinată, se pot calcula toate caracteristicile mișcării (presiuni, viteze etc.) în funcție de deviație. Se prezintă exemple de calcul.

1. INTRODUCERE

Într-o lucrare anterioară [2] am considerat scurgerea supersonică plană a unui gaz perfect, deviat cu ajutorul unei pînze de jet (*jet-flap*) în cazul în care de cealaltă parte a pînzei de jet se găsea atmosferă în repaus.

În lucrarea de față vom studia mișcarea supersonică plană compusă din doi curenți de gaze perfecte, care se scurg de o parte și de alta a unui perete semiinfinit rectiliniu NA (fig. 1). În punctul A peretele se întrerupe. Din acest punct țîșnește pînza de jet AP sub unghiul δ_A față de direcția peretelui solid NA, separînd în continuare cei doi curenți gazoși. Referindu-ne la curentul de deasupra peretelui NA, al cărui număr Mach amonte l-am notat cu $M_{1\infty}$, observăm că în punctul A ia naștere o undă de șoc atașată AS, corespunzătoare unghiului δ_A, pe care îl vom presupune mai mic decît unghiul critic al curentului respectiv. Gazul va fi astfel comprimat brusc, curentul rămînînd însă supersonic.

Vom nota cu M_{1A} și p_{1A} numărul Mach și, respectiv, presiunea în punctul A după unda de șoc.

În ceea ce privește curentul de sub peretele NA al cărui număr Mach amonte l-am notat cu $M_{2\infty}$, acesta va suferi o expansiune Prandtl-

Mayer AEE' pînă la deviația δ_A. Vom nota cu M_{2A} și p_{2A} numărul Mach și, respectiv, presiunea în punctul A după această expansiune.

În continuare, poate avea loc scurgerea indicată în figura 1, în care curentul de deasupra suferă o destindere continuă, în timp ce curentul de dedesubt suferă o compresiune continuă pînă la o presiune comună la infinit aval, pe care o vom nota cu p'_∞.

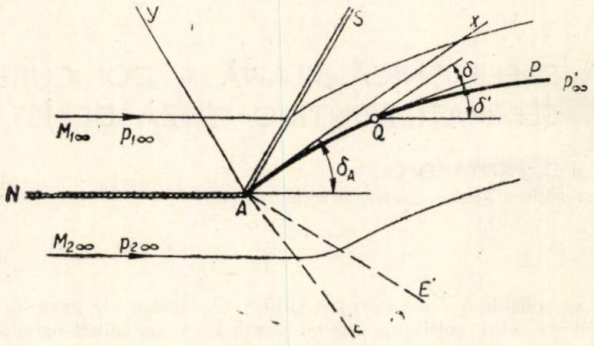


Fig. 1

Evident, în funcție de presiunile inițiale ale celor doi curenți, precum și de unghiul δ_A, se poate întîmpla și cazul contrar, cînd curentul de deasupra este comprimat continuu, în timp ce curentul de dedesubt este destins continuu pînă la o presiune comună. În acest caz, linia de jet AP va avea o curbură inversă celei indicate în figura 1.

Ca și în lucrarea anterioară [1], vom nota cu δ' deviația într-un punct oarecare Q al liniei de jet față de direcția inițială NA a celor doi curenți și cu δ deviația în același punct față de axa Ax, tangentă în A la linia de jet. De asemenea vom lua în considerare numai mișcarea de după punctul A, presupunînd, la fel ca în [1], că valorile M_{1A}, M_{2A}, p_{2A}, p_{1A} sînt gata calculate în funcție de $M_{1\infty}$, $M_{2\infty}$, $p_{1\infty}$, $p_{2\infty}$ și δ_A, după formulele clasice sau, mai simplu, după metoda indicată în [2].

2. FORMULE DE BAZĂ

Pentru obținerea soluției vom recurge și de data aceasta la formula stabilită în lucrarea [3]:

$$C_{p_i} = \frac{\gamma_i + 1}{2} m_{iA}^2 \sin^2\delta + \frac{2m_{iA}}{M_{iA}} \sin\delta \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_i + 1}{4}\right)^2 M_{iA}^2 m_{iA}^2 \sin^2\delta}, \quad (1)$$

$i = 1, 2,$

unde γ_i este raportul căldurilor specifice ale gazului i, iar

$$C_{p_i} = \frac{p_i - p_{iA}}{p_{iA}} \cdot \frac{2}{\gamma_i p_{iA}^2} \quad (2)$$

este coeficientul de presiune într-un punct în care deviaţia este δ (fa de axa An); prin m_{iA} s-a notat)

$$m_{iA} = \frac{M_{iA}}{\sqrt{M_{iA}^2 - 1}}, \qquad i = 1, 2. \tag{3}$$

e
ă
l

După cum s-a arătat în [1], formula (1) este valabilă, în tre limit destul de largi, atît pentru compresiunea prin şoc, cît şi pen tru detent continuă. În cazul compresiunii prin şoc se va lua $\delta > 0$, iar în cazu detentei $\delta < 0$.

Mai înainte de a expune tratarea problemei de faţă, vo m arăta că formula (1) poate fi aplicată şi în cazul compresiunii continu e între anumite limite.

Pentru aceasta să considerăm *coeficientul de presiune ab solut* [1] al unui curent oarecare:

$$C_{p_i}^* = \gamma_i + 1 \; M_{iA}^2 \; C_{p_i} = \frac{\gamma_i + 1}{4\gamma_i} \; \frac{p - p_{iA}}{p_{iA}} \tag{4}$$

şi să punem [1]

$$K_i = \frac{\gamma_i + 1}{4} \; M_{iA} \; m_{iA} \sin \delta. \tag{5}$$

Introducînd (4) şi (5) în (1), obţinem

$$C_{pi}^* = K_i^2 + K_i \sqrt{1 + K_i^2}. \tag{6}$$

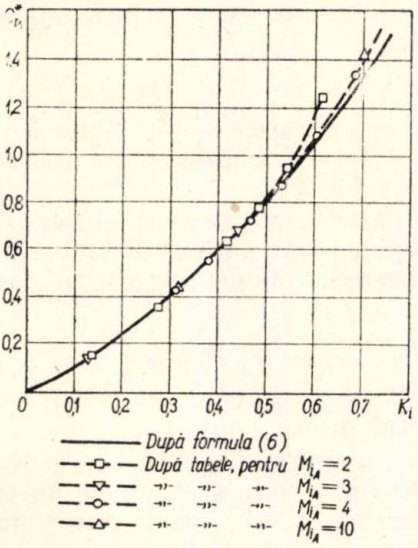


Fig. 2

În figura 2 s-a trasat curba $C_{p_i}^* = f(K_i)$ după (6) în comparaţie cu valorile obţinute pe baza formulelor referitoare la detenta Prandtl-Mayer [4], pornind însă de la numere Mach mari către numere Mach

mai mici, adică efectuînd de fapt o *compresiune continuă*. De aceea, pe figură, operația a fost denumită *compresiune Prandtl-Mayer*.

Se observă din diagramele respective că, pînă la valori ale lui K_i cuprinse între 0,5 și 0,6, coincidența dintre formula (6), respectiv (1), și formula Prandtl-Mayer este aproape perfectă, putînd fi considerată bună și ceva mai departe, cu excepția cazului cînd M_A are valori mici și se comprimă gazul pînă aproape de viteza critică (de ex., pentru $M_A = 2$, compresiunea este calculată pînă la $M_i = 1$ și în jurul acestei valori formula (6) nu se aplică; așa se explică diferențele ceva mai mari observate pe figură pentru acest caz).

Valoarea deviației pînă la care este valabilă formula (6) depinde, evident, de M_{iA}; de ex., pentru $M_{iA} = 2$, admițînd $K_i \leqslant 0{,}5$, se obține $\delta \leqslant \sim 20°$; pentru $M_{iA} = 4$, admițînd $K_i \leqslant \sim 0{,}7$, se obține $\delta \leqslant \sim 16°$, în timp ce pentru $M_{iA} = 10$, admițînd aceeași valoare $-0{,}7$ ca limită a coeficientului K_i, se obține $\delta \leqslant \sim 6°$. Aceste valori corespund intervalului aproximativ

$$1 \leqslant \frac{p_i}{p_A} < \sim 2{,}5 \tag{7}$$

al raportului dintre presiuni.

3. CONDIȚIA LA LIMITĂ PE LINIA DE JET

Notînd cu v_j, ρ_j și q_j respectiv viteza, densitatea și debitul pe unitatea de lățime ale pînzei de jet, vom întrebuința, ca în [1], ipoteza cunoscută că valoarea

$$I = \rho_j v_j q_j \tag{8}$$

rămîne constantă în lungul pînzei de jet. Această presupunere, utilizată curent în literatură, asigură valabilitatea rezultatelor cel puțin în apropierea punctului de ejecție A.

Considerînd un punct oarecare Q al pînzei de jet și notînd cu p_1 și p_2 presiunile în acest punct de o parte și de alta a pînzei de jet, se obține cu ușurință, prin aplicarea teoremei impulsului, următoarea condiție la limită:

$$p_1 - p_2 = -I \frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}s}, \tag{9}$$

unde $\mathrm{d}s$ este elementul de arc.

Dacă, așa cum s-a arătat mai înainte, considerăm scurgerea începînd numai din punctul A (fig. 1) spre aval, putem, în principiu, alege orice valori pentru numerele M_{1A} și M_{2A}, ca și pentru presiunile p_{1A} și p_{2A}. Generalitatea problemei nu se restrînge însă dacă vom presupune pentru fixarea ideilor că întotdeauna se realizează condiția

$$p_{1A} > p_{2A}, \tag{10}$$

indiferent deocamdată de raportul numerelor Mach.

În această situaţie, curentul superior se va destinde, iar cel inferior se va comprima, şi putem pune, folosind notaţia (5),

$$K_1 = \frac{\gamma_1+1}{4} M_{1A} \mathrm{m}_{1A} \sin \delta, \tag{11a}$$

$$K_2 = -\frac{\gamma_2+1}{4} M_{2A} \mathrm{m}_{2A} \sin \delta, \tag{11b}$$

unde $\delta < 0$, deoarece se măsoară de la axa An, aşa cum se vede pe figură.

Pe baza relaţiilor (11) putem pune

$$K_2 = -hK_1, \tag{12}$$

unde h este o constantă pozitivă, care poate fi mai mare, mai mică sau egală cu unitatea.

Vom căuta acum să punem condiţia la limită (9) în funcţie de parametrul K_1. Pentru aceasta vom observa mai întîi, în baza consideraţiilor din lucrarea [1] şi a celor făcute mai înainte în prezenta lucrare, că limitele admisibile de variaţie a parametrilor K_1 şi K_2 sînt

$$\sim -0{,}7 < K_1 \leqslant 0 \leqslant K_2 < \sim 0{,}6. \tag{13}$$

În aceste condiţii, putem pune, cu erori neglijabile, expresia (6) sub forma

$$C^*_{p_i} \simeq \pm K_i + K_i^2 \pm \frac{1}{2} K_i^3, \tag{14}$$

unde semnul plus va fi luat pentru $i = 1$, iar semnul minus pentru $i = 2$.

Ţinînd seama de (2), se obţine

$$p_1 - p_2 = p_{1A} - p_{2A} + \frac{4\gamma_1}{\gamma_1+1} p_{1A} C^*_{p_1} - \frac{4\gamma_2}{\gamma_2+1} p_{2A} C^*_{p_2}. \tag{15}$$

Introducînd (12) şi (14) în (15), putem scrie

$$p_1 - p_2 = 2P(K_1 - k)(K_1^2 + 2aK_1 + b), \tag{16}$$

unde

$$P = \frac{\gamma_1}{\gamma_1+1} p_{1A} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2+1} h^3 p_{2A}, \tag{17}$$

iar k este rădăcina reală a ecuaţiei de gradul trei

$$k^3 + \lambda_2 k^2 + \lambda_1 k + \lambda_0 = 0, \tag{18}$$

în care

$$\lambda_0 = \frac{1}{2P}(p_{1A} - p_{2A}), \tag{19a}$$

$$\lambda_1 = \frac{2}{P}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1+1} p_{1A} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2+1} h p_{2A}\right), \tag{19b}$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{P}\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_1+1} p_{1A} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2+1} h^2 p_{2A}\right). \tag{19c}$$

Coeficienții $2a$ și b din expresia (16) sînt dați de

$$2a = \lambda_2 + k, \tag{20a}$$

$$b = -\frac{\lambda_0}{k}. \tag{20b}$$

Se poate demonstra, printr-un calcul elementar direct, că ecuația (18) are întotdeauna *o singură rădăcină reală negativă*, a cărei valoare depinde de constanta h (care, la rîndul ei, depinde de numerele M_{1A} și M_{2A}), precum și de raportul dintre presiunile p_{1A} și p_{2A}. Așa cum s-a mai arătat, noi vom considera că acest din urmă raport este întotdeauna supraunitar. Valorile constantei h și ale raportului p_{1A}/p_{2A} vor trebui alese astfel încît valoarea lui k să nu depășească limitele admisibile de variație a parametrului k_1, indicate de (13).

Rădăcina k este valoarea-limită a parametrului k_1, pe care aceasta o atinge la infinit aval, unde cei doi curenți capătă presiunea comună p'_∞ și ating deviația finală δ'_∞.

Mai departe, din (5) se deduce prin diferențiere

$$\mathrm{d}\delta = \frac{\alpha \mathrm{d}K_1}{\sqrt{1 - \alpha^2 K_1^2}}, \tag{21}$$

unde

$$\alpha = \frac{4}{\gamma_1 + 1} \cdot \frac{1}{M_{1A} m_{1A}}. \tag{22}$$

Avînd în vedere că α este un număr subunitar și deci produsul $\alpha^2 K_1^2$ ia valori mici, putem pune, cu erori neglijabile,

$$\mathrm{d}\delta = \frac{\alpha K_1}{\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} K_1\right)\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} K_1\right)}. \tag{23}$$

Ținînd seama de (16) și de (23), condiția (9) poate fi pusă sub forma căutată în funcție de K_1:

$$2P(K_1 - k)(K_1^2 + 2aK_1 + b) = -\frac{I\alpha}{\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}} K_1\right)\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} K_1\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}K_1}{ds}. \tag{24}$$

4. ECUAȚIILE PARAMETRICE ALE LINIEI DE JET

Relația (24) permite să se obțină ecuațiile parametrice ale liniei de jet dacă se pune

$$\mathrm{d}x = \cos\delta \, \mathrm{d}s, \qquad \mathrm{d}y = \sin\delta \, \mathrm{d}s. \tag{25}$$

Se ajunge astfel la relațiile

$$\mathrm{d}x = -\frac{I\alpha}{2P} \frac{\mathrm{d}K_1}{(K_1 - k)(K_1^2 + 2aK_1 + b)}, \tag{26a}$$

$$dy = -\frac{I\alpha^2}{2P}\frac{K_1 dK_1}{(K_1-k)(K_1^2+2aK_1+b)\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2K_1^2\right)}. \tag{26b}$$

Ambele relații (26) se integrează cu ușurință și se obțin ecuațiile parametrice ale liniei de jet sub forma

$$x = \frac{I\alpha}{2P(k^2+2ak+b)}\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+2\frac{a}{b}K_1+\frac{1}{b}K_1^2\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{a+k}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b-a^2}\cdot K_1}{b+aK_1}-\ln\left(1-\frac{K_1}{k}\right)\right], \tag{27a}$$

$$y = -\frac{I\alpha^2}{2P}\left[H_0\ln\left(1-\frac{K_1}{k}\right)-\frac{\sqrt{2}}{\alpha}H_1\ln\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{2}}K_1\right)+\right.$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{\alpha}H_2\ln\left(1+\frac{\alpha}{\sqrt{2}}K_1\right)+\frac{1}{2}H_3\ln\left(1+2\frac{a}{b}K_1+\frac{1}{b}K_1^2\right)+ \tag{27b}$$
$$\left.+\frac{H_4-aH_3}{\sqrt{b-a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b-a^2}K_1}{b+aK_1}\right],$$

în care s-a notat

$$H_0 = \frac{k}{(k^2+2ak+b)\left(1-\frac{1}{2}\alpha^2k^2\right)}, \tag{28a}$$

$$H_1 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\alpha}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha}-k\right)\left(\frac{2}{\alpha^2}+2a\frac{\sqrt{2}}{\alpha}+b\right)}, \tag{28b}$$

$$H_2 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{\alpha}}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{\alpha}+k\right)\left(\frac{2}{\alpha^2}-2a\frac{\sqrt{2}}{\alpha}+b\right)}, \tag{28c}$$

$$H_3 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}(H_1-H_2)-H_0, \tag{28d}$$

$$H_4 = \frac{b}{k}H_0 - b(H_1+H_2). \tag{28e}$$

Valoarea asimptotică a deviației se află ușor din (26):

$$\mu_0 = \operatorname{tg}\delta_0 = \lim_{K_1\to k}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\alpha k}{1-\frac{1}{2}\alpha^2k^2}, \tag{29}$$

iar ecuația asimptotică spre care tinde linia de jet este de forma [1]

$$y = \mu_0 (x - x_1), \tag{30}$$

unde x_1 se află pe o cale elementară și are expresia

$$x_1 = \frac{I\alpha}{2P}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2 + 2ak + b} + \frac{\alpha H_3}{\mu_0}\right)\ln\left(1 + 2\frac{a}{b}k + \frac{1}{b}k^2\right) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{b - a^2}}\left[\frac{a + k}{k^2 + 2ak + b} + \frac{\alpha (H_4 - aH_3)}{\mu_0}\right]\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b - a^2}\,k}{b + ak} -$$

$$\left. - \sqrt{2}\frac{H_1}{\mu_0}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{2}}k\right) + \sqrt{2}\frac{H_2}{\mu_0}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}k\right)\right\}. \tag{31}$$

5. CAZUL DEVIAȚIILOR MICI

Dacă unghiurile de deviație sînt mici, ceea ce are loc fie cînd diferența presiunilor în punctul A este mică fie cînd numerele Mach sînt mari, atunci formulele (27) se pot simplifica.

Într-adevăr, punînd

$$\sin\delta \approx \delta\,;\ \cos\delta \approx 1 \tag{32}$$

și urmînd aceeași cale folosită pentru deducerea formulelor (27), rezultă după efectuarea calculelor,

$$x = \frac{I\alpha}{2P(k^2 + 2ak + b)}\left[\frac{1}{2}\ln\left(1 + 2\frac{a}{b}K_1 + \frac{1}{b}K_1^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{a + k}{\sqrt{b - a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b - a^2}\,K_1}{b + aK_1} - \ln\left(1 - \frac{K_1}{k}\right)\right], \tag{33a}$$

$$y = -\frac{I\alpha^2}{2P(k^2 + 2ak + b)}\left[k\ln\left(1 - \frac{K_1}{k}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{k}{2}\ln\left(1 + 2\frac{a}{b}K_1 + \frac{a}{b}K_1^2\right) + \frac{b + ka}{\sqrt{b - a^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{b - a^2}\,K_1}{b + aK_1}\right]. \tag{33b}$$

Formula (33a) este identică cu (27a), dar formula (33b) este efectiv mai simplă decît (27b).

Formulele (33) se pot obține și direct din formulele (27), prin anularea tuturor termenilor de ordinul mărimii α^2 sau al produsului αK_1.

Dacă efectuăm aceste anulări în formulele (26), obținem

$$\mu_0^{(1)} = \operatorname{tg}\delta_\infty'^{(1)} = \lim_{K_1 \to k}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \alpha k, \tag{34}$$

expresie care înlocuiește pe (29).

Pentru a avea o idee asupra gradului de aproximaţie introdus de formulele (33) în raport cu formulele (27), dăm mai jos tabela 1.

Tabela 1

$M_{1A} = \sqrt{2}$ $\alpha = 0{,}833$	k	0	−0,2	−0,3	−0,4	−0,5	−0,6
	μ_0	0	−0,169	−0,258	−0,352	−0,456	−0,571
	δ'_∞	0	−9,59°	−14,45°	−19,38°	−24,50°	−29,70°
	$\mu_0^{(1)}$	0	−0,167	−0,250	−0,333	−0,417	−0,500
	$\delta'^{(1)}_\infty$	0	−9,50	−14,07°	−18,42°	−22,67°	−26,55°
$M_{1A} = 5$ $\alpha = 0{,}327$	μ_0	0	−0,0655	−0,0986	−0,132	−0,166	−0,200
	δ'_∞	0	−3,77	−5,65°	−7,57°	−9,52°	−11,47°
	$\mu_0^{(1)}$	0	−0,0654	−0,0981	−0,131	−0,164	−0,196
	$\delta'^{(1)}_\infty$	0	−3,77°	−5,63°	−7,50°	−9,40°	−11,23°

Se observă că pentru numere Mach mici există o concordanţă satisfăcătoare pînă la valori ale lui k cuprinse între 0,3 şi 0,4, adică pentru deviaţii cuprinse între 14 şi 19°, în timp ce pentru numere Mach mai mari se pot folosi formulele (33) pe tot intervalul de variaţie a lui k.

6. EXEMPLU DE CALCUL

Vom presupune că

$$M_{1\infty} = M_{2\infty} = M_\infty = 2{,}95, \tag{35a}$$

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 1{,}4, \tag{35b}$$

$$p_{1\infty} = p_{2\infty} = p_\infty, \tag{35c}$$

adică vom considera că deasupra şi dedesubtul peretelui NA se scurge acelaşi gaz, la viteze şi presiuni egale.

Jetul auxiliar ţîşneşte din A sub unghiul

$$\delta_A = 17°. \tag{36}$$

Aplicînd succesiv formula (1) pentru scurgerea superioară şi pentru cea inferioară, obţinem

$$C_{p_{1A}} = \frac{\gamma+1}{2} m^2 \sin^2\delta_A + \frac{2m}{M_\infty} \sin\delta_A \sqrt{1 + \left(\frac{\delta+1}{4}\right) M_\infty^2 m^2 \sin^2\delta_A} = 0{,}327 \tag{37}$$

şi, aplicînd expresia (2), căpătăm

$$\frac{p_{1A}}{p_\infty} = 3{,}173. \tag{38}$$

Din tabelele [4] privind detenta Prandtl-Mayer rezultă

$$\frac{p_{2A}}{p_\infty} = 0{,}225. \tag{39}$$

Pe aceleaşi baze se obţin de asemenea valorile

$$M_{1A} \simeq 2{,}08,$$
$$M_{2A} = 4.$$

Ţinînd seama de valorile de mai sus şi aplicînd formulele (11) şi (12), se obţine

$$p_{1A} = 14{,}1\, p_{2A}, \tag{40}$$
$$h = 1{,}74. \tag{41}$$

Introducînd aceste date în expresiile (17) şi (19a, b, c) se calculează următoarele valori:

$$P = 11{,}3\, p_{2A}, \tag{42}$$
$$\lambda_0 = 0{,}58, \qquad \lambda_1 = 1{,}64; \qquad \lambda_2 = 1{,}14. \tag{43}$$

Cu aceste valori, rădăcina reală a ecuaţiei (18) este

$$k \cong -0{,}435, \tag{44}$$

iar coeficienţii a şi b (20) sînt

$$a = 0{,}605, \qquad b = 1{,}333. \tag{45}$$

Formulele (20 a—e) conduc apoi la valorile

$$H_0 = -0{,}458, \qquad H_1 = 0{,}0527, \qquad H_2 = 0{,}213,$$
$$H_3 = 0{,}132, \qquad H_4 = 1{,}046. \tag{46}$$

Cu ajutorul valorilor de mai sus, introducînd coordonatele fără dimensiuni

$$X = \frac{2P}{I\alpha}\, x, \qquad Y = \frac{2P}{I\alpha}\, y, \tag{47}$$

se poate trasa, utilizînd formulele (27), linia de jet.

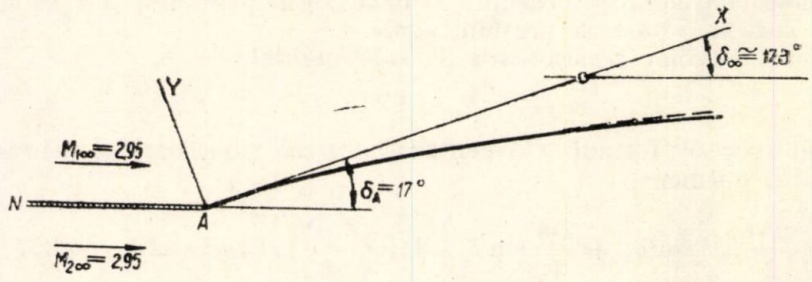


Fig. 3

În figura 3 este indicată această curbă, iar în tabela 2 cîteva cifre care au servit la trasarea ei.

Tabela 2

$X \div 0$	0,227	0,577	1,223	$+\infty$
$Y \div 0$	−0,00913	−0,0506	−0,180	$-\infty$

Din (29) se obține

$$\mu_0 = \operatorname{tg} \delta_\infty = -0{,}321, \tag{48}$$

ceea ce înseamnă

$$\delta_\infty \cong -17{,}8°. \tag{49}$$

Valoarea abscisei adimensionale X_1 se calculează din (31) ținînd seama de (47) și este

$$X_1 = 0{,}962. \tag{50}$$

Pe figura 3 este trasată și asimptota către care tinde linia de jet cu ajutorul valorilor (49) și (50).

Utilizînd acum formulele (33) în cazul deviațiilor mici se obțin pentru Y următoarele valori, corespunzătoare acelorași valori pentru X ca în tabela 2 :

$$Y \div 0\,; \quad -0{,}00912\,; \quad -0{,}0507\,; \quad -0{,}177\,; \quad -\infty.$$

Din (34) se obține

$$\mu_0^{(1)} = \operatorname{tg} \delta_\infty^{(1)} \cong -0{,}306, \tag{51}$$

ceea ce înseamnă

$$\delta_\infty^{(1)} \cong -17°, \tag{52}$$

Linia de jet corespunzătoare formulelor (33) este trasată pe figura 3 prin linia întreruptă.

7. CAZUL NUMERELOR M_2 FOARTE MARI

Dacă numărul $M_{2\infty}$ este foarte mare și unghiul δ_A este de asemenea mare, atunci se produce mișcarea următoare. Din cauza deviației bruște δ_A, gazul care se scurge deasupra peretelui NA suferă o compresiune prin unda de șoc, iar numărul Mach descrește de la $M_{1\infty}$ la M_{1A}. Dimpotrivă, gazul care se scurge sub peretele NA suferă o detentă Prandtl-Mayer. Dacă deviația δ_A este suficient de mare și $M_{2\infty}$ foarte mare, este posibil ca deviația maximă, care corespunde unei detente de la $M_{2\infty}$ la $M = \infty$, să fie mai mică decît δ_A. În acest caz, gazul de sub peretele NA deviază cu un unghi $\delta_{2A} < \delta_A$ și nu se atașează liniei de jet. Linia de curent care pleacă din A va fi rectilinie și între această linie de curent și linia de jet va fi vid ($p = 0$). Linia de curent va întîlni linia de jet într-un punct B. În avalul acestui punct, scurgerea inferioară

va fi atașată liniei de jet și, din punct de vedere calitativ, mișcarea va avea același aspect ca mișcarea descrisă în paragraful precedent. Configurația mișcării este arătată în figura 4.

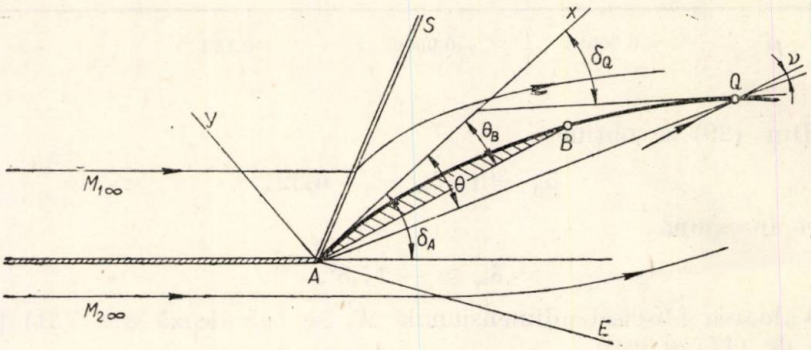


Fig. 4

Pe porțiunea AB a liniei de jet, condiția la limită se obține din (9) făcînd $p_2 = 0$:

$$p_1 = -I\frac{\mathrm{d}\delta}{\mathrm{d}s}. \tag{53}$$

Este interesant să se observe că această condiție (53) își menține valabilitatea și în avalul punctului B și chiar pe o porțiune destul de întinsă a liniei de jet.

Într-adevăr, să considerăm vecinătatea imediată a punctului B și să notăm cu indicele A toate valorile relative la scurgerea în amonte și cu indicele B cele relative la scurgerea în avalul acestui punct.

În B atașarea curentului inferior la linia de jet se produce în regim newtonian, adică în vecinătatea acestui punct $M = \infty$ și $\gamma = 1$, după șocul de contact.

Se admite că în regim newtonian unda de șoc este „lipită" de obstacolul deviator; raportul γ al căldurilor specifice tinde spre unitate, așa cum ușor se poate demonstra dacă se observă că densitatea după șoc crește nelimitat o dată cu numărul Mach care tinde la infinit. Ținînd seama de formula undelor de șoc [4], se poate deci scrie

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+\dfrac{2}{M_A^2\sin^2\beta}} \approx \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \to \infty, \tag{54}$$

unde β este înclinarea undei de șoc (în cazul nostru β reprezintă deviația însăși), și, dacă se face $M_A = \infty$, rezultă într-adevăr că $\gamma = 1$.

În aceste împrejurări, aplicînd formulele prezentate în [4], se deduce că presiunea este nulă, chiar și după punctul B. Creșterea ulterioară a presiunii în lungul liniei de jet este neglijabilă pe o porțiune destul de întinsă a acestei linii, numărul Mach continuînd să fie foarte mare.

Observînd că, la o oarecare distanță de punctul din care țîșnește jetul deviator, acesta se dispersează din cauza frecărilor și că, în consecință

metoda de față se aplică riguros doar pe o mică distanță în avalul acestui punct, rezultă că nu este necesară calcularea deviației asimptotice, ci numai determinarea formei inițiale a scurgerii pe o distanță utilă din punct de vedere practic.

Dacă totuși dorim să calculăm și direcția asimptotică a liniei de jet, atunci putem proceda în modul următor. Fie Q punctul considerat pe linia de jet în avalul punctului B (fig. 4). Presiunea în curentul superior în acest punct poate fi calculată cu ajutorul formulei (1), ținînd cont totodată și de expresia (2). Se obține

$$p_1 = p_{1A}[1 + (\gamma_1 + 1)\,\gamma_1 M_{1A}^2 m_{1A}^2 \sin^2\delta_Q + \\ + \gamma_1 M_{1A} m_{1A} \sin\delta_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1 + 1}{4}\right) M_{1A}^2 m_{1A}^2 \sin^2\delta_Q}\,, \tag{55}$$

unde δ_Q este deviația în punctul Q, măsurată în raport cu axa Ax, tangentă în A la linia de jet.

Fie θ unghiul dintre $A\,Q$ și această axă, iar ν unghiul făcut de linia de curent care sosește în Q, cu direcția AQ. Particulele fluide care urmează această linie vor fi deviate printr-o undă de șoc la contactul cu jetul deviator, cu un unghi

$$\delta'' = \delta_Q - \theta + \gamma. \tag{56}$$

Fiind mereu în regim newtonian, se poate scrie [1]

$$C_{p_2} = \frac{p_2 - p_2'}{p_2'} \frac{2}{\gamma_2 M_2'^2} = 2\sin^2\delta'', \tag{57}$$

unde p_2' și M_2' sînt, respectiv, presiune și numărul Mach ale unei particule fluide în punctul Q înainte ca aceasta să treacă prin unda de șoc (care este lipită de linia de jet), iar p_2 este presiunea în acest punct după unda de șoc.

Se știe că, într-o detentă completă de tip Prandtl-Mayer, unghiul maxim între caracteristica inițială și cea finală este, după [4],

$$\omega_m = 220{,}4°. \tag{58}$$

În acest caz, utilizînd o formulă cunoscută, vom avea mai departe

$$\frac{p_2'}{p_\infty'} = \left(\frac{2}{\gamma_2+1}\right)^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}} \cos^2\left[\sqrt{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}}\,(\omega_m + \theta_B - \theta)\right], \tag{59}$$

unde p_∞' este presiunea de repaus a gazului care se scurge dedesubtul liniei de jet, iar θ_B este indicat pe figura 4.

De altfel

$$p_\infty' = p_{2\infty}\left[1 + \frac{\gamma_2-1}{2} M_{2\infty}^2\right]^{\frac{\gamma_2}{\gamma_2-1}}, \tag{60}$$

$p_{2\infty}$ și $M_{2\infty}$ fiind presiunea și, respectiv, numărul Mach al curentului inferior neperturbat.

Să presupunem acum că punctul Q se depărtează mereu către avalul mișcării. La limită vom avea

$$\delta_Q = \theta = \delta_0, \quad \delta'' = \nu \quad \left(\sin \nu = \frac{1}{M'}\right). \tag{61}$$

În plus, la infinit aval avem

$$p_1 = p_2 . \tag{62}$$

Utilizînd formulele precedente, se obține cu ușurință

$$p_{1A}\left[1 + \frac{1}{4}(\gamma_1 + 1)\,\gamma_1 M_{1A}^2 m_{1A}^2 \sin^2\delta'_\infty + \right.$$

$$\left. + \gamma_1 M_{1A} m_{1A} \sin\delta'_\infty \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma_1+1}{4}\right)^2 M_{1A}^2 m_{1A}^2 \sin\delta'_\infty}\right] =$$

$$= p_{2\infty}(\gamma_2 + 1)\left\{\left(\frac{2}{\gamma_2+1} + \frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1} M_{2\infty}^2\right)\cos^2\left[\sqrt{\frac{\gamma_2-1}{\gamma_2+1}}(\omega_m + \theta_B - \delta'_\infty)\right]\right\}.$$

În formula (63), p_{1A} este dedus din formula (1), unde s-au introdus $M_{1\infty}$, $m_{1\infty}$ și δ_A în locul mărimilor M_{1A}, m_{1A} și δ. Formula (63) reprezintă de fapt o ecuație din care se poate deduce deviația asimptotică δ'_∞ căutată.

8. EXEMPLU NUMERIC

Vom alege valorile următoare :

$$M_{1\infty} = 6\,; \quad M_{2\infty} = 15\,; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = 1{,}4,$$
$$\delta_A = 36^\circ\,; \quad p_{1\infty} = \frac{1}{2} p_{2\infty} = p_\infty. \tag{64}$$

Cu ajutorul formulei (1), unde s-au introdus $M_{1\infty}$, $m_{1\infty}$ și δ_A în loc de M_{1A}, m_{1A} și δ, se obține

$$M_{1A} = 1{,}766, \quad m_{1A} = 1{,}212 \tag{65}$$

și

$$p_{1A} \simeq 24{,}3\ p_\infty. \tag{66}$$

Utilizînd formulele detentă Prandtl-Mayer [4], se obține

$$\theta_B \cong 16{,}37^\circ, \quad \delta_{2A} \cong 19{,}63^\circ. \tag{67}$$

Semnificația acestor notații rezultă direct din figura 5.

În lungul liniei AB, viteza particulelor fluide este maximă, și între linia de jet și această linie (regiunea haşurată din figură) presiunea este nulă.

Ecuația (18) devine în acest caz

$$k^3 + 2k^2 + 2k + 0{,}857 = 0, \tag{68}$$

de unde rezultă

$$k = 0{,}822. \tag{69}$$

Cu toate că mărimea k depăşeşte limitele admisibile (13), metoda rămîne totuşi valabilă deoarece parametrul K nu va atinge niciodată această valoare. Într-adevăr, deviaţia asimptotică ce se obţine cu ajutorul

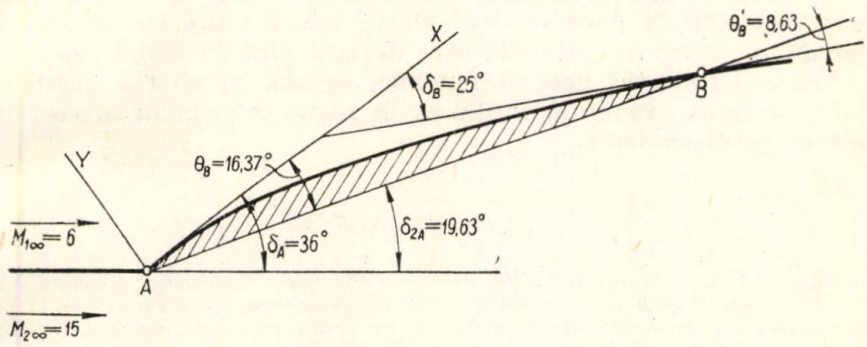


Fig. 5

ecuaţiei (63) este mai mică decît cea care ar corespunde existenţei vidului sub linia de jet pînă la infinit aval. Introducînd coordonatele adimensionale (47), se calculează, după (33 a,b),

$$a = 0{,}589, \qquad b = 1{,}042 \tag{70}$$

şi prin aplicarea ecuaţiilor (28a—e)

$$H_0 = -1{,}376, \qquad H_1 = 0{,}053, \qquad H_2 = 0{,}413,$$
$$H_3 = 0{,}722, \qquad H_4 = 1{,}262.$$

Formulele (33 a, b) ne dau mai departe următoarele valori, înscrise în tabela 3 :

Tabela 3

$X \div 0$	0,301	0,516	0,648	0,800	1,42
$Y \div 0$	−0,0199	−0,0693	−0,104	−0,150	−0,402

Aceste valori au servit la construcţia liniei de jet din figura 5.

Coordonatele punctului B se obţin intersectînd linia de jet cu linia dreaptă :

$$Y = -\operatorname{tg}\theta_B X. \tag{71}$$

Se obţine

$$X_B = 1{,}501; \qquad Y_B = -0{,}439. \tag{72}$$

Cu ajutorul ecuației (63) se poate de asemenea calcula deviația asimptotică

$$\delta_\infty \cong 36{,}5°. \tag{73}$$

Această deviație corespunde la $K_1 \cong -0{,}765$ care depășește foarte puțin limitele admisibile (13), astfel încît aprecierea deviației este, bineînțeles, aproximativă.

Este interesant să se observe că, deși presiune în curentul inferior neperturbat este de două ori mai mare decît cea din curentul superior neperturbat, scurgerea generală este deviată pînă la sfîrșit către în jos ($\delta_A < \delta_\infty$). Explicația acestui fenomen rezidă în marile pierderi de presiune care se produc la întîlnirea în regim newtonian a particulelor fluide cu jetul deviator.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, D. Pantazopol, *La déviation d'un écoulement supersonique bidimensionnel par l'action d'un jet-flap* (RRST, série de Mécanique Appliquée, 1966).
2. E. Carafoli, C. Berbente, *Determination of the Characteristics of Aerodynamic profils in supersonic-hypersonic Flow, considering the pressure losses through shock Waves* (RRST, série de Mécanique Appliqué, *5* (1964)).
3. E. Carafoli, *Stabilirea unei formule unitare pentru compresiune-expansiune în regim supersonic-hipersonic* (Com. Academiei, **XII**, *9*, 1962).
4. — *High Speed Aerodynamics*, Edit. Acad. R.P.R. și Pergamon Press, Londra, 1957.

INCIPIENȚA FENOMENULUI DE CAVITAȚIE ÎN MIȘCĂRI PLANE ȘI PERIODICE

de IOAN ANTON și OCTAVIAN POPA
Institutul politehnic Timișoara

533 : 621.2

Se construiește o metodă teoretică de determinare a sensibilității la cavitație a rețelelor de profile cu bordul de fugă ascuțit sau rotunjit (profile Carafoli), prin sensibilitatea la cavitație înțelegîndu-se dependența funcțională între mărimile critice care guvernează incipiența fenomenului de cavitație : unghiul de incidență critic, coeficientul minim absolut de presiune și abscisa relativă la care se realizează acest minim absolut. Metoda constă în determinarea distribuției de viteze pe conturul rețelei de profile și în cercetarea extremelor acesteia. În acest scop se pornește de la reprezentarea integrală a cîmpului de viteze din exteriorul rețelei cu ajutorul formulei integrale Cauchy, a cărei limită pe contur ne conduce la ecuația integrală a distribuției de viteze pe conturul rețelei de profile : o ecuație integrală de tip Fredholm de speța a doua. Soluția generală a acestei ecuații se obține prin aplicarea metodei prelungirii analitice în planul cercului generator : imaginea conturului rețelei de profile pe o suprafață riemanniană cu o infinitate de foi. Cercetarea extremelor funcției de viteze se face tot în planul cercului generator. Prin intermediul funcției de transformare conformă se determină apoi curbele de sensibilitate la cavitație a rețelei de profile.

1. MODUL CUM SE PUNE PROBLEMA

Ne propunem determinarea parametrilor care descriu incipiența fenomenului de cavitație în mișcarea plană a unui fluid incompresibil în jurul unui sistem infinit de obstacole periodice. Raționamentul va respecta două ipoteze, formulate și verificate în cadrul unor lucrări anterioare [1], [2] :

1. Punctul de incipiență a fenomenului de cavitație, aparținînd frontierei periodice a mișcării, coincide practic cu punctul în care distribuția de viteze realizează un maxim absolut.

2. Pînă în momentul incipienței fenomenului de cavitație, extremele distribuției de viteze corespunzătoare mișcării potențiale coincid practic cu extremele corespunzătoare mișcării unui fluid real și incompresibil.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, Nr. 4, 1968, P. 677–697

În continuare, prin sensibilitatea la cavitaţie a unui sistem finit sau infinit de obstacole periodice vom înţelege dependenţa funcţională dintre parametrii geometrici şi parametrii hidrodinamici care descriu incipienţa fenomenului de cavitaţie ; curbele plane care ilustrează această

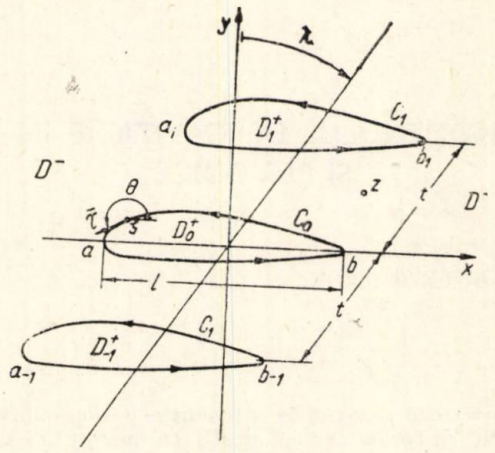


Fig. 1

dependenţă funcţională vor purta numele de curbe de sensibilitate la cavitaţie.

Pentru fixarea ideilor vom considera sistemul de obstacole periodice cel mai des întîlnit în aplicaţiile practice : reţeaua de profile hidrodinamice ; ceea ce, evident, nu va limita domeniul de validitate a rezultatelor.

Fie $\omega = te^{i\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)}$ perioada geometrică a reţelei considerate (fig. 1) unde t este pasul reţelei şi λ unghiul de instalare. Fie, de asemenea, C conturul reţelei de profile : frontierea periodică care mărgineşte interior mişcarea

$$C = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} C_n, \tag{1.1}$$

unde C_0 este conturul profilului central dispus în lungul axei reale Ox, iar C_n conturul profilului dedus din C_0 printr-o deplasare $n\omega$.

Notînd prin D_n^- şi D_n^+ domeniul exterior şi interior profilului de contur C_n, domeniul exterior reţelei de profile D^- şi domeniul interior D^+ se vor defini după cum urmează :

$$D^- = \bigcap_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^-, \tag{1.2}$$

$$D^+ = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} D_n^+. \tag{1.3}$$

În cele ce urmează, după cum punctele aparţin domeniilor D^+, D^- sau conturului C, se vor folosi următoarele notaţii :

$$z = x + iy; \qquad z \in D^{\pm}, \tag{1.4}$$

$$\zeta = \xi + i\eta; \qquad \zeta \in C. \tag{1.5}$$

Extremităţile profilului de contur C_0, corespunzătoare punctelor de intersecţie ale acestui profil cu axa reală, se vor nota prin a şi b (fig. 1); prin a_n şi b_n se vor nota extremităţile profilului de contur C_n. Datorită periodicităţii,

$$a_n = a + n\omega, \qquad b_n = b + n\omega. \tag{1.6}$$

Vom înţelege prin l coarda profilului dispus în reţea : distanţa dintre punctele b_n şi a_n, deci

$$l = b - a = b_n - a_n. \tag{1.7}$$

În cele ce urmează se va considera sensul pozitiv de parcurs al conturului C cel ce lasă domeniul D^+ la stînga : sensul antiorar. Tangenta pozitivă la conturul C formează cu axa Ox unghiul θ, definit de

$$\theta = \arg \frac{d\zeta}{ds}; \qquad s = \int_b^{\zeta} |d\zeta|, \tag{1.8}$$

s fiind abscisa curbilinie, iar normala la C se va considera orientată spre D^-.

În virtutea celei de-a doua ipoteze enunţate, mişcarea în exteriorul reţelei de profile poate fi considerată ca potenţială. De aici rezultă că atît potenţialul complex al mişcării $F(z)$,

$$F(z) = \Phi(z) + i\Psi(z), \tag{1.9}$$

cît şi viteza complexă $W(z)$,

$$W(z) = V_x(z) - iV_y(z), \tag{1.10}$$

ca derivată a potenţialului complex

$$W(z) = \frac{dF(z)}{dz}, \tag{1.11}$$

sînt funcţii periodice şi olomorfe pe D^-, iar pe C sînt cel puţin continue :

$$F(z + \omega) = F(z); \qquad \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} = 0; \qquad z \in D^-, \tag{1.12}$$

$$W(z + \omega) = W(z); \qquad \frac{\partial W(z)}{\partial \bar{z}} = 0; \qquad z \in D^-. \tag{1.13}$$

Răspunzînd unor cerinţe fizice, viteza complexă va trebui să fie mărginită la infinit şi nulă pe D^+, de unde rezultă că reprezentarea ei integrală Cauchy va fi de forma [3]

$$W(z) = W_\infty - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} W(\zeta) K(\zeta, z; t, \lambda) d\zeta; \qquad z \in D^-, \ \zeta \in C_0, \tag{1.14}$$

unde funcţia meromorfă $K(\zeta, z; t, \lambda)$ are expresia

$$K(\zeta, z; t, \lambda) = \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \operatorname{cth}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} (\zeta - z)\right] \tag{1.15}$$

şi unde constanta complexă

$$W_\infty = V_\infty e^{-i\alpha_\infty} \tag{1.16}$$

reprezintă media vitezelor asimptotice

$$W(\pm\infty) = \lim_{x\to\pm\infty} W(z), \tag{1.17}$$

deci

$$W_\infty = \frac{1}{2}[W(+\infty) + W(-\infty)]. \tag{1.18}$$

Expresia vitezelor asimptotice se poate obţine direct din expresia integrală a vitezei complexe $W(z)$, dată de (1.14), unde în procesul trecerii la limită se va ţine seama de faptul că

$$\lim_{x\to\pm\infty} K(\zeta, z; t, \lambda) = \mp \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \tag{1.19}$$

şi că Γ, circulaţia vitezei, considerată pozitivă în sensul orar, are prin definiţie expresia

$$\Gamma = -\int_{C_0} W(\zeta)\,d\zeta; \tag{1.20}$$

de unde

$$W(\pm\infty) = W_\infty \mp \frac{\Gamma}{2t} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right)}. \tag{1.21}$$

În continuare, pentru ca

$$W(\zeta) = \lim_{z\in D^-\to\zeta\in C} W(z), \tag{1.22}$$

în conformitate cu teorema Cauchy, din expresia integrală a vitezei complexe (1.14) rezultă următoarea condiţie necesară şi suficientă:

$$W_\infty - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0} W(\zeta)K(\zeta, z; t, \lambda)d\zeta = 0;\ z\in D^+,\ \zeta\in C_0, \tag{1.23}$$

de unde rezultă condiţia fizică a anulării vitezei $W(z)$ pe D^+:

$$W(z\in D^+) = 0. \tag{1.24}$$

Dacă este îndeplinită condiţia integrală (1.23), respectiv condiţia fizică (1.24), limita pe contur (1.22) a expresiei integrale (1.14) este următoarea:

$$W(\zeta_0) = 2W_\infty - \frac{1}{i\pi}\int_{C_0} W(\zeta)K(\zeta, \zeta_0; t, \lambda)d\zeta;\quad \zeta, \zeta_0\in C_0. \tag{1.25}$$

De aici obţinem ecuaţia integrală a distribuţiei vitezei $W(\zeta)$ pe conturul C:

$$W(\zeta_0)+\frac{1}{i\pi}\int_{C_0} W(\zeta)K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda)\,d\zeta = 2W_\infty . \tag{1.26}$$

Deoarece conturul C este linie de curent, viteza complexă $W(\zeta)$ nu are în lungul acestui contur decît o componentă tangenţială V_t care rezultă din

$$V_t(s) = W(\zeta)e^{i\theta}\ ; \qquad s=\int_b^\zeta |\,d\zeta\,|. \tag{1.27}$$

Cu ajutorul ultimei relaţii, ecuaţia integrală (1.26) se poate converti într-o ecuaţie integrală reală de tip Fredholm de speţa a doua cu nucleu continuu [3]:

$$V_t(s_0)+\int_{C_0} V_t(s)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i\pi}\,e^{i\theta_0}K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda)\right\}ds = 2V_\infty\cos(\theta_0-\alpha_\infty), \tag{1.28}$$

nucleul avînd următoarea limită pentru $\zeta\to\zeta_0$:

$$\lim_{\zeta\to\zeta_0}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i\pi}e^{i\theta_0}K(\zeta,\ \zeta_0;\ t,\ \lambda\right\} = -\frac{1}{2\pi\rho(s_0)}, \tag{1.29}$$

unde $\rho(s_0)$ este raza de curbură a conturului în punctul de afixă ζ_0 sau de abscisă curbilinie s_0.

Soluţia acestei ecuaţii integrale se determină cu aproximaţie unei constante ciclice : circulaţia vitezei Γ în jurul profilului dispus în reţea. Determinînd valoarea acestei constante cu ajutorul unei condiţii fizice de tip Jukovski sau Carafoli [4], soluţia va fi unică.

Cu aceste elemente fixate, procesul incipienţei fenomenului de cavitaţie poate fi descris în felul următor : la o anumită mişcare a fluidului în jurul reţelei de profile, caracterizată asimptotic de unghiul de incidenţă α_∞ şi modulul vitezei V_∞, va corespunde o anumită distribuţie de viteze V_t pe conturul C. Această distribuţie de viteze va realiza într-un punct critic $\zeta_c=\xi_c+i\eta_c$, de abscisă relativă

$$X_c = \xi_c/l, \tag{1.30}$$

un maxim absolut, iar presiunea un minim absolut. În virtutea primei ipoteze enunţate, acest punct este un punct de incipienţă a fenomenului de cavitaţie. Coeficientul de cavitaţie corespunzător rezultă din

$$k_0 = \left(\frac{V_t}{V_\infty}\right)^2_{\substack{\text{max.}\\ \text{abs.}}} - 1. \tag{1.31}$$

Astfel, parametrii asociaţi incipienţei fenomenului de cavitaţie sînt în număr de trei : abscisa relativă a punctului de incipienţă a fenomenului de cavitaţie X_c (parametru geometric), unghiul de incidenţă critic $\alpha_\infty=\alpha_c$ şi coeficientul de cavitaţie k_0 (parametri hidrodinamici), de unde

rezultă că sensibilitatea la cavitație a rețelei de profile va fi definită de următoarea dependență funcțională :

$$X_c = X_c(\alpha_c, k_0). \tag{1.32}$$

Curbele plane prin care se ilustrează dependența funcțională de mai sus, deci curbele de sensibilitate la cavitație, vor fi următoarele :

$$k_0 = k_0(\alpha_c), \tag{1.33}$$

$$\alpha_c = \alpha_c(X_c). \tag{1.33a}$$

În scopul exemplificării, reproducem în figura 2 curbele de sensibilitate la cavitație ale profilului Clark Y, obținute prin aplicarea unei metode teoretice originale [1]. Peste aceste curbe se suprapun curbele de sensibilitate la cavitație determinate de F. Numachi pe cale experimentală [5]; apropierea rezultatelor teoretice de cele experimentale ilustrează validitatea ipotezelor enunțate.

Din figura 2 rezultă că incipiența fenomenului de cavitație are loc în trei zone distincte : o zonă aferentă porțiunii mediane a extradosului profilului și două zone aferente bordului de atac, pe extradosul și pe intradosul acestuia. Fiecărei zone îi corespunde o anumită ramură a funcțiilor (1.33) și (1.33 a), și anume ramurile trasate cu linie plină în reprezentarea din figura 2. Porțiunile de curbă trasate cu linie întreruptă nu aparțin valorilor critice ale unghiului de incidență sau ale abscisei relative ; pe aceste porțiuni, distribuția de viteze realizează un maxim relativ, nu absolut. Cunoașterea prealabilă a zonelor de incipiență a fenomenului de cavitație și natura reprezentării grafice a curbelor de sensibilitate la cavitație va simplifica mult operația determinării extremelor funcției de viteze dispensîndu-ne de necesitatea determinării derivatei de ordinul doi.

Punctul de incipiență a fenomenului de cavitație va aparține mulțimii punctelor care satisfac ecuația

$$\frac{\mathrm{d}V_t(s)}{\mathrm{d}s} = 0 \tag{1.34}$$

sau, sub formă complexă,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\left[W(\zeta)e^{i\vartheta}\right] = 0, \tag{1.35}$$

unde s-a ținut seama de faptul că pe conturul C operatorul diferențial poate fi exprimat sub forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} = e^{i\vartheta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \tag{1.36}$$

și că pe același contur C este îndeplinită tot timpul condiția

$$e^{i\vartheta} \neq 0. \tag{1.37}$$

Deoarece

$$\frac{\mathrm{d}e^{i\vartheta}}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{1}{e^{i\vartheta}} \cdot \frac{\mathrm{d}e^{i\vartheta}}{\mathrm{d}s} = i\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}s} = i\frac{1}{\rho(s)}, \tag{1.38}$$

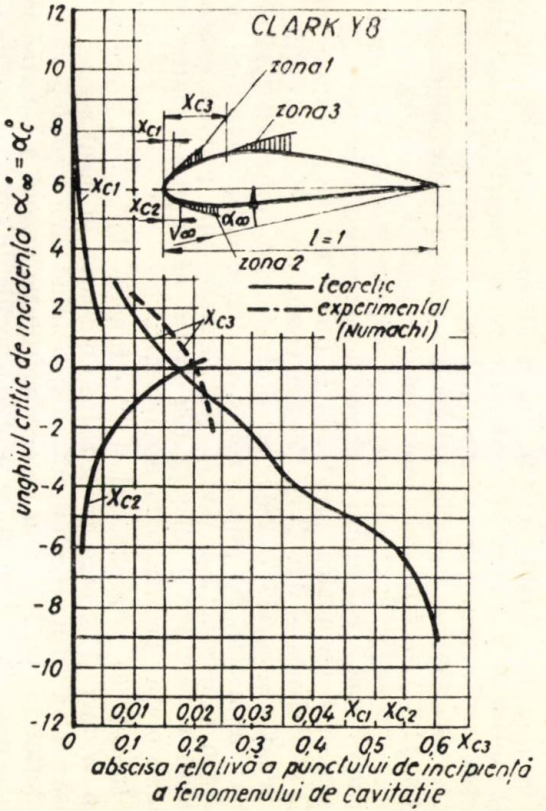

CLARK Y8
zona 1
zona 3
zona 2
x_{c1}
x_{c2}
x_{c3}
V_∞
α_∞
l = 1
teoretic
experimental (Numachi)
unghiul critic de incidență $\alpha_\infty^\circ = \alpha_c^\circ$
abscisa relativă a punctului de incipență a fenomenului de cavitație

Fig. 2a

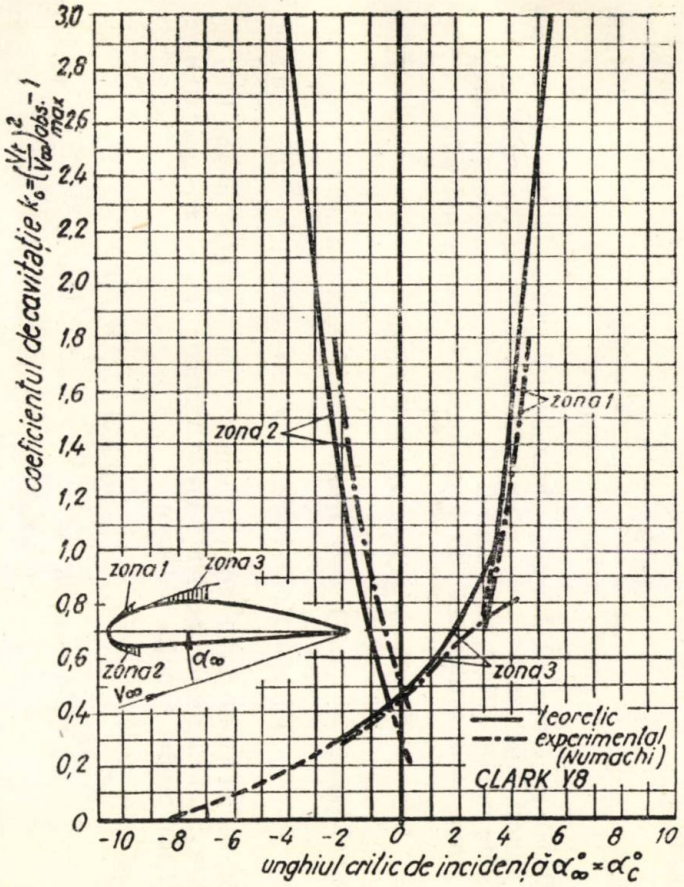

coeficientul de cavitație $k_0 = \left(\frac{V_t}{V_\infty}\right)^2_{max} - 1$
zona 1
zona 2
zona 3
α_∞
V_∞
teoretic
experimental (Numachi)
CLARK Y8
unghiul critic de incidență $\alpha_\infty^\circ = \alpha_c^\circ$

Fig. 2b

unde $\rho(s)$ este raza de curbură a profilului de contur C_0 în punctul de afixă ζ sau de abscisă curbilinie s, rezultă că ecuația (1.35) poate fi exprimată sub forma

$$e^{i\theta} \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} + i \frac{W(\zeta)}{\rho(s)} = 0. \tag{1.39}$$

Deoarece termenul liber al ecuației integrale (1.26) sau (1.28) este o funcție parametrică de unghiul de incidență α_∞, rezultă că distribuția de viteze $W(\zeta)$ pe conturul C, soluția acestei ecuații integrale, se va putea scrie totdeauna sub următoarea formă complexă:

$$W(\zeta) = W_1(\zeta) \cos \alpha_\infty + W_2(\zeta) \sin \alpha_\infty \tag{1.40}$$

sau, ținînd seama de (1.27), sub următoarea formă scalară:

$$V_t(s) = V_{t1}(s) \cos \alpha_\infty + V_{t2}(s) \sin \alpha_\infty. \tag{1.41}$$

Înlocuind (1.40) în (1.39), obținem o ecuație pentru unghiul de incidență α_∞, un unghi de incidență critic virtual; $\alpha_\infty = \alpha_c$, numai dacă $\zeta = \zeta_c$. Rezolvînd ecuația obținem

$$\alpha_\infty = -\operatorname{arctg} \frac{e^{i\theta} \cdot \dfrac{dW_1(\zeta)}{d\zeta} + i \dfrac{W_1(\zeta)}{\rho(s)}}{e^{i\theta} \cdot \dfrac{dW_2(\zeta)}{d\zeta} + i \dfrac{W_2(\zeta)}{\rho(s)}}. \tag{1.42}$$

Metoda de calcul a funcțiilor (1.33) și (1.33 a) constă în determinarea mulțimii unghiurilor de incidență corespunzătoare celor trei zone de cavitație cu ajutorul ecuației (1.42). Aceste unghiuri o dată determinate, din (1.41) obținem valoarea corespunzătoare a vitezei V_t, iar din (1.31) valoarea coeficientului k_0. Numai o parte dintre aceste mărimi vor fi critice. Selecționarea valorilor critice din mulțimea soluțiilor care satisfac ecuația (1.42) se face prin reprezentarea grafică a funcției (1.32). Din considerarea ecuației (1.42), care, așa după cum s-a arătat, este folosită în primă etapă a calculului curbelor de sensibilitate la cavitație, rezultă necesitatea determinării prealabile a două funcții: viteza complexă $W(\zeta)$ și derivata ei $dW(\zeta)/d\zeta$. Viteza complexă $W(\zeta)$ se obține soluționînd ecuația integrală (1.28), iar derivata ei se obține fie prin procedeul derivării numerice, fie prin rezolvarea altei ecuații integrale, tot de tip Fredholm și de speța a doua, [6]. Complicațiile privind determinarea derivatei vitezei $W(\zeta)$ decurg din faptul că soluția ecuației integrale (1.28) se obține prin metoda discretizării.

În cele ce urmează, folosind o funcție de reprezentare conformă de tip Weinig [7], ceea ce va reduce mișcarea în jurul rețelei de profile la mișcarea în jurul cercului-unitate aparținînd unei suprafețe riemanniene cu o infinitate de foi, vom determina soluția exactă a ecuației integrale (1.26) pentru două familii de profile: profile Jukovski și profile Carafoli. Această soluție obținîndu-se sub formă explicită, determinarea derivatei funcției de viteze se face prin operații elementare.

2. FUNCȚIA DE REPREZENTARE CONFORMĂ $z = z(z_*)$

Vom nota în cele ce urmează prin $z_* = x_* + iy_*$ afixa unui punct aparținînd domeniilor exterioare sau interioare din planul z_*, iar prin $\zeta_* = \xi_* + i\eta_*$ afixa punctelor aparținînd frontierelor din acest plan

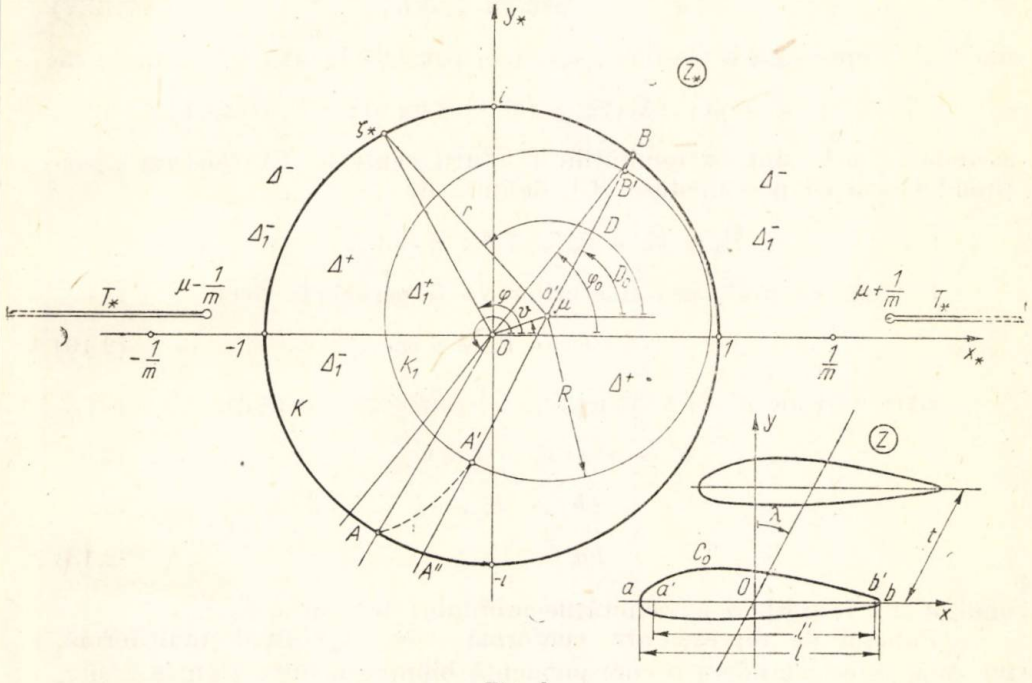


Fig. 3

Vom nota prin Δ^+ și Δ^- domeniul interior și exterior cercului-unitate $|\zeta_*| = 1$, de contur K (fig. 3). De asemenea vom nota prin Δ_1^+ și Δ_1^- domeniul interior și exterior cercului $|\zeta_* - \mu| = R$, de contur K_1, avînd centrul în punctul de afixă :

$$\mu = |\mu| e^{i\vartheta}. \tag{2.1}$$

Notînd prin B_n mulțimea punctelor care aparțin benzii de periodicitate din planul z care conține profilul de contur C_n, deci

$$B_n = \left\{ z \mid x \in \mathrm{Re} ; \left(n - \frac{1}{2}\right) t \cos \lambda < y < \left(n + \frac{1}{2}\right) t \cos \lambda \right\}, \tag{2.2}$$

unde Re reprezintă mulțimea numerelor reale, funcția de transformare conformă $z = z(z_*)$ va trebui să stabilească următoarele corespondențe :

$$z \in D_n^- \cap B_n \quad \text{pentru} \quad z_* \in \Delta^-, \tag{2.3}$$

$$\zeta \in C_n \quad \text{pentru} \quad \zeta_* \in K, \tag{2.4}$$

$$x \to \pm \infty \quad \text{pentru} \quad z_* \to \mu \pm \frac{1}{m}, \tag{2.5}$$

unde m este o constantă reală, funcţie de parametrii geometrici ai reţelei, îndeplinind totdeauna condiţia $m < 1$.

Aceeaşi funcţie va îndeplini următoarele condiţii relativ la conturul K_1:

$$z \in B_n - T_n \text{ pentru } z_* \in \Delta_1^-, \tag{2.6}$$

$$\zeta \in T_n \qquad \text{pentru } \zeta_* \in K_1, \tag{2.7}$$

unde T_n, reprezintă o tăietură rectilinie, paralelă la axa $O\xi$, definită de

$$T_n = \{\zeta \mid (a' + nt \sin \lambda) \leqslant \xi \leqslant (b' + nt \sin \lambda)\,;\ \eta = nt \cos \lambda\} \tag{2.8}$$

şi unde a' şi b' sînt extremităţile tăieturii centrale T_0 (tăietura aparţinînd benzii de periodicitate B_0), definită de

$$T_0 = \{\zeta \mid a' \leqslant \xi \leqslant b'\,;\ \eta = 0\}. \tag{2.9}$$

Evident că mulţimea tăieturilor va fi periodică, deci

$$T_n = T_0 + n\,\omega. \tag{2.10}$$

Extremităţile a' şi b' îndeplinesc următoarele condiţii:

$$b' - a' = l', \qquad l' < l, \tag{2.11}$$

$$|b| > |b'|, \tag{2.12}$$

$$|a'| \leqslant |a|, \tag{2.13}$$

unde a şi b reprezintă extremităţile profilului de contur C_0.

Funcţia de reprezentare conformă $z = z(z_*)$ fiind multiformă, nu vom putea considera o corespondenţă biunivocă între planele z şi z_* decît considerînd planul z_* ca o foaie a unei suprafeţe riemanniene cu o infinitate de foi şi cu două puncte de ramificaţie logaritmică. Conform (2.5), aceste puncte au următoarele afixe:

$$z_* = \mu \pm \frac{1}{m}. \tag{2.14}$$

Uniformizarea corespondenţei dintre tot planul z şi o bandă de periodicitate se face prin practicarea unei tăieturi T_*, care poate fi de forma

$$T_* = \left\{\zeta_* \mid \xi_* \in \mathrm{Re} - \left(|\mu| \cos \vartheta - \frac{1}{m}, |\mu| \cos \vartheta + \frac{1}{m}\right);\ \eta = |\mu| \sin \vartheta\right\}. \tag{2.15}$$

În continuare ne vom fixa atenţia asupra corespondenţei dintre planul z_* şi banda de periodicitate B_0, ceea ce nu va afecta rezultatul, dată fiind periodicitatea funcţiei $z = z(z_*)$.

Următoarea funcţie:

$$f(z_* - \mu) = \frac{t}{\pi} e^{-i\lambda} \operatorname{Arth}\,[m\,(z_* - \mu)] \tag{2.16}$$

satisface condiția (2.5) și are proprietatea

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_*} = 0\,;\; z_* \in \Delta_1^+ \cup K_1.$$

Pornind de la funcția de mai sus și ținînd seama de proprietatea enunțată, putem construi funcția care îndeplinește condiția (2.7) prin aplicarea teoremei cercului [8].

În virtutea acestei teoreme, funcția de reprezentare $z = z(z_*)$ va rezulta din

$$z = f(z_* - \mu) + \bar{f}\left(\frac{R^2}{z_* - \mu}\right), \tag{2.17}$$

respectiv

$$z = \frac{t}{\pi}\left\{e^{-i\lambda}\,\mathrm{Arth}\,[m(z_* - \mu)] + e^{i\lambda}\,\mathrm{Arth}\left(\frac{mR^2}{z_* - \mu}\right)\right\}. \tag{2.17a}$$

Funcția obținută este cea căutată. Într-adevăr, pentru $z_* \to \zeta_* \in K_1$ avem

$$\zeta = f(\zeta_* - \mu) + \bar{f}\left(\frac{R^2}{\zeta_* - \mu}\right) = f(\zeta_* - \mu) + \bar{f}(\bar{\zeta}_* - \bar{\mu});\; \frac{R^2}{\zeta_* - \mu} = \bar{\zeta}_* - \bar{\mu}, \tag{2.18}$$

ceea ce satisface condiția (2.7). Pentru $z_* \in \Delta_1^-$ avem îndeplinită condiția (2.6) dacă din Δ^- se exclude tăietura T_*; trecerea de la o bandă de periodicitate la cea adiacentă făcîndu-se prin traversarea tăieturii T_*.

De asemenea, pe lîngă condiția (2.5), satisfăcută în mod evident, vom avea satisfăcute și condițiile (2.3) și (2.4) dacă vom considera profilul C_0 aparținînd fie familiei de profile Jukovski, fie familiei de profile Carafoli.

Derivata de ordinul întîi a funcției de reprezentare va avea forma

$$\frac{dz}{dz_*} = \frac{t}{2\pi}\left\{e^{-i\lambda}\,D(z_* - \mu) + e^{i\lambda}\,d(z_* - \mu)\right\}, \tag{2.19}$$

iar derivata de ordinul doi

$$\frac{d^2z}{dz_*^2} = \frac{t}{2\pi}\left\{e^{-i\lambda}\frac{d}{dz_*}D(z_* - \mu) + e^{i\lambda}\frac{d}{dz_*}d(z_* - \mu)\right\}. \tag{2.20}$$

În expresiile derivatelor s-au considerat următoarele notații:

$$D(z_* - \mu) = \frac{1}{z_* - \mu + \frac{1}{m}} - \frac{1}{z_* - \mu - \frac{1}{m}}, \tag{2.21}$$

$$d(z_* - \mu) = \frac{1}{z_* - \mu + mR^2} - \frac{1}{z_* - \mu - mR^2}. \tag{2.22}$$

Între aceste funcții și următoarele două, asociate lor:

$$S(z_* - \mu) = \frac{1}{z_* - \mu + \frac{1}{m}} + \frac{1}{z_* - \mu - \frac{1}{m}}, \tag{2.23}$$

$$s(z_* - \mu) = \frac{1}{z_* - \mu + mR^2} + \frac{1}{z_* - \mu - mR^2}, \tag{2.24}$$

se pot stabili relațiile:

$$XD(X) = -\frac{1}{m} S(X), \tag{2.25}$$

$$Xd(X) = -mR^2 s(X), \tag{2.26}$$

$$XS(X) = 2 - \frac{1}{m} D(X), \tag{2.27}$$

$$Xs(X) = 2 - m R^2 d(X). \tag{2.28}$$

Din cele de mai sus rezultă de asemenea că derivata de ordinul doi mai poate fi exprimată sub forma

$$\frac{d^2z}{dz_*^2} = -\frac{t}{2\pi} \{e^{-i\lambda} D(z_* - \mu) \cdot S(z_* - \mu) + e^{i\lambda} d(z_* - \mu) \cdot s(z_* - \mu)\}. \tag{2.29}$$

Derivata de ordinul întîi (2.19) se va anula în punctele corespunzătoare extremităților tăieturii T_0.

Într-adevăr, derivata se anulează în punctul de afixă

$$\zeta_* = \mu + Re^{i\nu_0}, \quad \zeta_* \in K_1, \tag{2.30}$$

notat prin B' în figura 3, și în punctul de afixă

$$\zeta_* = \mu + R\, e^{i(\nu_0 + \pi)}, \quad \zeta_* \in K_1, \tag{2.31}$$

notat prin A' în figura 3, unghiul ν_0 fiind definit de

$$\operatorname{tg} \nu_0 = \frac{1 - m^2R^2}{1 + m^2R^2} \operatorname{tg} \lambda. \tag{2.32}$$

Punctul A' corespunde extremității a' și punctul B' corespunde extremității b'.

Vom nota prin

$$\zeta_* = e^{i\varphi_0}, \quad \zeta_* \in K \tag{2.33}$$

afixa punctului B aparținînd cercului-unitate K, punct obținut prin intersecția cercului K cu prelungirea dreptei $O'B'$ (fig. 3). Dacă vom avea îndeplinită condiția

$$\mu + R\, e^{i\nu_0} = e^{i\varphi_0}, \tag{2.34}$$

punctele B şi B' coincid, iar imaginea cercului K în planul z va fi un profil de tip Jukovski, profil cu bordul de fugă ascuţit. Dacă

$$e^{i\varphi_0} - (\mu + Re^{i\nu_0}) = \varepsilon e^{i\nu_0}, \tag{2.35}$$

unde ε reprezintă distanţa dintre punctele B şi B', atunci imaginea cercului K în planul z prin intermediul funcţiei (2.17) va fi un profil Carafoli cu bordul de fugă rotunjit.

În ambele cazuri,

$$k_2 = \frac{1}{R} \cdot |\mu| \sin(\varphi_0 - \vartheta), \tag{2.36}$$

va fi o măsură a curburii profilului şi

$$k_1 = \frac{1}{R} \cdot |\mu| \cos(\varphi_0 - \vartheta), \tag{2.37}$$

o măsură a grosimii profilului. De asemenea $k_3 = \frac{\varepsilon}{R}$ va fi o măsură a rotunjirii bordului de fugă.

Lungimea profilului l va rezulta din

$$l = \zeta(e^{i\varphi_0}) - \zeta(e^{i\varphi_A}), \tag{2.38}$$

unde în primă aproximaţie punctul A se poate asimila cu punctul A'': intersecţia prelungirii dreptei $O'A'$ cu cercul K.

Pentru λ şi t/l cunoscuţi, relaţiile (2.32) şi (2.38) ne permit calcularea pe cale iterativă a unghiului ν_0 şi a produsului (mR). Fixîndune asupra ordinului de mărime a curburii profilului, a grosimii acestuia şi a razei de curbură a bordului de fugă, parametrii corespunzători k_1 k_2 şi k_3 vor fi determinaţi, iar restul mărimilor φ_0, R, ϑ şi $|\mu|$ vor rezulta, conform (2.35) — (2.37), din relaţiile de mai jos:

$$\varphi_0 = \nu_0 - \arcsin \frac{k_2}{1 + k_3}, \tag{2.39}$$

$$R = \frac{1}{k_1 + (1 + k_3)\cos(\nu_0 - \varphi_0)}, \tag{2.40}$$

$$\vartheta = \varphi_0 - \operatorname{arc\,tg} \frac{k_2}{k_1}, \tag{2.41}$$

$$|\mu| = R\sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \tag{2.42}$$

3. REDUCEREA MIŞCĂRII PERIODICE DIN PLANUL z LA MIŞCAREA ÎN JURUL UNUI OBSTACOL IZOLAT

Vom porni de la reprezentarea integrală a vitezei complexe $W(z)$, $z \in D^-$, dată de (1.14), şi vom determina o reprezentare echivalentă în planul z_*. Pentru determinarea acestei reprezentări integrale este sufi-

cient a considera numai componenta asimptotică a funcției (2.17a), deci să considerăm transformarea

$$z = \frac{t}{\pi} e^{-i\lambda} \operatorname{Arth}[m(\overset{\circ}{z}_* - \mu)], \tag{3.1}$$

care stabilește o corespondență între mulțimea punctelor aparținînd unui plan ajutător $\overset{\circ}{z}_*$ și mulțimea punctelor aparținînd benzii de periodicitate B_n, definită de (2.2). Vom deosebi notațiile din planul z_* de cele din planul $\overset{\circ}{z}_*$ prin dispunerea semnului „o" deasupra fiecărui simbol.

Astfel, funcția $z = z(\overset{\circ}{z}_*)$, definită de (3.1), va stabili următoarele corespondențe:

$$z \in D_n^- \cap B_n \quad \text{pentru} \quad \overset{\circ}{z}_* \in \overset{\circ}{\Delta}^-, \tag{3.2}$$

$$\zeta \in C_n \quad \text{pentru} \quad \overset{\circ}{\zeta}_* \in \overset{\circ}{K}, \tag{3.3}$$

$$x \to \pm\infty \quad \text{pentru} \quad \overset{\circ}{z}_* \to \mu \pm \frac{1}{m}, \tag{3.4}$$

unde $0 < m < 1$. Pentru uniformizarea funcției (3.1) vom practica o tăietură $\overset{\circ}{T}_*$:

$$\overset{\circ}{T}_* = \left\{ \overset{\circ}{\zeta}_* \mid \overset{\circ}{\xi}_* \in \operatorname{Re} - \left(|\mu| \cos\vartheta - \frac{1}{m},\ |\mu| \cos\vartheta + \frac{1}{m} \right); \overset{\circ}{\eta}_* = |\mu| \sin\vartheta \right\}. \tag{3.5}$$

În continuare observăm faptul că funcția meromorfă $K(\zeta, z; t, \lambda)$, definită de (1.15), se mai poate scre sub forma

$$K(\zeta, z; t, \lambda) = \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \frac{1 - \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}\zeta\right] \cdot \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} z\right]}{\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}\zeta\right] - \operatorname{th}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} z\right]}. \tag{3.6}$$

Dar, conform (3.1), vom avea

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda} z\right] = m(\overset{\circ}{z}_* - \mu), \tag{3.7}$$

$$\operatorname{th}\left[\frac{\pi}{t} e^{i\lambda}\zeta\right] = m(\overset{\circ}{\zeta}_* - \mu). \tag{3.8}$$

Înlocuind (3.7) și (3.8) în (3.6), vom obține

$$K[\zeta(\overset{\circ}{\zeta}_*), z(\overset{\circ}{z}_*); t, \lambda] = \frac{1}{\overset{\circ}{\zeta}_* - \overset{\circ}{z}_*} \cdot \frac{d\overset{\circ}{z}_*}{dz} - \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} m(\overset{\circ}{z}_* - \mu), \tag{3.9}$$

unde, conform (3.1), derivata de mai sus are expresia

$$\frac{d\overset{\circ}{z}_*}{dz} = \frac{\pi}{t} e^{i\lambda} \frac{1}{m} [1 - m^2(\overset{\circ}{z}_* - \mu)^2] = \frac{t}{2\pi} e^{-i\lambda} D(\overset{\circ}{z}_* - \mu). \tag{3.10}$$

Deoarece vitezele complexe din cele două plane sînt legate prin expresia

$$\overset{\circ}{W}_*(\overset{\circ}{z}_*) = W(z)\frac{\mathrm{d}\overset{\circ}{z}}{\mathrm{d}z_*}, \tag{3.11}$$

valabilă şi pe frontiere

$$\overset{\circ}{W}_*(\overset{\circ}{\zeta}_*) = W(\zeta)\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\overset{\circ}{\zeta}_*}, \tag{3.12}$$

rezultă că circulaţia Γ se calculează în cele două domenii cu aceleaşi formule integrale :

$$\Gamma = -\int_{C_0} W(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -\int_{\overset{\circ}{K}} \overset{\circ}{W}_*(\overset{\circ}{\zeta}_*)\mathrm{d}\overset{\circ}{\zeta}_*. \tag{3.13}$$

În formula de mai sus, precum şi în cele ce urmează, ne vom referi la acea foaie din planul z care corespunde benzii de periodicitate B_0 : banda centrală.

Înlocuind expresia funcţiei meromorfe (3.9) în expresia integrală a vitezei (1,14), ţinînd apoi seama de (3.11), (3.12) şi de relaţia (2.25), vom obţine în cele din urmă expresia integrală a vitezei complexe $W_*(z)_*$ în exteriorul conturului izolat $\overset{\circ}{K}$:

$$\overset{\circ}{W}_*(\overset{\circ}{z}_*) = \frac{t}{2\pi} W_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} D(\overset{\circ}{z}_* - \mu) + \frac{\Gamma}{4\pi\mathrm{i}} \cdot S(\overset{\circ}{z}_* - \mu) -$$

$$- \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\overset{\circ}{K}} \frac{\overset{\circ}{W}_*(\overset{\circ}{\zeta}_*)}{\overset{\circ}{\zeta}_* - \overset{\circ}{z}_*} \mathrm{d}\overset{\circ}{\zeta}_*. \tag{3.14}$$

Viteza complexă $W_*(z_*)$ din exteriorul cercului-unitate K va avea aceeaşi expresie ca viteza complexă (3.14), deoarece funcţiile de reprezentare (3.1) şi (2.17) au aceeaşi expresie asimptotică, conform (3.4) şi (2.5). Astfel

$$W_*(z_*) = \frac{t}{2\pi} W_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} D(z_* - \mu) + \frac{\Gamma}{4\pi\mathrm{i}} \cdot S(z_* - \mu) -$$

$$- \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_K \frac{W_*(\zeta_*)}{\zeta_* - z_*} \mathrm{d}\zeta_*. \tag{3.15}$$

Evident că trecem de la viteza complexă $W_*(z_*)$, definită de (3.15), la viteza complexă $W(z)$ prin intermediul relaţiei

$$W_*(z_*) = W(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z_*}, \tag{3.16}$$

unde — funcţia de reprezentare fiind (2.17a) — derivata de mai sus va fi definită de (2.19).

Deoarece egalitatea (3.16) se menţine şi pe frontieră, vom avea pentru circulaţie

$$\Gamma = -\int_C W(\zeta)\mathrm{d}\zeta = -\int_K W_*(\zeta_*)\mathrm{d}\zeta_*. \tag{3.17}$$

În conformitate cu teorema Cauchy, din expresia integrală a vitezei (3.15) rezultă următoarea condiţie necesară şi suficientă:

$$\frac{t}{2\pi} W_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} D(z_* - \mu) + \frac{\Gamma}{4\pi\mathrm{i}} S(z_* - \mu) - \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_K \frac{W_*(\zeta_*)}{\zeta_* - z_*}\,\mathrm{d}\zeta_* = 0, \qquad z_* \in \Delta^+, \tag{3.18}$$

respectiv

$$W_*(z_* \in \Delta^+) = 0, \tag{3.19}$$

pentru a putea considera $W_*(\zeta_*)$ drept limită a vitezei complexe $W_*(z_*)$, $z_* \in \Delta^-$, deci

$$W_*(\zeta_*) = \lim_{z_* \in \Delta^- \to \zeta_* \in K} W_*(z_*). \tag{3.20}$$

Se obţine astfel o condiţie similară cu cea determinată în cazul reţelei (1.24); viteza complexă este în mod necesar nulă pe domeniul interior Δ^+.

Conform (3.20), limita pe contur a vitezei complexe (3.15) va avea următoarea expresie:

$$W_*(\zeta_{*0}) = \frac{t}{\pi} W_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} D(\zeta_{*0} - \mu) + \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}} S(\zeta_{*0} - \mu) - \frac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_K \frac{W_*(\zeta_*)}{\zeta_* - \zeta_{*0}}\,\mathrm{d}\zeta_*. \tag{3.21}$$

De aici rezultă ecuaţia integrală a vitezei complexe pe conturul K ecuaţie echivalentă ecuaţiei integrale (1.26):

$$W_*(\zeta_{*0}) + \frac{1}{\pi\mathrm{i}} \int_K \frac{W_*(\zeta_*)}{\zeta_* - \zeta_{*0}}\,\mathrm{d}\zeta_* = \frac{t}{\pi} W_\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda} D(\zeta_{*0} - \mu) + \frac{\Gamma}{2\pi\mathrm{i}} S(\zeta_{*0} - \mu). \tag{3.22}$$

Soluţia acestei ecuaţii integrale se va determina în cele ce urmează.

4. SOLUŢIONAREA ECUAŢIEI INTEGRALE A VITEZEI COMPLEXE $W_*(z_*)$ PRIN METODA PRELUNGIRII ANALITICE

Pornim de la expresia integrală a vitezei complexe $W_*(z_*)$, $z_* \in \Delta^-$, care, conform (3.19), ia valori nule pe Δ^+, şi ne propunem construirea prelungirii analitice a acestei funcţii în interiorul cercului K, deci pe Δ^+. Notăm prin $W_*^0(z_*)$ această prelungire analitică. Conform principiului simetriei, cele două funcţii $W_*(z_*)$ şi $W_*^0(z_*)$ iau valori complex conjugate

în punctele z_* şi z_*^{-1}, simetrice în raport cu cercul K. Deci prelungirea analitică a funcţiei $W_*(z_*)$ va fi definită de

$$W_*^0(z_*) = \overline{W}_*\left(\frac{1}{z_*}\right). \tag{4.1}$$

Expresia integrală a acestei prelungiri analitice se obţine, conform (4.1), din expresia integrală (3.15)

$$W_*^0(z_*) = \frac{t}{2\pi}\overline{W}_\infty e^{i\lambda}\overline{D}\left(\frac{1}{z_*} - \overline{\mu}\right) - \frac{\Gamma}{4\pi i}\overline{S}\left(\frac{1}{z_*} - \overline{\mu}\right) + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\overline{W}_*(\overline{\zeta}_*)}{\overline{\zeta}_* - \frac{1}{z_*}}\,d\overline{\zeta}_*. \tag{4.2}$$

Dar din (2.21) şi (2.22) rezultă că

$$\overline{D} = D; \qquad \overline{S} = S, \tag{4.3}$$

şi deoarece conturul K este linie de curent,

$$\overline{W}_*(\overline{\zeta}_*)d\overline{\zeta}_* = W_*(\zeta_*)d\zeta_*, \tag{4.4}$$

integrala din (4.2) poate fi exprimată sub forma

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{\overline{W}_*(\overline{\zeta}_*)}{\overline{\zeta}_* - \frac{1}{z_*}}\,d\overline{\zeta}_* = z_*\frac{\Gamma}{2\pi i} - z_*^2\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{W_*(\zeta_*)}{\zeta_* - z_*}\,d\zeta_*, \tag{4.5}$$

ceea ce ne conduce în cele din urmă la următoarea expresie a vitezei complexe (4.2):

$$W_*^0(z_*) = \frac{t}{2\pi}\overline{W}_\infty e^{i\lambda}D\left(\frac{1}{z_*} - \overline{\mu}\right) - \frac{\Gamma}{4\pi i}S\left(\frac{1}{z_*} - \overline{\mu}\right) + \\ + \frac{\Gamma}{2\pi i}z_* - z_*^2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{W_*(\zeta_*)}{\zeta_* - z_*}\,d\zeta_*. \tag{4.6}$$

Conform teoremei Cauchy, pentru

$$\lim_{z_*\in\Delta^+\to\zeta_*\in K} W_*^0(z_*) = W_*^0(\zeta_*), \tag{4.7}$$

rezultă

$$\frac{t}{2\pi}\overline{W}_\infty e^{i\lambda}D\left(\frac{1}{z_*} - \overline{\mu}\right) - \frac{\Gamma}{4\pi i}S\left(\frac{1}{z_*} - \overline{\mu}\right) + \\ + \frac{\Gamma}{2\pi i}z_* - z_*^2\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{W_*(\zeta_*)}{\zeta_* - z_*}\,d\zeta_* = 0; \qquad z_*\in\Delta^-. \tag{4.8}$$

Deci expresia integrală (4.6) defineşte viteza pe domeniul Δ^+, în timp ce pe Δ^-, conform (4.8), este nulă.

În conformitate cu (3.15), integrala din (4.8) are următoarea expresie :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_K \frac{W_*(\zeta_*)}{\zeta_* - z_*}\,d\zeta_* = -W_*(z_*) + \frac{t}{2\pi} W_\infty e^{-i\lambda} D(z_* - \mu) + \\ + \frac{\Gamma}{4\pi i} S(z_* - \mu). \tag{4.9}$$

Înlocuind (4.9) în (4.8) şi ordonînd, obţinem expresia căutată a vitezei complexe $W_*(z_*)$:

$$W_*(z_*) = \frac{tV_\infty}{2\pi}\left\{e^{-i(\alpha_\infty+\lambda)} D(z_* - \mu) - e^{i(\alpha_\infty+\lambda)} \frac{1}{z_*^2} D\left(\frac{1}{z_*} - \bar{\mu}\right)\right\} - \\ - \frac{\Gamma}{4\pi i}\left\{\frac{2}{z_*} - \frac{1}{z_*^2} S\left(\frac{1}{z_*} - \bar{\mu}\right) - S(z_* - \mu)\right\}. \tag{4.10}$$

Pe conturul K, deci pentru $z_* = \zeta_* \in K$, expresia vitezei complexe (4.10) va dobîndi forma

$$W_*(\zeta_*) = \frac{tV_\infty}{2\pi}\{e^{-i(\alpha_\infty+\lambda)} D(\zeta_* - \mu) - e^{i(\alpha_\infty+\lambda)} \bar{\zeta}_*^2 D(\bar{\zeta}_* - \bar{\mu})\} - \\ - \frac{\Gamma}{4\pi i}\{2\bar{\zeta}_* - \bar{\zeta}_*^2 S(\bar{\zeta}_* - \bar{\mu}) - S(\zeta_* - \mu)\}. \tag{4.11}$$

Conturul K fiind linie de curent, viteza complexă (4.11) va avea în lungul acestuia numai o componentă tangenţială V_{*t}, care, conform (1.27), va fi oferită de următoarea relaţie :

$$V_{*t}(\zeta_*) = W_*(\zeta_*)\, e^{i\theta_*} = i\zeta_* W_*(\zeta_*), \tag{4.12}$$

unde s-a ţinut seama de faptul că

$$e^{i\theta_*} = e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} = i\zeta_*\,; \quad \varphi = \arg \zeta_*.$$

Înlocuind (4.11) în (4.12), după cîteva calcule simple vom obţine următoarea expresie pentru viteza tangenţială în lungul conturului K :

$$V_{*t}(\zeta_*) = -\frac{tV_\infty}{\pi} \operatorname{Im}\{e^{-i(\alpha_\infty+\lambda)} \zeta_* D(\zeta_* - \mu)\} - \\ - \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{Re}\{1 - \zeta_* S(\zeta_* - \mu)\}. \tag{4.13}$$

Soluţia căutată a ecuaţiei integrale (3.22) este dată de (4.11) cu aproximaţia unei constante ciclice Γ : circulaţia vitezei (3.17).

Circulaţia vitezei Γ poate fi determinată cu ajutorul unei condiţii fizice de tip Jukovski sau Carafoli, amîndouă conducînd la condiţia anulării vitezei complexe (4.11) sau (4.13) în punctul corespunzător bordului de fugă al profilului, deci în punctul de afixă $\zeta_* = e^{i\varphi_0}$, argumentul φ_0 fiind oferit de relaţia (2.39).

Din condiţia anulării vitezei în acest punct, deci $V_{*t}(e^{i\varphi_0}) = 0$, rezultă că circulaţia Γ va avea expresia

$$\Gamma = -2\,t\,V_\infty \frac{\operatorname{Im}\{e^{-i(\alpha_\infty+\lambda)}\,e^{i\varphi_0}\,D(e^{i\varphi_0}-\mu)\}}{\operatorname{Re}\{1-e^{i\varphi_0}\,S(e^{i\varphi_0}-\mu)\}}. \tag{4.14}$$

În acest fel, soluţia este complet determinată.

Trecerea de la planul complex z_* la planul reţelei z se face cu ajutorul relaţiei (3.16), obţinînd astfel soluţia exactă a ecuaţiei integrale (1.26). Înlocuind (4.14) în (4.13) şi descompunînd apoi viteza în forma (1.41), vom obţine

$$V_{*t}(\zeta_*) = V_{*t1}(\zeta_*)\cos\alpha_\infty + V_{*t2}(\zeta_*)\sin\alpha_\infty, \tag{4.15}$$

în care componentele vitezei tangenţiale V_{*t} au expresiile

$$V_{*t1}(\zeta_*) = -\operatorname{Im}\{E(\zeta_*)\}, \tag{4.16}$$

$$V_{*t2}(\zeta_*) = \operatorname{Re}\{E(\zeta_*)\}, \tag{4.17}$$

funcţia $E(\zeta_*)$ fiind definită de

$$E(\zeta_*) = \frac{tV_\infty}{\pi}\,e^{-i\lambda}\left\{\zeta_*\,D(\zeta_*-\mu) - e^{i\varphi_0}\,D(e^{i\varphi_0}-\mu)\,\frac{\operatorname{Re}\{1-\zeta_*\,S(\zeta_*-\mu)\}}{\operatorname{Re}\{1-e^{i\varphi_0}\,S(e^{i\varphi_0}-\mu)\}}\right\}, \tag{4.18}$$

unde funcţiile $D(\zeta_*-\mu)$ şi $S(\zeta_*-\mu)$ sînt date de (2.21) şi (2.23).

5. UNGHIUL DE INCIDENŢĂ CRITIC VIRTUAL $\alpha_\infty = \alpha_c$

Expresia unghiului de incidenţă critic virtual a fost stabilită în funcţie de variabila planului fizic z, fiind dată de (1.42). În scopul simplificării calculelor este preferabil să determinăm acest unghi în funcţie de variabila cercului unitate, deci în funcţie de ζ_* sau de $\varphi = \arg\zeta_*$.

Pornim de la (1.35), ţinînd seama de faptul că operatorul diferenţial în lungul conturului C_0 poate fi exprimat sub forma

$$\frac{d}{d\zeta} = \frac{d\zeta_*}{d\zeta}\cdot\frac{d}{d\zeta_*} = \frac{1}{i\zeta_*}\cdot\frac{d\zeta_*}{d\zeta}\cdot\frac{d}{d\varphi}. \tag{5.1}$$

De aici rezultă că, pentru toate punctele cercului-unitate K care satisfac condiţia

$$\frac{d\zeta_*}{d\zeta} \neq 0, \tag{5.2}$$

expresia (1.35) poate fi exprimată sub forma

$$\frac{d}{d\varphi}[W(\zeta)\,e^{i\theta}] = 0. \tag{5.3}$$

Deoarece

$$W(\zeta)\,e^{i\theta} = W_*(\zeta_*)\frac{d\zeta_*}{d\zeta}\,e^{i\theta} = W_*(\zeta_*)\,e^{i\theta_*}\frac{ds_*}{ds} = V_{*t}(\zeta_*)\frac{ds_*}{ds}, \tag{5.4}$$

unde s-a ţinut seama de expresiile

$$d\zeta = ds\cdot e^{i\theta}, \tag{5.5}$$

$$d\zeta_* = ds_*\cdot e^{i\theta_*}, \tag{5.6}$$

rezultă că (5.3) se mai poate scrie după cum urmează:

$$\frac{d}{d\varphi}\left[V_{*t}(\zeta_*)\right] - g(\zeta_*)V_{*t}(\zeta_*) = 0, \tag{5.7}$$

unde funcţia $g(\zeta_*)$ este definită de

$$g(\zeta_*) = \left(\frac{d^2s}{ds_*^2}\right) \Big/ \left(\frac{ds}{ds_*}\right). \tag{5.8}$$

Înlocuind viteza tangenţială dată de (4.15) în condiţia (5.7) şi rezolvînd ecuaţia în α_∞, obţinem expresia căutată a unghiului de incidenţă critic virtual:

$$\alpha_\infty = -\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{d}{d\varphi}\left[V_{*t1}(\zeta_*)\right] - g(\zeta_*)\,V_{*t1}(\zeta_*)}{\dfrac{d}{d\varphi}\left[V_{*t2}(\zeta_*)\right] - g(\zeta_*)\,V_{*t2}(\zeta_*)}. \tag{5.9}$$

După cîteva calcule simple, expresia funcţiei $g(\zeta_*)$ dată de (5.8) poate fi adusă la o formă în care să figureze expresiile derivatelor (2.19) şi (2.29), obţinînd în final următoarea expresie utilă în calcule:

$$g(\zeta_*) = -\left|\frac{d\zeta}{d\zeta_*}\right|^{-2}\cdot \operatorname{Im}\left\{\zeta_*\left(\frac{d^2\zeta}{d\zeta_*^2}\right)\cdot\left(\frac{\overline{d\zeta}}{d\zeta_*}\right)\right\}. \tag{5.10}$$

Derivatele componentelor vitezei care figurează în expresia (5.9) pot fi exprimate într-o formă relativ simplă, ţinînd seama de identităţile valabile pentru $|\zeta_*| = 1$ şi pentru orice funcţie $E(\zeta_*)$ continuă pe cercul unitate K:

$$i\zeta_*\frac{d}{d\zeta_*}\operatorname{Im}\{E(\zeta_*)\} \equiv \operatorname{Re}\left\{\zeta_*\frac{dE(\zeta_*)}{d\zeta_*}\right\}, \tag{5.11}$$

$$i\zeta_*\frac{d}{d\zeta_*}\operatorname{Re}\{E(\zeta_*)\} \equiv -\operatorname{Im}\left\{\zeta_*\frac{dE(\zeta_*)}{d\zeta_*}\right\}. \tag{5.12}$$

Respectînd cele două identităţi, după cîteva calcule elementare obţinem expresiile derivatelor sub următoarea formă:

$$\frac{d}{d\varphi}\left[V_{*t1}(\zeta_*)\right] = -\operatorname{Re}\left\{\zeta_*\frac{dE(\zeta_*)}{d\zeta_*}\right\}, \tag{5.13}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\left[V_{*t2}(\zeta_*)\right] = -\operatorname{Im}\left\{\zeta_*\frac{dE(\zeta_*)}{d\zeta_*}\right\}, \tag{5.14}$$

unde funcţia conţinută în acoladă are expresia

$$\zeta_* \frac{dE(\zeta_*)}{d\zeta_*} = \frac{tV_\infty e^{-i\lambda}}{\pi}\left\{\zeta_* \frac{d}{d\zeta_*}[\zeta_* D(\zeta_* - \mu)] - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{i\varphi_0} D(e^{i\varphi_0} - \mu)}{\mathrm{Re}\{1 - e^{i\varphi_0} S(e^{i\varphi_0} - \mu)\}} \zeta_* \frac{d}{d\zeta_*} \mathrm{Re}\{1 - \zeta_* S(\zeta_* - \mu)\}\right\}. \quad (5.15)$$

Aceasta din urmă poate fi adusă la o formă şi mai simplă, formă recomandabilă pentru calcule, dacă ţinem seama de egalităţile

$$\frac{d}{d\zeta_*} D(\zeta_* - \mu) = - D(\zeta_* - \mu) \cdot S(\zeta_* - \mu), \quad (5.16)$$

$$\frac{d}{d\zeta_*} S(\zeta_* - \mu) = D(\zeta_* - \mu) \cdot [m - D(\zeta_* - \mu)], \quad (5.17)$$

deduse din relaţiile precedente (2.21) şi (2.23).

În conformitate cu (5.16) şi (5.17) vom avea

$$\zeta_* \frac{d}{d\zeta_*} \cdot [\zeta_* D(\zeta_* - \mu)] = \zeta_* D(\zeta_* - \mu)\,[1 - \zeta_* S(\zeta_* - \mu)], \quad (5.18)$$

$$\zeta_* \frac{d}{d\zeta_*} \mathrm{Re}\{1 - \zeta_* S(\zeta_* - \mu)\} =$$

$$= - i\,\mathrm{Im}\{\zeta_* S(\zeta_* - \mu) + \zeta_*^2 D(\zeta_* - \mu)\,[m - D(\zeta_* - \mu)]\}. \quad (5.19)$$

Înlocuind (5.18) şi (5.19) în (5.15), vom obţine pentru aceasta din urmă următoarea relaţie simplă:

$$\zeta_* \frac{dE(\zeta_*)}{d\zeta_*} = \frac{tV_\infty e^{-i\lambda}}{\pi}\left\{\zeta_* D(\zeta_* - \mu)\,[1 - \zeta_* S(\zeta_* - \mu)] + \right.$$

$$+ i \frac{e^{i\varphi_0} D(e^{i\varphi_0} - \mu)}{\mathrm{Re}\{1 - e^{i\varphi_0} S(e^{i\varphi_0} - \mu)\}} \times$$

$$\left. \times \mathrm{Im}\{\zeta_* S(\zeta_* - \mu) + \zeta_*^2 D(\zeta_* - \mu)\,[m - D(\zeta_* - \mu)]\}\right\}. \quad (5.20)$$

BIBLIOGRAFIE

1. I. Anton, O. Popa, *Asupra caracteristicilor de cavitaţie ale unui profil izolat*, St. cerc. şt. tehn. Timişoara, **10,** *2* (1963).
2. — *Das Geschwindigkeitsfeld auf der Kontur der Schaufelgitter aus dünnen Profilen und die Bestimmung ihrer Kavitationsempfindlichkeit*, Mitteilungen der Konferenz für Wasserkraftmaschinen, Timişoara, September 1964, Dritter Teil.
3. O. Popa, *Über die Potentialbewegung in Schaufelgitter mit Carafoli Profilen*, Mitteilungen der Konferenz für Wasserkraftmaschinen, Timişoara, September 1964, Zweiter Teil.
4. E. Carafoli, *Méthode générale pour le tracé des profils d'aviation*, C.R.A.S. de Paris, **185,** 1014 (1927).
5. F. Numachi, K. Tsunoda, I. Chida, *Cavitation Tests on Clark Y Profiles of Several Thickness*, Rep. Inst. High. Sp. Mech. Tohoku. Univ., **8,** *47* (1957).
6. I. Anton, O. Popa, *The Determination of Sensitivity to Cavitation of a Cascade of Hydrofoils of Arbitrary Shape*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **11,** *2* (1967).
7. W. Weinig, *Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen*, Johann Ambrosius Barth Verlag, Leipzig, 1935.
8. Milne-Thomson L. M., Proceedings oc the Cambridge Philos. Soc., **36** (1940).

ASUPRA UTILIZĂRII METODEI CARACTERISTICILOR ÎN STUDIUL UNOR SCURGERI LENTE ALE GAZELOR

de T. OROVEANU
Institutul de petrol, gaze şi geologie Bucureşti

532

Se studiază scurgerea lentă a gazelor prin medii poroase şi prin conducte, presupunîndu-se că regimul este nestaţionar, ceea ce implică un oarecare efect al forţei de inerţie. Ecuaţiile diferenţiale fiind hiperbolice, se poate utiliza metoda caracteristicilor, care permite, pe de o parte, justificarea anumitor aproximaţii, iar pe de alta analiza gradului de precizie a anumitor procedee cunoscute.

1. INTRODUCERE

În ceea ce urmează vom considera două feluri de scurgeri ale gazelor, destul de diferite, care pot fi alăturate numai datorită faptului că se produc de obicei cu viteze destul de mici. Este vorba în primul rînd de scurgerea gazelor prin medii poroase şi după aceea de scurgerea gazelor prin conducte, ambele în regim nestaţionar. Cu toate că din punct de vedere practic vitezele care trebuie luate în consideraţie în aceste două feluri de probleme sînt destul de mici, apar situaţii în care variaţii relativ mari ale vitezei se produc în intervale de timp destul de mici. Aşa cum vom arăta mai departe, ecuaţiile diferenţiale pe care le găsim ţinînd seama de acest fapt sînt de tip hiperbolic. Totuşi în scurgerile de care ne ocupăm se presupune de obicei că forţele de inerţie sînt mici, astfel că termenii corespunzători din ecuaţii pot fi neglijaţi. În acest mod, problemele comportă rezolvarea unei ecuaţii de tip parabolic. Acest punct de vedere se poate apăra foarte bine atunci cînd este vorba de scurgeri în regim nestaţionar, a căror viteză nu variază brusc în timp. Însă atunci cînd se studiază scurgerile care pornesc din repaus, situaţie care face parte din acelea pe care le-am semnalat mai sus, sîntem de părere că ar fi mai bine să se ia în consideraţie şi prezenţa forţelor de inerţie. Chiar dacă efectul acestora este destul de mic, soluţiile problemelor sînt mai exacte fără ca dificultăţile matematice să fie sensibil sporite. Într-adevăr, ecuaţiile diferenţiale de care ne servim pentru descrierea matematică a acestor scurgeri au în comun faptul de a fi neliniare oricare ar fi tipul lor, hiperbolic sau parabolic. Prin urmare tre-

buie să se aibă în vedere fie utilizarea unei metode numerice, fie a unei metode aproximative. Printre acestea din urmă pot fi numărate și diversele tentative de a se rezolva problemele cu ajutorul unei ecuații liniarizate.

Ținînd seama de această situație, ni se pare că studiul scurgerilor amintite mai sus, cu luarea în considerație a efectului forțelor de inerție, prezintă unele avantaje cel puțin din punct de vedere teoretic. Într-adevăr, ecuațiile de tip hiperbolic la care se ajunge permit utilizarea metodei caracteristicilor și se știe că integrarea numerică pe aceste curbe este de obicei convenabilă și precisă [1]. În ceea ce urmează, nu vom considera acest aspect al problemelor, ci vom încerca să arătăm că metoda caracteristicilor aduce unele lămuriri asupra problemelor de ordin teoretic. Astfel, în studiul scurgerii gazelor prin medii poroase, utilizarea acestei metode permite o mai bună justificare a unei aproximații pe care am făcut-o mai înainte [5], cînd am dedus ecuația diferențială în care se ține seama de efectul forțelor de inerție. De asemenea vom vedea mai departe că metoda caracteristicilor ne dă o idee destul de precisă asupra gradului de aproximație pe care îl comportă liniarizarea ecuației diferențiale atunci cînd se studiază scurgerea în regim nestaționar a gazelor în conducte.

2. SCURGEREA GAZELOR PRIN MEDII POROASE

Atunci cînd se admite că legea lui Darcy rămîne valabilă pentru scurgerea gazelor prin medii poroase, se ajunge la ecuațiile pe care le satisfac masa specifică sau presiunea luîndu-se ca punct de plecare forma acestei legi care corespunde la regimul staționar. Dacă mărimile care caracterizează scurgerea suferă variații importante în intervale de timp destul de mici, ni se pare însă necesar să punem în evidență caracterul nestaționar al scurgerii. Trebuie deci să se înlocuiască ecuația care exprimă legea lui Darcy printr-o alta în care apare un termen ce corespunde forței de inerție în mișcările lente. Procedînd în acest mod, am găsit cu mai mult timp în urmă ecuațiile diferențiale ale masei specifice și ale presiunii pentru scurgerile cu caracter predominant nestaționar ale gazelor prin medii poroase [5]. Pentru a ajunge la acest rezultat a trebuit totuși să recurgem la unele aproximații, ecuațiile găsite astfel rămînînd însă neliniare.

În ceea ce urmează vom relua această problemă pentru cazul particular al scurgerii unidimensionale. Posibilitatea de a se utiliza metoda caracteristicilor care apare în acest caz prezintă un interes sigur, deoarece această metodă permite o evaluare mai corectă a aproximației amintite mai sus și în același timp o apreciere mai sugestivă a efectului forței de inerție.

2.1. *Ecuațiile problemei.* Să considerăm deci scurgerea nestaționară unidimensională a gazelor prin medii poroase și să scriem ecuația de continuitate

$$m\rho_t + (\rho v)_x = 0, \tag{2.1}$$

în care m este porozitatea, ρ masa specifică și v viteza de filtrare. O a doua ecuație este aceea de mișcare

$$v_t + \frac{1}{\rho} p_x + \frac{\mu}{\rho k} v = 0, \tag{2.2}$$

p fiind presiunea, μ viscozitatea gazelor şi k permeabilitatea mediului poros. Această ultimă ecuaţie reprezintă generalizarea legii lui Darcy pentru cazul scurgerii nestaţionare [4]. Precizăm de la început că ecuaţiile (2.1) şi (2.2) pot fi utilizate şi la studiul scurgerii prin mediile poroase neomogene.

Pentru a se elimina presiunea din ecuaţiile precedente, vom considera ecuaţia de stare

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^n, \tag{2.3}$$

în care p_0 este o presiune de referinţă şi ρ_0 valoarea corespunzătoare a masei specifice. Exponentul n poate lua diverse valori în funcţie de natura procesului termodinamic; atunci cînd evoluţia gazelor este izotermică, situaţie care reprezintă destul de corect realitatea, acest exponent devine egal cu unitatea.

Cu ajutorul ecuaţiei (2.3) ajungem la sistemul

$$\begin{gathered} m\rho_t + v\rho_x + \rho v_x = 0, \\ v_t + \frac{1}{n}\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\rho^{\frac{1-2n}{n}}\rho_x + \frac{\mu}{\rho k}v = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

şi, dacă procedăm în modul cunoscut [2], obţinem direcţiile caracteristice

$$\zeta_+ = \frac{x_\alpha}{t_\alpha} = \frac{v + \sqrt{v^2 + 4\frac{m}{n}\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\rho^{\frac{1-n}{n}}}}{2m} \tag{2.5}$$

şi

$$\zeta_- = \frac{x_\beta}{t_\beta} = \frac{v - \sqrt{v^2 + 4\frac{m}{n}\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\rho^{\frac{1-n}{n}}}}{2m}, \tag{2.6}$$

α şi β fiind parametrii caracteristici. Tot astfel găsim pe caracteristicile C_+

$$\rho v_\alpha + m\zeta_+ \rho_\alpha + \frac{\mu}{k} v t_\alpha = 0, \tag{2.7}$$

în timp ce pe caracteristicile C_- avem

$$\rho v_\beta + m\zeta_- \rho_\beta + \frac{\mu}{k} v t_\beta = 0. \tag{2.8}$$

Dacă punem

$$a^2 = \frac{1}{nm}\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\rho^{\frac{1-n}{n}} \tag{2.9}$$

şi

$$M = \frac{v}{a}, \tag{2.10}$$

găsim, în loc de (2.5) şi de (2.6),

$$\zeta_+ = a\left(\frac{M}{2m} + \sqrt{1 + \frac{M^2}{4m^2}}\right), \tag{2.11}$$

respectiv

$$\zeta_- = a\left(\frac{M}{2m} - \sqrt{1 + \frac{M^2}{4m^2}}\right). \tag{2.12}$$

Pentru ca legea liniară de filtrare să rămînă valabilă este necesar ca viteza de filtrare să fie foarte mică faţă de a, ceea ce ne dă $M \ll 1$. Ţinînd seama de valorile obişnuite ale porozităţii, rezultă de asemenea $\frac{M^2}{4m^2} \ll 1$, ceea ce ne permite să simplificăm expresiile direcţiilor caracteristice, acestea devenind

$$\zeta_+ = a\left(\frac{M}{2\,m} + 1\right) \tag{2.13}$$

şi

$$\zeta_- = a\left(\frac{M}{2m} - 1\right), \tag{2.14}$$

cu o foarte bună aproximaţie. S-ar putea merge chiar mai departe cu simplificările, deoarece raportul $\frac{M}{2m}$ este şi el foarte mic faţă de unitate. Într-adevăr, ca urmare a precizărilor date mai sus referitor la valoarea raportului dintre v şi a, viteza de propagare a perturbaţiilor în lungul caracteristicilor ar putea fi considerată constantă şi egală cu $\pm a$.

2.2. *Scurgerea izotermică într-un mediu poros omogen.* Dacă luăm în consideraţie cazul particular al scurgerii izotermice ($n = 1$), rezultatele precedente devin şi mai simple, deoarece avem

$$a^2 = a_0^2 = \frac{1}{m}\frac{p_0}{\rho_0} \tag{2.15}$$

şi atunci cînd mediul poros este omogen a_0 este o constantă.

Această ultimă observaţie ne permite să introducem mărimile adimensionale

$$\tau = \frac{a_0 t}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \bar{v} = \frac{v}{a_0}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \tag{2.16}$$

l fiind o lungime caracteristică a mediului poros. În acest mod, ecuațiile (2.4) devin

$$m\bar{\rho}_\tau + \bar{v}\bar{\rho}_\xi + \bar{\rho}\bar{v}_\xi = 0,$$
$$\bar{v}_\tau + \frac{m}{\bar{\rho}}\bar{\rho}_\xi + \frac{1}{R_0}\frac{\bar{v}}{\bar{\rho}} = 0, \tag{2.17}$$

unde am pus

$$R_0 = \frac{\rho_0 a_0 k}{\mu l}. \tag{2.18}$$

Direcțiile caracteristice sînt

$$\zeta_+ = \frac{\xi_\alpha}{\tau_\alpha} = \frac{\bar{v}}{2m} + \sqrt{1 + \frac{\bar{v}^2}{4m^2}}, \tag{2.19}$$

respectiv

$$\zeta_- = \frac{\xi_\beta}{\tau_\beta} = \frac{\bar{v}}{2m} - \sqrt{1 + \frac{\bar{v}^2}{4m^2}}, \tag{2.20}$$

și, dacă ținem seama de observația cu care se termină paragraful precedent, putem scrie cu o aproximație foarte satisfăcătoare

$$\zeta_+ = +1, \quad \zeta_- = -1. \tag{2.21}$$

Într-adevăr, viteza adimensională $\bar{v}$ nu este altceva decît numărul lui Mach pentru cazul particular al scurgerii izotermice.

Așa cum rezultă din relațiile (2.21), caracteristicile C_+ și C_- formează două familii de drepte ortogonale.

Ecuațiile caracteristice sînt

$$\bar{\rho}\,\bar{v}_\alpha + m\bar{\rho}_\alpha + \frac{1}{R_0}\bar{v}\,\tau_\alpha = 0 \tag{2.22}$$

pe C_+ și

$$\bar{\rho}\,\bar{v}_\beta - m\bar{\rho}_\beta + \frac{1}{R_0}\bar{v}\,\tau_\beta = 0 \tag{2.23}$$

pe C_-.

Cu parametrii caracteristici α și β poate fi definit un nou sistem de coordonate rectangulare, legat de coordonatele τ și ξ prin relațiile

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi + \tau), \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi - \tau), \tag{2.24}$$

ceea ce ne permite să scriem în loc de (2.22) și de (2.23)

$$\bar{\rho}\,\bar{v}_\alpha + m\bar{\rho}_\alpha + \frac{1}{R_0\sqrt{2}}\bar{v} = 0 \tag{2.25}$$

pe C_+ şi

$$\bar{\rho}\,\bar{v}_\beta - m\bar{\rho}_\beta - \frac{1}{R_0\sqrt{2}}\,\bar{v} = 0 \tag{2.26}$$

pe C_-. În acest mod ajungem la ecuaţiile

$$(\bar{v} + m\ln\bar{\rho})_\alpha = -\frac{1}{R_0\sqrt{2}}\,\bar{v} \tag{2.27}$$

şi

$$(\bar{v} - m\ln\bar{\rho})_\beta = \frac{1}{R_0\sqrt{2}}\,\bar{v}, \tag{2.28}$$

care ar putea fi utilizate pentru rezolvarea unor probleme de valori iniţiale cu ajutorul unei metode aproximative. Încheiem aceste consideraţii observînd că este foarte uşor să introducem în ecuaţiile caracteristice (2.25) şi (2.26) variabilele τ şi ξ.

2.3. *Ecuaţiile aproximative ale problemei.* În [5] am introdus o aproximaţie înlocuind ecuaţia (2.2) prin

$$(\rho v)_t + p_x + \frac{\mu}{k}\,v = 0. \tag{2.29}$$

Am utilizat aceeaşi aproximaţie în dezvoltările care ne-au condus la evaluarea efectului inerţiei asupra scurgerii lichidelor compresibile prin medii poroase [4]. În acest din urmă caz există o bună justificare, deoarece compresibilitatea lichidelor este foarte mică, dar în ceea ce priveşte scurgerea gazelor a trebuit să recurgem la un raţionament puţin diferit.

Dacă procedăm ca mai înainte, eliminînd presiunea din (2.29) cu ajutorul ecuaţiei (2.3), ajungem la sistemul

$$\begin{aligned} m\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + \frac{1}{n}\,\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\,\rho^{\frac{1-n}{n}}\,\rho_x + \frac{\mu}{k}\,v &= 0, \end{aligned} \tag{2.30}$$

ale cărui direcţii caracteristice sînt

$$\zeta_+ = +\sqrt{\frac{1}{nm}\,\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\,\rho^{\frac{1-n}{n}}} \tag{2.31}$$

şi

$$\zeta_- = -\sqrt{\frac{1}{nm}\,\frac{p_0}{\rho_0^{\frac{1}{n}}}\,\rho^{\frac{1-n}{n}}}. \tag{2.32}$$

Utilizînd notaţia (2.9), găsim

$$\zeta_+ = +a, \qquad \zeta_- = -a \tag{2.33}$$

şi am arătat mai sus că aceste expresii nu ies din cadrul unei aproximaţii foarte satisfăcătoare. Din acest punct de vedere, raţionamentul care ne-a condus la înlocuirea ecuaţiei (2.2) cu (2.29) apare deci justificat. Însă pentru scurgerea unidimensională metoda caracteristicilor ne permite să renunţăm la această aproximaţie. Într-adevăr, sistemul (2.30) conduce la ecuaţiile caracteristice

$$(\rho v)_\alpha + ma\rho_\alpha + \frac{\mu}{\rho k}\rho v t_\alpha = 0 \tag{2.34}$$

pe C_+ şi

$$(\rho v)_\beta - ma\rho_\beta + \frac{\mu}{\rho k}\rho v t_\beta = 0 \tag{2.35}$$

pe C_-. Aceste ecuaţii, în care apar ca funcţii necunoscute ρv şi ρ, nu sînt mai simple decît ecuaţiile (2.7) şi (2.8), cu funcţiile necunoscute v şi ρ, bineînţeles dacă introducem pentru direcţiile caracteristice expresiile simplificate (2.33). Se poate încerca deci rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuaţiilor (2.7) şi (2.8), precizia fiind, desigur, mai mare.

3. SCURGEREA GAZELOR ÎN CONDUCTE ÎN REGIM NESTAŢIONAR

De obicei se studiază scurgerea gazelor în conducte introducîndu-se în ecuaţia de mişcare viteza medie în raport cu secţiunea transversală a ţevii. De asemenea forţele de frecare apar în ecuaţie sub forma globală în care intervine coeficientul de pierdere de sarcină. Ecuaţia de mişcare şi ecuaţia de continuitate formează un sistem de ecuaţii cu derivate parţiale de primul ordin. Atunci cînd se ţine seama de forţa de inerţie, acest sistem este hiperbolic şi cvasiliniar, ceea ce permite utilizarea metodei caracteristicilor. Totuşi, cei mai mulţi dintre autorii care au studiat această problemă au admis că termenii care reprezintă inerţia în ecuaţia de mişcare sînt neglijabili. S-a afirmat chiar [3] că, în afară de unele cazuri cu totul particulare, intervenţia forţelor de inerţie nu adaugă decît o corecţie minimă a presiunii. Însă, pentru a avea posibilitatea de a îngloba şi aceste cazuri în consideraţiile teoretice, ar fi totuşi recomandabil să se ţină seama şi de efectul forţelor de inerţie. Aceasta cu atît mai mult cu cît problema matematică nu devine mai complicată. Într-adevăr, dacă se neglijează termenii care reprezintă inerţia, sistemul devine parabolic, dar ecuaţia cu derivate parţiale de ordinul doi care rezultă — fie pentru presiune, fie pentru debitul de masă — este neliniară. Unii autori au propus mai multe procedee care au ca scop liniarizarea acestei ecuaţii, dar, aşa cum vom arăta mai departe, eroarea ar putea deveni considerabilă.

3.1. *Ecuaţiile problemei.* Ca urmare a observaţiilor pe care le-am făcut mai sus, ecuaţia de mişcare pentru scurgerea nestaţionară a gazelor în conducte este

$$v_t + vv_x + \frac{1}{\rho}p_x + \lambda\frac{v^2}{2d} = 0, \tag{3.1}$$

unde v este viteza medie, λ coeficientul de pierdere de sarcină şi d diametrul interior al ţevilor. Vom admite că λ este o constantă, aşa cum se face de altfel de obicei.

Considerăm de asemenea şi ecuaţia de continuitate

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \tag{3.2}$$

şi dacă presupunem că scurgerea este izotermică, ceea ce reprezintă o ipoteză obişnuită, avem de asemenea

$$\frac{p}{\rho} = a^2, \tag{3.3}$$

a fiind o constantă. Admitem deci că gazul transportat se comportă ca un gaz perfect, ceea ce nu corespunde realităţii, dar, pentru scopul pe care îl urmărim, acest aspect al problemei este fără importanţă.

Dacă introducem şi notaţia

$$\rho v = q\,, \tag{3.4}$$

găsim după cîteva calcule simple sistemul

$$\frac{q}{p}\,p_t - \left(1 - a^2\frac{q^2}{p^2}\right)p_x - q_t - a^2\frac{q}{p}\,q_x - \lambda\frac{a^2}{2d}\,\frac{q^2}{p} = 0,$$

$$p_t + a^2 q_x = 0, \tag{3.5}$$

identic cu cel propus în [3] şi [6], cu excepţia absenţei coeficientului de compresibilitate Z, care ar trebui să apară în (3.3) şi pe care l-am considerat egal cu unitatea.

Direcţiile caracteristice ale acestui sistem sînt

$$\zeta_+ = \frac{x_\alpha}{t_\alpha} = a\left(a\frac{q}{p} + 1\right) \tag{3.6}$$

şi

$$\zeta_- = \frac{x_\beta}{t_\beta} = a\left(a\frac{q}{p} - 1\right), \tag{3.7}$$

α şi β fiind, ca mai înainte, parametrii caracteristici.

În ceea ce priveşte ecuaţiile caracteristice, cu ajutorul cîtorva simplificări găsim pe C_+

$$\left(1 - a\frac{q}{p}\right)p_\alpha + aq_\alpha + \lambda\frac{a^3}{2d}\,\frac{q^2}{p}\,t_\alpha = 0 \tag{3.8}$$

şi pe C_-

$$\left(1 + a\frac{q}{p}\right)p_\beta - aq_\beta - \lambda\frac{a^3}{2d}\,\frac{q^2}{p}\,t_\beta = 0. \tag{3.9}$$

Este uşor de observat că avem

$$a\frac{q}{p} = \frac{v}{a} = M, \tag{3.10}$$

astfel că expresiile (3.6) şi (3.7) devin

$$\zeta_+ = a\,(M+1), \quad \zeta_- = a\,(M-1). \tag{3.11}$$

De asemenea, ţinînd seama de (3.10), ecuaţiile caracteristice devin

$$(1-M)p_\alpha + aq_\alpha + \lambda\frac{a^2}{2d}\,q\,Mt_\alpha = 0 \tag{3.12}$$

pe C_+ şi

$$(1+M)\,p_\beta - aq_\beta - \lambda\frac{a^2}{2d}\,q\,Mt_\beta = 0 \tag{3.13}$$

pe C_-.

Cu variabilele adimensionale

$$\tau = \frac{at}{l}; \qquad \xi = \frac{x}{l} \tag{3.14}$$

găsim

$$\zeta_+ = M+1, \quad \zeta_- = M-1 \tag{3.15}$$

şi

$$(1-M)\,p_\alpha + aq_\alpha + \lambda\frac{a}{2}\frac{l}{d}\,qM\tau_\alpha = 0 \tag{3.16}$$

pe C_+ şi

$$(1+M)\,p_\beta - aq_\beta - \lambda\frac{a}{2}\frac{l}{d}\,qM\,\tau_\beta = 0 \tag{3.17}$$

pe C_-.

Cu ajutorul relaţiei (3.10) putem face să dispară funcţia q şi derivatele ei q_α, q_β din ecuaţiile precedente. După cîteva calcule simple obţinem

$$(\ln p)_\alpha + M_\alpha + \lambda\frac{l}{2d}\,M^2\,\tau_\alpha = 0 \tag{3.18}$$

pe C_+ şi

$$(\ln p)_\beta - M_\beta - \lambda\frac{l}{2d}\,M^2\,\tau_\beta = 0 \tag{3.19}$$

pe C_-. Totuşi, din punct de vedere practic apare mai interesant să se considere debitul de masă unitar decît numărul lui Mach M.

Ecuaţiile pe care le-am găsit ne vor servi în cele ce urmează la aprecierea gradului de aproximaţie pe care îl comportă diferitele procedee avînd ca scop o oarecare simplificare a problemei.

3.2. *Ecuaţiile simplificate.* Forţele de inerţie sînt reprezentate în ecuaţia de mişcare (3.1) prin primii doi termeni. În general, termenul v_t este mai mare decît termenul vv_x, deoarece derivata v_x are de obicei valori destul de mici. Se poate păstra deci în ecuaţia (3.1) ca termen de inerţie numai derivata v_t, dar simplificarea care rezultă nu este esenţială în ceea ce priveşte posibilităţile de rezolvare a problemelor.

O altă simplificare posibilă [7] se referă tot la ecuația de mișcare, care poate fi pusă sub forma

$$(\rho v)_t + (\rho v^2)_x + p_x + \lambda \frac{\rho v^2}{2d} = 0, \tag{3.20}$$

obținută înmulțind (3.1) cu ρ și ținînd seama de ecuația de continuitate (3.2).

Dacă se neglijează termenul $(\rho v^2)_x$ pentru motive analoge cu cele menționate mai sus, se ajunge la sistemul

$$\begin{aligned} q_t + p_x + \lambda \frac{a^2}{2d} \frac{q^2}{p} &= 0, \\ p_t + a^2 q_x &= 0, \end{aligned} \tag{3.21}$$

ale cărui direcții caracteristice sînt

$$\zeta_+ = \frac{x_\alpha}{t_\alpha} = +a, \quad \zeta_- = \frac{x_\beta}{t_\beta} = -a. \tag{3.22}$$

Deoarece atunci cînd scurgerea este izotermică a este o constantă, caracteristicile sînt linii drepte.

Pe caracteristicile C_+ găsim

$$p_\alpha + a q_\alpha + \lambda \frac{a^3}{2d} \frac{q^2}{p} t_\alpha = 0, \tag{3.23}$$

în timp ce pe caracteristicile C_- avem

$$p_\beta - a q_\beta - \lambda \frac{a^3}{2d} \frac{q^2}{p} t_\beta = 0. \tag{3.24}$$

Cu variabilele adimensionale (3.14) putem scrie

$$\zeta_+ = +1, \quad \zeta_- = -1, \tag{3.25}$$

caracteristicile intersectîndu-se deci sub un unghi drept. De asemenea ecuațiile (3.23) și (3.24) devin

$$p_\alpha + a q_\alpha + \lambda \frac{a^2}{2} \frac{l}{d} \frac{q^2}{p} \tau_\alpha = 0 \tag{3.26}$$

pe C_+ și

$$p_\beta - a q_\beta - \lambda \frac{a^2}{2} \frac{l}{d} \frac{q^2}{p} \tau_\beta = 0 \tag{3.27}$$

pe C_-.

Unele considerații expuse în paragraful 2.2 sînt aplicabile și în acest caz, dar nu găsim necesar să insistăm asupra lor.

Este mai interesant să comparăm aceste rezultate cu (3.15), (3.16) și (3.17). Este ușor de remarcat că aproximația introdusă în ecuația de mișcare revine la a presupune M ca mic față de unitate. Acest procedeu este

deci aplicabil numai scurgerilor foarte lente. De altfel această aproximație nu face ca ecuațiile să devină liniare.

3.3. *Ecuațiile liniarizate.* Tot în [7] se consideră sistemul

$$\begin{aligned} q_t + p_x + 2\varepsilon q &= 0, \\ p_t + a^2 q_x &= 0, \end{aligned} \tag{3.28}$$

în care ε reprezintă valoarea medie a raportului $\frac{\lambda v}{2d}$, calculată după un anumit procedeu.

De data aceasta vom utiliza direct variabilele adimensionale (3.14), cu care sistemul precedent devine

$$\begin{aligned} a q_\tau + p_\xi + 2\varepsilon l q &= 0, \\ p_\tau + a q_\xi &= 0. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Direcțiile caracteristice sînt

$$\zeta_+ = +1, \quad \zeta_- = -1 \tag{3.30}$$

și avem de asemenea

$$p_\alpha + a q_\alpha + 2\varepsilon\, l q \tau_\alpha = 0 \tag{3.31}$$

pe C_+ și

$$p_\beta - a q_\beta - 2\varepsilon\, l q\, \tau_\beta = 0 \tag{3.32}$$

pe C_-.

Integrarea acestor ecuații nu mai prezintă dificultăți, dar comparația cu rezultatele obținute mai sus ne arată că liniarizarea presupune în același timp că M este foarte mic și că i se poate atribui o valoare constantă. Aceasta ne arată că posibilitățile liniarizării sînt foarte restrînse.

BIBLIOGRAFIE

1. W. F. Ames, *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*, Academic Press New York, Londra, 1965, p. 437.
2. R. Courant, K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1948, p. 38–45.
3. M. Kahane, M. Maugis, M. Schauffler, *Nouvelles méthodes numériques pour l'étude de l'écoulement d'un gaz en régime variable*, Association technique de l'industrie du gaz en France, Congrès 1965.
4. T. Oroveanu, H. Pascal, *Asupra propagării undelor de presiune într-un lichid care curge printr-un mediu poros*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *3* (1958).
5. T. Oroveanu, *Unele considerații asupra scurgerii fluidelor compresibile prin medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., **XIV**, *3* (1963).
6. H. Pascal, *Curgerea nestaționară a gazelor prin conducte magistrale*, Edit. Academiei, București, 1967, p. 54–63.
7. I. A. Ciarnîi, *Osnovi gazovoi dinamiki*, Gostoptehizdat, Moskva, 1961, p. 152–156, 168–176.

INFLUENȚA VARIAȚIEI VISCOZITĂȚII ASUPRA CURGERII GAZELOR PRIN MEDII POROASE

de I. SPULBER
Institutul de petrol, gaze și geologie București

532

În lucrare se studiază, cu ajutorul unui procedeu de liniarizare a ecuației diferențiale, scurgerea unidimensională a gazelor prin medii poroase. Pentru a se verifica în ce măsură precizia rezultatelor este afectată de liniarizare, se rezolvă mai întîi o problemă pentru care există soluția numerică a ecuației neliniare, viscozitatea gazelor fiind presupusă constantă. Compararea rezultatelor arată o bună concordanță, fapt care permite să se rezolve aceeași problemă cu ajutorul procedeului de liniarizare în cazul în care viscozitatea este variabilă. În felul acesta se pune în evidență faptul că variația viscozității are o influență importantă asupra valorilor presiunii din mediul poros.

1. **Introducere.** Rezolvarea problemelor de scurgere a gazelor prin medii poroase prezintă dificultăți, deoarece, chiar atunci cînd se admite că legea lui Darcy este valabilă, ecuația diferențială pe care o satisface presiunea este neliniară. Din acest motiv au fost propuse cu destul de mult timp în urmă diferite metode de liniarizare a acestei ecuații, dintre care menționăm pe aceea introdusă de L. S. Leibenzon [4] și pe aceea utilizată de B. B. Lapuk [6]. Ulterior I. A. Cearnîi [2] a recurs la un alt procedeu de liniarizare, care a fost utilizat mai recent și de A. Houpeurt [3] și care constă în înlocuirea ecuației de stare a gazului cu aceea a unui lichid compresibil într-un anumit interval de variație a presiunii. De asemenea a fost studiată și problema scurgerii nestaționare a gazelor printr-un mediu poros neomogen [5] cu ajutorul unui procedeu care reprezintă o adaptare a aceluia introdus de I. A. Cearnîi.

În cele ce urmează ne vom mărgini la cazul în care mediul poros este omogen, însă vom lua în considerație variația viscozității gazelor în funcție de presiune. Este cunoscut faptul că această variație este importantă, dar, după cîte știm, pînă în prezent au fost făcute numai cîteva încercări de a se evalua efectul ei asupra scurgerii nestaționare a gazelor printr-un mediu poros. Astfel, în afară de lucrarea citată mai înainte, amintim metoda aproximativă propusă de B. B. Lapuk [6].

Pentru a obține unele informații în legătură cu gradul de precizie al procedeului pe care îl utilizăm, am efectuat mai întîi un calcul pentru o problemă de scurgere a gazelor printr-un mediu poros omogen fără a ține seama de variația viscozității. Am comparat apoi rezultatele cu acelea obținute prin integrare numerică în aceeași problemă de G. H. Bruce, D. W. Peaceman, H. H. Rachford și J. D. Rice [1]. Concordanța destul de bună a valorilor ne-a condus la ideea că procedeul de liniarizare poate fi aplicat și în problema care constituie efectiv obiectul acestei lucrări.

2. **Exploatarea cu debit constant a unui zăcămînt de gaze închis.** Pentru a efectua comparația amintită mai înainte ne vom mărgini la studiul scurgerii unidimensionale izotermice a gazelor, în care presiunea satisface ecuația.

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial x^2} = \frac{2m\mu}{k} \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{1}$$

unde m și k sînt porozitatea, respectiv permeabilitatea mediului poros, iar μ viscozitatea dinamică a gazelor.

În momentul inițial, gazele au presiunea constantă p_i, iar exploatarea se face cu un debit constant Q. Frontierea exterioară este presupusă impermeabilă, debitul fiind acolo nul pentru orice $t \geqslant 0$. Rezultă astfel condiția inițială

$$t = 0, \quad p = p_i \tag{2}$$

și condițiile la limită

$$x = 0, \quad Q = \frac{k\sigma}{\mu RT} p \frac{\partial p}{\partial x}; \quad x = l, \quad p \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \tag{3}$$

l fiind lungimea zăcămîntului și σ aria secțiunii transversale.

Dacă introducem mărimile adimensionale

$$\overline{p} = \frac{p}{p_i}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \theta = \frac{p_i kt}{2l^2 \mu m}, \quad q = \frac{2Ql\mu RT}{p_i^2 k\sigma}, \tag{4}$$

ecuația (1) devine

$$\frac{\partial^2 \overline{p}^2}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta}, \tag{5}$$

cu condiția inițială

$$\theta = 0, \quad \overline{p} = 1 \tag{6}$$

și condițiile la limită

$$\xi = 0, \quad \frac{\partial \overline{p}^2}{\partial \xi} = q; \quad \xi = 1, \quad \frac{\partial \overline{p}^2}{\partial \xi} = 0. \tag{7}$$

Pentru a efectua liniarizarea scriem ecuația (5) sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\overline{p} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \theta} \tag{8}$$

și introducem, ca în [2], funcția

$$f(\xi, \theta) = \beta\, e^{\alpha \bar{p}}, \tag{9}$$

constantele α și β fiind astfel determinate ca să avem $f \approx \bar{p}$. Cu această condiție găsim

$$\alpha = -\frac{\ln \bar{p}_f}{1 - \bar{p}_f}, \qquad \beta = \frac{\alpha(1 - \bar{p}_f^2)}{2(e^{\alpha} - e^{\alpha \bar{p}_f})}, \tag{10}$$

expresii în care

$$\bar{p}_f = \frac{p_f}{p_i}, \tag{11}$$

p_f fiind marginea inferioară a intervalului de presiuni considerat în calcule.

În felul acesta, în loc de (8) obținem

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(f \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \theta} \tag{12}$$

și, după ce înlocuim derivata $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi}$ calculată din relația (9), rezultă

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\alpha}{2} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \tag{13}$$

Condițiile la limită (7) pot fi de asemenea liniarizate dacă le punem sub forma

$$\xi = 0, \quad 2f \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = q; \quad \xi = 1, \quad 2f \frac{\partial \bar{p}}{\partial \xi} = 0, \tag{14}$$

ceea ce ne dă

$$\xi = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\alpha q}{2}; \quad \xi = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0. \tag{15}$$

Mai departe facem schimbarea de variabilă

$$\tau = \frac{2}{\alpha} \theta \tag{16}$$

și ecuația (13) devine

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} = \frac{\partial f}{\partial \tau}, \tag{17}$$

condițiile (15) rămînînd neschimbate. În ceea ce privește condiția inițială, aceasta este tot (6), în care punem f în loc de $\bar{p}$.

Dacă introducem acum funcția

$$F(\xi, \tau) = f + \frac{\alpha q}{2}\left(\frac{\xi^2}{2} - \xi + \tau\right), \tag{18}$$

se observă imediat că aceasta este o soluţie a unei ecuaţii de aceeaşi formă cu (17), condiţia variabilă fiind însă

$$\tau = 0, \quad F = 1 + \frac{\alpha q}{2}\left(\frac{\xi^2}{2} - \xi\right) \tag{19}$$

Tabela 1

Valorile funcţiei $\overline{p}(\xi, \theta)$

$q = 1$

$q\theta$ \ ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,1	0,70301	0,81579	0,87757	0,90930	0,92347	0,92743
0,2	0,56768	0,71332	0,80112	0,85346	0,88128	0,88996
0,3	0,42954	0,61118	0,71967	0,78531	0,82084	0,83406
0,4	0,26371	0,49407	0,62700	0,70621	0,74898	0,76127

$q = 2$

$q\theta$ \ ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,1	0,57518	0,80739	0,89428	0,92300	0,93008	0,93107
0,15	0,44649	0,73611	0,85532	0,90521	0,92353	0,92831
0,2	0,31066	0,66542	0,81372	0,88230	0,91160	0,91954

şi condiţiile la limită

$$\xi = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0; \quad \xi = 1, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0. \tag{20}$$

Avem, aşadar,

$$F(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, e^{-n^2\pi^2\tau} \cos n\pi\xi \tag{21}$$

şi, prin urmare,

$$f(\xi, \tau) = \frac{\alpha q}{2}\left(\xi - \frac{\xi^2}{2} - \tau\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \, e^{-n^2\pi^2\tau} \cos n\pi\xi. \tag{22}$$

Condiţia iniţială (6) scrisă pentru f ne dă

$$A_0 = 1 - \frac{\alpha q}{6}, \quad A_n = \frac{\alpha q}{n^2\pi^2} \quad (n = 1,2,3, \ldots), \tag{23}$$

iar dacă ne întoarcem la variabila θ rezultă în cele din urmă

$$f(\xi, \theta) = 1 - \alpha q\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\xi^2}{2} - \frac{2}{\alpha}\theta\right) - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi\xi}{n^2} e^{-\frac{2n^2\pi^2}{\alpha}}\right]. \tag{24}$$

Revenirea la funcția $\bar{p}(\xi, \theta)$ se face cu ajutorul formulei

$$\bar{p} = \frac{1}{\alpha}(\ln f - \ln \beta), \tag{25}$$

dedusă din (9).

Pentru calculele numerice am considerat un interval de variație al funcției $\bar{p}(\xi, \theta)$ cuprins între valorile 1 și 0,3. Cu aceste valori, formulele (10) ne dau

$$\alpha = 1{,}71997, \quad \beta = 0{,}20020.$$

De asemenea am luat ca în [1] două valori ale debitului adimensional, și anume $q = 1$ și $q = 2$. Calculele au fost efectuate în punctele $\xi = 0$, $\xi = 0{,}2$, $\xi = 0{,}4$, $\xi = 0{,}6$, $\xi = 0{,}8$ și $\xi = 1$. Pentru parametrul $q\theta$ care reprezintă cantitatea de gaze totale extrasă pînă la un anumit moment, am considerat o parte din valorile utilizate în calculele din [1], și anume acelea indicate în tabela 1, care conține rezultatele calculelor noastre. Nu am calculat funcția $\bar{p}(\xi, \theta)$ pentru valori mai mici ale acestui parametru, respectiv ale timpului adimensional θ, deoarece seria din (24) devine slab convergentă. Fiind însă vorba numai de o comparație între soluția obținută prin liniarizare și rezultatele integrării numerice a ecuației (5), nu apare necesar să facem acest lucru pentru toate valorile para-

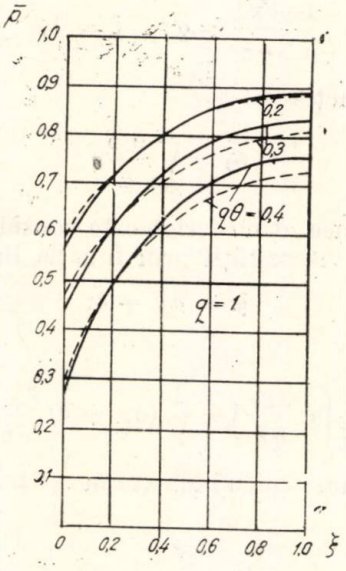


Fig. 1

metrului $q\theta$, evitînd astfel calculele prea lungi. Aceasta cu atît mai mult cu cît comparația este afectată de o oarecare incertitudine, deoarece rezultatele din [1] nu sînt date sub formă de tabele, ci numai în diagrame.

În figura 1 sînt trasate curbele de variație ale funcției $\bar{p}(\xi, \theta)$ pentru $q = 1$ și cîteva valori ale parametrului $q\theta$. Curbele pline cores-

pund rezultatelor din tabela 1, iar curbele punctate sînt cele date în [1]. Se observă că diferența maximă este de ordinul 5% și că în general acordul este satisfăcător.

3. **Influența variației viscozității.** În cazul în care se ține seama de faptul că viscozitatea gazelor este o funcție de presiune, ecuația diferențială a problemei este

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right)=\frac{m}{k}\frac{\partial p}{\partial t}, \tag{26}$$

cu condiția inițială (2) și condițiile la limită (3).

De data aceasta introducem mărimile adimensionale

$$\bar{p}=\frac{p}{p_i},\quad \bar{\mu}=\frac{\mu}{\mu_i},\quad \xi=\frac{x}{l},\quad \theta=\frac{p_i kt}{2l^2\mu m},\quad q=\frac{2Ql\mu_i RT}{p_i^2 k\sigma}, \tag{27}$$

unde μ_i este valoarea viscozității care corespunde la presiunea p_i. Obținem astfel ecuația

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\bar{p}}{\bar{\mu}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\xi}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\theta}, \tag{28}$$

cu condiția inițială (6) și condițiile la limită

$$\xi=0,\quad \frac{1}{\bar{\mu}}\frac{\partial\bar{p}^2}{\partial\xi}=q;\qquad \xi=1,\quad \frac{\partial\bar{p}^2}{\partial\xi}=0. \tag{29}$$

Dacă utilizăm funcția

$$\varpi=\int_0^{\bar{p}}\frac{\mathrm{d}\,\bar{p}}{\bar{\mu}}, \tag{30}$$

cu observația că presiunea atmosferică este considerată egală cu zero [5] și aproximăm variația viscozității prin funcția liniară

$$\bar{\mu}=a\bar{p}+b, \tag{31}$$

găsim în loc de (28)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\bar{p}\frac{\partial\varpi}{\partial\xi}\right)=\frac{1}{2}(a\bar{p}+b)\frac{\partial\varpi}{\partial\theta}. \tag{32}$$

Urmînd în continuare calea indicată în [5], utilizăm teorema mediei, care ne dă

$$\varpi=\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m\bar{p}, \tag{33}$$

$\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m$ fiind valoarea medie a funcției $\frac{1}{\bar{\mu}}$ în intervalul $[0,\bar{p}]$. Deoarece $\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m$ este o funcție de $\bar{p}$, este necesar să recurgem la o aproximație. În acest

scop considerăm pentru $\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m$ o valoare constantă, pe care o determinăm observînd că în acest caz (33) reprezintă o relație liniară între $\bar{\omega}$ și $\bar{p}$. Considerînd valorile lui $\bar{\omega}$ în funcție de $\bar{p}$ date de (30), determinăm apoi, prin metoda celor mai mici pătrate, coeficientul unghiular al dreptei, cu care înlocuim relația (33).

Pentru justificarea acestei aproximații utilizăm aceleași date ca și în [5], trecute în tabela 2, de data aceasta sub formă adimensională.

Tabela 2

$\bar{p}$	0	0,07724	0,13738	0,19752	0,29805	0,39829	0,59876	0,79953	1
$\bar{\mu}$	0,47893	0,50958	0,53257	0,55555	0,60919	0,67050	0,79310	0,90421	1
$1/\bar{\mu}$	2,08799	1,96240	1,87769	1,80002	1,64152	1,49142	1,26087	1,10594	1

Cu ajutorul acestor date am calculat funcția $\bar{\omega}$ $(\bar{p})$ prin integrare grafică, rezultatele fiind date în tabela 3, tot după [5].

Tabela 3

$\bar{p}$	0	0,05882	0,11765	0,17647	0,23529	0,29412	0,35294	0,41176	0,47059
$\bar{\omega}$	0	0,12014	0,23490	0,34490	0,45137	0,55025	0,64467	0,73433	0,81939
$\bar{p}$	0,52941	0,58823	0,64706	0,70588	0,76471	0,82353	0,88235	0,94118	1
$\bar{\omega}$	0,90007	0,97675	1,04960	1,11954	1,18717	1,25234	1,31567	1,37670	1,43581

În figura 2 am trasat curba de variație a lui $\bar{\omega}$ în funcție de $\bar{p}$, precum și dreapta cu care înlocuim relația (33), coeficientul unghiurilor avînd valoarea

$$\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m = 1{,}55847,$$

obținută așa cum am precizat mai înainte. Cu această aproximație, care este în general acceptabilă, ecuația (32) devine

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\bar{\omega}\,\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \xi}\right) = \frac{1}{2}\left[a\bar{\omega} + b\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m\right]\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta}, \tag{34}$$

$\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m$ fiind deci o constantă.

Pentru liniarizare introducem funcția

$$F(\xi,\theta) = \beta\, e^{\alpha\bar{\omega}}, \tag{35}$$

constantele α și β determinîndu-se tot din condiția ca să avem $F \approx \bar{\omega}$. Dacă punem și

$$\varkappa = a + \alpha b\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m, \tag{36}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

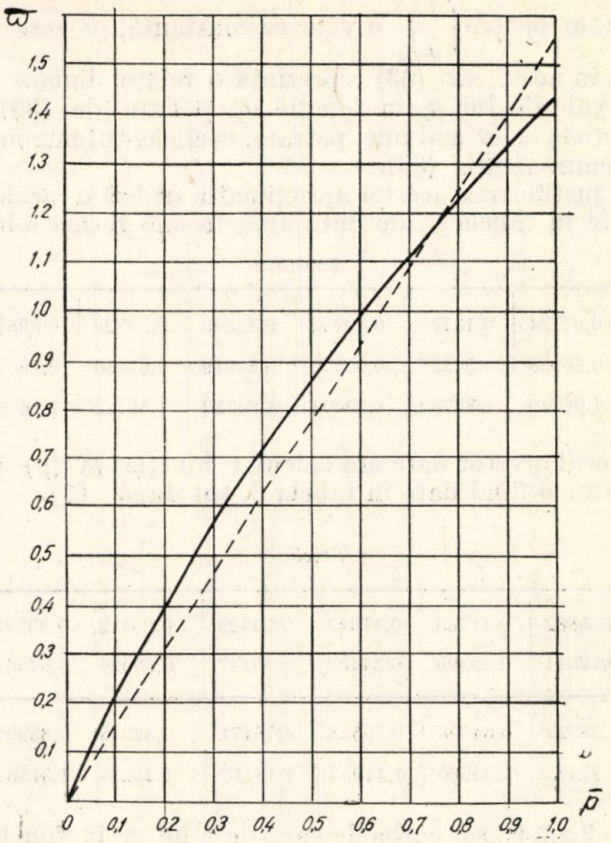


Fig.

găsim în loc de (34) ecuaţia

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} = \frac{\varkappa}{2} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \tag{37}$$

cu condiţia iniţială

$$\theta = 0, \qquad F = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\bar{p}}{\bar{\mu}} \tag{38}$$

şi condiţiile la limită

$$\xi = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m q; \qquad \xi = 1, \ \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0. \tag{39}$$

Cu notaţia

$$\tau = \frac{2}{\varkappa} \theta \tag{40}$$

şi cu funcţia

$$\Phi(\xi, \tau) = F + \frac{\alpha q}{2}\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi + \tau\right), \tag{41}$$

ajungem la ecuaţia

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}, \tag{42}$$

cu condiţia iniţială

$$\tau = 0, \qquad \Phi = \int_0^1 \frac{d\bar{p}}{\bar{\mu}} + \frac{\alpha q}{2}\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m \left(\frac{\xi^2}{2} - \xi\right) \tag{43}$$

şi condiţiile la limită

$$\xi = 0, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0; \qquad \xi = 1, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = 0. \tag{44}$$

Această problemă se rezolvă cu uşurinţă şi, după ce revenim la funcţia F, obţinem

$$F(\xi, \theta) = \frac{\alpha q}{2}\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m \left(\xi - \frac{\xi^2}{2} - \frac{2}{\varkappa}\theta\right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\frac{2n^2\pi^2}{\varkappa}\theta} \cos n\pi\xi, \tag{45}$$

iar condiţia iniţială (38) ne dă

$$A_0 = \int_0^1 \frac{d\bar{p}}{\bar{\mu}} - \left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m \frac{\alpha q}{6} = \left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m \left(1 - \frac{\alpha q}{6}\right),$$

$$A_n = \left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m \frac{\alpha q}{n^2\pi^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{46}$$

Avem, aşadar, în cele din urmă

$$F(\xi,\theta) = \left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m \left\{1 - \alpha q\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\left(\xi - \frac{\xi^2}{2} - \frac{2}{\varkappa}\theta\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi\xi}{n^2} e^{-\frac{2n^2\pi^2}{\varkappa}\theta}\right\}. \tag{47}$$

Se observă că această soluţie nu diferă ca formă de (24) decît prin factorul $\left(\frac{1}{\bar{\mu}}\right)_m$, constanta α avînd însă de data aceasta alte valori.

Mai departe, din (35) obţinem

$$\varpi = \frac{1}{\alpha}(\ln F - \ln \beta), \tag{48}$$

iar valorile funcţiei $\bar{p}(\xi, \theta)$ rezultă din diagrama din figura 2.

Constantele α şi β se determină din relaţiile

$$\alpha = \frac{\ln \frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1}}{\bar{\omega}_2 - \bar{\omega}_1}, \qquad \beta = \frac{\alpha(\bar{\omega}_2^2 - \bar{\omega}_1^2)}{2(e^{\alpha\bar{\omega}_2} - e^{\alpha\bar{\omega}_1})}, \tag{49}$$

iar pentru calculele numerice am luat din tabela 3 valorile $\bar{\omega}_1 = 0{,}12014$ şi $\bar{\omega}_2 = 1{,}43581$, care ne dau $\alpha = 1{,}88553$, $\beta = 0{,}14052$.

În tabela 4 sînt date valorile funcţiei $\bar{\omega}(\xi, \theta)$ pentru $q = 1$ şi două valori ale parametrului $q\theta$. Curbele de variaţie ale funcţiei $\bar{p}(\xi,\theta)$ sînt trasate în figura 3, în comparaţie cu acelea corespunzătoare cazului

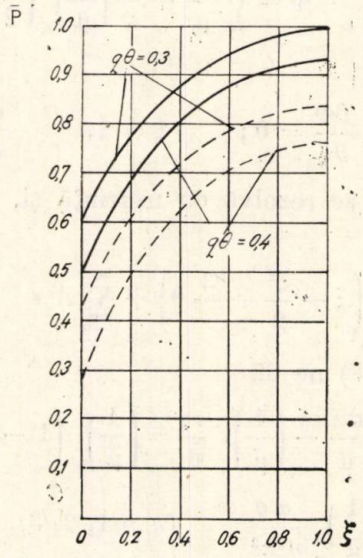


Fig. 3

în care viscozitatea se presupune constantă. Curbele pline corespund cazului în care se ţine seama de variaţia viscozităţii, iar curbele punctate sînt trasate cu ajutorul valorilor din tabela 1.

Din examinarea rezultatelor se constată că variaţia viscozităţii gazelor cu presiunea joacă un rol important, modificînd considerabil valorile presiunii din mediul poros. Efectul variaţiei viscozităţii poate fi considerat favorabil dacă se procedează ca în calculele precedente. Într-adevăr, din ultimele două formule (27) se observă că în calculele efectuate în cazul în care viscozitatea este constantă trebuie să se considere valoarea maximă a acesteia, pentru θ şi q să aibă aceleaşi valori ca şi atunci cînd se ţine seama de variaţia viscozităţii. De altfel, în problema studiată nici nu există o altă posibilitate, deoarece singura presiune constantă de referinţă este aceea maximă iniţială. În condiţiile astfel precizate, curbele din figura 3 indică efectul favorabil amintit mai sus, în sensul că scăderea viscozităţii atrage după sine o scădere în timp mult mai lentă a presiunii din mediul poros.

Tabela 4

Valorile funcţiei $\bar{\omega}(\xi,\theta)$
$q = 1$

$q\theta$ \ ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,3	1,00279	1,19793	1,31289	1,38314	1,42124	1,43359
0,4	0,84778	1,09579	1,23109	1,31040	1,35323	1,36691

4. **Concluzii.** Aşa cum am precizat de la început, primul obiectiv al acestei lucrări a fost verificarea într-un anumit caz a procedeului bazat pe liniarizarea introdusă de I.A. Cearnîi. Rezultatele obţinute pot fi apreciate ca bune, deoarece diferenţele faţă de soluţia obţinută prin integrare numerică se menţin în limite acceptabile. Acest lucru ne-a permis să trecem la principalul obiectiv al studiului, şi anume la investigarea efectului variaţiei viscozităţii gazelor, cu ajutorul metodei propuse în [5]. Rezultatele indică un efect foarte important, la a cărui apreciere trebuie, bineînţeles, să ţinem seama de precizările pe care le-am făcut mai sus în legătură cu valoarea constantă de referinţă a viscozităţii. Procedeul utilizat, fiind aproximativ, introduce şi o anumită eroare. Valorile presiunii obţinute în cele două cazuri, cu viscozitate constantă şi cu viscozitate variabilă, prezintă însă diferenţe mari, în care contribuţia erorii introduse nu reprezintă decît o parte destul de mică. Într-adevăr, ambele grupe de valori ale presiunii sînt calculate pe baza aceluiaşi procedeu de liniarizare, iar eroarea suplimentară intervine datorită aproximaţiei pe care o reprezintă relaţia (33). Din calculele efectuate, care au condus la diagrama din figura 2, rezultă însă că această eroare nu poate fi aceea care să conducă la diferenţele mari puse în evidenţă în figura 3.

Prin urmare, se poate afirma că în studiul scurgerii gazelor prin medii poroase este necesar să se ţină seama de faptul că viscozitatea variază în funcţie de presiune. Apare util să se rezolve şi alte probleme în afară de aceea prezentată mai sus pentru a se putea ajunge la concluzii cu caracter general.

BIBLIOGRAFIE

1. G. H. Bruce, D. W. Peaceman, H. H. Rachford, J. D. Rice, *Calculation of unsteady state gas flow through porous media*, Transactions AIME, *198* (1953).
2. I. A. Cearnîi, *O metodah linearizaţii uravnenii tipa uravnenii teploprovodnosti*, Izvestiia AN SSSR, OTN, *6* (1951).
3. A. Houpeurt, *Sur l'écoulement des gaz dans les milieux poreux*, Institut Français du Pétrole, Projet de recherche nr. 32—04, Publication restreinte no 3176, Mars 1959.
4. L. S. Leibenzon, *Neftepromîslovaia mehanika*, II, Gorgeonefteizdat, Moskva, 1934, p. 122.
5. T. Oroveanu, *Asupra scurgerii gazelor prin medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., **XI**, *5* (1960).
6. V. N. Şcelkacev, B. B. Lapuk, *Hidraulica subterană*, Edit. technică, Bucureşti, 1953, 202—203, p. 457.

ANALIZA NUMERICĂ A MICILOR OSCILAȚII ÎN FUNCȚIE DE AMPLITUDINEA LOR

de R. CHALÉAT, M. N. OGUZTÖRELI și D. MANGERON

Institut polytechnique et Université de Besançon, Franța;
University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada;
Institutul politehnic Iași.

531.3

În lucrare se dă, ținîndu-se seama de o serie de rezultate proprii prezentate la unele manifestații științifice recente cu caracter internațional, consacrate în total sau în parte problematicii referitoare la mecanica neliniară a vibrațiilor, precum și de literatura de specialitate urmărită la nivel mondial, expresia perioadei micilor oscilații în funcție de amplitudinea lor pentru cinci probleme fundamentale. Rezultatele obținute se aplică apoi la studiul diferitelor tipuri de oscilatori mecanici. Se arată faptul că expresia generală a perioadei în funcție de amplitudine permite nu numai să se cunoască comportarea oscilatorului, ci și conduce la alegerea judicioasă a parametrilor, permițînd într-un număr de cazuri ca perioada să devină, practic vorbind, independentă de amplitudine. Realizarea aproximativă a izocronismului la care se ajunge prezintă, după cum se știe, o importanță deosebită în cazul oscilatorilor hărăziți la măsura precisă a timpului.

I. INTRODUCERE

1. Într-un șir de lucrări recente [18] — [20], autorii s-au ocupat de elaborarea diferitelor procedee de calcul numeric. În această ordine de idei trebuie citată *metoda ecuațiilor integrale*, care constă în traducerea, acolo unde acest lucru s-a arătat posibil, diferitelor sisteme diferențiale, funcționale, integro-diferențiale în ecuații integrale echivalente și în aplicarea ulterioară în cadrul metodei aproximațiilor succesive a diferitelor formule de cvadraturi numerice pentru variate integrale ce intervin în procesul desfășurat. În teoria aproximării funcțiilor am utilizat, pe de altă parte, pentru dezvoltări în serie diferite clase de funcții speciale noi, legate de *sisteme cu derivate totale* în sensul lui M. Picone [21], [22].

Traducerea recentă în limba rusă, pentru revista „МЕХАНИКА" a uneia dintre lucrările autorilor publicată în această revistă și consacrată elaborării unui nou procedeu de aproximare a soluțiilor problemelor diferențiale neliniare [1]— [5] a condus pe autori la rezolvarea unei largi serii de probleme de analiză numerică a perioadelor micilor oscilații în funcție de amplitudinea lor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 4, 1968, P. 723–724

Trebuie să menționăm în această ordine de idei o serie de comunicări recente prezentate de autori în cadrul Colocviului de teorie a aproximării funcțiilor, organizat de către Institutul de calcul din Cluj al Academiei Republicii Socialiste România [2] la cea de-a IV-a Conferință de oscilații neliniare de sub egida academiilor de științe cehoslovacă, poloneză și a Republicii Democrate Germane [3], la Congresul jubiliar centenar de mecanică aplicată din Québec [4] și la al VIII-lea Congres al Uniunii matematice italiene [5], precum și cîteva rezultate răzlețe referitoare la unele probleme particulare în domeniu, în curs de redactare, sau un număr de probleme în oarecare contingență cu lucrările autorilor, rezolvate de alți cercetători. Așa, de exemplu, studiul dependenței funcționale între amplitudinea oscilațiilor și frecvența sau decrementul logaritmic pentru ecuația care cristalizează problema de oscilație a unei mase suspendate printr-o coardă de oțel de elasticitate neliniară și amortizată [6]:

$$m\ddot{\xi} + S(\xi) + T(\dot{\xi}) \operatorname{sign} \dot{\xi} = 0,$$

în care $S(\xi)$ și $T(\dot{\xi})$ sînt serii de puteri; studiul dependenței între frecvența oscilațiilor și amplitudine sau între frecvența și raportul $\varkappa = \frac{k}{m} : \frac{g}{l}$ pentru un sistem acționat de o forță elastică și gravitațională, schematizat prin ecuația [7]

$$\ddot{\varphi} + \frac{k}{m} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0;$$

studiul sistemului cu argument întîrziat [8]

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \varepsilon \{\dot{x} + F(\dot{x}) + \beta[x - x(t - \tau)]\},$$

unde s-a notat $\varepsilon F\dot{x}| = k_m |\dot{x}|^{m-1} \dot{x} (m, k_m \geqslant 0)$, precum și alte cîteva.

În ceea ce urmează vom da, după o trecere în revistă a metodelor de aproximare și de determinare a perioadelor sistemelor oscilatoare neliniare, expresia perioadei micilor oscilații în funcție de amplitudinea lor pentru cinci probleme fundamentale și vom aplica sistematic rezultatele obținute la diferite tipuri de oscilatori mecanici. Vom arăta cum expresia generală a perioadei în funcție de amplitudine permite nu numai să se cunoască comportarea oscilatorului, ci conduce și la o justă alegere a parametrilor, ajungîndu-se posibil în unele cazuri să facem ca perioada să devină, practic vorbind, independentă de amplitudine. În atare cazuri de izocronism aproximativ se răspunde la problema practică vitală pentru oscilatori destinați, de exemplu, pentru măsurarea precisă a timpului.

2. Metodele clasice de aproximație. Pentru calculul perioadei oscilațiilor unui sistem conservativ, schematizat printr-o ecuație diferențială de forma

$$\theta'' + \omega_0^2 \theta = \lambda \omega_0^2 f(\theta, \theta'), \tag{1}$$

în care λ este un coeficient mic față de unitate, avem la dispoziția noastră diferite metode. Nu vom menționa aici decît următoarele:

1° *Metoda aproximațiilor succesive*, care constă în faptul că obținerea aproximației de ordinul n se realizează prin substituirea în membrul al doilea al ecuației (1), θ și θ' prin aproximațiile lor de ordinul $n-1$.

2° *Metoda perturbațiilor*, utilizată — poate pentru prima oară de Resal în 1856 și ilustrată de Lindstedt și Poincaré. Ea constă în punerea soluției periodice a ecuației (1) sub forma de dezvoltare în serie

$$\theta = \sum_{n \geqslant 0} \lambda^n \theta_n(t), \qquad n \text{ întreg},$$

în care θ_n sînt funcții de timp necunoscute. Se cere totodată să se pună și

$$\omega_0 = \omega + \sum_{n \geqslant 1} \lambda^n \cdot \omega_n ,$$

ω_n fiind constante necunoscute. Substituind în ecuația (1) și identificînd cei doi membri în raport cu λ, se obține pentru fiecare funcție $\theta_n(t)$ o ecuație diferențială de ordinul doi cu coeficienți constanți și cu al doilea membru sinusoidal. Constantele ω_n se obțin prin anularea termenilor seculari.

Pentru cele două metode precedente nu există o formulă generală care să dea perioada T în funcție de funcția perturbatoare $f(\theta, \theta')$. Sîntem obligați în aceste cazuri sa reluăm calculele, adesea foarte anevoioase, pentru fiecare caz în parte dacă dorim să punem în evidență dependența funcțională între perioada și funcția perturbatoare.

3° *Teoria perturbațiilor*, ale cărei dezvoltări esențiale se datoresc lui Poincaré, Haag, Kryloff și Bogoliuboff [11]—[14] și care conduce la această formulă generală. Totuși, această formulă nu este în general stabilită decît *în prima aproximație*.

Perioada completă este dată atunci prin

$$T = T_0 \left[1 + \frac{\lambda}{2\pi\theta_0} \int_0^{2\pi} f\,(\theta_0 \cos\varphi - \omega_0\theta \sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi \right] + O(\lambda^2). \qquad (2)$$

În această expresie, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ este perioada neperturbată, θ_0 amplitudinea oscilațiilor, iar θ și θ' sînt înlocuite prin primele lor aproximații:

$$\theta = \theta_0 \cos\varphi, \quad \theta' = -\omega_0\theta_0 \sin\varphi.$$

Formula (2) este adesea nesatisfăcătoare, deoarece ea nu dă decît primii termeni ai dezvoltării lui T după puterile lui λ. Atunci cînd $f(\theta, \theta')$ este o funcție pară de θ sau o funcție impară de θ', formula (2) se reduce la $T = T_0$. În acest caz este necesar să parvenim cel puțin la a doua aproximație din cadrul teoriei perturbațiilor. Acest aspect al problemei va fi însă discutat cu un alt prilej.

Teoria perturbațiilor oferă, fără îndoială, posibilități remarcabile față de metodele precedente, întrucît formula (2) obținută este generală și nu reclamă decît executarea unor operații simple pentru care este deosebit de util uneori în calculul integralei din (2) să se folosească judicios diferite formule de cubatură (cvadratură) în vederea calculării perioadei T. Trebuie subliniat însă că aceste rezultate sînt adesea insuficiente în variate aplicații de tehnică actuală.

Ţinînd seama de cele de mai sus, ne propunem în cele ce urmează să obţinem dezvoltarea perioadei după puterile crescătoare ale amplitudinii. Rezultatele astfel obţinute se aplică imediat la un vast număr de probleme de mecanică tehnică neliniară a vibraţiilor.

II. EXPRESIA GENERALĂ A PERIOADEI SIMPLE

3. Fie θ gradul de libertate al unui oscilator, ω_0 pulsaţia sa proprie, A coeficientul său de inerţie (masă, moment de inerţie, selfinducţie, după tipul problemei luată în consideraţie), evaluat pentru $\theta = 0$ (poziţia de echilibru). Presupunem că *energia cinetică* a sistemului este de forma :

$$E_c = \frac{1}{2} AG\,(\theta)\theta'^2$$

şi că forţele aplicate derivă din *funcţia de forţe*

$$\mathcal{U}(\theta) = -\frac{A}{2}\omega_0^2 F(\theta).$$

Alegînd pentru originea timpilor momentul de trecere prin poziţia de elongaţie maximă $\theta_0 > 0$, teorema forţelor vii se scrie, după împărţirea prealabilă a celor doi membri prin coeficientul A, sub forma

$$G(\theta)\cdot\theta'^2 = \omega_0^2\,[F(\theta_0) - F(\theta)]. \tag{3}$$

Se deduce pentru prima alternanţă

$$\frac{d\theta}{dt} = -\omega_0\sqrt{\frac{F(\theta_0) - F(\theta)}{G(\theta)}}, \tag{4}$$

de unde, separînd variabilele şi notînd prin θ_1 elongaţia de la finele alternanţei, expresia *perioadei simple* se prezintă sub forma

$$T' = \frac{1}{\omega_0}\int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{\sqrt{G(\theta)}}{\sqrt{F(\theta_0) - F(\theta)}}\,d\theta. \tag{5}$$

În cele ce urmează vom începe prin a examina un număr de cinci probleme fundamentale în această ordine de idei.

III. PRIMA PROBLEMĂ: coeficient de inerţie constant, $F(\theta)$ funcţie analitică pară de elongaţie θ_1

4. Să punem în ceea ce urmează $G(\theta) = 1$ şi să presupunem că $F(\theta)$ este desfăşurabilă în serie întreagă, procedînd după puterile pare ale lui θ. Fie, prin urmare,

$$F(\theta) = \theta^2\,[1 + \sum_{n\geq 1} b_{2n}\,\theta^{2n}], \tag{6}$$

constantele b_{2n} din această dezvoltare fiind pozitive, negative sau nule. Se deduce

$$F(\theta_0) - F(\theta) = (\theta_0^2 - \theta^2) + b_2\ (\theta_0^4 - \theta^4) + b_4\ (\theta_0^6 - \theta^6) + \ldots. =$$
$$= (\theta_0^2 - \theta^2)\ [1 + b_2\ (\theta_0^2 + \theta^2) + b_4(\theta_0^4 + \theta_0^2\theta^2 + \theta^4) + \ldots] =$$
$$= (\theta_0^2 - \theta^2)\ [1 + \sum_{n\geqslant 1} b_{2n} \sum_{p=0}^{n} \theta_0^{2n-2p}\theta^{2p}].$$

Ridicînd această relație membru cu membru la puterea $-\frac{1}{2}$, se obține

$$\frac{1}{\sqrt{F(\theta_0)-F(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2-\theta^2}}[A_0(\theta_0) + \theta^2 A_2(\theta_0) + \theta^4 A_4(\theta_0) + \ldots], \qquad (7)$$

în care $A_i(\theta_0)$ sînt funcții de θ_0 și de b_{2n}, pe care nu le vom explicita aici.

Punînd $\theta = \theta_0 \sin\varphi$ în relația (5) avem $\frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = d\varphi$ și, ținînd seama de faptul că $\theta_1 = -\theta_0$ întrucît $F(\theta)$ este o funcție pară, se parvine la calculul unor integrale de forma

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta^{2n}\, d\varphi = 2\theta_0^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi = \pi\theta_0^{2n} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.$$

Obținem astfel după executarea tuturor calculelor

$$T' = \frac{\pi}{\omega_0}\left\{1 - 3\,b_2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \frac{57\,b_2^2 - 60\,b_4}{4}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4 + \right.$$
$$+ \frac{-315\,b_2^3 + 588\,b_2b_4 - 280\,b_6}{4}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^6 + 15\left[\frac{2\,023}{2^6}\,b_2^4 - \frac{667}{2^3}\,b_2^2\,b_4 + \frac{467}{10}\,b_2\,b_6 + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{103}{2^2}\,b_4^2 - 21\,b_8\right]\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^8\right\} + O\,(\theta_0^{10}). \qquad (8)$$

Durata perioadei complete este, evident $T = 2T'$.

5. Prima aplicație: pendulul circular. În acest caz, funcția de forțe este, abstracție făcînd de un factor aditiv,

$$\mathcal{U}(\theta) = A\omega_0^2\,(\cos\theta - 1) = A\omega_0^2 \sum_{n\geqslant 1} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!}(-1)^n = -\frac{A}{2}\,\omega_0^2\,F(\theta),$$

de unde, identificînd cu (6),

$$b_2 = -\frac{2}{4!},\quad b_4 = +\frac{2}{6!},\quad b_6 = -\frac{2}{8!},\quad b_8 = +\frac{2}{10!},\ldots$$

Ducînd valorile lui b_{2n} astfel obținute în (8), se obține

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left[1 + \left(\frac{\theta_0}{4}\right)^2 + \frac{11}{12}\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^4 + \frac{173}{180}\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^6 + \frac{22\,931}{20\,160}\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^8\right] + O(\theta_0^{10}).$$

Se regăsesc astfel primii cinci termeni ai dezvoltării clasice a integralei eliptice de prima specie.

6. A doua aplicație: forța perturbatoare este proporțională cu cubul elongației θ. Considerăm cazul în care forța de rapel este de forma

$$-A\,\omega_0^2\,\theta + \lambda\,A\omega_0^2\,\theta^3.$$

Acest fapt corespunde la funcția de forțe

$$\mathcal{U}(A) = -\frac{A}{2}\,\omega_0^2\,\theta^2\left(1 - \frac{\lambda}{2}\,\theta^2\right).$$

Identificînd cu (6), se deduc pentru coeficienții b_{2i}, următoarele valori: $b_2 = -\frac{\lambda}{2}$, $b_{2n} = 0$ pentru $n > 1$. Formula (8) dă nemijlocit pentru perioada T expresia

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left[1 + \frac{3}{2}\lambda\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \frac{57}{16}\lambda^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4 + \frac{315}{32}\lambda^3\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^6 + \frac{152023}{2^{10}}\lambda^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^8 + \ldots\right].$$

Trebuie remarcat că metodele clasice de aproximații succesive și de perturbații reclamă un șir de calcule lungi și complicate.

7. A treia aplicație: oscilatorul cu coardă vibrantă. Considerăm un fir elastic de lungime naturală $2L_0$ întins între două puncte A și B la distanță mutuală $2L > 2L_0$. La mijlocul firului este plasat un punct material de masă m, îndepărtat transversal la o distanță x_0, care este abandonat fără viteză inițială. Este ușor de demonstrat că forța de rapel care se exercită asupra acestui punct este

$$F = -2Kd\,\frac{x}{L} - 2KL_0\,\frac{x}{L}\left[\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{L^2} - \frac{3}{8}\,\frac{x^4}{L^4} + \frac{5}{16}\,\frac{x^6}{L^6} + \ldots\right],$$

în care s-a pus $d = L - L_0$ și $K = ES/L_0$, E fiind, ca de obicei, modulul lui Young, S aria secțiunii drepte și x deplasarea transversală instantanee. Funcției F îi corespunde funcția de forțe

$$\mathcal{U} = -2K\,\frac{d}{L}\,\frac{x^2}{2}\left[1 + \frac{L_0}{d}\left(\frac{1}{4}\,\frac{x^2}{L^2} - \frac{1}{8}\,\frac{x^4}{L^4} + \frac{5}{64}\,\frac{x^6}{L^6} + \ldots\right)\right].$$

De unde, comparînd cu (6), se obține

$$\omega_0^2 = \frac{2Kd}{mL},\quad b_2 = \frac{L_0}{4dL^2},\quad b_4 = -\frac{L_0}{8dL^4},\quad b_6 = \frac{5}{64}\,\frac{L_0}{dL^6}$$

și, introducînd în (8), se capătă dezvoltarea în serie a perioadei T a oscilațiilor masei punctuale considerate :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mLL_0}{2ESd}}\left[1 - \frac{3}{4}\frac{L_0}{d}\left(\frac{x_0}{2L}\right)^2 + \frac{3}{64}\frac{L_0}{d}\frac{19L_0 + 40d}{d}\left(\frac{x_0}{2L}\right)^4 + \dots\right].$$

8. A patra aplicație : dispozitiv corector de izocronism. Perioada unui oscilator depinde în general de amplitudinea oscilațiilor sale. Orice variație inevitabilă a amplitudinii se traduce printr-o variație a perioadei. În vederea eliminării sau cel puțin a micșorării influenței produsă de amplitudine asupra perioadei s-au propus numeroase dispozitive corectoare. Ele se numesc *dispozitive corectoare de izocronism.* În cele ce urmează vom considera un atare dispozitiv corector referitor la pendulul circular.

Fie O axa de suspensie a unui pendul, G centrul său de gravitație, A un punct al dreptei OG definit prin $OA = d$. În punctul A este articulată extremitatea unui resort. Altă extremitate a resortului este articulată într-un punct B de pe verticala descendentă la distanța $OB = b$ dedesubtul lui O.

Notăm prin l_0 lungimea naturală a resortului, prin l lungimea sa instantanee, prin $k(l - l_0)$ tensiunea sa instantanee (k fiind o constantă pozitivă care caracterizează „duritatea" resortului).

Greutatea pendulului derivă din funcția de forțe

$$\mathcal{U}_1 = Mga(\cos\theta - 1),$$

în care prin M s-a notat masa pendulului, prin a distanța OG, prin θ elongația. Tensiunea resortului derivă din funcția de forțe :

$$\mathcal{U}_2 = -\frac{k}{2}(l - l_0)^2.$$

De unde, abstracție făcînd de o constantă aditivă,

$$\mathcal{U}(\theta) = Mga(\cos\theta - 1) - \frac{k}{2}(l^2 - ll_0).$$

Ținînd seama de faptul că în triunghiul OAB avem

$$l^2 = d^2 + b^2 - 2db\cos\theta = (d - b)^2 + 2db(1 - \cos\theta)$$

sau, punînd $c = d - b$, $h^2 = 4db/c$,

$$l^2 = c^2\left[1 + \frac{h^2}{2}(1 - \cos\theta)\right],$$

se obține după dezvoltarea după puterile crescătoare ale lui θ

$$l^2 = c^2\left[1 + \frac{h^2}{4}\theta^2\left(1 - \frac{\theta^2}{12} + \frac{\theta^4}{360} - \dots\right)\right]$$

și prin urmare,

$$l = c\left\{1 + \frac{h^2}{8}\theta^2\left[1 - \frac{\theta^2}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{h^2}{4}\right) + \frac{\theta^4}{8}\left(\frac{1}{45} + \frac{h^2}{12} + \frac{h^4}{16}\right) + \dots\right]\right\}.$$

De unde pentru dezvoltarea funcţiei de forţe $\mathcal{U}(\theta)$ avem

$$\mathcal{U}(\theta) = -\left[Mga + \frac{kch^2}{4}(c - l_0)\right]\frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!}\left[Mga + \frac{kch^2}{4}\left(c - l_0 - \frac{3}{4}h^2 l_0\right)\right] -$$

$$-\frac{\theta^6}{6!}\left[Mga + \frac{kch^2}{4}\left(c - l_0 - \frac{15}{4}h^2 l_0 - \frac{45}{16}h^4 l_0\right)\right] + \ldots$$

Punînd, în consecinţă,

$$Aw_0^2 = Mga + \frac{kch^2}{4}(c - l_0),$$

$$b_2 = -\frac{1}{48}\,\frac{16Mga + kch^2(4c - 4l_0 - 3h^2 l_0)}{4Mga + kch^2(c - l_0)},$$

$$b_4 = \frac{1}{5760}\,\frac{64\,Mga + kch^2(16c - 16l_0 - 60h^2 l_0 - 45\,h^4 l_0)}{4\,Mga + kch^2(c - l_0)} \ldots,$$

ajunge să se introducă aceste valori în (8) pentru a se obţine expresia perioadei.

Dacă se ia pentru duritatea k a resortului valoarea

$$k = \frac{16\,Mga}{ch^2\,[4(l_0 - c) + 3h^2 l_0]},$$

coeficientul b_2 se anulează. Defectul de izocronism devine în acest fel de ordinul patru θ_0^4 în loc de θ_0^2. Ameliorarea este considerabilă, după cum se poate vedea cercetînd tabela de mai jos, în care prin M_0 s-a notat mersul diurn al unui pendul circular neprevăzut de corector şi prin M_1 mersul diurn al aceluiaşi pendul prevăzut de corector, care realizează condiţia $b_2 = 0$. Pentru calculele numerice s-a presupus că $h^2 = 3$ şi $d = 3b$.

θ_0	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°
M_0	6,58	26,3	59,3	105	164	237	322	421	533
M_1	0,005	0,082	0,414	1,30	3,19	6,62	12,2	20,9	33,5

Se constată că pentru $\theta_0 = 10°$ defectul de izocronism este de 50 de ori mai mic pentru pendulul circular prevăzut de corectorul de izocronism considerat şi chiar şi pentru amplitudinea foarte mare $\theta_0 = 20°$ el se prezintă încă de 13 ori mai mic.

Am putea să ne întrebăm dacă nu ar fi posibil să anulăm şi b_4 pentru a face ca defectul de izocronism să fie de ordinul lui θ_0^6 în loc de θ_0^4. Din păcate, un simplu calcul arată că, atunci cînd k verifică relaţia de mai sus, numărătorul lui b_4 este mereu negativ şi, prin urmare, nu poate fi redus la zero prin nici un fel de alegere convenabilă a parametrilor. În orice caz, îmbunătăţirea obţinută prin anularea unui singur coeficient b_2 este considerabilă şi, practic vorbind, suficientă.

Aşadar, utilizînd sistematic formula (8), este posibil să îmbunătăţim izocronismul prin introducerea prealabilă a unor dispozitive speciale şi prin aceasta precizia unui oscilator.

9. Determinarea forței de rapel plecînd de la măsurarea experimentală a perioadei. Presupunem că s-a obținut experimental legea care leagă perioada T de amplitudinea θ_0 a oscilațiilor și să admitem ca, în baza procedeelor elaborate în lucrări moderne consacrate interpretării matematice a datelor experimentale, această lege poate fi pusă sub forma unei dezvoltări în serie, și anume

$$T = T_0\left[1+\tau_2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2+\tau_4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4+\tau_6\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^6+\tau_8\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^8+\dots\right].$$

Identificînd cu (8), se obține succesiv valoarea diferiților coeficienți b_{2n} prin următoarele expresii:

$$b_2 = -\frac{\tau_2}{3},\quad b_4 = \frac{1}{180}(19\tau_2^2-12\tau_4),\quad b_6 = \frac{1}{6300}(-203\tau_2^2+294\tau_2\tau_4-96\tau_6),$$

$$b_8 = \frac{1}{23\,814\,000}(227801\tau_2^4+534408\tau_2^2\tau_4+252\,180\tau_2\tau_6+129\,780\tau_4^2-75600\tau_8).$$

Funcția $\mathcal{U}(\theta)$ fiind astfel determinată, se deduce prin derivare forța de apel. Interesul practic al acestor rezultate este evident.

IV. A DOUA PROBLEMĂ: forța perturbatoare este proporțională cu o putere impară a elongației

10. Formula (8) se aplică imediat la o forță perturbatoare

$$F = A\omega_0^2 a_{2n}\,\theta^{2n+1},\quad n \geqslant 1,$$

căreia îi corespunde în (6) coeficientul $b_{2n} = a_{2n}/(2n+2)$. Însă, pentru $n > 4$, amplitudinea θ_0 nu mai intervine în expresia perioadei, cu toate că avem de-a face în acest caz cu un defect de izocronism. Pentru a elucida această dificultate, să punem [15] — [17]

$$F(\theta) = \theta^2(1 + b_{2n}\theta^{2n}).$$

Procedînd în mod analog cu ceea ce s-a făcut, obținem

$$[F(\theta_0) - F(\theta)]^{-\frac{1}{2}} = (\theta_0^2-\theta^2)^{-\frac{1}{2}}\left[1+\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{2q+1}C_{2q+1}^q b_{2n}^{q+1}S^{q+1}\right],$$

în care s-a pus $S = \sum_{p=0}^{n}\theta_0^{2p}\,\theta^{2n-2p}$ și prin C_{2q+1}^q s-a notat, ca de obicei, numărul de combinări din $2q+1$ obiecte luate cîte q.

Punînd $\theta = \theta_0\sin\varphi$, problema se reduce la calculul unor integrale de forma $I_q = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sum_{p=0}^{n}\sin^{2p}\varphi\right)d\varphi$. Se obține în definitiv pentru perioada completă

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}[1 - b_{2n}A_1\theta_0^{2n} + b_{2n}^2A_2\,\theta_0^{4n} - b_{2n}^3A_3\,\theta_0^{6n}+\dots], \tag{9}$$

în care s-au introdus următoarele notaţii:

$$A_1 = \frac{n+1}{2^{2n+1}} C_{2n+1}^n, \quad A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{(4n+3)(4n+4)}{2^{4n+1}} C_{4n+2}^{2n} - \frac{n(n+1)}{2^{2n}} C_{2n+1}^n\right],$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{3(n-1)(n+1)}{2^{2n+1}} C_{2n+1}^n - 3\,\frac{4n(4n+3)(4n+4)}{2^{4n+5}} C_{4n+2}^{2n} - \right.$$

$$\left. - \frac{(6n+4)(6n+5)(6n+6)}{2^{6n+6}} C_{6n+3}^{3n}\right] \ldots,$$

C_{2n+1}^n, C_{4n+2}^{2n}, C_{6n+3}^{3n} fiind coeficienţii binomiali.

De exemplu, pentru o forţă de rapel de forma $-A\omega_0^2\theta + \lambda A\omega_0^2\theta^3$, care conţine un termen liniar şi un termen perturbator proporţional cu cubul elongaţiei, avem

$$\mathcal{U}(\theta) = -\frac{A}{2}\omega_0^2\theta^2\left(1 - \frac{\lambda}{2}\theta^2\right) \text{ şi deci } b_2 = -\frac{\lambda}{2}.$$

Formula (9) dă imediat pentru perioada oscilaţiilor

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left[1 + \frac{3\lambda}{2}\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \frac{57}{16}\lambda^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4 + \frac{315}{32}\lambda^3\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^6 + \right.$$

$$\left. + \frac{152\,023}{2^{10}}\lambda^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^8 + \ldots\right].$$

obţinîndu-se astfel cinci termeni ai dezvoltării lui T, pe cînd metodele clasice dau cu destulă greutate doar primii trei.

V. A TREIA PROBLEMĂ: coeficient de inerţie variabil, $F(\theta)$ funcţie analitică pară de elongaţie θ

11. Presupunem că $F(\theta)$ este o funcţie analitică pară de elongaţie, fiind, ca de obicei, reprezentată prin dezvoltarea în serie (6). Admitem totodată că $G(\theta)$ este o funcţie analitică, avînd drept dezvoltare în serie întreagă

$$G(\theta) = 1 + \sum_{n\geqslant 1} a_n\theta^n. \tag{10}$$

Dezvoltarea expresiei $[F(\theta_0) - F(\theta)]^{-\frac{1}{2}}$ este dată prin (7). În dezvoltarea lui $G(\theta)$ vom neglija puterile impare ale lui θ, deoarece integralele luate între $\theta_1 = -\theta_0$ şi $\theta_1 = +\theta_0$ sînt, evident, nule. Rămîne astfel

$$G(\theta) = 1 + \frac{4a_2 - a_1^2}{4}\theta^2 +$$

$$+ \frac{64a_4 - 32a_1a_3 - 16a_2^2 + 24a_1^2a_2 - 5a_1^4}{128}\theta^4 + \ldots \tag{11}$$

Efectuînd produsul între (7) și (11), se obține dezvoltarea funcției de sub semnul integralei din (5). Punînd din nou $\theta = \theta_0 \sin\varphi$ și integrînd în raport cu φ între $-\frac{\pi}{2}$ și $+\frac{\pi}{2}$, se obține

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left[1 + H_1\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^2 + H_2\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^4 + H_3\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^6\right] + O(\theta_0^8), \qquad (12)$$

în care s-a pus

$$\begin{cases} H_1 = 4a_2 - a_1^2 - 12b_2 \\ H_2 = \frac{1}{4}[56a_1^2b_2 - 224a_2b_2 - 960b_4 + 912b_2^2 + 192a_4 - \\ \quad - 96a_1a_3 - 48a_2^2 + 72a_1^2a_2 - 15a_1^4, \\ H_3 = \frac{1}{4}[2\,560a_6 - 1\,280a_1a_5 - 1\,280a_2a_4 - 640a_3^2 + \\ \quad + 960a_1^2a_4 + 320a_2^3 + 1\,920a_1a_2a_3 - 800a_1^3a_3 - 1\,200a_1^2a_2^2 + \\ \quad + 700a_1^4a_2 - 105a_1^6 - 2\,816a_1b_2 + 1\,408a_1a_3b_2 + 704a_2^2b_2 - \\ \quad - 1\,056a_1^2a_2b_2 + 220a_1^4b_2 + 4\,800a_2b_2^2 - 4\,864a_2b_4 - \\ \quad - 1\,440a_1^2b_2^2 + 896a_1^2b_4 - 17\,920b_6 + 37\,632b_2b_4 + 20\,160b_2^3]. \end{cases} \qquad (13)$$

Pentru $a_i = 0$, formula (12) dă, evident, primii patru termeni din (8).

12. Prima aplicație: oscilații ale unui cilindru situat pe un plan orizontal. Fie un cilindru de masă M avînd secțiunea dreaptă de formă oarecare, posedînd și o parte circulară de centru O și de rază R. Cilindrul se sprijină cu partea sa circulară pe un plan orizontal pe care se rostogolește fără alunecare.

Integrala forțelor vii se scrie

$$A_I\theta'^2 = 2Mga(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

în care prin a s-a notat distanța dintre centrul de greutate al secțiunii drepte și punctul O, prin A_I momentul de inerție al cilindrului în raport cu generatoarea de contact și prin θ elongația evaluată plecînd de la poziția de echilibru. Dacă A este valoarea lui A_I cînd cilindrul este în poziția de echilibru, avem

$$A_I = A + 2MaR(1 - \cos\theta)$$

și, în consecință, integrala forțelor vii se scrie sub forma

$$A\left[1 + \frac{2MaR}{A}(1 - \cos\theta)\right]\theta'^2 = 2Mga(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

care este vizibil tocmai forma (3) dacă se pune

$$Mga = \omega_0^2 A, \quad F(\theta) = \cos\theta - 1, \quad G(\theta) = 1 + \frac{2MaR}{A}(1 - \cos\theta).$$

Dacă se dezvoltă în serie $\cos\theta$ și se identifică cu dezvoltările (6) și (10), se obține

$$a_2 = \frac{MaR}{A}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{12}, \quad a_6 = +\frac{a_2}{360}, \ldots, a_{2n+1} = 0,$$

$$b_2 = -\frac{1}{12}, \quad b_4 = +\frac{1}{360}, \quad b_6 = -\frac{1}{20\,160}, \ldots$$

În baza relațiilor (13) avem în acest caz

$$H_1 = 1 + 4a_2, \quad H_2 = \frac{1}{12}(11 + 8a_2 - 144a_2^2),$$

$$H_3 = \frac{1}{4}\left(320a_2^3 + 48a_2^2 + \frac{332}{45}a_2 + \frac{173}{45}\right).$$

Ajunge acum să introducem aceste valori în (12) pentru a se obține dezvoltarea perioadei oscilațiilor în funcție de amplitudinea lor.

Aceste rezultate se aplică la o mulțime de probleme. De exemplu, secțiunea dreaptă poate fi semicirculară sau să fie formată dintr-un semicerc surmontat de un dreptunghi sau să fie limitată de un cerc și să prezinte o cavitate interioară ori să fie formată dintr-un cerc din care s-a scos un sector etc. În toate cazurile, calculul perioadei revine la calculul valorii numerice a coeficientului $a_2 = MaR/A$.

Aceleași rezultate permit studiul complet al *suspensiei pendulelor realizate prin cuțite circulare*. Într-un mod mai general, formulele (12) și (13) permit studiul suspensiei unui pendul printr-un *cuțit simetric de formă oarecare*, sprijinit pe un suport de secțiune nerectilinie, însă oarecare. Se pot atunci folosi posibilități de alegere a diferiților parametri în așa fel ca să se anuleze coeficienții H_1, H_2, H_3, ..., definiți prin (13), și a obține astfel *oscilații aproximativ izocrone*.

Exemplul 1. Pentru o secțiune formată dintr-un semicerc de rază R, surmontată printr-un dreptunghiu de lungime $2R$ și de lărgime h, avem

$$a_2 = 4R\,\frac{2R^2 - 3h^2}{\pi R^3\left(g - \frac{16}{\pi}\right) + 8h(h^2 + 3hR + 4R^2)}.$$

Stabilitatea este asigurată dacă $h^2 < 2R^2/3$.

Exemplul 2. Pentru un disc circular din care s-a scos un sector de un unghi la centru egal cu 2α, avem

$$a_2 = \frac{4\sin\alpha}{9\alpha - 8\sin\alpha}.$$

13. A doua aplicație: suspensie bifilară. Două fire identice AB și $A'B'$ sînt afirmate prin extremitățile lor superioare în două puncte fixe A și A', situate pe o aceeași orizontală. De extremitățile lor inferioare B și B' firele sînt fixate de un corp de masă M, care admite pentru axa principală de inerție verticală Oz care trece prin mijlocul O al lui AA'.

Fie R raza de giraţie a corpului în raport cu Oz şi z cota mijlocului lui BB'. Pe baza teoremei lui Koenig, forţa vie a sistemului este

$$2E_c = M(z'^2 + R^2\theta'^2),$$

în care prin θ s-a notat unghiul de rotire a corpului în jurul lui Oz. Funcţia de forţe este egală, abstracţie făcînd de o constantă aditivă cu $\mathcal{U} = Mgz$. Să punem

$$AA' = 2a, \quad BB' = 2b, \quad h^2 = ab/d^2,$$

în care prin d s-a notat distanţa dintre AA' şi BB' atunci cînd sistemul este în poziţia de echilibru ($\theta = 0$). Avem fără dificultăţi $z^2 = d^2[1 - 2h^2(1 - \cos\theta)]$. Extrăgînd rădăcina pătrată şi desfăşurînd după puterile lui θ, funcţia de forţe capătă forma

$$\mathcal{U} = -\frac{Mgdh^2}{2}\theta^2\left[1 - 2\frac{\theta^2}{4!}(1 - 3h^2) + 2\frac{\theta^4}{6!}(1 - 15h^2 + 45h^4) - \dots\right].$$

De aici se deduce

$$b_2 = -\frac{2}{4!}(1 - 3h^2), \quad b_4 = \frac{2}{6!}(1 - 15h^2 + 45h^2). \tag{14}$$

Derivînd pe z în raport cu timpul şi ridicînd la pătrat, se obţine

$$Z'^2 = d^2h^4\theta^2\theta'^2\left[1 - \frac{\theta^2}{3}(1 - 3h^2) + \frac{\theta^4}{180}(8 - 75h^2 + 180h^4) - \dots\right].$$

Introducînd în expresia forţei vii şi identificînd cu (10), se deduce

$$a_2 = \frac{d^2h^4}{R^2}, \quad a_4 = -\frac{d^2h^4}{3R^2}(1 - 3h^2), \tag{15}$$

$$a_6 = \frac{d^2h^4}{180R^2}(8 - 75h^2 + 180h^4), \dots, \quad a_{2n+1} = 0.$$

Ajunge să se introducă valorile lui a_i şi b_i date prin (15) şi (14) în (12) şi (13) pentru a se obţine expresia perioadei pendulului bifilar în funcţie de amplitudinea θ_0 a oscilaţiilor sale.

13'. Bifilarul cvasiizocron. Să căutăm să dimensionăm bifilarul, considerat în aşa fel ca să anulăm succesiv coeficienţii lui θ^2_0 şi θ^4_0 în (12).

Anulînd H_1, avem pe baza formulei (13) $a_2 = 3b_2$. Cu alte cuvinte, înlocuind pe a_2 şi b_2 prin expresiile lor (15) şi (14), obţinem

$$\frac{d^2}{R^2} = \frac{3h^2 - 1}{4h^4}. \tag{15'}$$

Anulînd H_2, avem pe baza formulei (13)

$$-14a_2b_2 - 60b_4 + 57b_2^2 + 12a_4 - 3a_2^2 = 0$$

sau, ţinînd seama de $a_2 = 3b_2$, $-b_2^2 + a_4 - 5b_4 = 0$.

Înlocuind în ultima egalitate pe b_2, a_4 şi b_4 prin expresiile lor, rămîne, abstracţie făcînd de un factor, ecuaţia $1 - 4h^2 + h^4 = 0$. Numai soluţia

$h^2 = 2 + \sqrt{3}$ face pozitiv cel de-al doilea membru din (15'). Avem, în consecinţă,

$$d^2/R^2 = (\sqrt{3} - 1)/4 \text{ sau } d/R = 0{,}4278.$$

Dacă impunem ca perioada micilor oscilaţii T_0 să fie

$$T_0 = 2\pi \frac{R}{h\sqrt{gd}}, \text{ rezultă } R = \frac{T_0^2}{4\pi^2} h^2 g \frac{d}{R} = 39{,}67\, T_0^2$$

şi, prin urmare, $d = 16{,}97\, T_0^2$. Numai lungimile a şi b pot fi alese arbitrar, însă în aşa fel ca produsul lor $ab = h^2 d^2$ să fie egal cu $1{,}075\, T_0^4$.

Pentru o suspensie bifilară care realizează condiţiile precedente, defectul de izocronism este de ordinul lui θ_0^6 în loc de θ_0^2, aşa cum rezultă atare defect pentru o suspensie oarecare. Ameliorarea izocronismului este considerabilă.

VI. A PATRA PROBLEMĂ: coeficient de inerţie variabil, $F(\theta)$ — funcţie analitică oarecare

14. Presupunem acum că funcţia de forţe $\mathcal{U}(\theta)$ comportă simultan în expresia sa atît puterile pare, cît şi cele impare ale elongaţiei θ. Fie, prin urmare,

$$F(\theta) = \theta^2 \Big[1 + \sum_{n \geqslant 1} b_n \theta^n\Big], \tag{16}$$

dezvoltarea sa în serie de puteri. Perioada simplă este şi acum dată prin (5), însă de data aceasta elongaţia θ_1 la finele alternanţei este diferită de $-\theta_0$. Punem, prin urmare

$$y = \frac{\theta_0 - \theta_1}{2}, \quad \varepsilon = \frac{\theta_0 + \theta_1}{2}, \tag{17}$$

în care prin y s-a notat *amplitudinea medie* a alternanţei şi prin ε *decalajul* dintre mijlocul oscilaţiei în raport cu punctul mort ($\theta = 0$). Mărimea ε este, *practic vorbind, foarte mică* dacă forţa perturbatoare este şi ea foarte mică.

Din (17) se deduce

$$\theta_0 = y + \varepsilon, \quad \theta_1 = \varepsilon - y. \tag{18}$$

La finele alternanţei, viteza se anulează şi avem pe baza formulei (3) $\mathcal{U}(\theta_1) = \mathcal{U}(\theta_0)$, adică, abstracţie făcînd de factorul $-\frac{A}{2}\varphi_0^2$,

$$F(\varepsilon + y) - F(\varepsilon - y) = 0. \tag{19}$$

Această ecuaţie arată vizibil că ε *este o funcţie pară de* y.

Să mai punem şi

$$\theta = \varepsilon + y\cos\varphi, \quad d\theta = -y\sin\varphi d\varphi \tag{20}$$

și să introducem cele de mai sus în (5). Aceasta din urmă devine

$$T' = \frac{1}{\omega_0}\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{G(\varepsilon + y\cos\varphi)}\, y\sin\varphi}{\sqrt{F(\varepsilon+y)-F(\varepsilon+y\cos\varphi)}}\,\mathrm{d}\varphi. \tag{21}$$

Se observă că, dacă se schimbă simultan sub semnul sumei în (21) y în $-y$ și φ în $\pi-\varphi$, funcția de integrat nu se modifică. Prin urmare, T' este o funcție pară de y și puterile impare ale lui y nu trebuie luate în seamă în timpul integrării.

15. Calculul lui $\varepsilon(y)$, $F(\theta)$, $G(\theta)$. Dezvoltăm $F(\varepsilon + y)$ în serie Taylor după puterile lui ε. Avem

$$F(\varepsilon + y) = F(y) + \varepsilon F'(y) + \frac{\varepsilon^2}{2!}F''(y) + \ldots,$$

în care, pe baza formulei (16),

$$F(y) = y^2 + \sum_{n\geqslant 1} b_n y^{n+2},\quad F'=(y) = 2y + \sum_{n\geqslant 1}(n+2)\,b_n y^{n+1} \text{ etc.}$$

Procedînd în același fel pentru $F(\varepsilon - y)$, ecuația (19) devine după împărțirea celor doi membri prin $2y$

$$b_1y^2 + b_3y^4 + b_5y^6 + \ldots + 2\varepsilon(1 + 2b_2y^2 + 3b_4y^4 + \ldots) + \varepsilon^2(3b_1 + \\ + 10b_3y^2 + \ldots) + 4b_2\varepsilon^3 + \ldots - 0. \tag{22}$$

Decalajul ε fiind o funcție pară de amplitudine medie y (conform cu § 14), avem

$$\varepsilon = \alpha_1y^2 + \alpha_2y^4 + \alpha_3y^6 + \ldots \tag{23}$$

Înlocuind (23) în (22) și identificînd cei doi membri în raport cu y, se deduc coeficienții α_i:

$$\alpha_1 = -\frac{b_1}{2},\quad \alpha_2 = -\frac{3}{8}b_1^3 + b_1b_2 - \frac{b_3}{2}, \tag{24}$$

$$\alpha_3 = -\frac{9}{16}b_1^5 + \frac{5}{2}b_1^3b_2 - 2b_1^2b_3 - 2b_1b_2^2 + \frac{3}{2}b_1b_4 + b_2b_3 - \frac{b_5}{2},\ \ldots$$

Ne propunem în ceea ce urmează să obținem dezvoltarea lui T', pînă la termenii conținînd y^4 inclusiv. Va trebui să ne limităm în dezvoltarea lui $G(\theta) = G(\varepsilon + y\cos\varphi)$ la termenii în y^4 și în aceea a lui $F(\theta) = F(\varepsilon + y\cos\varphi)$, care conține pe θ^2 în factor, la termenii în y^6.

Avem succesiv, pe baza relațiilor (20) și (23),

$$\theta = y(\cos\varphi + \alpha_1y + \alpha_2y^3 + \ldots),$$

$$\theta^2 = y^2(\cos^2\varphi + 2\alpha_1y\cos\varphi + \alpha_1^2y^2 + 2\alpha_3y^3\cos\varphi + 2\alpha_1\alpha_2y^4 + \ldots),$$

$$\theta^3 = y^3(\cos^3\varphi + 3\alpha_1y\cos^2\varphi + 3\alpha_1^2y^2\cos^2\varphi + \alpha_1^3y^3 + 3\alpha_2y^3\cos^2\varphi + \ldots),$$

$$\theta^4 = y^4(\cos^4\varphi + 4\alpha_1y\cos^3\varphi + 6\alpha_1^2y^2\cos^2\varphi + \ldots,$$

$$\theta^5 = y^5(\cos^5\varphi + 5\alpha_1y\cos^4\varphi + \ldots),$$

$$\theta^6 = y^6(\cos^6\varphi + \ldots)$$

și, prin urmare, se deduce

$$F(\theta_0) - F(\theta) = F(\varepsilon + y) - F(\varepsilon + y\cos\varphi) = y^2\sin^2\varphi\,(1 + \beta_1 y + \\ + \beta_2 y^2 + \beta_3 y^3 + \beta_4 y^4 + \ldots),$$

în care s-a pus

$$\begin{cases} \beta_1 = b_1\cos\varphi, \quad \beta_2 = -\dfrac{3}{2}b_1^2 + b_2\,(1+\cos^2\varphi), \\ \beta_3 = -2\,b_1 b_2 + b_3\,(1+\cos^2\varphi)\cos\varphi, \\ \beta_4 = -\dfrac{9}{8}b_1^3 + \dfrac{9}{2}b_1^2\,b_2 - 4\,b_1 b_3 - \dfrac{5}{2}b_1 b_3\cos^2\varphi + b_4\,(1+\cos^2\varphi+\cos^4\varphi). \end{cases}$$

Deoarece avem

$$G(\theta) = G\,(\varepsilon + y\cos\varphi) = 1 + \gamma_1 y + \gamma_2 y^2 + \gamma_3 y^3 + \gamma_4 y^4 + \ldots,$$

rezultă pentru coeficienții γ_i valorile

$$\gamma_1 = a_1\cos\varphi,\ \gamma_2 = -\frac{a_1 b_1}{2} + a_2\cos^2\varphi,$$

$$\gamma_3 = (-a_2 b_1 + a_3\cos^2\varphi)\cos\varphi,$$

$$\gamma_4 = -\frac{3}{8}a_1 b_1^3 + a_1 b_1 b_2 - \frac{a_1 b_3}{2} + \frac{a_2 b_1^2}{4} - \frac{3}{2}a_3 b_1\cos^2\varphi + a_4\cos^4\varphi, \ldots$$

16. Expresia perioadei simple în funcție de amplitudinea medie. Ridicînd dezvoltarea lui $G(\theta)$ la puterea $\frac{1}{2}$, cea a lui $F(\theta_0) - F(\theta)$ la puterea $-\frac{1}{2}$ și efectuînd produsul lor, se obține pentru funcția care intervine sub semnul-sumă în (21)

$$\frac{\sqrt{G(\varepsilon + y\cos\varphi)}\,y\,\sin\varphi}{\sqrt{F(\varepsilon+y) - F(\varepsilon + y\cos\varphi)}} = 1 + y^2(A_1 + B_1\cos^2\varphi) + y^4(A_2 + B_2\cos^2\varphi + \\ + C_2\cos^4\varphi) + \ldots. \qquad (25)$$

În acest rezultat am neglijat, după cum s-a indicat în § 14, puterile impare ale lui y. Mărimile A_1, A_2, B_1, B_2 și C_2 sînt date prin următoarele expresii:

$$A_1 = \frac{1}{8}(6b_1^2 - 4b_2 - 2a_1 b_1),$$

$$B_1 = \frac{1}{8}(3b_1^2 - 4b_2 - 2a_1 b_1 + 4a_2 - a_1^2),$$

$$A_2 = \frac{1}{128}(180\,b_1^4 - 432\,b_1^2\,b_2 + 256\,b_1 b_3 + 48\,b_2^2 - 64\,b_4 - 48a_1 b_1^3 -$$

$$- 4a_1^2 b_1^2 - 32a_1 b_3 + 16a_2 b_1^2 + 80a_1 b_1 b_2,$$

$$B_2 = \frac{1}{128}(180\ b_1^4 - 456\ b_1^2 b_2 + 256\ b_1 b_3 + 96\ b_2^2 - 64\ b_4 - 84\ a_1\ b_1^3 -$$

$$- 20\ a_1^2 b_1^2 - 12\ a_1^3 b_1 + 8\,a_1^2\ b_2 + 128\ a_1 b_1 b_2 + 48\ a_1 a_2 b_1 - 32\ a_2 b_2 -$$

$$- 32\ a_1\ b_3 - 96\ a_3 b_1 + 80\ a_2 b_1^2),$$

$$C_2 = \frac{1}{128}(35\ b_1^4 - 120\ b_1^2 b_2 + 96\ b_1\ b_3 + 48\ b_2^2 - 64\ b_4 - 20\ a_1 b_1^3 -$$

$$- 6\ a_1^2 b_1^2 + 48\ a_1 b_1 b_2 + 16\ a_1 a_2 b_1 - 32\ \ a_2 b_2 - 32\ a_1 b_3 - 32\ a_3 b_1 +$$

$$+ 24a_2 b_1^2 + 8\ a_1^2 b_2 + 24\ a_1^2 - 32\ a_1 a_3 - 16\ a_2^2 + 64\ a_4 - 5\ a_1^4)\ \ldots,$$

Efectuînd integrarea în raport cu φ în membrul al doilea din (25) în intervalul 0 și π, se obține în definitiv

$$T' = \frac{\pi}{w_0}\left[1 + H_1\left(\frac{y}{4}\right)^2 + H_2\left(\frac{y}{4}\right)^4\right] + O(y^6), \tag{26}$$

în care s-a pus

$$H_1 = 15\ b_1^2 - 12\ \ b_2 - 6\ a_1 b_1 + 4\ a_2 - a_1^2,$$

$$H_2 = \frac{1}{4}\ [2265\ b_1^4 - 5640\ \ b_1^2\ b_2 + 3360\ \ b_1 b_3 + 912\ \ b_2^2 - 960\ \ b_4 -$$

$$- 78\ a_1 b_1^3 - 130\ a_2 b_1^2 - 60\ a_1^3 b_1 - 15\ a_1^4 + 1296\ a_1 b_1 b_2 + 56\ a_1^2 b_2 +$$

$$+ 240\ a_1 a_2 b_1 - 480\ a_1 b_3 - 960\ a_1 a_3 + 520\ a_2 b_1^2 - 224\ a_2 b_2 - 48\ a_2^2 -$$

$$- 480\ a_3 b_1 + 72\ a_1^2 a_2 + 192\ a_4]. \tag{27}$$

Dacă avem $b_{2n+1} = 0$, rezultă în virtutea relațiilor (24) ca α_i sînt nuli. După (23) avem $\varepsilon = 0$ și, prin urmare, $\theta_1 = -\theta_0$ și $y = \theta_0$. Se regăsesc astfel primii trei termeni din paranteza (12).

17. Expresia perioadei în funcție de amplitudinea inițială θ_0. Este interesant pentru aplicații practice să se calculeze perioada simplă T' a oscilatorului în funcție de amplitudinea inițială θ_0, cu care acesta a fost abandonat fără viteza inițială. Pentru aceasta ajunge să exprimăm y în funcție de θ_0. Însă în virtutea (18) $y = \theta_0 - \varepsilon$ și, prin urmare, folosind (23),

$$y = \theta_0 - (\alpha_1 y^2 + \alpha_2 y^4 + \alpha_3 y^6 + \ldots). \tag{28}$$

Să punem

$$y = \theta_0 + \delta_1\ \theta_0^2 + \delta_2\ \theta_0^3 + \delta_3\ \theta_0^4 + \ldots$$

și, înlocuind în (28), rezultă în urma identificării

$$\delta_1 = -\alpha_1,\ \ \delta_2 = 2\alpha_1^2,\ \delta_3 = -\alpha_2 - 5\alpha_1^3, \ldots$$

de unde, ţinînd seama de (24),

$$y = \theta_0 + \frac{b_1}{2}\theta_1^2 + \frac{b_1^2}{2}\theta_0^3 + \left(b_1^3 - b_1 b_2 + \frac{b_3}{2}\right)\theta_0^4 + O(\theta_0^5),$$

$$y^2 = \theta_0^2 + b_1\theta_0^3 + \frac{5}{4}b_1^2\theta_0^4 + O(\theta_0^5),$$

$$y^4 = \theta_0^4 + O(\theta_0^5).$$

Ducînd pe y^2 şi y^4 în (26), avem în definitiv

$$T' = \frac{\pi}{w_0}\left[1 + H_1\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^2 + 4H_1 b_1\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^3 + J_2\left(\frac{\theta_0}{4}\right)^4\right] + O(\theta_0^5), \quad (29)$$

în care H_1 este dat de prima relaţie din (27) şi $J_2 = H_2 + 20\,H_1 b_1^2$ sau încă

$$J_2 = \frac{1}{4}[3465\,b_1^4 - 1260\,a_1 b_1^3 + 840\,a_2 b_1^2 - 210\,a_1^2 b_1^2 - 6600\,b_1^2 b_2 +$$

$$3360\,b_1 b_3 - 60\,a_1^3 b_1 + 1296\,a_1 b_1 b_2 + 240\,a_1 a_2 b_1 + 912\,b_2^2 - \quad (30)$$

$$- 960\,b_4 - 15\,a_1^4 - 48\,a_2^2 + 192\,a_4 + 56\,a_1^2 b_2 - 480\,a_1 b_3 -$$

$$- 96\,a_1 a_3 - 224\,a_2 b_2 - 480\,a_3 b_1 + 72\,a_1^2 a_2].$$

18. Perioada completă. Dacă se consideră cea de-a doua alternanţă care începe în $\theta = \theta_1$ şi se termină în $\theta = \theta_0$, este uşor de arătat, plecînd de la ecuaţia (21), că durata sa este din nou egală cu T' şi că, în consecinţă, durata perioadei complete este $T = 2T'$. Din această din urmă ecuaţie, T' este dat fie prin (26), fie prin (29).

Într-adevăr, considerăm această a doua alternanţă, în timpul căreia viteza θ' este pozitivă. După (4) avem

$$\frac{d\theta}{dt} = +\omega_0\sqrt{\frac{F(\theta_0) - F(\theta)}{G(\theta)}}$$

de unde, separînd variabilele şi integrînd între θ_1 şi θ_0, care sînt tocmai valorile respective ale lui θ la începutul şi la sfîrşitul alternanţei luate în consideraţie, durata T'' a alternanţei este

$$T'' = \frac{1}{w_0}\int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{\sqrt{G(\theta)}}{\sqrt{F(\theta_1) - F(\theta)}}\,d\theta\,.$$

Punînd iarăşi $\theta = \varepsilon + y\cos\varphi$, avem

$$T'' = -\frac{1}{\omega_0}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{y\sqrt{G(\varepsilon + y\cos\varphi)}\sin\varphi}{\sqrt{F(\varepsilon - y) - F(\varepsilon + y\cos\varphi)}}\,d\varphi,$$

sau, mai punînd şi $\varphi = \pi + \alpha$, $T'' = \dfrac{1}{w_0}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{y\sqrt{G(\varepsilon - y\cos\alpha)}\,\sin\alpha}{\sqrt{F(\varepsilon - y) - F(\varepsilon - y\cos\alpha)}}\,d\alpha.$

Această din urmă integrală este identică cu membrul al doilea din (21), căci, pe baza observației din §.14, T' este o funcție pară de y. Avem, prin urmare, $T'' = T'$ și, în consecință, $T = 2T'$.

19. Aplicație: cuplul perturbator este proporțional cu pătratul elongației θ. Ne vom limita aici la o aplicație simplă, propunîndu-ne să calculăm desfășurarea după puterile amplitudinii a perioadei unui oscilator a cărui mișcare este schematizată prin ecuația diferențială

$$\theta'' + \omega_0^2\,\theta = -\lambda\,\omega_0^2\,\theta^2.$$

Forța de rapel $F = -A\,\omega_0^2\theta - A\,\omega_0^2\,\lambda\,\theta^2$ (A fiind coeficientul de inerție) derivă din funcția de forțe $\mathcal{U}(\theta) = -\frac{A}{2}\omega_0^2\,\theta^2\left(1 + \frac{2}{3}\lambda\theta\right)$. Prin urmare, $F(\theta) = 1 + \frac{2}{3}\lambda\theta$ și $b_1 = \frac{2}{3}\lambda$, $b_i = 0$ pentru $i > 1$ și $a_i = 0$.

Prima formulă (27) dă imediat $H_1 = 15\cdot\frac{4}{9}\lambda^2 = \frac{20}{3}\lambda^2$, pe cînd (30) dă $J_2 = \frac{1}{4}\cdot 3.365\left(\frac{2\lambda}{3}\right)^4 = \frac{4}{9}385\ \lambda^4$. Făcînd substituirile corespunzătoare în (29), se obține

$$T = 2T' = \frac{2\pi}{w_0}\left[1 + \frac{5}{3}\lambda^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2 + \frac{20}{9}\lambda^3\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^3 + \frac{385}{36}\lambda^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right)^4\right] + O\left(\theta_0^5\right).$$

Putem și cu acest prilej compara rapiditatea și simplicitatea calculelor cu acest rezultat dedus, folosindu-ne de metodele clasice ale aproximațiilor succesive sau a perturbației.

VII. A CINCEA PROBLEMĂ: cuplu perturbator proporțional cu o putere pară a elongației θ

20. Formulele (26) și (29) se aplică imediat la o forță perturbatoare de forma $F = Aw_0^2\,a_{2n-1}\,\theta^{2n}$ (n întreg $\geqslant 1$), căreia în $F(\theta)$ îi corespunde $b_{2n-1} = a_{2n-1}/(2n+1)$. De îndată ce n este superior lui 2, amplitudinea θ_0 nu mai intervine în expresia perioadei, deoarece dezvoltările în serie obținute sînt limitate la termenii care conțin θ_0^4 inclusiv.

Considerăm funcția $F(\theta) = \theta^2\,(1 + b\theta^{2n-1})$ (n între $\geqslant 1$). Efectuînd schimbarea de variabile (17) și desfășurînd primul membru din (19) în serie Taylor, se obține în urma identificării

$$\varepsilon = \alpha_1 y^{2n} + \alpha_2 y^{4n-2} + O(y^{10n-4}),$$

în care avem $\alpha_1 = -\frac{b}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{b^3}{8}C_{2n+1}^2$. Se deduce succesiv

$$\theta = \varepsilon + y\ \cos\varphi = y\cos\varphi + \alpha_1 y^{2n} + \alpha_2 y^{6n-2} + O(y^{10n-4}),$$

$$\theta^2 = y^2\cos^2\varphi + 2\alpha_1 y^{2n+1}\cos\varphi + \alpha_1^2 y^{4n} + 2\alpha_2 y^{6n-1}\cos\varphi + 2\alpha_1\alpha_2 y^{8n-2} + O(y^{40n-4}),$$

. . . . . .

$$\theta^{2n+1} = y^{2n+1}\cos^{2n+1}\varphi + \varepsilon\,C_{2n+1}^1\,y^{2n}\cos^{2n}\varphi + \varepsilon^2 C_{2n+1}^2\cos^{2n-1}\varphi y^{2n-1} + \\ + \varepsilon^3\,C_{2n+1}^3\,y^{2n-2}\cos^{2n-2}\varphi + O(\varepsilon^4)$$

şi

$$F(\theta) = \theta^2(1 + b\theta^{2n-1}) = y^2\cos^2\varphi + y^{2n+1}\cos\varphi(e\alpha_1 + b\cos^{2n}\varphi) +$$
$$+ y^{4n}(\alpha_1^2 + b\alpha_1 C_{2n+1}^1\cos^{2n}\varphi) + y^{6n-1}\cos\varphi(2\alpha_2 + b\alpha_1^2 C_{2n+1}^2\cos^{2n-2}\varphi) +$$
$$+ y^{8n-2}(2\alpha_1\alpha_2 + b\alpha_2 C_{2n+1}^1\cos^{2n}\varphi + b\alpha_1^3 C_{2n+1}^3\cos^{2n-2}\varphi) + O(y^{10n-4}).$$

Avem, în fine,

$$F(\varepsilon + y) - F(\varepsilon - y\cos\varphi) = y^2\sin^2\varphi[-1 + \beta_1 y^{2n-1} + \beta_2 y^{4n-2} +$$
$$+ \beta_3 y^{6n-3} + \beta_4 y^{8n-4}] + O(y^{10n-6}), \tag{31}$$

în care s-a pus

$$\beta_1 = b\cos\varphi\,\frac{1-\cos^{2n}\varphi}{\sin^2\varphi},$$

$$\beta_2 = b\alpha_1 C_{2n+1}^1\,\frac{1-\cos^{2n}\varphi}{\sin^2\varphi}, \tag{32}$$

$$\beta_3 = b\alpha_1^2 C_{2n+1}^2\cos\varphi\,\frac{1-\cos^{2n-2}\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Ridicînd ultimul membru din (31) la puterea $-\frac{1}{2}$, se obţine dezvoltarea funcţiei de sub semnul-sumă din (21), în care nu se iau în consideraţie decît puterile pare ale lui y (cf. §.14). În plus, în cadrul problemei considerate trebuie să mai luăm şi $G(\theta) = 1$.

Am ajuns astfel să calculăm integralele de forma

$$\int_0^\pi\left[\frac{1-\cos^{2n}\varphi}{\sin^2\varphi}\right]^p d\varphi,\ \int_5^\pi\cos^{2p}\varphi\left[\frac{1-\cos^{2n}\varphi}{\sin^2\varphi}\right]^q d\varphi,\ p \text{ şi } q \text{ întregi, şi}$$

astfel se obţine după efectuarea calculelor

$$T' = \frac{\pi}{w_0}\left[1 + b^2H_1y^{4n-2} + b^4H_2y^{8n-4}\right] + O(y^{12n-6}),$$

$$H_1 = \frac{1}{2^3}\,\frac{4n(n+1)}{2^{4n}}\,C_{4n}^{2n}, \tag{33}$$

$$H_2 = \frac{1}{2^7}\left[\frac{(8n+3)(8n+1)8n(8n-2)}{3\cdot 2^{8n}}\,C_{8n}^{4n} - \frac{2(4n+1)^2 4_n(4n-2)}{2^{4n}}\,C_{4n}^{2n}\right].$$

Este bine în aplicaţii practice să exprimăm T' în funcţie de amplitudinea iniţială θ_0. În acest caz, (32) devine

$$T' = \frac{\pi}{w_0}\left[1 + b^2H_1\theta_0^{4n-2} + (2n-1)b^3H_1\theta_0^{6n-3} + b^4J_2\theta_0^{8n-4}\right] + O(\theta_0^{10n-5}), \tag{34}$$

în care H_1 este dat prin (33) şi $J_2 = H_2 + \frac{(2n-1)(8n-3)}{4}H_1$,

adică

$$J_2 = \frac{1}{2^7}\left[\frac{(8n+3)(8n+1)8n(8n-2)}{3\cdot 2^{8n}} C_{8n}^{4n} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(2n-1)}{2^3} \cdot \frac{4_n(4_n+1)}{2^{4n}} C_{4n}^{2n}\right]. \qquad (35)$$

Formulele (32) sau (34) își găsesc numeroase aplicații în mecanica neliniară.

Tabela care urmează dă valorile lui H_1 și H_2 pentru numărul întreg n :

n	1	2	3
H_1	$\frac{15}{16}$	$\frac{315}{2^7}$	$\frac{9009}{2^{11}}$
H_2	$\frac{2\cdot 265}{2^{10}}$	$\frac{35\cdot 7\cdot 25\cdot 453}{2^{17}}$	$\frac{3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 25\cdot 887}{2^{25}}$

Primită la redacție la 21 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. MANGERON D., CHALÉAT R., *Approximations d'ordre supérieur dans l'étude des mouvements perturbés des oscillateurs*, Rev. Roum. sci. techn. Méc. Appl., **10**, *4*, 791–825, (1965), vezi și МЕХАНИКА, *5*, 3–31, (1966).
2. — *Analyse numérique des périodes des petites oscillations en fonction de leur amplitude*, Travaux du Colloque sur la Théorie des approximations des fonctions. Résumés des communications, Inst. de Calcul Cluj, 1967, p. 125–126.
3. — *Dépendence fonctionnelle entre la période et l'amplitude dans la Mécanique non linéaire des vibrations*, Fourth Conference on Nonlinear Oscillations, CSAV, DAW, PAN, Abstracts of Papers, 1967, Prague, 170–173.
4. D MANGERON, R. CHALÉAT, GH. SILAȘ, *Higher Order Approximations in the Study of the Disturbed Motion of Oscillators*, Canadian Congress of Applied Mechanics, Centennial Year, 1967, Scientific Program, 25.
5. D. MANGERON, R. CHALÉAT, *Higher Order approximations in the study of the disturbed motion of oscillators and some other new results pertaining to nonlinear mechanics of oscillations*, VIII-o Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Sunti delle communicazioni Scientifiche, Trieste, 1967, p. 233–234.
6. Z. OSINSKI, Z. WASILEWSKI, *Damped vibrations of mass hung on the steel rope with nonlinear elasticity and damping*, Zagadn. drgan neliniowych, PAN, 1964, *6*, 205–212 (1966).
7. H. GUMINSKA-NOWOSIELSKA, Z. OSINSKI, *The frequency of the vibration of system with one degree of freedom with elastic and gravitational restitution force*, Zagadn. drgan neliniowych, PAN, 1964, *6*, 197–204 (1966).
8. B. PORTER, M. A. BAILLIE, *The effects of nonlinear damping on the stability of a time dilayed system*, Intern. J. Mech. Sci., **8**, *9*, 591–600 (1966).
9. CHEN YU, *Vibrations theoretical methods*, Reading, Mass. Addison Wesley Publ. Co. Inc., 1966, VIII, 285 p.
10. E. PICARD, *Traité d'Analyse*, vol. III, Gauthier-Villars, Paris, nouv. éd., chap. 5, p. 88.
11. H. RÉSAL, *Des applications de la mécanique à l'horlogerie*, Dunod, Paris, 1867 p. 143.
12. H. POINCARÉ, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste*, vol. I, Gauthier-Villars, Paris, 1892.

13. J. HAAG, *Les mouvements vibratoires*, Collection „Euclide", vol. I, Presses Univ. de France, Paris, 1952, cap. 5.
14. N. KRYLOFF, N. BOGOLIUBOFF, *Introduction to Nonlinear Mechanics*, Annals of Math. Studies, No 11. Princeton Univ. Press, 1947.
15. J. HAAG, R. CHALÉAT, *Problèmes de la théorie générale des oscillations et de Chronométrie*, Gauthier-Villars, Paris-Eyrolles, 1960.
16. R. CHALÉAT, *Période d'un Oscilllateur soumis à un couple perturbateur proportionnel à une puissance entière de l'élongation*, C. r. Acad. Sci., Paris, **254**, 1917—1919 (1962).
17. — *Troisième approximation de la perturbation d'amplitude des oscillateurs*, C. r. Acad., Sci, Paris, **256**, 1908—1910 (1963).
18. M. N. OGUZTÖRELI, D. MANGERON, *Some problems concerned with Nonlinear Mechanics*, Proc. XIth Congress Theor. Appl. Mech., New Delhi, Dec. 1967, Abstracts of Papers.
19. M. N. OGUZTÖRELI, R. CHALÉAT, D. MANGERON, *Neue Methoden zum Studium der Nichtlinearen Mechanik der Schwingungen*, VII. Österreichischen Mathematiker Kongress, Linz. Zusammenfassungen.
20. O. R. CHALÉAT, M. N. OGUZTÖRELI, D. MANGERON, *Sur quelques problèmes de Mécanique non linéaire*, Résumés des travaux IX Congrès de Mécanique, Split.
21. M. PICONE, *L'elenco delle pubblicazioni*, Annuario dei *XL*, 1961.
22. D. MANGERON, *Alcuni problemi concernenti le equazione alle derivate totali nel senso di Picone*, Bul. Inst. politehnic Iaşi, s.n., **4(8)**, *3—4*, 73—74 (1958).

UNELE PROBLEME ALE STABILIZĂRII OPTIMALE A ZBORULUI

de T. HACKER şi E. MĂLAIU
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

531.3

Se determină comanda sintetizată optimă şi sistemul optimal respectiv pentru stabilizarea rotaţiei unui avion DAV în zbor imobil şi a mişcării longitudinale a avionului convenţional în faza fugoidă. Indicele de performanţă corespunde unui compromis convenabil (arbitrar) între variaţia medie a coordonatelor de stare şi aceea a variabilelor de comandă („costul stabilizării"). În ambele cazuri, sinteza optimală rezultă liniară în raport cu variabilele de stare.
Pentru stabilizarea unghiulară a avionului DAV la punct fix în jurul fiecărei axe a sistemului de referinţă legat, comanda optimă — dedusă pe baza unui sistem de ecuaţii liniarizat — este o combinaţie a cîte unui stabilizor static şi amortizor de rotaţie într-o proporţie care rezultă din formula (3.11). Pentru amortizarea artificială a rotaţiei acestui aparat — considerat corp rigid — în jurul centrului său de greutate, comanda optimă dedusă pe baza sistemului neliniar clasic este un sistem de trei amortizori de rotaţie liniari, cîte unul pentru fiecare axă a sistemului de referinţă legat. Sistemul optimal corespunzător rezultă asimptotic stabil; viteza de amortizare este evaluată în funcţie de indicele de performanţă. În sfîrşit, se indică un procedeu de programare optimală a comenzilor pentru stabilizarea atitudinii longitudinale în faza fugoidă a mişcării perturbate. Pe baza modelului cunoscut, corespunzător neglijării în această fază a variaţiei incidenţei, rezultă o comandă optimală liniară în raport cu variabilele dinamice ale sistemului: ΔV şi $\Delta\theta$.

1. INTRODUCERE

În [1] s-au analizat condiţiile în care anumite mişcări de bază în zbor liber, instabile sau cu caracteristici de răspuns nesatisfăcătoare, pot fi stabilizate artificial cu ajutorul comenzilor. Problema stabilizării artificiale a acestor evoluţii va fi reluată aici din punctul de vedere al optimizării comenzilor de corecţie. Condiţiile arătate în [1, § 2.3, 3.6—3.8] vor fi presupuse satisfăcute.

Se vor folosi modele simplificate care permit rezolvarea efectivă a problemei prin obţinerea comenzilor optimale sintetizate. Astfel, pentru descrierea rotaţiei în jurul c.g. al unui aparat în zbor imobil (de exemplu al avioanelor cu decolare şi aterizare la verticală [1, § 3.7]), se recurge la modelul-simplificat pînă la ultima expresie — al unui corp rigid liber în echilibru, rezultantele forţelor şi momentelor exterioare fiind presupuse

nule atît în mişcarea de bază, cît şi în cea perturbată*); se cercetează stabilizarea artificială a mişcării în jurul centrului de greutate atît în momentul de readucere, cît şi cel de amortizare, fiind furnizate, conform ipotezei adoptate, integral de comenzi. Pentru ilustrarea unui caz de stabilitate cvasi neutră (mişcare perturbată lent amortizată sau lent divergentă) se va modela mişcarea fugoidă a unui avion convenţional în ipoteza stingerii complete a perturbaţiei unghiului de incidenţă.

Întrucît valoarea variabilei de comandă va figura sub forma costului în indicele de performanţă, se va putea renunţa la ipoteza că domeniul comenzilor este închis : mărginirea variabilelor de comandă va apărea implicit în rezultat. Pentru amortizarea rotaţiei în zbor imobil în cazul ideal, denumit aici caz etalon, precum şi pentru mişcarea perturbată fugoidă, vor fi folosite sisteme liniare. Astfel se va putea recurge la modelul matematic furnizat de problema formulată de A. M. Letov [2] şi R. E. Kalman [3], [4], considerată pe un interval de timp infinit. Pentru rezolvarea ei se va recurge la un procedeu datorit lui V. M. Popov [5 § 30], permiţînd rezolvarea pînă la capăt a problemelor propuse.

În problema amortizării artificiale a rotaţiei libere în absenţa vreunui moment de readucere sau amortizare, se va folosi şi modelul clasic neliniar al rotaţiei unui corp rigid, în jurul centrului său de masă descriind mai fidel rotaţia avioanelor DAV în zbor imobil sau a unui aparat de zbor în spaţiul extraatmosferic. Cazul va fi tratat prin metoda programării dinamice a lui R. Bellman [7], [8].

2. AUXILIAR MATEMATIC

Se va enunţa problema Kalman-Letov într-o formă care ţine seama de modelele ce urmează a fi utilizate.

Se consideră sistemul de comandă

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \tag{2.1}$$

unde vectorul-coloană x reprezintă variabilele de stare, iar $\overline{u}$ variabilele de comandă; A este o matrice constantă, iar b un vector linie constant. Se consideră de asemenea funcţionala

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (x_j^2 + \varkappa u^2)\,\mathrm{d}t, \tag{2.2}$$

unde x_j şi u sînt componente scalare date ale vectorilor x, respectiv $\overline{u}$, iar $\varkappa$ este o constantă scalară strict pozitivă. În particular se vor considera vectori $\overline{u}$ aceia care au toate componentele nule, cu excepţia componentei u, iar singura componentă nenulă şi egală cu 1 a vectorului b va fi cea de acelaşi ordin.

Se caută comanda $u(t)$, făcînd parte din clasa funcţiilor continue pe porţiuni, pentru care

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0,$$

iar integrala $\mathcal{J}$ converge şi este minimă.

*) Modelul simplificat corespunzător ipotezei neglijării momentelor giroscopice a fost denumit în [1] (§ 3.7, punctul 4) schemă etalon.

3. ZBORUL IMOBIL AL AVIOANELOR DAV

La scrierea ecuațiilor se va recurge la metoda mișcărilor parțial comandate (vezi [1], cap. 2). Sistemul auxiliar liniarizat corespunzător constrîngerii („comenzii parțiale") a mișcării centrului de greutate va fi în ipotezele amintite:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= -c_1 q + u_1, \\
\frac{dq}{dt} &= c_2 p - c_3 r + u_2, \\
\frac{dr}{dt} &= c_4 q + u_3, \\
\frac{d\Phi}{dt} &= p - r\operatorname{tg}\theta_0, \\
\frac{d\theta}{dt} &= q, \\
\frac{d\psi}{dt} &= r\sec\theta_0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

unde u_1, u_2, și u_3 sînt componentele cuplului de comandă corespunzătoare celor trei axe *); constantele c_j, $j = 1, \ldots, 4$ depind de momentele și de produsele de inerție ale aparatului în raport cu axele sistemului de referință legat de avion față de care au fost scrise ecuațiile. În considerațiile din această lucrare, ele nu vor interveni.

Sistemul (3.1) se simplifică pe baza următoarelor presupuneri:

a) unghiul de tangaj neperturbat se presupune neglijabil ($\theta_0 = 0$), considerîndu-se avioane DAV cu menținerea atitudinii de zbor normale;

b) sustentația este realizată de un număr par de motoare turboreactoare, cele simetrice două cîte două față de planul median longitudinal avînd turațiile egale și de sens contrar; atunci $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$.

Deci sistemul (3.1) se descompune în trei sisteme independente, corespunzătoare celor trei axe ale sistemului legat: pentru axa Ox

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= u, \\
\frac{d\Phi}{dt} &= p
\end{aligned} \tag{3.2}$$

și alte două sisteme similare corespunzătoare axelor Oy și Oz.

*) În [1, § 3.7, punctul 4] s-a considerat cazul utilizării simultane a amortizorilor de rotație și stabilizorilor statici, deci s-a luat $u_1 = -c_p\, p - c_\Phi \Phi$, $u_2 = -c_q q - c_\theta \theta$, $u_3 = -c_r r - c_\psi \psi$. Translația c.g. s-a presupus anulată prin comanda manuală.

Pentru a putea rezolva problema pînă la capăt, se va considera pentru început modelul cel mai simplu:

$$\frac{dp}{dt} = u, \quad p(t_0) = p_0, \tag{3.3}$$

iar drept indice de performanță funcționala de tipul (2.2)

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (p^2 + \varkappa u^2)\, dt,$$

unde coeficientul constant pozitiv $\varkappa$ dă o măsură a costului comenzii. Conform principiului maximului al lui Pontreaghin [6], dacă există o comandă u optimă în sensul arătat, ea trebuie să fie căutată printre cele care asigură în fiecare moment atingerea valorii maxime a funcției

$$H = -p^2 - \varkappa u^2 + \xi u,$$

unde variabila auxiliară ξ satisface ecuația adjunctă

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p} \equiv 2p.$$

Funcția H își atinge maximul în punctele în care $\partial H/\partial u = 0$*), deci pentru $u = \frac{1}{2\varkappa}\xi$.

Sinteza se va obține prin integrarea sistemului

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{2\varkappa}\xi, \quad \frac{d\xi}{dt} = 2p. \tag{3.4}$$

Rădăcinile caracteristice ale sistemului

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{\pm\sqrt{\varkappa}}$$

nefiind situate pe axa imaginară, se construește soluția pentru rădăcina caracteristică negativă:

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}t}, \quad \xi = \xi_0 e^{-\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}t}, \tag{3.5}$$

de unde

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\xi_0}{p_0}.$$

Înlocuind soluția în oricare din ecuațiile (3.4), rezultă $\xi_0/p_0 = -2\sqrt{\varkappa}$ și deci comanda sintetizată va fi

$$u = -\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}p. \tag{3.6}$$

*) Domeniul comenzilor fiind deschis.

Prin urmare, dacă modelul (3.3) poate fi considerat adecvat, amortizorul de rotaţie care să realizeze minimizarea funcţionalei $\mathcal{J}$ are, cu aproximaţiile admise, ecuaţia de funcţionare (3.6). Ecuaţia (3.3) devenind

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\, p,$$

viteza unghiulară de ruliu, dacă modelul (3.3) este acceptabil, se va stinge exponenţial, conform primei ecuaţii din (3.5).

Acum să reluăm modelul (3.2). Drept indice de performanţă se pot folosi fie

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (p^2 + \varkappa u^2)\, dt$$

pentru optimizarea amortizării, fie

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (\Phi^2 + \varkappa u^2)\, dt \tag{3.7}$$

pentru aceea a stabilizării statice a înclinării laterale sau, în sfîrşit,

$$\mathcal{J} = \int_0^\infty (p^2 + \varkappa_1 \Phi^2 + \varkappa_2 u^2)\, dt$$

pentru optimizarea executării simultane a amortizării în ruliu şi stabilizării statice în jurul axei longitudinale. Folosind aceeaşi tehnică de mai sus, se vede uşor că, oricare ar fi indicele de performanţă folosit, sistemul optim admite rădăcini caracteristice pe axa imaginară, ceea ce exclude folosirea procedeului schiţat pentru modelul (3.2). Problema poate fi rezolvată prin aplicarea unei metode a lui V. M. Popov. Expunerea metodei nu poate fi încadrată în lucrarea de faţă. Cititorul este trimis la consultarea capitolului 2 şi § 30 din capitolul 5 al monografiei [5]. Aici ne mulţumim să amintim condiţiile în care este aplicabil procedeul lui Popov. Pentru aceasta se vor construi pentru (2.1), (2.2) următoarele două funcţii de două variabile complexe λ şi σ (vezi [5, § 3]):

$$\chi(\lambda, \sigma) = \varkappa + b^* (\lambda E - A^*)^{-1} M (\sigma E - A)^{-1} b \tag{3.8}$$

şi

$$\pi(\lambda, \sigma) = \frac{1}{\tilde{\varkappa}} \det (\lambda E - A^*)\, \chi(\lambda, \sigma) \det (\sigma E - A).^{*)} \tag{3.9}$$

În χ, prin M s-a notat o matrice constantă depinzînd de coeficienţii variabilelor de stare care figurează în funcţionala $\mathcal{J}$. În cazul studiat, pentru indicele de performanţă (3.7), M are expresia

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

E este matricea-unitate. $\tilde{\varkappa}$ este un factor de normare pozitiv, care, de altfel , nu va interveni în raţionamente.

*) Prin asterisc se desemnează operaţia de transpunere.

Condiția ca problema să poată fi rezolvată este

$$\pi(-i\omega, i\omega) \neq 0 \tag{3.10}$$

pentru orice ω real [5, § 30].

Pentru fixarea ideilor, în sistemul (3.2) se va folosi indicele de performanță (3.7). Atunci

$$\chi(\lambda, \sigma) = \varkappa + \frac{1}{\sigma^2\lambda^2}, \quad \pi(\lambda, \sigma) = \frac{1}{\tilde{\varkappa}}(1 + \varkappa\sigma^2\lambda^2).$$

Avem

$$\pi(-i\omega, i\omega) = \frac{1}{\tilde{\varkappa}}(1 + \varkappa\omega^4)$$

și deci condiția (3.10) este satisfăcută.

Aplicînd acest procedeu, se obține comanda optimă sintetizată*)

$$u = -\frac{2}{\sqrt[4]{4\varkappa}}p - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\Phi. \tag{3.11}$$

Sistemul optimal va fi

$$\frac{dp}{dt} = -\sqrt[4]{\frac{4}{\varkappa}}p - \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\Phi,$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = p,$$

iar valoarea optimă a indicelui de performanță (3.7)

$$\mathcal{J}_{opt} = \varkappa\left(\sqrt[4]{\frac{4}{\varkappa}}p_0^2 - \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}p_0\Phi_0 + \sqrt[4]{\frac{4}{\varkappa^3}}\Phi_0^2\right).$$

Comanda optimă (3.11) implică folosirea simultană a stabilizorilor statici și amortizorilor de rotație într-o anumită proporție (dată de coeficienții membrului al doilea), deși indicele de performanță se referă numai la corecția abaterii unghiului de înclinare laterală.

4. AMORTIZAREA ARTIFICIALĂ A ROTAȚIEI UNUI CORP RIGID CU PUNCT FIX

Se consideră rotația unui corp rigid în jurul centrului său de greutate fix. Acest model fizic simplu descrie acceptabil mișcarea indusă de o perturbație a unui aparat DAV avînd ca mișcare de bază zborul imobil în ipoteza constrîngerii mișcării centrului de greutate. În acest caz, ecuațiile cunoscute ale solidului cu punct fix apar ca sistem auxiliar pentru mișcarea parțial controlată. Modelul fizic corespunde și rotației în jurul c.g. al unui corp în spațiu extraatmosferic. În ceea ce privește stabilitatea

*) Pentru unele detalii de calcul, vezi anexa.

zborului imobil al avioanelor DAV, modelul este mai apropiat de situația reală decît cel liniar folosit în paragraful precedent.

Problema amortizării optime va fi formulată după cum urmează. Fie M_1, M_2, M_3 cuplurile de comandă în jurul celor trei axe ale sistemului de referință legat. Ca și în paragraful precedent, în locul lor se vor folosi variabilele de comandă u_1, u_2, u_3 : $u_1 = M_1/A$, $u_2 = M_2/B$, $u_3 = M_3/C$. Se notează $h_1 = Ap$, $h_2 = Bq$, $h_3 = Cr$ și $K_1 = 1/A$, $K_2 = 1/B$, $K_3 = 1/C$.

Se consideră sistemul de comandă

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} &= (K_3 - K_2)\, h_2 h_3 + u_1 \equiv f^1, \\ \frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}t} &= (K_1 - K_3)\, h_3 h_1 + u_2 \equiv f^2, \\ \frac{\mathrm{d}h_3}{\mathrm{d}t} &= (K_2 - K_1)\, h_1 h_2 + u_3 \equiv f^3, \end{aligned} \tag{4.1}$$

cu condițiile inițiale $h_1(0) = a_1$, $h_2(0) = a_2$, $h_3(0) = a_3$. Variabilele de comandă se vor determina astfel încît funcționala integrală

$$J(M_1,\ M_2,\ M_3) = \int_0^\infty [\lambda(p^2 + q^2 + r^2) + \mu \Sigma M_i^2]\, \mathrm{d}t \tag{4.2}$$

sau, cu notațiile introduse,

$$J(u_1,\ u_2,\ u_3) = \int_0^\infty \Sigma\, (\beta_i\, h_i^2 + \gamma_i\, u_i^2)\ \mathrm{d}t,$$

unde $\beta_1 = \lambda/A^2$, $\beta_2 = \lambda/B^2$, $\beta_3 = \lambda/C^2$, $\gamma_1 = \mu A^2$, $\gamma_2 = \mu B^2$, $\gamma_3 = \mu C^2$, să fie minimă ; λ și μ sau respectiv β_i și γ_i sînt constante pozitive, indicînd ponderea dorită a amortizării rotației pe componente, respectiv aceea a costului comenzii *).

Se presupune existența unei comenzi optime oricare ar fi condițiile inițiale. Nu se impune a priori nici o restricție a comenzii.

Problema a fost rezolvată prin metoda programării dinamice [7]. Se consideră sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x,\ u), \quad x(t_0) = x_0,$$

unde vectorul x reprezintă variabilele de stare, iar vectorul u pe cele de comandă. Se cere să se determine comanda u astfel încît funcționa la

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^\infty f^0(x(t),\ u(t))\ \mathrm{d}t$$

să fie minimă.

*) În [9] se consideră problema optimizării comenzilor de corecție pe un interval de timp finit [0, T] pentru același sistem, indicele de performanță a cărei minimizare se urmărește fiind $\Sigma\, h_i\ (T) + \lambda \int_0^T (\Sigma\, M_i^2\ (t))\ \mathrm{d}t$, cu constantă pozitivă λ.

Fie $\varphi(x)$ o funcție derivabilă astfel ca $\varphi(0)=0$ și $\min_u \left\{ \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) f^i(x, u) + f^0(x, u) \right\} = 0$. x^i și f^i sînt componentele respective ale vectorilor x și f. Fie $x(t)$ o soluție a sistemului corespunzătoare unei comenzi u oarecare. Avem

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^\infty f^0(x(t), u(t))\,dt \geqslant -\int_0^\infty \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x(t)) f^i(x(t), u(t))\,dt =$$

$$= -\int_0^\infty \frac{d\varphi(x(t))}{dt}\,dt = \varphi(x(0)) - \varphi(x(\infty)).$$

Dacă $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$, atunci $\mathcal{J}(u) \geqslant \varphi(x_0)$.

Pe de altă parte, dacă $\tilde{u}(x)$ este funcția pentru care $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) f^i(x, \tilde{u}(x)) + f^0(x, \tilde{u}, (x)) \equiv 0$, adică pentru care minimul se atinge, pe baza inegalităților de mai sus rezultă că $\mathcal{J}(\tilde{u}) = \varphi(x_0) \leqslant \mathcal{J}(u)$ oricare ar fi u, deci comanda $\tilde{u}$ este optimă.

Rezultă că, dacă găsim o funcție φ cu $\varphi(0) = 0$ și o comandă $\tilde{u}(x)$ astfel încît $\min_u \left\{ \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} f^i(x, u) + f^0(x, u) \right\} = 0$ și $\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} f^i(x, \tilde{u}(x)) + f^0(x, \tilde{u}(x)) \equiv 0$, iar soluția nulă a sistemului $\frac{dx}{dt} = f(x, \tilde{u}(x))$ este asimptotic stabilă cu x_0 în domeniul de atracție, comanda $\tilde{u}(x)$ este optimă.

Revenind la problema considerată, fie $\varphi(h_1, h_2, h_3) = \sqrt{\lambda\mu}\,\Sigma h_i^2$. Avem evident $\lambda\mu = \beta_i \gamma_i$, deci

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} f^i + \beta_i h_i^2 + \gamma_i u_i^2 \right) = \sum_i (\sqrt{\beta_i}\, h_i + \sqrt{\gamma_i}\, u_i)^2.$$

Minimul acestei sume, egal cu zero, va fi atins pentru $\tilde{u}_i = -h_i \sqrt{\beta_i/\gamma_i}$ sau, revenind la notațiile inițiale, pentru

$$\tilde{M}_1 = -\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\, Ap, \quad \tilde{M}_2 = -\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\, Bq, \quad \tilde{M}_3 = -\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}\, Cr. \tag{4.3}$$

Se vede imediat că sistemul corespunzător

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -\sqrt{\frac{\beta_1}{\gamma_1}}\, h_1 + (K_3 - K_2) h_2 h_3, \\ \frac{dh_2}{dt} &= -\sqrt{\frac{\beta_2}{\gamma_2}}\, h_2 + (K_1 - K_3) h_3 h_1, \\ \frac{dh_3}{dt} &= -\sqrt{\frac{\beta_3}{\gamma_3}}\, h_3 + (K_2 - K_1) h_1 h_2 \end{aligned} \tag{4.4}$$

este asimptotic stabil, global*) , întrucît suma $\sum h_i^2$ este funcție Leapunov pentru acest sistem, avînd derivata în raport cu t în virtutea sistemului egală cu $-2\sum\sqrt{\frac{\beta_i}{\gamma_i}}h_i^2$. Prin urmare, condițiile enunțate mai sus fiind îndeplinite, comanda (4.3) este optimă pentru sistemul (4.1) și indicele de performanță reprezentînd un compromis dorit între efectul stabilizării și costul ei (4.2). Deși sistemul (4.1) este neliniar, comanda optimă rezultă liniară, ca o combinație de amortizori de rotație liniari corespunzători celor trei axe ale sistemului de referință legat, proporționali cu momentele de inerție respective.

Cu ajutorul funcției Leapunov $\mathcal{V} = \sum h_i^2$, se poate evalua prin procedeul cunoscut viteza de amortizare. Evaluarea va fi dată, evident, de modul cel mai slab amortizat. Fie $\nu = \min_i 2\sqrt{\beta_i/\gamma_i}$. Atunci amortizarea va avea loc cel puțin cu aceeași viteză ca și aceea a exponențialei $e^{-\nu t}$. De exemplu, dacă cel mai mare moment de inerție este cel în jurul axei Oz, atunci $\nu = \frac{2}{C}\sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}$.

5. STABILIZAREA OPTIMĂ A ATITUDINII LONGITUDINALE ÎN FAZA FUGOIDĂ

Mișcarea fugoidă constituie în general o comportare cvasiindiferentă în raport cu deviațiile induse de perturbație ale vitezei de zbor și ale unghiului de tangaj, cu incidența aproape constantă. Riguros este vorba de o variație lentă — stabilă sau divergentă — a acestor variabile, contracarată de obicei fără efort deosebit prin comenzi. Efortul poate deveni apreciabil în cazul unei divergențe mai accentuate. În cazul stabilizării automate, încercarea unei programări optimale a stabilizatorului apare îndreptățită, chiar și în cazul unor instabilități slabe. O bună stabilizare a vitezei și atitudinii implică, pe baza calităților dinamice inerente ale aparatului, stabilitatea mișcării longitudinale în ansamblu, conform teoriei stabilității mișcărilor parțial comandate.

Mișcarea fugoidă va fi modelată în ipoteza constanței stricte a incidenței. Se presupune că stabilizatorul automat acționează asupra deplasării unghiulare în jurul axei transversale. Se va considera deci următorul sistem.

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta V}{dt} &= p_{11}\Delta V + p_{12}\Delta\theta, \\ \frac{d\Delta\theta}{dt} &= p_{21}\Delta V + u, \end{aligned} \tag{5.1}$$

cu u variabilă de comandă (scalară). Se cere asigurarea minimului unui indice de performanță. realizînd un compromis convenabil între stabilizarea atitudinii longitudinale și costul comenzii respective:

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^\infty (\Delta\theta^2 + \varkappa u^2)dt,$$

*) Stabilitatea asimptotică locală rezultă, conform teoriei stabilității după primă aproximație, din sistemul liniarizat, separat în trei sisteme exponențial stabile independente.

$\varkappa$ fiind o constantă pozitivă. Programarea optimală va fi căutată prin procedeul bazat pe metoda amintită a lui V. M. Popov. În acest caz, conform definițiilor (3.8) și (3.9),

$$\chi(\lambda, \sigma) = \varkappa + (0\ 1)\begin{pmatrix} \lambda - p_{11} & -p_{21} \\ -p_{12} & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sigma - p_{11} & -p_{12} \\ -p_{21} & \sigma \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \varkappa + \frac{(\lambda - p_{11})(\sigma - p_{11})}{(\lambda^2 - p_{11}\lambda - p_{12}p_{21})(\sigma^2 - p_{11}\sigma - p_{12}p_{21})}, \tag{5.2}$$

$$\pi(\lambda, \sigma) = \frac{1}{\tilde{\varkappa}}[\varkappa(\lambda^2 - p_{11}\lambda - p_{12}p_{21})(\sigma^2 - p_{11}\sigma - p_{12}p_{21}) +$$

$$+ (\lambda - p_{11})(\sigma - p_{11})].$$

Atunci

$$\pi(-i\omega, i\omega) = \frac{1}{\tilde{\varkappa}}\{\varkappa[(\omega^2 + p_{12}p_{21})^2 + p_{11}^2\omega^2] + p_{11}^2 + \omega^2\} \neq 0$$

pentru orice ω real și deci procedeul este aplicabil. Se obține comanda optimă sintetizată $\tilde{u}(\Delta V, \Delta\theta)$ sub forma*)

$$\tilde{u} = \frac{\sigma_1\sigma_2 - p_{11}(\sigma_1 + \sigma_2)}{p_{12}}\Delta V - (\sigma_1 + \sigma_2)\Delta\theta, \tag{5.3}$$

unde σ_1 și σ_2 sînt rădăcinile cu parte reală negativă ale ecuației

$$\varkappa\sigma^4 - (2\varkappa p_{12}p_{21} + p_{11}^2 - 1)\sigma^2 + \varkappa p_{12}^2 p_{21}^2 + p_{11}^2 = 0. \tag{5.4}$$

Rezultă deci o comandă optimală liniară în ΔV și $\Delta\theta$.

ANEXĂ

DEDUCEREA UNOR FORMULE

Se vor da unele amănunte privind deducerea prin procedeul folosit a ecuațiilor (3.11) și (5.3), dînd sinteza optimală a comenzilor de corecție.

Se consideră sistemul de comandă (2.1) și indicele de performanță (2.2). Se construiesc funcțiile de două variabile complexe, λ și σ (3.8) și (3.9), și se presupune satisfăcută condiția (3.10). Atunci există [5] cel puțin un polinom $\psi(\sigma)$, avînd numai rădăcini cu părți reale negative, astfel încît

$$\pi(-\sigma, \sigma) = \overline{\psi(-\bar{\sigma})}\,\psi(\sigma)^{**}) \tag{A.1}$$

Există de asemenea un vector w astfel încît

$$w^*(\sigma E - A)^{-1}b = \frac{\tilde{\psi}(\sigma)}{\det(\sigma E - A)}, \tag{A.2}$$

*) Vezi anexa.

**) Prin bare se desemnează operația de conjugare complexă.

unde $\tilde{\psi}(\sigma) = \sqrt{\varkappa}\,\psi(\sigma) - \gamma \det(\sigma E - A)$, numărul γ fiind definit în felul următor :

$$\gamma = \lim_{\sigma \to \infty} \sqrt{\varkappa}\, \frac{\psi(\sigma)}{\det(\sigma E - A)}. \tag{A.3}$$

Comanda optimă se obține din relația

$$\gamma u + w^* x = 0 \tag{A.4}$$

Sistemul (3.2), (3.7). Avem

$$x = \begin{pmatrix} p \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ iar în (2.2) } j = 2 \quad (x_j = \Phi).$$

Se calculează funcțiile χ (3.8) și π(3.9) ; $\psi(\sigma)$ se alege de forma

$$\psi(\sigma) = \gamma_0 \left(\sigma^2 + \frac{2}{\sqrt[4]{4\varkappa}}\, \sigma + \frac{1}{\sqrt{\varkappa}} \right),$$

unde γ_0 se determină din (A.1). Rezultă $\gamma_0 = -\sqrt{\varkappa/\tilde{\varkappa}}$. Cu ajutorul funcției $\psi(\sigma)$ se calculează numărul γ (A.3) și funcția $\tilde{\psi}(\sigma)$ și pe baza acestora se determină vectorul w^* din (A.2). Atunci viteza optimală (3.11) rezultă direct din (A.4).

Deducerea formulei (5.3). În cazul sistemului (5.1) avem

$$x = \begin{pmatrix} \Delta V \\ \Delta\theta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad j = 2 \ (x_j = \Delta\theta),$$

iar $\tilde{\varkappa}\pi(-\sigma, \sigma)$ este membrul întîi al ecuației (5.4). Dacă σ_1 și σ_2 sînt rădăcinile acestei ecuații cu parte reală negativă,

$$\psi(\sigma) = \gamma_0 (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2).$$

Din (A.1) γ_0 rezultă egal cu $-\sqrt{\varkappa/\tilde{\varkappa}}$. Mai departe se calculează γ și $\tilde{\psi} : \gamma = -\sqrt{\varkappa}$, $\tilde{\psi} = \sqrt{\varkappa}\,[-(\sigma_1 + \sigma_2)\sigma + \sigma_1\sigma_2]$. Componentele vectorului w vor fi

$$w_1 = \frac{\sqrt{\nu}}{p_{12}}\,[\sigma_1\sigma_2 - p_{11}(\sigma_1 + \sigma_2)], \quad w_2 = -\sqrt{\nu}\,(\sigma_1 + \sigma_2).$$

În problema considerată, $p_{12} \neq 0$.

Sinteza optimală (5.3) rezultă imediat pe baza relației (A.4).

NOTAȚII

p, q, r — componentele vitezei unghiulare ale rotației în jurul centrului de greutate corespunzătoare axelor sistemului de referință legat (de ruliu, tangaj și girație) ;

Φ — unghiul de înclinare laterală (atitudinea laterală);
θ — unghiul de tangaj (atitudinea longitudinală);
A, B, C — momentele de inerţie ale aparatului în raport cu axele sistemului legat;
V — viteza de zbor.

Semnul Δ precedînd cîte un simbol (V, θ etc.) indică deviaţia indusă de perturbaţie a mărimii reprezentate de simbolul alăturat.

Primită la redacţie la 30 decembrie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. T. HACKER, *Stabilitate şi comandă în teoria zborului*, Edit. Academiei, 1968.
2. А. М. ЛЕТОВ, Аналитическое конструирование регуяторов, Авт. и телем., *21*, (1960).
3. R. E. KALMAN, *Contribution to the theory of optimal control*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 1960, p. 102—119.
4. — *When is a linear control system optimal?* J. Basic Engineering (Trans. ASME part. D), *1* (1964).
5. V. M. POPOV, *Hiperstabilitatea sistemelor automate*, Edit. Academiei, 1966.
6. Л. С. ПОНТРЯГИН, В. Г. БОЛТЯНСКИИ, Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ, Е. Ф. МИЩЕНКО, Математическая теория оптимальных процессов, Гос.изд. физ.-мат. лит., Москва, 1961.
7. R. BELLMAN, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, Princeton-New Jersey, 1957.
8. R. E. BELLMAN, S. E. DREYFUS, *Programarea dinamică aplicată*, Edit. tehnică, 1967 (traducere din limba engleză, Princeton University Press, Oxford University Press, 1962).
9. T. G. WINDEKNECHT, *Optimal stabilization of rigid body attitude*, J. Math. Anal. Appl., *6* 325—335 (1963).

ASUPRA INFLUENȚEI UNOR CÎMPURI ELECTRICE TRANSVERSALE ȘI CÎMPURI MAGNETICE TANGENȚIALE ÎN LUBRIFICAȚIA CU GAZE

de FL. DIMOFTE
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

621.82 : 533

Lucrarea de față analizează pe un caz particular (lagăr plan în trepte) influența unui cîmp electric transversal și a unui cîmp magnetic tangențial asupra distribuției presiunilor și posibilităților de îmbunătățire a caracteristicilor lagărului, precizîndu-se totodată condițiile în care cercetarea performanțelor lagărului prezintă importanță.
Pe baza rezultatelor obținute s-au putut deduce unele concluzii asupra posibilităților acestui sistem de lubrificație.

În unele lucrări [1], [2], [3] s-a examinat problema generală a lubrificației cu gaze în ipoteza că mediul lubrifiant posedă o conductibilitate electrică. În aceste condiții s-au dedus ecuațiile de mișcare din stratul de lubrifiant și s-a arătat că anumite condiții electromagnetice exterioare pot influența caracteristicile funcționale, existînd astfel posibilitatea obținerii unor performanțe superioare. Pentru cîteva tipuri de lagăre s-a reușit să se obțină soluții ale ecuațiilor problemei și o serie de indicații cantitative asupra posibilităților care permit fie sporirea capacității portante, fie reducerea forțelor și momentelor de frecare.

Plecînd de la rezultatele menționate, în lucrarea de față ne propunem să examinăm mai îndeaproape problema lubrificației magnetogazodinamice în cazul existenței unui cîmp magnetic tangențial și a unui cîmp electric transversal pentru a putea preciza calitativ posibilitățile de utilizare ale acestui sistem de lubrificație.

Astfel fie E_y cîmpul electric normal pe una dintre suprafețele lubrificate (dirijat după axa Oy) ; de asemenea fie B_{z_0} un cîmp magnetic exterior, constant perpendicular pe viteza suprafeței mobile (respectiv dirijat după axa Oz). În aceste condiții s-a arătat [3] că distribuțiile de viteze au forma

$$u = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial x} - J_y B_{z_0}\right) y(y-h) + \left(1 - \frac{y}{h}\right) V,$$
$$w = \frac{1}{2\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\, y\,(y-h), \tag{1}$$

unde μ este viscozitatea gazului, h grosimea filmului de lubrifiant, V viteza suprafeței mobile, p presiunea din film și J_y densitatea de curent, în locul căreia se poate introduce diferența de potențial ($E = -\nabla\Phi$)

$$\Phi_y = \int_0^h E_y \mathrm{d}y \cong E_y h \cong J_y \frac{h}{\sigma} - \frac{M_x}{\rho} B_{z_0} \tag{2}$$

sau curentul total

$$I_y = \int_s J_y \mathrm{d}s = -\int_s \left(\frac{\sigma}{h} \Phi_y + \frac{\sigma}{h} \frac{M_x}{\rho} B_{z_0} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}z, \tag{3}$$

σ fiind conductibilitatea electrică a mediului lubrifiant, constantă în timp, și ρ densitatea.

Introducînd parametrii

$$M_z = hB_{z_0} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}; \quad N = \frac{\Phi_y}{V} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \tag{4}$$

debitele de lubrifiant se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{\rho}{12 + M_z^2} \left[-\frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} - NM_z h + 6Vh \right], \\ M_z &= -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \tag{5}$$

iar în final ecuația diferențială a presiunilor [2]

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{h^3}{\mu} \frac{1}{12 + M_z^2} \rho \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \left(\frac{h^3}{12\mu} \rho \frac{\partial p}{\partial z} \right) = V \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6 - NM_z}{12 + M_z^2} \rho h \right). \tag{6}$$

Pornind de la ecuația (6), se pot obține soluțiile analitice sau numerice pentru diferite tipuri de lagăre. Este însă de remarcat că din cauza neliniarității ecuațiilor diferențiale este dificilă soluționarea pe cale analitică a problemei pentru situații reale de lagăre, considerîndu-se mișcarea tridimensională. În aceste cazuri se pot obține soluții numai prin metode numerice cu ajutorul calculatoarelor digitale, de exemplu.

În lucrarea de față vom examina un caz particular de lagăr pentru care soluția poate fi găsită sub o formă analitică, respectiv un lagăr în trepte (fig. 1).

În aceste condiții, deoarece grosimea $h = \text{const}$ pe cele două porțiuni ale lagărului, ecuația (6) se poate integra în raport cu x și, ținînd seama de notațiile (4), se obține

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mu V}{h^2} \left[(6 - NM_z) - \frac{C_1^*}{hp} (12 + M_z^2) \right], \tag{7}$$

din care, printr-o nouă integrare, rezultă relația

$$\bar{p} + K_1^* \ln (\bar{p} - K_1^*) = \Lambda_h^* \bar{x} + K_2^* \tag{8}$$

pentru $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} > 0$ sau relația

$$\bar{p} + K_1^* \ln (K_1^* - \bar{p}) = \Lambda_h^* \bar{x} + K_2^* \tag{9}$$

pentru $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} < 0$.

În relațiile (15), (16) s-a notat $\bar{p} = \frac{p}{p_0}$; $\bar{x} = \frac{x}{l}$;

și

$$\Lambda_h^* = \frac{1}{6} \Lambda_h (6 - NM_z) ; \; \Lambda_h = \frac{6\mu V l}{p_0 h^2} . \tag{10}$$

Condițiile la limită impun ca presiunea să ia două valori date, $\bar{p}_1$, $\bar{p}_0$ sau $\bar{p}_0$, $\bar{p}_1$, la cele două capete ale intervalului pe care $h = \text{const.}$

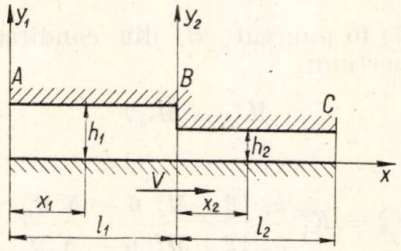


Fig. 1. — Lagăr în trepte (notații).

În cazul lagărului în trepte (fig. 1) determinarea distribuției presiunilor este destul de simplă și se efectuează cu ajutorul formulelor (8) și (9). Astfel, pe zona AB, $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} > 0$ și se aplică relația (8); pe zona BC, $\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} < 0$, fiind valabilă ecuația (9). Vom nota pentru zona AB

$$\Lambda_{h_1} = 6\mu V l_1 / p_0 h_1^2, \Lambda_{h_1}^* = \frac{1}{6} \Lambda_{h_1} (6 - NM_{z_1}), \; \bar{x}_1 = \frac{x_1}{l_1} . \tag{11}$$

Presiunile vor fi date de formula

$$\bar{p} + K_1^* \ln (\bar{p} - K_1^*) = \Lambda_{h_1}^* \bar{x}_1 + K_2^* . \tag{12}$$

Pentru zona BC vom nota

$$\Lambda_{h_2} = \frac{\mu V l_2}{p_0 h_2^2} = \Lambda_{h_1} \frac{h_1^2 l_2}{h_2^2 l_1} ; \; \Lambda_{h_2}^* = \frac{1}{6} \Lambda_{h_2} (6 - NM_{z_2}) ; \; \bar{x}_2 = \frac{x_2}{l_2} . \tag{13}$$

În acest caz, presiunile se scriu

$$\bar{p} + K_3^* \ln (K_3^* - \bar{p}) = \Lambda_{h_2}^* \bar{x}_2 + K_4^* = \Lambda_{h_1}^* \frac{6 - NM_{z_1}}{6 - NM_{z_1}} \frac{l_2 h_1^2}{l_1 h_2^2} \bar{x}_2 + K_4^* . \tag{14}$$

Condițiile la limită impun ca

$$\overline{p} = 1 \text{ pentru } \overline{x}_1 = 0 \text{ și } \overline{x}_2 = 1. \tag{15}$$

Printr-un studiu calitativ al ecuației presiunilor similar cu cel efectuat în lucrarea [4], se poate arăta că, dacă grosimea $h(x)$ suferă un salt finit, derivata $\frac{dp}{dx}$ are aceeași comportare, iar curba $p(x)$ prezintă în primă aproximație un punct unghiulos în B.

Fie $\overline{p}_s$ valoarea presiunii în acest punct; avem

$$(\overline{p})_{\overline{x}_1=1} = (\overline{p})_{\overline{x}_2=0} = \overline{p}_s. \tag{16}$$

În plus vom mai utiliza condiția ca debitul pe cele două zone să fie același. Debitul dintre suprafețe în cazul magnetogazodinamic de-a lungul axei x este dat de prima dintre expresiile (5)

$$M_x = \rho\left[-\frac{h^3}{\mu(12+M_z^2)}\frac{dp}{dx} + \frac{6-NM_z}{12+M_z^2}Vh\right] \tag{17}$$

și, aplicînd relația (17) în punctul B, din condiția de egalitate a debitului pe cele două porțiuni.

$$M_{x_1} = M_{x_2}, \tag{18}$$

se deduce relația

$$K_3^* = K_1^* \frac{h_1}{h_2}\frac{12+M_{z_1}^2}{12+M_{z_1}^2}\frac{6-NM_{z_1}}{6-NM_{z_1}}. \tag{19}$$

Celelalte condiții (15), (16) se scriu

$$\begin{aligned}
&1 + K_1^* \ln(1-K_1^*) = K_2^*,\\
&1 + K_3^* \ln(K_3^*-1) = \Lambda_{h_2}^* + K_4^* = \Lambda_{h_1}^* \frac{6-NM_{z_2}}{6-NM_{z_1}}\frac{l_2}{l_1}\frac{h_1^2}{h_2^2} + K_4^*,\\
&\overline{p}_s + K_1^* \ln(\overline{p}_s - K_1^*) = \Lambda_{h_1}^* + K_2^*\\
&\overline{p}_s + K_3^* \ln(K_3^* - \overline{p}_s) = K_4^*.
\end{aligned} \tag{20}$$

Relațiile (19), (20) permit determinarea necunoscutelor $\overline{p}_s$, K_1^*, K_2^*, K_3^*, K_4^*. La viteze relativ mari ($\Lambda_{h_1}^* > 1$), determinarea constantelor de mai sus este mult ușurată dacă se observă că

$$K_3^* = \overline{p}_s + \alpha, \tag{21}$$

unde $\alpha \to 0$ cînd $\Lambda_h^* \to \infty$ și deci se poate considera

$$K_3^* \cong \overline{p}_s \tag{22}$$

și din relațiile (19) și (20) prima și a treia se pot determina.

În figura 2 s-au reprezentat curbele presiunilor pentru diferite valori h_1/h_2 și $\Lambda_{h_1}(\Lambda_{h_1}^*)$, considerînd $M_{z_1} = 1$, și două valori pentru N ($N = -12$ și $N = -120$).

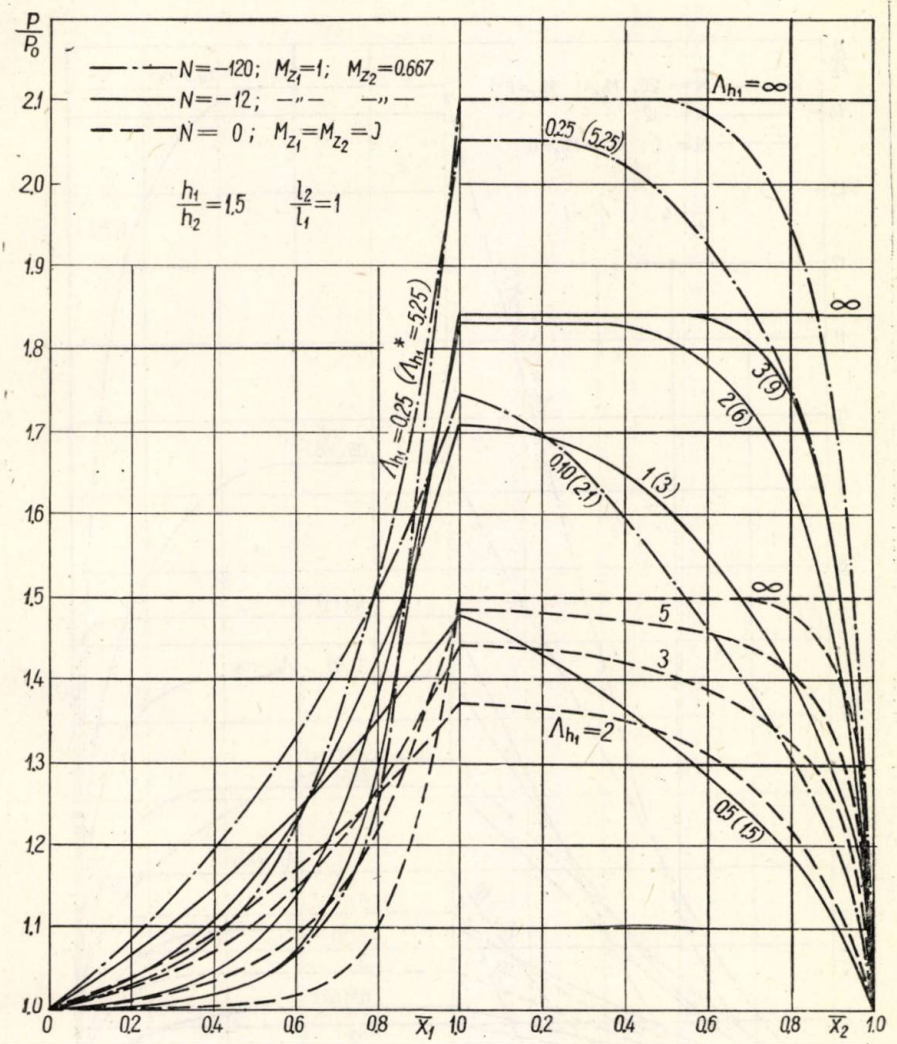

P/P0
N=−120; Mz1=1; Mz2=0.667
N=−12; −"− −"−
N= 0; Mz1=Mz2=1
h1/h2=1.5
l2/l1=1
Λh1=∞
0.25 (5.25)
∞
3(9)
2(6)
Λh1=0.25 (Λh1*=5.25)
0.10(2.1)
1(3)
∞
5
3
Λh1=2
0.5(1.5)
X1
X2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.0
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2.0
2.1

Fig. 2 a

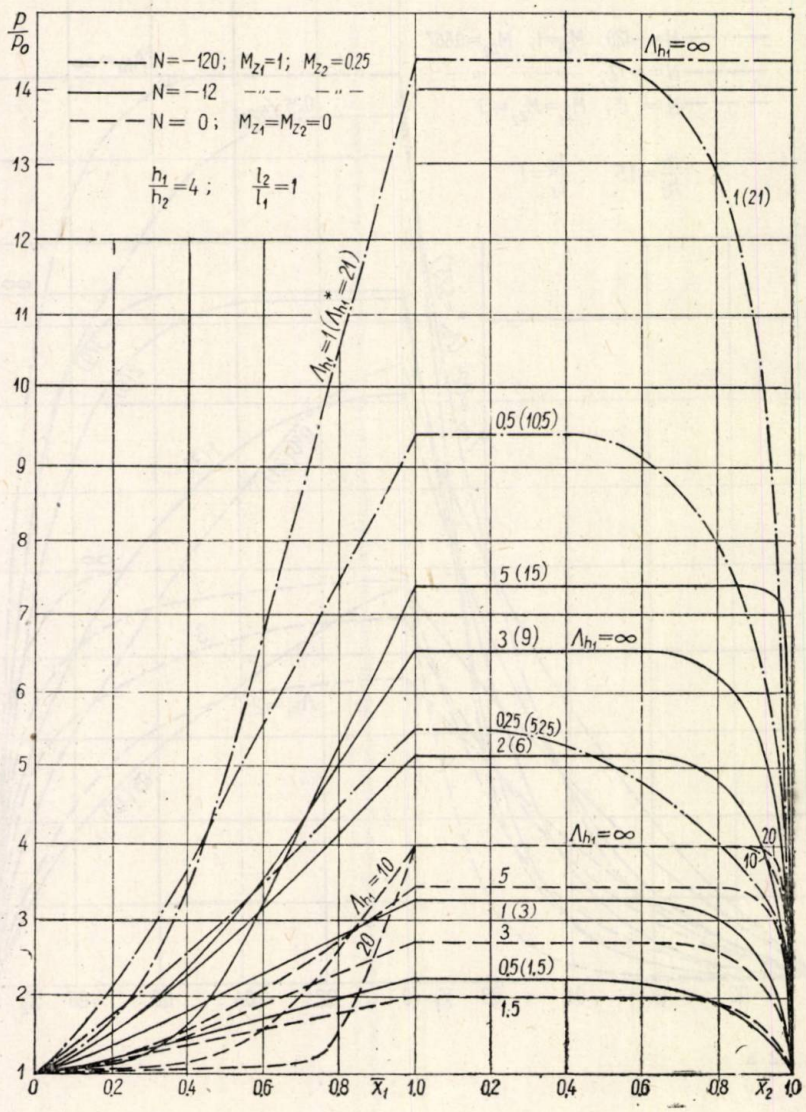

p/p0
N=−120; Mz1=1; Mz2=0,25
N=−12
N= 0; Mz1=Mz2=0
h1/h2=4; l2/l1=1
Λh1=∞
1(21)
Λh1=1(Λh1*=21)
0,5(10,5)
5(15)
3(9)
Λh1=∞
0,25(5,25)
2(6)
Λh1=∞
20
10
5
Λh1=10
1(3)
3
20
0,5(1,5)
1,5
1
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0,2
0,4
0,6
0,8
x̄1
1,0
0,2
0,4
0,6
0,8
x̄2
1,0

Fig. 2 b

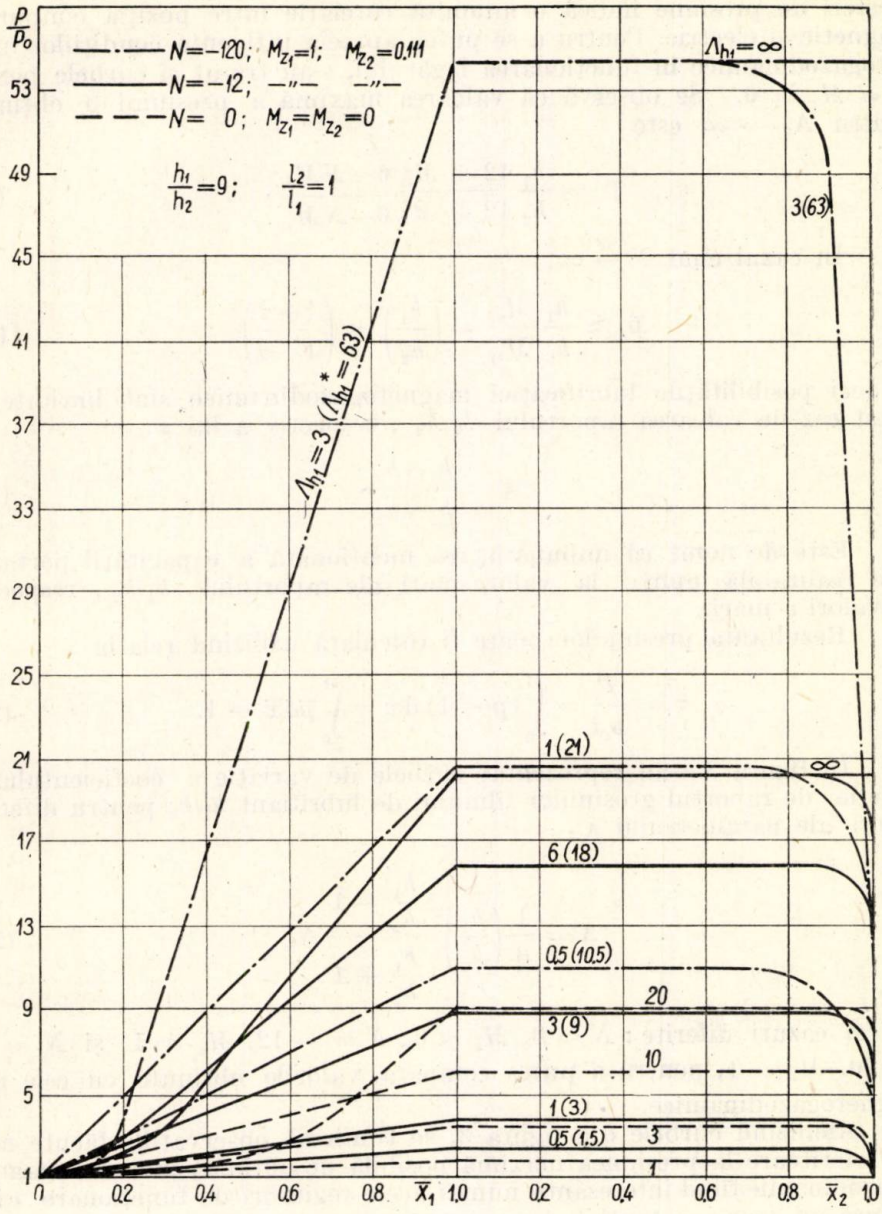


Fig. 2 c

Fig. 2 a, b, c. — Distribuția de presiuni într-un lagăr în trepte pentru diferite rapoarte h_1/h_2 și numere M_z și N.

Valoarea negativă a parametrului N necesară pentru obținerea unei creșteri de presiune indică o anumită corelație între poziția cîmpurilor magnetic și electric. Pentru a se putea aprecia influența condițiilor magnetogazodinamice în funcționarea lagărului, s-au trasat și curbele pentru $N = M_z = 0$. Se observă că valoarea maximă a presiunii $\overline{p}_s$ obținută pentru $\Lambda_{h_1} \to \infty$ este

$$\overline{p}_s = \frac{h_1}{h_2} \frac{12 + M_{z_2}^2}{12 + M_{z_1}^2} \frac{6 - NM_{z_1}}{6 - NM_{z_2}}. \tag{23}$$

În cazul cînd $N \to \infty$,

$$\overline{p}_s \approx \frac{h_1}{h_2} \frac{M_{z_1}}{M_{z_2}} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2 \tag{24}$$

și deci posibilitățile lubrificației magnetogazodinamice sînt limitate în acest caz de valoarea raportului h_1/h_2, respectiv a lui ε:

$$\varepsilon = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}. \tag{25}$$

Este de notat că îmbunătățirea menționată a capacității portante este realizabilă numai la valori mari ale raportului h_1/h_2, respectiv la valori ε mari.

Rezultanta presiunilor poate fi calculată utilizînd relația

$$\tau = \frac{P}{p_0 l} = \int_0^1 (\overline{p} - 1)\, \mathrm{d}\overline{x} = \int_0^1 \overline{p}\mathrm{d}\overline{x} - 1. \tag{26}$$

În figura 3 s-au reprezentat curbele de variație a coeficientului τ funcție de raportul grosimilor filmului de lubrifiant h_1/h_2 pentru diferite valori ale parametrului $\overline{\Lambda}$:

$$\overline{\Lambda} = \frac{1}{3}\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \frac{\frac{h_1}{h_2} - 1}{\frac{h_1}{h_2} + 1} \Lambda_{h_1} \tag{27}$$

în trei cazuri diferite: $N = 0$, $M_z = 0$; $N = -12$, $M_{z_1} = 1$ și $N = -120$, $M_{z_1} = 1$, pentru a putea compara valorile obținute cu cele nemagnetogazodinamice.

Analizînd curbele din figura 3, se confirmă observațiile făcute mai sus referitoare la presiunea maximă posibilă de obținut, în cazul magnetogazodinamic fiind interesante numai acele regimuri de funcționare care asigură un spor substanțial de portanță și care se obține la excentricități avînd o valoare destul de mare, respectiv la o valoare destul de mare a coeficientului h_1/h_2.

Tensiunile de frecare pe cele două suprafețe se scriu

$$\tau_{0,h} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0,h} \tag{28}$$

și interesează în mod deosebit mărimea tensiunii τ_0 de pe suprafața mobilă. Distribuția de viteze pentru cazul considerat este dată de relația (8) și se poate deduce imediat derivata $\frac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{\partial p}{\partial x} - J_y B_{z_0}\right](2y - h) - \frac{V}{h}. \tag{29}$$

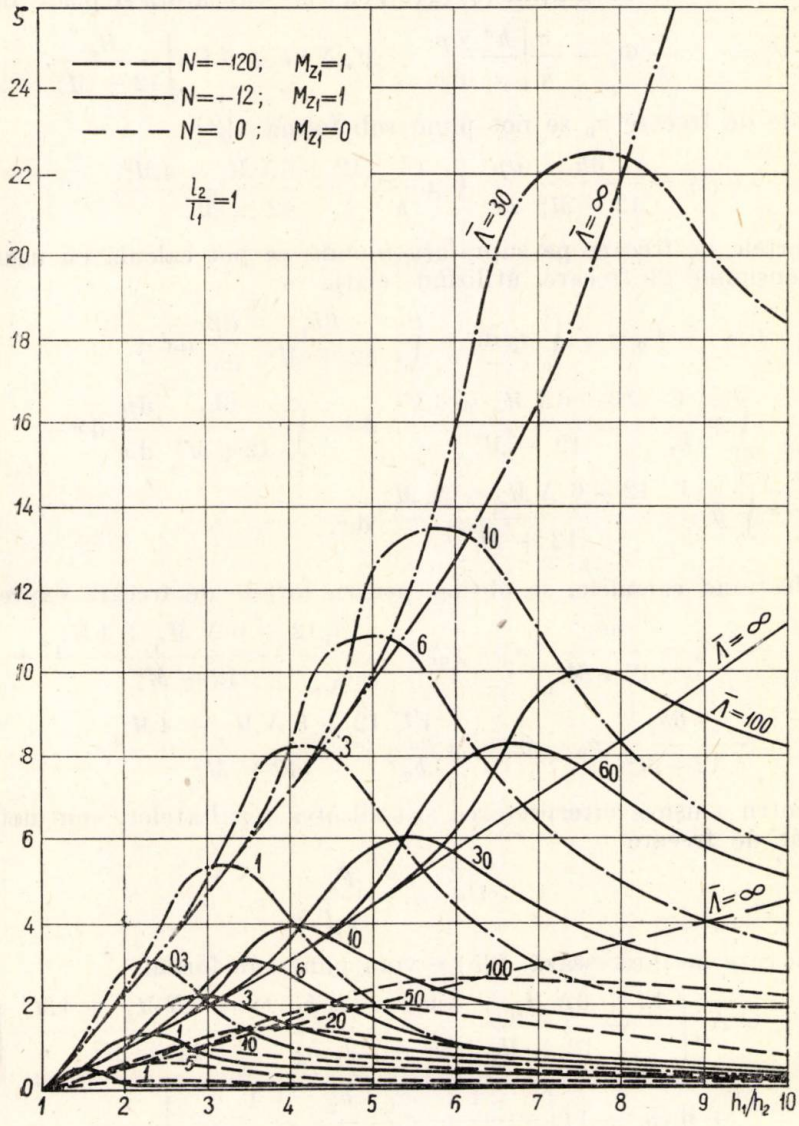


Fig. 3. — Coeficientul de încărcare ζ pentru un lagăr în trepte.

Utilizînd relația (29), tensiunile de frecare se pot scrie astfel [3]:

$$\tau_{0,h} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} - J_y B_{z_0}\right)(2y - h) - \mu\frac{V}{h}\right]_{y=0,\,h}, \tag{30}$$

iar valoarea care interesează

$$-\tau_0 = \frac{h}{2}\left[\frac{\partial p}{\partial x} - J_y B_{z_0}\right] + \mu\frac{V}{h}. \tag{31}$$

Ținînd seama de relațiile (2) și (5), cu ajutorul cărora se poate deduce

$$J_y = -\frac{\sigma}{h}\Phi_y + \frac{\sigma}{h}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + M_z NVh + 6Vh\right]\frac{B_z}{12 + M_z^2}, \tag{32}$$

tensiunile de frecare τ_0 se pot pune sub forma [3]

$$-\tau_0 = \frac{6h}{12 + M_z^2}\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\frac{V}{h}\frac{12 + 6NM_z + 4M_z^2}{12 + M_z^2}. \tag{33}$$

Forțele de frecare pe suprafața mobilă se pot calcula cu ușurință, avînd tensiunile de frecare, utilizînd relația

$$\begin{aligned} -F_0 = -\int_0^l \tau_0\,\mathrm{d}x = \int_0^{l_1}\frac{6h_1}{12 + M_{z_1}^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \\ + \int_0^{l_1}\mu\frac{V}{h_1}\frac{12 + 6NM_{z_1} + 4M_{z_1}^2}{12 + M_{z_1}^2}\,\mathrm{d}x + \int_0^{l_2}\frac{6h_2}{12 + M_{z_2}^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \\ + \int_0^{l_2}\mu\frac{V}{h_2}\frac{12 + 6NM_{z_2} + 4M_{z_2}^2}{12 + M_{z_2}^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{34}$$

Efectuînd calculele, se obține pentru forțele de frecare expresia

$$\begin{aligned} -F_0 = \frac{6h_1}{12 + M_{z_1}^2}(p_s - p_0) + \mu\frac{Vl_1}{h_1}\frac{12 + 6NM_{z_1} + 4M_{z_1}^2}{12 + M_{z_1}^2} + \\ + \frac{6h_2}{12 + M_{z_2}^2}(p_0 - p_s) + \mu\frac{Vl_2}{h_2}\frac{12 + 6NM_{z_2} + 4M_{z_2}^2}{12 + M_{z_2}^2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Pentru a ușura interpretarea și utilizarea rezultatelor, vom nota un coeficient de frecare

$$C_{F_0} = -\frac{F_0}{p_0 l} \tag{36}$$

și relația care ne interesează (35) o vom pune sub forma

$$\begin{aligned} -\frac{l}{h_1}C_{F_0} = \Lambda_{h_1}\left[\frac{12 + 6NM_{z_1} + 4M_{z_1}^2}{12 + M_{z_1}^2} + \frac{l_2}{l_1}\frac{h_1}{h_2}\frac{12 + 6NM_{z_2} + 4M_{z_2}^2}{12 + M_{z_2}^2}\right] + \\ + 6(\bar{p}_s - 1)\left[\frac{1}{12 + M_{z_1}^2} - \frac{h_2}{h_1}\frac{1}{12 + M_{z_2}^2}\right]. \end{aligned} \tag{37}$$

Variația acestui coeficient în funcție de Λ_{h_1} pentru diferite valori ale raportului h_1/h_2, N avînd valoarea -12 și -120, a fost prezentată în figura 4. Se remarcă posibilitatea ca la o anumită valoare a lui N convenabil aleasă N^*, coeficientul de frecare C_F să se anuleze.

În figura 5 s-a reprezentat N^* în funcție de Λ_{h_1} pentru două valori ale raportului h_1/h_2. Pentru valori mai mari ale lui N decît N^*,

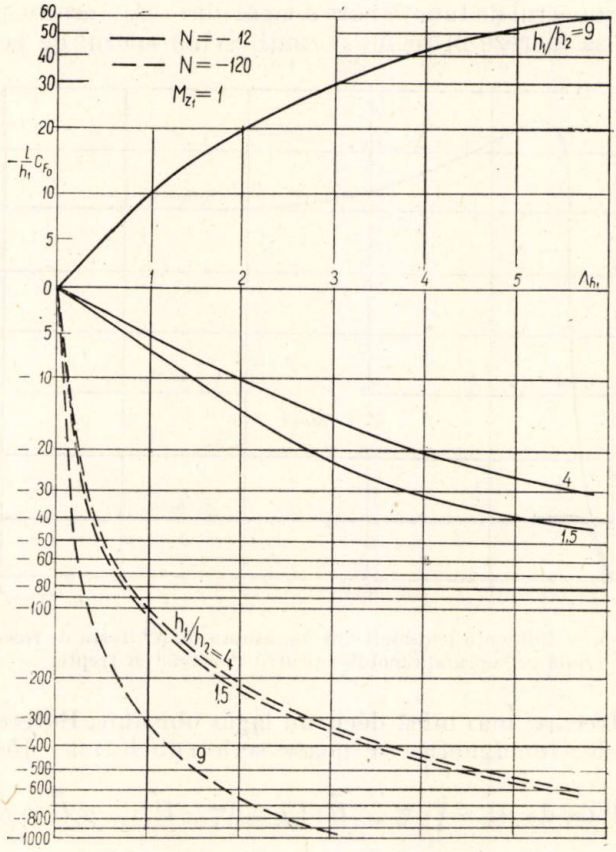


Fig. 4. — Coeficientul de frecare pentru un lagăr în trepte avînd $l_2/l_1 = 1$.

cîmpurile electromagnetice introduc în lagăr o energie suplimentară, contribuind la mișcarea suprafeței mobile. Se remarcă de asemenea dependența lui N^* față de raportul h_1/h_2, respectiv ε; astfel, o dată cu creșterea lui h_1/h_2, N^* crește foarte mult. În zonele uzuale de funcționare a lagărelor lubrificate cu gaze $\Lambda_{h_1} \cong 0{,}5-3$, N^* are variații considerabile. Considerînd o valoare N oarecare $N < (N^*)_{max}$ pentru un anumit tip de lagăr avînd un raport h_1/h_2 cunoscut, se observă că la început lagărul funcționează ajutat de cîmpurile electromagnetice, care contribuie la deplasarea suprafeței mobile, forțele create de acestea în stratul de lubrifiant avînd o rezultantă îndreptată în sensul mișcării.

Pe măsură ce creşte viteza, respectiv Λ_{h_1}, termenul care se opune mişcării din expresia lui C_{F_0} (37) creşte, astfel încît, la un moment dat cînd $N = N^*$ (regimul de funcţionare corespunzînd unui punct de curbă), cei doi termeni din expresia (37) se anulează reciproc, lagărul funcţionînd cu forţa de frecare zero, pe suprafaţa mobilă global C_p fiind nul. În realitate, aceasta se obţine pe seama unui consum de energie electromagnetică.

Dacă parametrul de funcţionare a lagărului Λ_{h_1} creşte în continuare, lagărul începe să lucreze în regim normal, avînd sporul de portanţă cores-

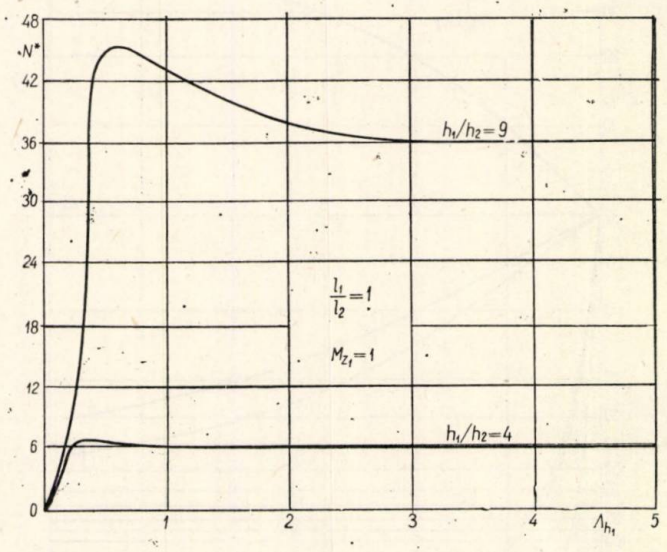


Fig. 5. — Influenţa parametrului Λ_{h_1} asupra lui N^* (forţa de frecare nulă pe suprafaţa mobilă) pentru un lagăr în trepte.

punzător şi o frecare mai mică decît un lagăr obişnuit. Puterea consumată de cîmpurile electromagnetice se poate scrie sub forma [5]

$$W = \int_v E^j J^j \, dx \, dy \, dz = \int_v \nabla \times \vec{H}) \, [\mu_e \nu_H (\nabla \times \vec{H}) - \mu_e \vec{U} \times \vec{H}] \, dx \, dy \, dz, \tag{38}$$

unde μ_e este coeficientul de permeabilitate magnetic, $\vec{H}$ cîmpul magnetic şi $\nu_H = \dfrac{1}{\sigma \mu_e}$; avînd în vedere condiţiile iniţiale de funcţionare în cazul problemei studiate, se poate scrie

$$W = \int_v E_y J_y \, dx \, dy \, dz. \tag{39}$$

Cu ajutorul relaţiei (32), expresia $E_y J_y$ se scrie, ţinînd cont de notaţiile (4),

$$E_y J_y = -\frac{\mu}{h^2} N^2 V^2 + \frac{\mu}{h^3}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x} + M_z N V h + 6 V h\right] \frac{M_z N V}{12 + M_z^2}. \tag{40}$$

Efectuînd integrarea expresiei (38), se obţine relaţia

$$W = -12\,\mu N^2 V^2\left[\frac{1}{12+M_{z_1}^2}\frac{l_1}{h_1}+\frac{1}{12+M_{z_2}^2}\frac{l_2}{h_2}\right]+$$

$$+\mu N V\frac{M_{z_1}}{12+M_{z_1}^2}\left[\frac{l_1(p_s-p_0)}{\mu}+6V\frac{l_1}{h_1}\right]+ \tag{41}$$

$$+\mu N V\frac{M_{z_2}}{12+M_{z_2}^2}\left[\frac{h_2}{\mu}(p_0-p_s)+6\,V\frac{l_2}{h_2}\right].$$

Pentru a uşura interpretarea rezultatelor, vom nota

$$C_w=\frac{W}{p_0 h_1 V}. \tag{42}$$

Avînd în vedere notaţiile (10), se obţine în final pentru relaţia (42) expresia

$$C_w=-2\Lambda_{h_1}\frac{N}{12+M_{z_1}^2}\left(1+\frac{l_2}{l_1}\frac{h_1}{h_2}\frac{12+M_{z_1}^2}{12+M_{z_2}^2}\right)+$$

$$+\Lambda_{h_1}\frac{NM_{z_1}}{12+M_{z_1}^2}\left[\frac{1}{\Lambda_{h_1}}\frac{p_s-p_0}{p_0}+1\right)+ \tag{43}$$

$$+\Lambda_{h_1}\frac{MM_{z_2}}{12+M_{z_2}^2}\left(\frac{1}{\Lambda_{h_1}}\frac{h_2}{h_1}\frac{p_s-p_0}{p_0}+\frac{l_2}{l_1}\frac{h_1}{h_2}\right).$$

Calculînd valoarea lui C_w pentru situaţiile-limită interesante $N=N^*$, s-au obţinut rezultatele prezentate în figura 6.

Analizînd aceste rezultate, se remarcă proporţionalitatea lui C_w cu Λ_{h_1} în cazul urmăririi regimurilor-limită $N=N^*$. Rezultatele obţinute permit ca pe baza unor consideraţii expuse în lucrarea [4] să putem deduce unele concluzii asupra funcţionării în general a lagărelor lubrificate cu gaze sub influenţa cîmpurilor electromagnetice în schema de funcţionare aleasă pentru studiu în prezenta lucrare. Astfel se vor putea obţine rezultate interesante, concretizate printr-un spor de portanţă şi o reducere a forţelor de frecare sau chiar anularea lor prin componentele create de cîmpurile electromagnetice. Trebuie însă avut în vedere că efecte importante nu se vor obţine decît în cazul funcţionării lagărului la excentricităţi relative ε suficient de mari.

La valori mici de excentricităţi, contribuţia cîmpurilor electromagnetice va fi mică şi modificarea caracteristicilor lagărului neglijabile. Din aceste motive considerăm că situaţiile de mai sus nu ar putea prezenta interes pentru studiu, cel puţin din punctul de vedere al posibilităţilor de mărire a încărcării lagărului. Funcţionarea lagărului la excentricităţi reduse sub influenţa cîmpurilor electromagnetice ar putea fi totuşi interesantă din

punctul de vedere al forţelor de frecare, relaţia (37) putîndu-se scrie aproximativ pentru $h_1 \approx h_2$

$$-\frac{l}{h_1} C_{F_0} \approx 2\Lambda_{h_1} \frac{12 + 6NM_{z_1} + 4M_{z_1}^2}{12 + M_{z_1}^2}, \tag{44}$$

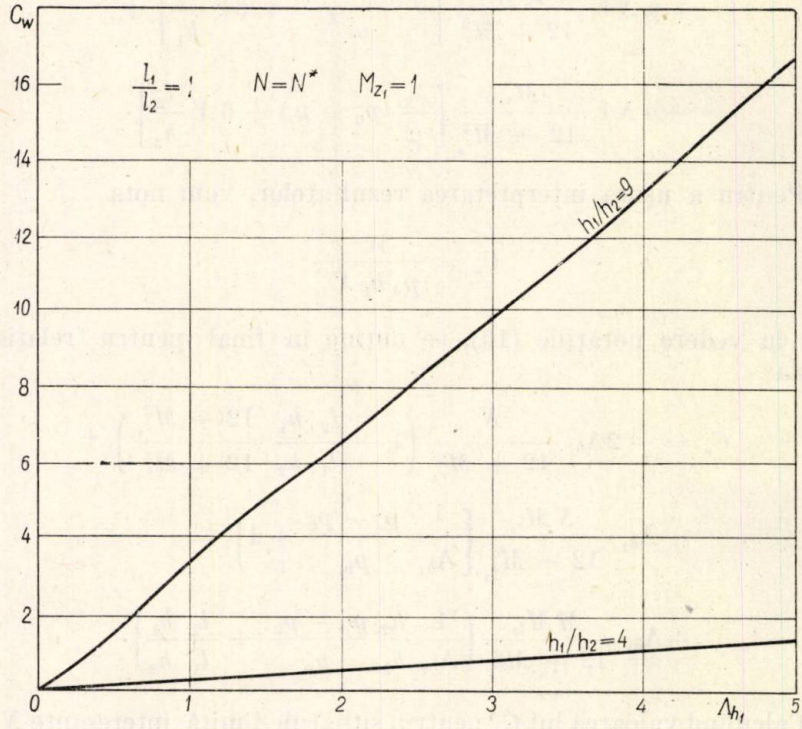


Fig. 6. — Coeficientul de putere electromagnetică consumată într-un lagăr în trepte în cazul $N = N^*$ (forţa de frecare nulă pe suprafaţa mobilă).

şi pentru valori negative ale lui N se poate ca rezultanta frecării în lagăr să se anuleze sau chiar lagărul să funcţioneze mai departe sub influenţa cîmpurilor electromagnetice dacă forţele exterioare sînt suficient de mici.

Mulţumim pe această cale tov. dr. ing. V. N. Constantinescu pentru îndrumările preţioase pe care cu multă bunăvoinţă ni le-a dat.

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. Constantinescu, *Asupra lubrificaţiei magnetogazodinamice*, St. cerc. mec. apl., *4* (1966); Rev. roum. sci. techn.-Méc. Appl., *4* (1966).
2. — *On the possibilities of the magnetogasodynamic lubrication*, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME.
3. V. N. Constantinescu, Fl. Dimofte, *Asupra influenţei unor cîmpuri magnetice şi electrice în lubrificaţia cu gaze*, St. cerc. mec. apl. (1967); Rev. roum. sci. techn.-Méc. Apl., (1967).
4. V. N. Constantinescu, *Lubrificaţia cu gaze*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1963.
5. S. I. Pai, *Magnetogasodynamics and Plasma Dynamics*, Springer Verlag, Viena, 1962.

INFLUENȚA PROCESULUI DE ALUNECARE ASUPRA SUPRAFEȚELOR LUBRIFIATE CU APĂ

de GH. VASILCA și VETURIA RASZILLIER
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

621.89

Se prezintă și se interpretează rezultatele experimentale obținute cu privire la modificarea microgeometriei, a structurii în suprafața activă și a transferului de material în condiții de încercare la sarcini mari și lubrifiere cu apă. Modelele experimentale au fost cupluri de frecare din materiale similare Y-Sn83, respectiv Bz14T, precum și perechi disimilare din acestea. Cuplurile similare prezintă regimuri de funcționare stabilizate și nestabilizate, iar cele disimilare numai stabilizate. Eutectoidul $\alpha + \delta$ sub formă de rețea la cuplul similar din Bz14T și sudurile proeminente din SnSb și Cu6Sn5 pe suparafața din Bz14T, la cuplul disimilar favorizează regimul de funcționare stabilizat. Fazele dure din Y-Sn83 sînt uneori fărîmate în procesul de alunecare, formînd zone de straturi superficiale mai netede.

Datorită viscozității apei, aproape de zece ori mai reduse decît a unui ulei obișnuit, sarcina critică a unui cuplu de frecare lubrifiat cu apă se poate prezenta în aceeași proporție mai mică. Regimul de funcționare a unui astfel de cuplu la sarcina critică sau la o valoare superioară acesteia va fi semifluid, cu preponderența frecării de contact pe măsură ce încărcarea depășește sarcina care corespunde regimului hidrodinamic limită. Frecarea și deci căldura generată în lagăr va crește în mod corespunzător. Evacuarea căldurii din lagăr va fi însă mai bună, datorită căldurii specifice de aproape 2,5 ori mai mare a apei față de cea a uleiurilor minerale. Creșterea coeficientului de frecare, datorită componentei de contact a acestuia și cînd acest proces predomină, putînd fi de peste o sută de ori, cantitatea de căldură rămasă în lagăr devine de circa 40 de ori mai mare decît în regimul de funcționare hidrodinamic.

În aceste condiții, temperatura în straturile superficiale ale suprafețelor de alunecare crește simțitor, putînd influența termic și straturile susținătoare următoare ale materialului pereților solizi. Evident că intervine de asemenea și variația proprietăților mecanice ale materialului suprafețelor cu temperatura, care este mai accentuată în apropierea temperaturilor de topire ale acestora. În cazul mișcării de alunecare cu regim preponderent de contact și lubrifiere cu apă la o temperatură nu prea ridicată

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, Nr. 4, P. 771–781

faţă de cea a mediului ambiant, principala influenţă a procesului asupra suprafeţelor va rămîne de natură fizică şi mecanică. În cele ce urmează se analizează unele aspecte ale acestei influenţe.

1. MODELE EXPERIMENTALE ŞI CONDIŢII DE ÎNCERCARE

Pentru investigaţii experimentale în acest scop, s-a ales drept cuplu de frecare modelul sabot-tambur, cu diametrul nominal al suprafeţei de alunecare de 23 mm, alungirea specifică $\lambda = 0{,}65$ şi unghiul de înfăşurare a sabotului $\theta = 80°$. Tipul de cuplu ales corespunde ca formă geometrică unui lagăr cilindric circular cu cuzinet parţial şi, luînd jocul relativ $\psi = 0$, modelul experimental devine un lagăr fără joc radial. S-a ales modelul cu $\psi = 0$, deoarece în regim semifluid, numărul microcontactelor dintre cele două suprafeţe fiind mai mare decît în cazul $\psi > 0$, presiunile specifice de contact vor fi mai reduse. Acest fapt uşurează procesul de alunecare în faza iniţială de pornire dacă aceasta se face, ca în cazul de faţă, sub sarcină şi fără rodaj prealabil.

Materialele cuplului au fost dintre cele folosite curent în construcţia lagărelor. Unul dintre acestea, denumit *S*, s-a ales cu temperatura de topire mai joasă, şi anume aliajul Y -Sn83, matricea eutectică ternară a acestuia topindu-se la 230°C [1], iar celălalt, denumit B15, un bronz de staniu (Bz14T) cu temperatura de topire a matricei-soluţie solidă de 798°C [2]. Aceste materiale au fost încercate ca perechi de materiale similare S—S, B_{15}—B_{15} şi disimilare în combinaţiile B_{15}— S şi S—B_{15}.

Încercările s-au făcut folosind următorii parametrii funcţionali:

— viteza relativă de alunecare (în gol) $V = 1{,}26$ m/s;

— regimul de încărcare:

0—1 min	$p = 3{,}3$ kgf/cm²,
1—3 min	$p = 23$ kgf/cm²,
3—10 min	$p = 45$ kgf/cm²;

— modul de lubrifiere: cuplul complet imersat în apă;

— durata totală de funcţionare: 10 min;

— felul rodajului: fără rodaj, pornirea în plină viteză şi aplicarea sarcinii în treptele arătate mai sus.

Tamburii din Y—Sn83, respectiv Bz14T, sînt notaţi în cele ce urmează cu $\mathring{S}$, respectiv $\mathring{B}_{15}$, iar saboţii cu $\overline{S}$, respectiv $\overline{B}_{15}$.

2. REZULTATE EXPERIMENTALE

Pe durata încercării a fost înregistrată grafic variaţia forţei de frecare sub forma puterii absorbite de motorul electric de antrenare a tamburului, arătată în figurile 1—6. Pierderea sau aportul de material datorite procesului de alunecare pentru sabot şi tambur sînt arătate în tabela 1, precum şi temperatura apei din baie la începutul şi sfîrşitul încercării.

Ţinînd seama de pierderile mecanice proprii ale motorului electric de antrenare a tamburului, rezultă că, la o putere absorbită de 0,3 kW şi la încărcarea modelului experimental corespunzătoare presiunii specifice

Tabela 1

Parametrii măsurați	Modelul experimental					
	$\overset{\circ}{S}_2-\overline{S}_2$	$\overset{\circ}{B}_{15/1}-\overline{B}_{15/1}$	$\overset{\circ}{B}_{15/2}-\overline{B}_{15/2}$	$\overset{\circ}{B}_{15/8}-\overline{S}_9$	$\overset{\circ}{B}_{15/9}-\overline{S}_{10}$	$\overset{\circ}{S}_3-\overline{B}_{15/3}$
Încărcarea maximă, kgf/cm²	45	45	45	45	45	45
Viteza, m/s	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26	1,26
Temperatura apei, °C — inițială	27,5	27	27,5	24	26	26
Temperatura apei, °C — finală	29	33	31	26	29,5	29
Transfer de material*),						
mg sabot	−574,6	−178,1	−10,5	−292,7	−1404,9	+9,3
tambur	+239,4	−289,2	−256,5	+12,5	+15,9	−204,6
Total transfer (sab.+tamb.)	−574,6	−467,3	−267,0	−292,7	−1404,9	−204,6

* Cu − s-a însemnat pierderea, iar cu + sporul de greutate; sporirile (+) provenind din pierderi (−) nu au fost cuprinse încă o dată în totalul transferului.

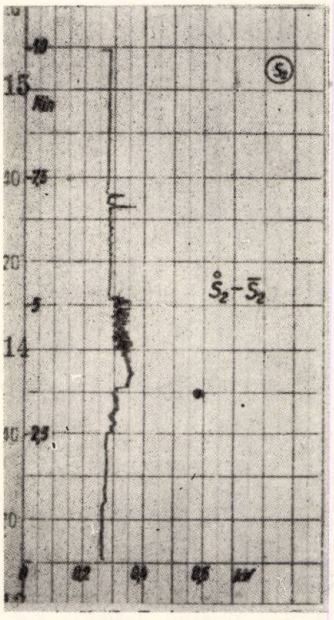


Fig. 1. — Modelul $\overset{\circ}{S}_2-\overline{S}_2$ din Y-Sn83, variația puterii absorbite. Aspectul funcționării instabile.

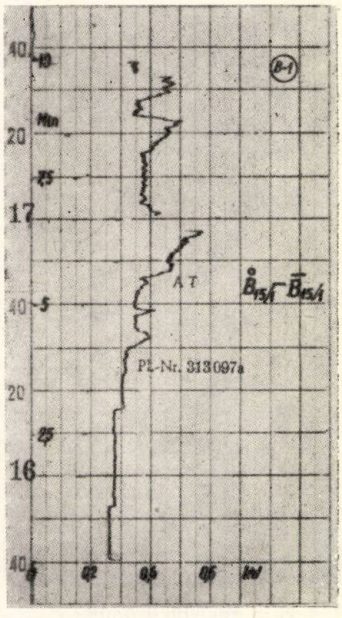


Fig. 2. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/1}-\overline{B}_{15/1}$ din Bz14T, variația puterii absorbite. Funcționare instabilă timpurie.

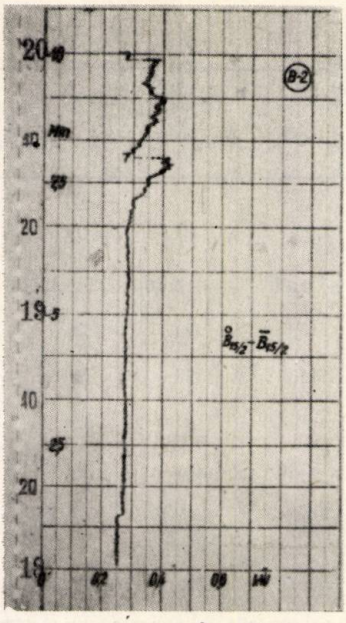


Fig. 3. — Modelul $\mathring{B}_{15/2}-\overline{B}_{15/2}$ din Bz14T, variația puterii absorbite. Funcționare instabilă tardivă.

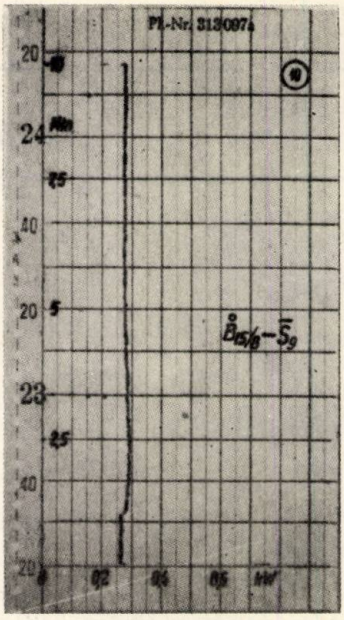


Fig. 4. — Modelul disimilar $\mathring{B}_{15/8}-\overline{S}_9$, variația puterii absorbite. Funcționare cu uzură moderată.

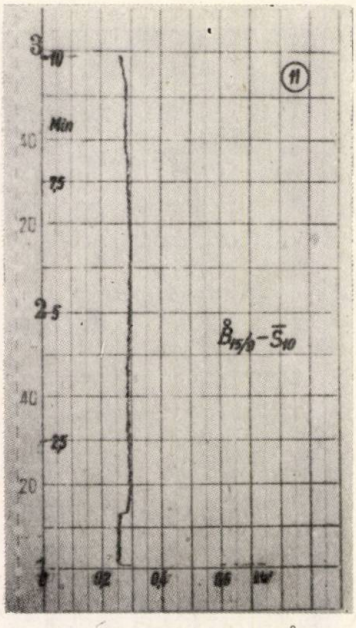


Fig. 5. — Modelul disimilar $\mathring{B}_{15/9}-\overline{S}_{10}$, variația puterii absorbite. Funcționare cu uzură accentuată.

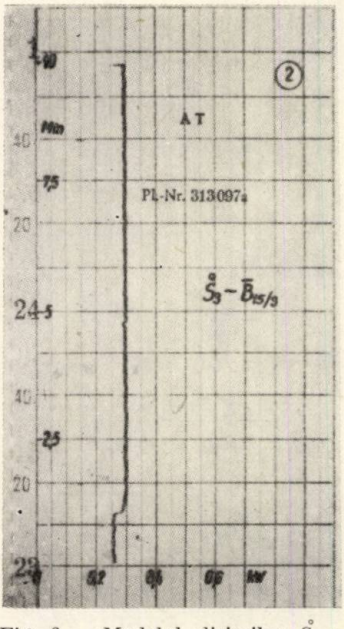


Fig. 6. — Modelul disimilar $\mathring{S}_3-\overline{B}_{15/3}$, variația puterii absorbite. Funcționare cu uzura moderată a tamburului.

medii de 45 kgf/cm² și în condițiile lubrifierii cu apă, valoarea coeficientului de frecare a cuplului respectiv este $f = 0{,}126$. Din figurile 1—6 reiese însă că în toate aceste încercări puterea absorbită a avut valori minime în jurul a 0,3 kW. Procesul de alunecare desfășurîndu-se în aceste încercări cu un coeficient de frecare atît de ridicat, rezultă că a avut un caracter preponderent de contact, ceea ce de altfel s-a și urmărit.

În aceste condiții, natura materialului suprafețelor a avut influențe hotărîtoare asupra valorii forței de frecare. Astfel diagramele pun în primul rînd în evidență faptul constatat de Devies [3] că pereții cuplurilor din același material produc un gripaj pronunțat, în timp ce la ansamblurile formate din materiale disimilare procesul de frecare de contact poate decurge fără sau cu înclinări mai slabe spre gripaj. Astfel, în cazul cuplului $\mathring{S}_2 - \overline{S}_2$, cu tamburul și sabotul din același aliaj Y — Sn83, procesul de gripaj accentuat este marcat printr-o oscilație în limite mari a forței de frecare (fig. 1). Oscilații de acest fel în limite și mai mari prezintă și cuplurile din materiale similare, $\mathring{B}_{15/1} - \overline{B}_{15/1}$ (fig. 2) și $\mathring{B}_{15/2} - B_{15/2}$ (fig. 3). Variațiile mai mari ale forței de frecare în regim de dezechilibru se datoresc în acest caz proprietăților mecanice superioare ale aliajului Bz14T. Astfel de oscilații ale forței de frecare lipsesc total în cazul cuplurilor din materiale disimilare, cum se poate vedea în figurile 4, 5 și 6.

În perioadele de funcționare cu regimul de frecare stabilizat, caracterizat în diagrame prin valori constante ale puterii absorbite, influența naturii materialului trebuie să se reflecte prin valorile acestei puteri. Scara diagramelor nu permite în cazul de față să poată fi relevat acest lucru în mod suficient de clar decît numai la puterile de vîrf ale perioadei de gripaj. Astfel coeficientul de frecare prezintă valoarea maximă de 0,193 în cazul modelului $\mathring{S}_2 - \overline{S}_2$ (fig. 1), iar în cazul modelelor din Bz14T de 0,60 (fig. 2), respectiv 0,27 (fig. 3). Aspectul acestor valori și faptul că ansamblurile din materiale similare pot funcționa în regimuri de frecare stabilizate sau nu, așa cum arată diagramele, vor fi analizate în § 3.

3. INFLUENȚA PROCESULUI DE FRECARE ASUPRA SUPRAFEȚELOR

În cazul acestor încercări, procesul de frecare fiind preponderent de contact, evident că microgeometria inițială de prelucrare a suprafețelor trebuie să se prezinte modificată în mod specific, în funcție de natura materialului, de structura și textura structurii acestuia, de variația cu temperatura a proprietăților sale mecanice etc. Microgeometria modificată prin astfel de procese, agravată în mod suplimentar prin lubrifiere cu apă, își păstrează, desigur, caracterul specific, dar, dată fiind severitatea procesului, această modificare atinge nivelul distrugerii suprafețelor de alunecare. Cuplurile cu astfel de suprafețe nu sînt utilizabile în tehnică și caracterizarea calitativă și cantitativă [5] a microgeometriei acestora nu ar prezenta o utilitate deosebită. Însă procesele severe de frecare și de gripaj influențează mai intens și mai complex suprafețele și pot pune în evidență acțiuni și transformări ale fazelor de structură ce se pot produce numai în condițiile termice, mecanice și fizico-chimice specifice acestor procese. Unele aspecte privind acțiunile și modificările de acest fel în cazul cuplurilor încercate pot prezenta interes.

Modelul similar $\overset{\circ}{S}_2 - \overline{S}_2$ *din* $Y-Sn83$. Aspectul general al suprafeţei active la tambur şi sabot şi detalii privind microgeometria şi constituţia stratului superficial sînt arătate în figurile 7, 8 şi 9. Astfel se poate constata că modificările suprafeţei au afectat şi straturi mai adînci ale acesteia, această acţiune provocînd la sabot deplasări masive de material din suprafaţa activă. Cea mai mare parte din acest material a rămas aderentă sub formă de bavuri în avalul suprafeţei, iar o parte mai mică (−574,6 mg) a fost detaşată definitiv. Din această din urmă parte, aproape jumătate din ea (+239,4 mg) apare transferată pe suprafaţa tamburului.

Suprafaţa activă atît la sabot, cît şi la tambur prezintă zone alternante cu grade diferite de netezime şi rugozitate. Cele din urmă au o extindere mai mare, sînt orientate circular, microgeometria lor avînd formă zimţată, cu zimţii orientaţi axial (fig. 7). Zimţii, rugozitatea specifică a feţelor acestora şi aspectul general mat al materialului indică formarea lor şi deci detaşarea materialului din suprafaţă printr-un proces de forfecare-rupere, analog aşchierii brute. Lipsa unor particule proeminente pe suprafeţe care ar fi putut juca rolul de sculă aşchietoare poate pleda în favoarea naturii adezive cel puţin în parte a procesului de detaşare de material din suprafaţă. Dimensiunile relativ mari ale zimţilor menţionaţi, precum şi aspectul exterior — de material rezultat prin suprapunere adezivă — al bavurii de la extremitatea aval a sabotului, arată că procesul de detaşare masivă de material a avut loc în condiţiile materialului cu proprietăţile mecanice slăbite. Cum astfel de slăbiri se produc la toate materialele metalice la temperaturi apropiate de cele de topire ale fazei celei mai uşor fuzibile [6], înseamnă că în cazul de faţă temperatura medie în zonele zimţate menţionate a atins valori peste 200°C.

Zonele mai netede ale suprafeţei au de asemenea orientarea circulară şi prezintă un luciu caracteristic, întîlnit şi la lagărele din acest material cu funcţionare normală în regim hidrodinamic. Dată fiind ductibilitatea relativ bună a acestui aliaj, microgeometria acestor zone se poate prezenta destul de fină (fig. 8).

Observate la microscop, se constată că atît în zonele zimţate, cît şi în cele lucioase, chiar după atac cu Nital 5%, nu pot fi puşi în evidenţă constituenţii duri SnSb şi Cu_6Sn_5 ai acestui material sub formele lor cunoscute. Sub acţiunea reactivului, materialul din zonele zimţate se înnegreşte (trei pete mari dispuse orizontal în figura 9), iar în zonele lucioase se produce numai o corodare diferenţiată (fig. 8 şi 9). Părţile neinfluenţate de către reactiv sînt formate deci din fazele necorodabile SnSb şi Cu_6Sn_5 sau constau din straturi superficiale de compuşi chimici, de natura celor de tipul Beilby etc., generate de procesul de frecare.

Microduritatea H măsurată la tamburul $\overset{\circ}{S}_2$ (fig. 8) în zonele lucioase în condiţii de sarcină de apăsare P diferită se prezintă astfel:

$P = 50$ g,	$H = 23$ kgf/mm²,	$I = 9.10^{-3}$ mm,
$P = 25$ g,	$H = 20$ kgf/mm²,	$I = 7.10^{-3}$ mm,
	24 kgf/mm²,	$= 6{,}3.10^{-3}$ mm,
	21,5 kgf/mm²,	$= 6{,}9.10^{-3}$ mm,
	26 kgf/mm²,	$= 5{,}7.10^{-3}$ mm,

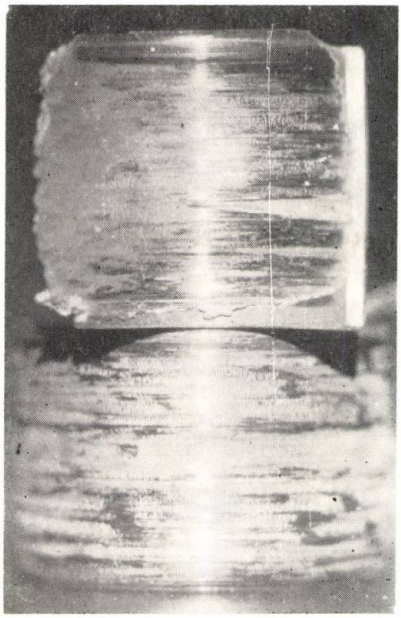


Fig. 7. — Modelul $\overset{\circ}{S}_2 - \overline{S}_2$. Microgeometrie specifică, 2,3 : 1.

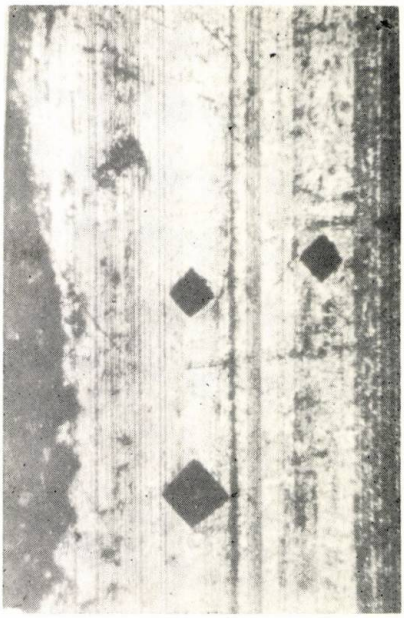


Fig. 8. — Modelul $\overset{\circ}{S}_2 - \overline{S}_2$. Zonă lucioasă necorodabilă pe tambur, atac cu Nital 5%, 125 : 1.

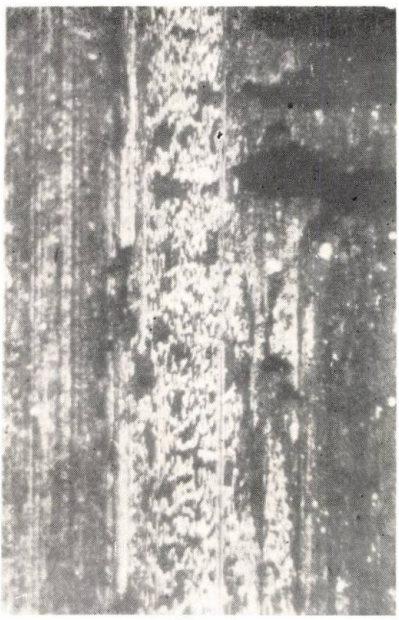


Fig. 9. — Modelul $\overset{\circ}{S}_2 - \overline{S}_2$. Zonă lucioasă necorodabilă cu discontinuităţi pe tambur, atac cu Nital 5%, 125 : 1.

Fig. 10. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/1} - \overline{B}_{15/1}$. Microgeometrie specifică, 2,3 : 1.

Fig. 11. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/1} - \overline{B}_{15/1}$. Zonă pe tambur cu distrugeri reduse, cu faza $\alpha + \delta$ adînc striată la suprafaţă, atac cu clorură ferică, 125 :1.

Fig. 12. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/1} - \overline{B}_{15/1}$. Zonă pe tambur cu distrugeri accentuate, cu faza $\alpha + \delta$ fărîmiţată, atac cu clorură ferică, 125 : 1.

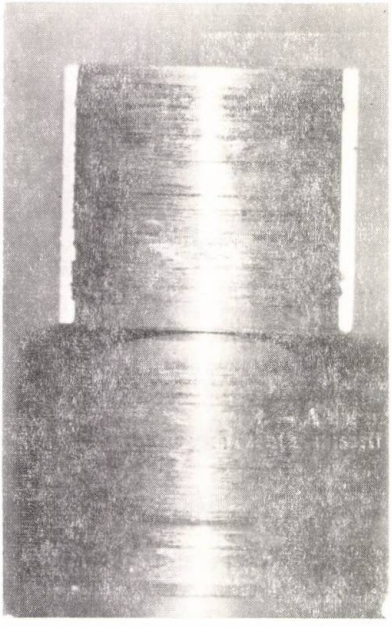


Fig. 13. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/2} - \overline{B}_{15/2}$. Microgeometrie specifică, 2,3 :1.

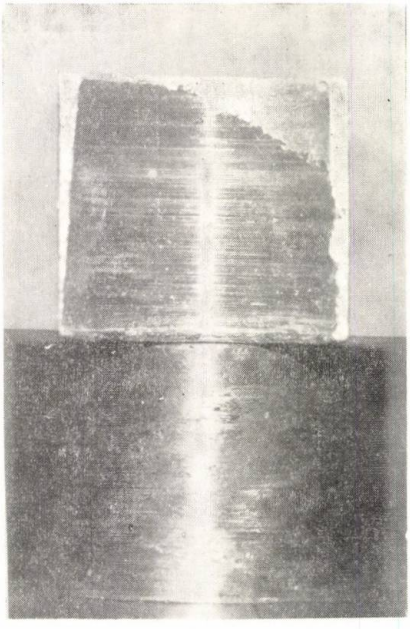


Fig. 14. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/8} - \overline{S}_{9}$. Microgeometria specifică, 2,3 : 1.

Fig. 15. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/8} - \bar{S}_9$. Aderențe de Y—Sn83 pe suprafața tamburului, de preferință pe faza $\alpha + \delta$, atac cu clorură ferică, 125 : 1.

Fig. 16. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/8} - \bar{S}_9$. Zonă pe tambur cu faza $\alpha + \delta$ striată ușor la suprafață, nedistrusă și fără aderențe de Y—Sn83, atac cu clorură ferică, 125 : 1.

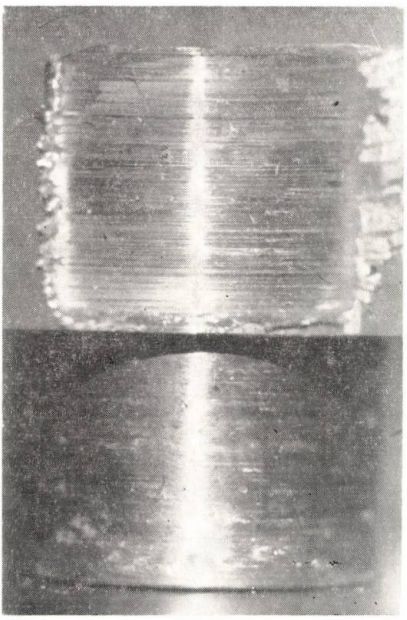


Fig. 17. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/9} - \bar{S}_{10}$. Microgeometrie specifică, 2,3 : 1.

Fig. 18. — Modelul $\overset{\circ}{B}_{15/9} - \bar{S}_{10}$. Aderență dură necorodabilă din Y — Sn83 pe tambur, cu acțiune așchietoare, 125 : 1,

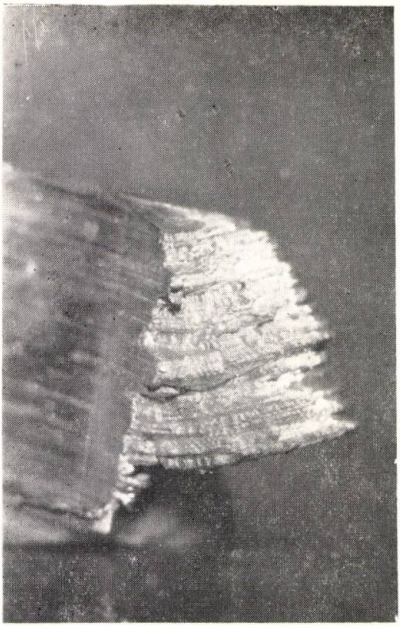


Fig. 19. — Modelul $\mathring{B}_{15/9} - \overline{S}_{10}$. Material expulzat din suprafaţa sabotului sub acţiunea aşchietoare a aderenţelor dure de pe tambur, 125 : 1.

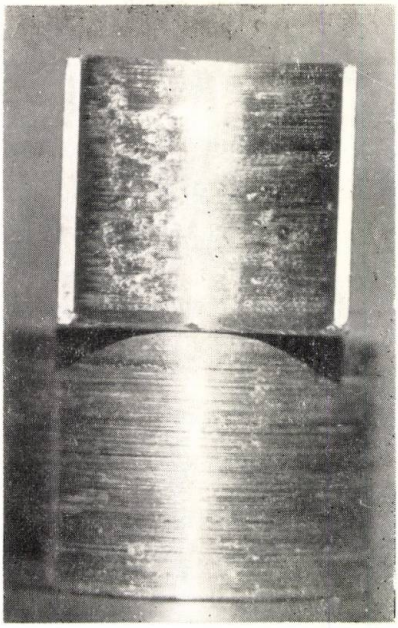


Fig. 20. — Modelul $\mathring{S}_3 - \overline{B}_{15/3}$. Microgeometria specifică, 2,3 : 1.

Fig. 21. — Modelul $\mathring{S}_3 - \overline{B}_{15/3}$. Material Y — Sn83 în strat superficial necorodabil aderent pe sabot, într-o zonă lipsită de aderenţe dure aşchietoare, atac cu Nital 5%, 125 : 1

față de următoarele valori obținute cu $P = 50$ g în masa materialului:

— în faza SnSb $H = 114$ kgf/mm^2, $I = 4.10^{-3}$ mm,
— în matricea eutectică $H = 21{,}4$ kgf/mm^2, $I = 9{,}3.10^{-3}$ mm,

în care I reprezintă adîncimea amprentei penetratorului de $\sphericalangle$ 136°.

Microduritatea în straturile lucioase este deci de același ordin de mărime cu a matricei eutectice, ceea ce înseamnă că, dacă sînt formate din fazele dure SnSb, Cu_6Sn_5, grosimea acestor straturi trebuie să fie mult sub 4.10^{-3} mm. Dimensiunile lamelelor de Cu_6Sn_5, dar mai ales a cuboizilor de SnSb din masa materialului, fiind însă mult mai mari, pentru a forma astfel de straturi ele trebuie să fie în prealabil aduse într-o stare avansată de fărîmițare. În figura 8, dar mai ales în figura 9, se constată o fină discontinuitate a straturilor necorodate, ceea ce poate fi interpretat în sensul că stratul constă din bucățele relativ mici și neregulate, asemănătoare cu fărîmiturile.

Fărîmițarea fazelor SnSb și Cu_6Sn_5 prin procesul de alunecare este sigură, deoarece, pe de o parte, niciunde în suprafața activă care a lucrat, ele nu mai pot fi constatate în forma și mărime din masa materialului, iar pe de altă parte bucățele din aceste faze se găsesc și pe fețele zimțate menționate mai sus. Fărîmițarea acestor incluziuni dure fiind certă, formarea straturilor necorodabile poate fi explicată prin analogie cu cazul întîlnit la oțeluri, unde constituentul dur și friabil este perlita [7]. Prin analogie cu acest caz, la un conglomerat cristalin format din incluziuni fragile și din faze tenace și deformabile plastic prin deformarea plastică a materialului, fazele tenace se alungesc în direcția solicitării. Prin aceasta, fazele dure pe care le includ sînt sfărîmate, iar fărîmiturile astfel rezultate sînt antrenate în mișcare și orientate sub formă de șiruri în direcția acestei mișcări.

În cazul de față, șirurile de fărîmituri rezultate de la cuboizii consecutivi și adiacenți de SnSb sau de la lamelele de Cu_6Sn_5 pot forma zonele lucioase de pe suprafețe, necorodabile, ca și substanța din care provin. Prin microanalize cu raze X a substanței care alcătuiește aceste straturi, s-ar putea obține, ținînd seama și de cele de mai sus, o elucidare mai completă a formării acestora. Prin astfel de mijloace s-ar putea obține de asemenea rezultate cu privire la compoziții în SnSb și Cu_6Sn_5 a acestor straturi. Pe cale optică nu s-au putut obține indicații nici cel puțin calitative în această privință, nici chiar cu lumină polarizată, deși SnSb cristalizează în sistemul cubic, iar Cu_6Sn_5 în cel ortorombic. Cauzele pot consta în grosimea redusă, forma neregulată și orientarea neavantajoasă a fărîmiturilor din aceste substanțe, care au condus, pentru nicoli încrucișați la diferite unghiuri, la diferențe de luminozitate nesezizabile prin observare directă.

Modelul similar $\mathring{B}_{15/1}-\overline{B}_{15/1}$ *din Bz14T.* Suprafața activă a tamburului și a sabotului se caracterizează prin striere puternică, faze de gripaj care se reflectă și în diagrama din figura 2. Aceste modificări ale suprafețelor s-au soldat și în acest caz cu detașări de material atît de pe tambur (—289,2 mg), cît și de pe sabot (—178,1 mg). Nu au putut fi constatate la scară macro aderențe de material pe una dintre suprafețe provenite din transferul de pe cealaltă. Punctele mai luminoase care se văd pe suprafața tamburului (fig. 10) sînt cavități de dimensiuni mici, din care par să fi fost smulse părticele de material printr-un proces de adeziune.

Microgeometria în suprafeţele de frecare se prezintă neregulat ca formă, mărime a striurilor şi distribuţia acestora pe suprafaţă. Sub raportul luciului metalic nu apar însă deosebiri mai pronunţate între zonele cu rugozităţi diferite şi nici pe feţele rizurilor mai mari. Aceasta arată că natura procesului de detaşare de material din suprafaţă a fost cam aceeaşi. Pe de altă parte, luciul metalic pronunţat ce caracterizează suprafaţa, precum şi lipsa de zimţuri orientate axial de la baza rizurilor, pledează în favoarea unui proces de aşchiere cu frecare intensă, specific proceselor de aşchiere a materialelor tenace şi relativ dure cu cuţitul uzat.

În ceea ce priveşte influenţa procesului de frecare asupra constituţiei structurale a materialului din suprafaţa activă, se constată că în zonele cu rugozitate mai fină faza eutectoidă dură $\alpha + \delta$ nu apare modificată ca formă (fig. 11). În zonele cu microgeometrie mai rugoasă, faza eutectoidă a fost fărîmiţată în bună măsură (fig. 12). Particulele din această fază care rămîn sînt însă relativ mari ($\sim 5.10^{-2}$ mm). Efectul cel mai important al acestui proces poate fi considerat distrugerea distribuţiei în formă de reţea (datorită conţinutului mare de Sn în aliaj şi a structurii parţial dendritice a matricii) a acestui constituent cu repercusiuni asupra rugozităţii din zonele respective.

Astfel se poate admite că în cazul unei structuri formate dintr-o matrice ductilă şi tenace cu distribuţie în reţea a fazei dure, în timpul procesului de alunecare sub sarcini mari, contactul se menţine la început la nivelul fazei dure, imaginată ca o structură de rezistenţă. Dacă aceasta nu se sfărîmă, detaşarea de material se face în mod relativ uniform în toată zona de contact, microgeometria rezultată fiind relativ fină. Dacă, datorită suprasarcinii, produselor de uzură, particulelor dure străine etc., faza dură este spartă şi sistemul de reţea distrus, procesul de frecare şi de uzură se intensifică brusc. Cauzele sînt creşterea presiunii de contact în zonele matricei, intensificarea acţiunii abrazive a fărîmiturilor de fază dură datorită muchiilor şi colţurilor mai ascuţite rezultate din spargere, schimbarea poziţiei şi orientării acestor bucăţele faţă de starea anterioară, precum şi creşterea ponderii matricei mai moi în aria reală de contact, deoarece sub formă ordonată de reţea faza dură conferă suprafeţei o rezistenţă mecanică mai mare. Acest dezechilibru începe, evident, local şi poate rămîne limitat ca extindere, ceea ce explică apariţia în suprafaţa de frecare a zonelor cu grad de distrugere şi, ca urmare, cu microgeometrii diferite. Cînd acestui proces i se suprapune şi acţiunea unei suduri de pe una dintre suprafeţe (pată albă de pe sabot, fig. 13), gradul de distrugere locală poate creşte în mod considerabil (canalul circular de pe tambur, fig. 13).

Mai trebuie remarcat că, în condiţiile lubrifierii cu apă şi sub sarcini relativ mari, faza eutectoidă $\alpha + \delta$ este rizată la suprafaţă (fig. 11) înainte de a fi distrusă reţeaua. De asemenea mai trebuie menţionat că, în condiţiile încercate, aliajul Bz14T nu a prezentat material adeziv proeminent (suduri) pe suprafeţele de lucru. Aceasta poate fi atribuit conductibilităţii termice mai ridicate, durităţii mai mari a matricei etc. în ceea ce priveşte formarea sudurilor, apoi acţiunii răzuitoare a fazei dure care a împiedicat dezvoltarea acestor suduri.

Microduritatea matricei-soluţie solide α în suprafaţa activă după atac cu clorură ferică a fost $H = 321$ kg/mm^2 faţă de $H = 281$ kgf/mm^2

în suprafața care nu a lucrat, ceea ce indică un oarecare grad de ecruisare a acestei faze. Măsurătoarea s-a efectuat sub sarcina $P = 150$ g.

Modelul disimilar $\mathring{B}_{15/8}-\overline{S}_9$ (*Bz14T — Y — Sn83*). În cazul materialelor disimilare, procesul de alunecare cu frecare de contact preponderentă se caracterizează mai întîi printr-o reducere a acțiunii adezive, în funcție de poziția în tabloul lui Mendeleev a elementelor din care este format cuplul de frecare, față de linia de separație Ni—Pd—Pt [3]. În cazul de față, Cu și Sn fiind situate de aceeași parte a liniei menționate, această reducere nu este prea importantă. În al doilea rînd, materialele încercate sînt aliaje complexe, în care Cu și Sn nu apar puse, iar un tablou Devies pentru aliaje și compușii chimici definiți nu se cunoaște. Factorii de previziune cu privire la comportarea în frecarea de contact a acestor două aliaje sînt deci destul de limitați.

Încercările de față au scos în evidență în această privință o comportare în condițiile tambur mobil din Bz14T — sabot fix din Y—Sn83, cu transport moderat de material din suprafața Y—Sn83 (modelul $\mathring{B}_{15/8}-\overline{S}_9$, fig. 14), și o comportare cu transport masiv de material Y—Sn83 din sabotul fix (modelul $\mathring{B}_{15/9}-\overline{S}_{10}$, fig. 17 și 19). Cauze de bază care au putut provoca această comportare diferită nu au fost constatate, ceea ce conduce la a admite, cel puțin deocamdată, că ambele comportări sînt posibile. Starea incipientă a procesului nu a putut fi decît aceeași în ambele cazuri. În consecință nu rămîne drept cauză a diferențierii decît regimul ulterior de funcționare, în timpul căruia într-un caz procesul de transport de material s-a stabilizat la un nivel scăzut, iar în al doilea intensitatea procesului de distrugere a suprafeței a crescut mai mult, stabilizîndu-se la un nivel ridicat. Atribuind drept cauze ale dezvoltării fazei incipiente de distrugere la nivele diferite fenomene întîmplătoare, acestea nu se pot produce în mod cu totul independent de proprietățile materialelor. Comportarea în ambele cazuri ar putea fi considerată deci proprie acestei perechi de materiale, iar rezultatele analizării procesului drept limite în care pot varia parametrii respectivi examinați.

Comportarea la alunecare a cuplului disimilar Bz14T—Y—Sn83 se caracterizează prin fenomene adezive, preponderent într-o singură direcție, și anume Y—Sn83 pe Bz14T. În cazul tamburului $\mathring{B}_{15/8}$, suprafața de lucru este acoperită în proporție de aproximativ 40% cu pete din Y—Sn83, neuniforme ca formă, mărime, distribuție și grosime a stratului. Pe unele din aceste pete aderă grăunți mici și proeminenți din același material Y—Sn83, care pot fi considerate „cuțite" care acționează aşchietor asupra suprafeței sabotului. Structura în suprafața tamburului cu microgeometrie mai fină și neacoperită cu Y—Sn83 se prezintă normal, cu faza $\alpha + \delta$ distribuită în rețea (fig. 16). În figura 15 este arătată o zonă cu pată și cu grăunți aşchietori din Y—Sn83, zonele negricioase din fotografie reprezentînd matricea aliajului Bz14T, corodată prin atac cu clorură fenică. Y—Sn83 și eutectoidul $\alpha + \delta$ nefiind atacați de acest reactiv, figura 15 arată că Y—Sn83 aderă selectiv pe Bz14T în ceea ce privește constituenții de structură, în cazul de față apărînd perferința de sudură pe faza eutectoidă. Este cert că acest proces a fost favorizat de presiunile mai mari existente la nivelul fazei eutectoide în poziție proeminentă din suprafață, precum și temperaturii eutectoide relativ joase (~30°C) a acestei faze.

În cazul tamburului $\mathring{B}_{15/9}$, aderențele de Y—Sn83 prezintă aceleași particularități, grăunții din acest ultim material fiind însă mult mai mari. În figura 18 se arată un astfel de grăunte-cuțit, care poate fi considerat drept o formă dezvoltată a grăunților semnalați pe suprafața tamburului $\mathring{B}_{15/8}$. Mărimea acestora și distribuția lor pe toată suprafața tamburului trebuie considerate drept cauze ale transportului mai masiv de material din suprafața sabotului $\overline{S}_{10}$.

În ceea ce privește natura petelor și a grăunților de Y—Sn83 de pe suprafețele tamburilor din Bz14T, s-a constatat că acestea nu sînt corodate nici prin atac cu Nital 5%, nici cu clorură ferică. Pe de altă parte, microduritatea unui astfel de cuțit s-a constatat a fi $H \cong 192$ kgf/mm^2 în condiția cu sarcina $P = 150$ g, fiind cuprinsă între 114 a fazei SnSb și 421 a fazei Cu_6Sn_5 [4]. Încercarea la apăsare a dovedit de asemenea o mare friabilitate a materialului care formează aceste cuțitașe. Ambele probe pledează deci pentru ipoteza că sudurile de Y—Sn83 de pe tambur constau în cea mai mare parte din fazele dure SnSb și Cu_6Sn_5.

O comportare analogă prezintă această pereche de materiale și în cazul funcțiilor inversate ale suprafețelor, și anume cu tamburul mobil din Y—Sn83 și sabotul fix din Bz14T (modelul $\mathring{S}_3$—$\overline{B}_{15/3}$). Diferențele de comportare depind în acest caz de proprietățile termice, de ecruisare etc. ale materialelor. Încercările de față arată în general forme adezive analoge de Y—Sn83 pe suprafața sabotului din Bz14T (fig. 20), care, acționînd abraziv asupra tamburului, au provocat detașări de material din suprafețele active într-un raport asemănător modelului $\mathring{B}_{15/8}$—$\overline{S}_9$. În figura 21 se arată o zonă a suprafeței sabotului cu aderențe de Y—Sn83, care prezintă aceleași proprietăți anticorosive și de microduritate ca și în cazul tamburului $\mathring{B}_{15/8}$. În ceea ce privește caracteristicile generale ale microgeometriei, microdurității și ale structurii, nu au putut fi constatate, cu mijloacele de investigație folosite, deosebiri esențiale în cazul suprafeței tamburului $\mathring{S}_3$ și a sabotului $\overline{S}_9$.

Interpretarea dată mai sus fenomenelor de contact în cazul suprafețelor din materiale similare și disimilare poate sta la baza explicării, cel puțin în parte, a perioadelor de funcționare cu gripaj și a celor cu procesul de uzură relativ stabilizat, constatate în cazul figurilor 1, 2 și 3, cu materiale similare, precum și a probabilității reduse de producerea gripajului în cazul perechii disimilare S—Bz14T.

Astfel, în cazul perechii din același material Bz14T, producerea dezechilibrului în procesul de uzură este condiționată de spargerea rețelei fazei eutectoide $\alpha + \delta$. Factorii care provoacă această distrugere (particule străine, produse proprii de uzură etc.), acționează însă în mod întîmplător, imprimînd și apariției în timp a fenomenului același caracter. Încetarea stării de gripaj și trecerea la perioada de funcționare cu uzură relativ stabilizată implică un proces de detașare de material pînă la apariția din nou în suprafață a rețelei de eutectoid. Această detașare va trebui însă să fie fină pentru a nu se continua distrugerea rețelei noi în dezvelire. Restabilirea echilibrului termic, trecerea în alte zone devenite proeminente a vîrfurilor de presiuni, fărîmițarea părticelelor de eutectoid într-un grad mai mare etc. pot fi considerați factorii care activează moderator în această fază și care favorizează încetarea gripajului local.

La structurile cu incluziuni dure de tipul Y—Sn83, formarea zonelor cu strat superficial lucios din SnSb și Cu_6Sn_5 poate fi considerată ca un proces de separare a fazelor de structură. Cînd contactul se produce între două zone formate din aceeași fază de structură, procesul adeziv este mai intens și devine mai slab în cazul contactului constituenților de natură diferită. De asemenea la aceeași sarcină exterioară aria reală de contact în cazul fazelor moi fiind mai mare, procesul adeziv este la fel mai intens. Se poate deci presupune că gripajul se amorsează cînd în zona de contact predomină matricea moale eutectică și încetează cînd ponderea cea mai mare în zona contactului o au materiale disimilare (faza dură — faza moale). Același efect îl poate produce și contactul numai din fazele dure, deoarece, avînd temperatura de topire mult mai ridicată (SnSb 425°C [2], Cu_6Sn_5 ... 640°C [1] față de eutecticul α ... 230°C [4]), la 230°C proprietățile lor mecanice sînt încă neafectate și deci procesul de adeziune este mai puțin intens. Factori întîmplători în apariția și încetarea în timp a gripajului pot fi particule adezive străine și proprii, neomogenitatea ca formă, mărime și distribuție a fazelor dure SnSb și Cu_6Sn_5 etc.

Sudurile dure din Y—Sn83 formate pe suprafețele din Bz14T pot varia în anumite limite ca formă, mărime și distribuție, dar, păstrîndu-și poziția proeminentă, procesul de așchiere al acestora nu se poate modifica decît ca intensitate. Un proces de așchiere este însă însoțit în general numai de generare de căldură și ecruisări [8] în stratul de suprafață, efecte care variază numai în limitele parametrilor exteriori ai așchierii însăși. În consecință, apariția unui dezechilibru, a unor salturi în cantitatea de material detașat nu pare posibilă, ceea ce explică și lipsa variațiilor mari accidentale a forței de frecare în cazul figurilor, 4, 5 și 6 pentru perechea de materiale disimilare S—Bz14T.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Schmid, R. Weber, *Gleitlager*, Springer Verlag, Berlin, 1953, p. 109.
2. M. Hausen, *Constitution of Binary Alloys*, McGraw-Hill, New York, 1958, p. 634.
3. Ch. Lipson, L. V. Colwell, *Handbook of Mechanical Wear*, Michigan, 1961, p. 7.
4. Gh. Vasilca, O. Bită, *Procese de lubrifiație, frecare și uzură la suprafețele metalice*, Edit. Academiei, București, 1967.
5. Gh. Vasilca, V. Raszillier, *Gesichtspunkte zur Charakterisierung der spezifischen Mikrogeometrie von geschmierten Reibungsflächen*, Vortrag zum 9. Internationalen Symposium „Schmierstoffe und Lagertechnik", Leipzig, Aug. 1967.
6. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford, 1964, Part. I.
7. H. Schumann, *Metalurgie fizică*, Edit. tehnică, București, 1962, p. 261.
8. J. J. Caubet, *Théorie et pratique industrielle du frottement*, Technip — Dunod, Paris, 1964, p. 96.

ASPECTE EXPERIMENTALE ALE INFLUENȚEI MEDIULUI LUBRIFIANT ASUPRA REZISTENȚEI LA OBOSEALĂ A OȚELULUI DE RULMENȚI

de OLGA BIȚĂ și I. DINCĂ
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

621.89

Modificarea sistemului cu patru bile în așa fel încît cele trei bile inferioare pot fi antrenate liber de către bila motoare într-o mișcare combinată de rostogolire și alunecare permite urmărirea efectelor uzurii de oboseală superficială care apar în acest caz în zonele unde predomină frecarea de rostogolire.
Cîteva observații experimentale obținute în aceste condiții subliniază rolul important pe care îl joacă proprietățile fizico-chimice ale mediului lubrifiant în evoluția procesului de oboseală superficială a oțelului de rulmenți.

Pentru studierea comportării diverselor medii lubrifiante indicate în lubrificația suprafețelor de frecare sever solicitate, precum și a altor factori care influențează acest proces, se poate folosi, printre alte dispozitive de investigație experimentală [1], mașina cu patru bile, așa cum a fost prezentată într-o lucrare anterioară [2].

După cum s-a arătat, în acest caz între bila mobilă și cele trei bile fixe se creează condițiile unei mișcări de alunecare, materializată pe bila mobilă printr-o urmă inelară, iar pe cele trei bile fixe prin amprente circulare cu diametre identice. În funcție de lățimea amprentei de pe bila mobilă, de mărimea diametrului amprentelor de pe bilele fixe și de aspectul lor, se poate urmări comportarea diverselor medii lubrifiante din punctul de vedere al calităților lor antiuzură și antigripante.

Funcționarea acestui model experimental în condiții de alunecare pură la sarcini excesive nu permite însă urmărirea selectivă a proceselor de distrugere în timp a suprafețelor prin oboseală superficială. Prin urmare, cercetarea diverșilor factori legați de lubrificația suprafețelor metalice în contact punctiform și supuse unor condiții de funcționare mai apropiate de cele întîlnite la modelele reale capătă o importanță din ce în ce mai mare.

În literatura de specialitate se întîlnesc foarte des lucrări teoretice și experimentale care contribuie, într-o măsură mai mare sau mai mică, la înțelegerea aspectelor legate de studierea fenomenelor care apar la contactul punctiform al suprafețelor în mișcare de rostogolire [3]—[7] ș.a.

S-a arătat astfel că în timpul contactului de rostogolire proprietățile filmului de lubrifiant, în special cele reologice și termochimice, pot influența, printre alți factori (grosimea filmului și temperatura de contact), și geometria acestuia, jucînd un rol important în procesul de frecare de rostogolire. În plus, s-a constatat că în condiții dinamice geometria de contact a două elemente de rostogolire este foarte diferită de cea calculată pentru condiții statice și că variațiile cantitative ale concentrațiilor tensiunilor interne în suprafața metalului depind — în afară de presiunile specifice de contact, de numărul și de frecvența solicitărilor, de dimensiunile, forma și proprietățile mecanice ale suprafețelor în contact — și de natura lubrifiantului care separă aceste suprafețe.

Pentru a stabili tendințele acestor tensiuni interne în zona contactului de rostogolire, s-a impus deci studierea atît a profilului acestui contact, cît și a grosimii filmului lubrifiant în condiții de funcționare cît mai apropiate de cele reale, deoarece s-a observat că orice schimbare a acestora poate provoca modificarea tensiunilor interne ale materialelor în zona de contact, influențînd mecanismul distrugerii lor prin oboseală superficială.

În ceea ce privește rolul viscozității, este cunoscută ipoteza că procesul de lubrificație în zona de contact cu frecare de rostogolire se bazează pe faptul că această proprietate importantă a lubrifianților poate varia de la un mediu la altul și că se poate modifica în funcție de presiune, temperatură și gradient de viteză. Ca urmare, viscozitatea poate altera forma de distribuție a tensiunilor în zona de contact prin efecte elastohidrodinamice.

Unii cercetători însă [5] au arătat că în timp ce modificările fizico-chimice ale lubrifiantului pot influența grosimea filmului în zona de contact, ele nu pot schimba sensibil mărimea acestei zone față de aceea presupusă prin aplicarea teoriei simple a lui Hertz. Rezultă deci că distribuția tensiunilor superficiale în zona de contact în prezența filmului lubrifiant elastohidrodinamic depinde de proprietățile lubrifiantului, dar fenomenele locale sînt mult mai complexe, influențînd concentrarea gradienților de tensiune cu urmări negative asupra rezistenței la oboseală superficială a materialului.

În ceea ce privește influența naturii chimice a mediului lubrifiant în frecarea de rostogolire, s-a arătat de către mai mulți cercetători [5], [7] că pînă în prezent acestui aspect i s-a acordat o atenție mai redusă, deși sînt bine cunoscute efectele coroziunii asupra rezistenței la oboseală a suprafețelor metalice, mai ales în prezența microfisurilor. Rezultă că, în prezența acestor microdefecte superficiale, diverse medii lubrifiante pot schimba prin efect chimic momentul de amorsare a microfisurilor și, ulterior, viteza lor de creștere. Acest atac corosiv apare deci ca o chemisorbție sau reacție chimică superficială, localizată în punctele de concentrare a tensiunilor presupunînd existența imperfecțiunilor locale, care însă ar putea contribui la apariția ciupiturilor (*pitting*) chiar în absența acestor medii active din punct de vedere chimic.

O acțiune similară cu același efect de pană asupra microfisurilor s-a constatat și la substanțele cu polaritate ridicată, care de multe ori pot acționa mai intens chiar decît cele corosive.

În lucrarea de față se prezintă cîteva observații experimentale privind influența proprietăților fizico-chimice ale mediului lubrifiant în

cazul unei mișcări combinate rostogolire și alunecare. În această primă etapă a studiului s-a neglijat influența factorului termic din zona de contact, considerînd valabilă concluzia prezentată în lucrarea [5], în care, pe baza rezultatelor experimentale obținute, se arată că tensiunile termice datorate gradienților locali de temperatură pot avea numai o importanță secundară în mecanismul oboselii superficiale a suprafețelor în contact; în cazul de față, în legătură cu reactivitatea aditivilor de extremă-presiune.

Rolul lubrifiantului în acest proces s-a urmărit prin cercetarea modificărilor suferite de suprafețele metalice în zonele de contact prin metode de investigație modeste (microscopic) și ilustrate fotografic. Frecarea în zonele de contact a fost destul de mică, astfel încît o diferențiere calitativă a mediilor lubrifiante cu ajutorul coeficientului de frecare sau al căldurii generate în acest proces nu a fost posibilă. Tot din această cauză nu a fost posibilă nici stabilirea aportului fiecărui tip de frecare în procesul complex întîlnit în acest caz.

APARATURA ȘI CONDIȚIILE EXPERIMENTALE

Pentru cercetarea propusă s-a folosit dispozitivul cu patru bile căruia i s-au schimbat condițiile de funcționare, și anume s-au lăsat să se miște liber cele trei bile care se găsesc în cuva cu mediul lubrifiant. Restul instalației împreună cu aparatura anexă folosită au rămas neschimbate, așa cum au fost prezentate într-o lucrare anterioară [2]. Ca urmare a acestui montaj, mișcarea de rotație a bilei montate în capul axului motor și solidară cu acesta (O) antrenează bilele mobile din cuvă într-o mișcare planetară.

Astfel, fiecare dintre cele trei bile din cuvă (1, 2, 3) se rotește atît în jurul unui ax propriu (II′—II) perpendicular pe cele trei planuri paralele determinate de amprentele circulare *aa″*, *bb′*, *cc′* de pe bila respectivă, cît și în jurul axului cuvei (I—I′) (fig. 1*b*).

În consecință, în dinamica actuală a sistemului cu patru bile apar forțe de frecare combinate: de rostogolire și de alunecare.

Fără a pune deocamdată problema determinărilor cantitativ selective privind ponderea cu care intervine în sistem fiecare fel de frecare, se poate face totuși o diferențiere calitativă din simpla interpretare a reprezentărilor schematizate din figura 1. Astfel, urmărind figura 1*b*, în care sînt proiectate plan amprentele de uzură, este evident că amprenta *a′a* de pe bila motoare și amprentele *aa″* și *cc′* de pe bilele mobile se datoresc în mare parte frecării de rostogolire, iar amprentele *bb′* sînt rezultatul frecării de alunecare relativă dintre ele.

Se impune precizarea că amprentele *a′a* și *aa″* se datoresc efectului combinat al mișcării de rostogolire și de alunecare, prima avînd însă ponderea majoră, după cum se va vedea mai departe.

Din punctul de vedere al cercetării de față, folosind dispozitivul cu patru bile în acest montaj pentru studierea fenomenelor specifice care apar la funcționarea bilelor de rulmenți și a efectelor lubrifiantului asupra uzurii în timp a materialului, amprentele *bb′* sînt neinteresante. Totuși, ele pot fi urmărite pentru a completa imaginea privind eficacitatea acelorași lubrifianți și în cazul contactului punctiform de alunecare.

Elementele geometrice ale sistemului de bile prezentat schematic în figura 1*a* au fost: $\varnothing_{\text{bilă oțel}} = 12{,}7$ mm (STAS), $\varnothing_{\text{cuvă}} = 27{,}4$ mm, iar parametrii funcționali folosiți în cazul încercărilor de față: viteza de rotație a bilei motoare $n_m \cong 1\,050$ rot/min ($v_m \cong 40$ cm/s), rezultînd pentru fiecare dintre cele trei bile antrenate o viteză de rotație în jurul axului propriu (II—II'), $n_a \cong 680$ rot/min ($v_a \cong 40$ cm/s), și viteza de rotație a celor trei bile antrenate în jurul axului de simetrie al sistemului $n_0 = 280$ rot/min ($v_0 \cong 18$ cm/s).

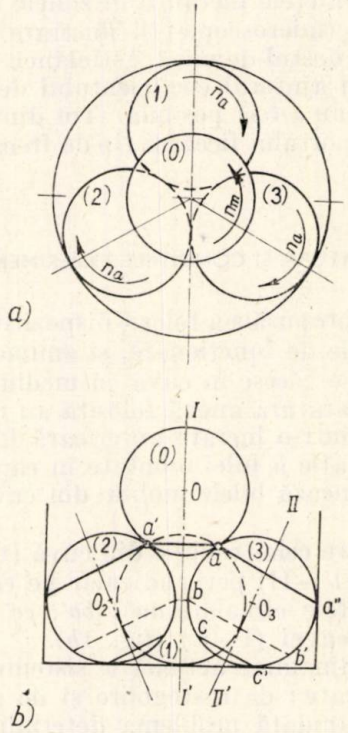


Fig. 1. — Reprezentarea schematică a ansamblului funcțional cu patru bile: *a* — vedere de sus; *b* — proiecție în planul axului de rotație al sistemului.

Sarcina totală aplicată a fost menținută constantă, $P = 100$ kgf ($P_{max} \cong 460$ kgf/mm^2, corespunzînd unei presiunii medii $p_{med} \cong 310$ kgf/mm^2). Temperatura inițială a mediului lubrifiant a fost identică pentru toate încercările, t=50°C, realizată cu ajutorul unui sistem de termostatare [2].

Timpul de lucru a fost de 45 de ore, fiind menținut de asemenea constant pentru toate mediile lubrifiante urmărite, și a corespuns unui număr de aproximativ 2,8 milioane de rotații. Deoarece pentru fiecare rotație a axului bila motoare primește trei cicluri de tensiuni la contactul cu cele trei bile inferioare (amprenta *a'a*, fig. 1*b*), aceasta va primi în 45 de ore un număr de aproximativ 8,4 milioane de cicluri de tensiuni.

În această etapă s-a urmărit comportarea, în condițiile de lucru prezentate mai sus, a unui ulei mineral (413) neaditivat și aditivat cu 2% MG (aditiv E.P.) și a unei unsori minerale (RUL 145) neaditivată și cu un adaos de 10% MoS_2.

OBSERVAȚII EXPERIMENTALE

După cum s-a spus în partea introductivă a lucrării, acțiunea mediului lubrifiant asupra comportării la oboseală superficială a suprafețelor din oțel în zona în care predomină frecarea de rostogolire s-a cercetat cu ajutorul microscopului metalografic și a fost evidențiată prin fotografiere.

S-a ales pentru ilustrare amprenta *a'a* obținută pe bila motoare (fig. 1*b*). Rațiunea acestei alegeri s-a datorat faptului că această bilă primește pentru același timp de funcționare de trei ori mai multe cicluri de tensiuni față de oricare dintre cele trei bile pe care le antrenează. În consecință, efectele frecării de rostogolire vor fi mult mai vizibile pe această amprentă.

În plus, condițiile de funcționare ale acestei bile motoare permit o analogie a acesteia cu calea de rulare din inelul unui rulment. Această analogie funcțională prezintă avantajul că oferă posibilitatea studierii comportării rulmenților pe acest model simplu de laborator și obținerea de date experimentale în condiții apropiate celor reale.

Figurile 2 și 3, în care sînt prezentate cele două amprente obținute pe bila motoare (fig. 2) și, respectiv, pe o cale de rulare (fig. 3) [3], ilustrează caracterul asemănător al uzurii de oboseală superficială al celor două suprafețe și poate constitui un argument în plus în favoarea analogiei propuse.

După cum se vede din figura 4, care reprezintă amprenta *aa''* (fig. 1*b*), în afara ciupiturilor caracteristice oboselii superficiale mai sînt vizibile și dîrele de alunecare rezultate din contactul bilei inferioare cu suprafața interioară a cuvei. Se observă însă că uzura de contact rămîne destul de redusă.

Frecarea de alunecare care apare la contactul dintre cele trei bile inferioare în mișcare liberă (amprentele *bb'*, fig. 1*b*) s-ar părea că este ceva mai evidentă numai în cazul mediilor lubrifiante neaditivate pentru extremă presiune, după cum se observă din figura 5.

S-a prezentat această observație numai ca un exemplu al frecării de alunecare pură ce se poate obține și în cazul sistemului de bile în mișcare liberă, acest aspect nefiind urmărit în mod special în lucrare.

Revenind la amprentele obținute pe bilele motoare, figurile 2 și 6—8 sînt destul de edificatoare în ceea ce privește influența naturii filmului lubrifiant asupra evoluției proceselor de oboseală superficială.

Se remarcă din aceste fotografii efectul favorabil al filmelor solide obținute pe suprafața de lucru a oțelului fie prin reacție chimică în prezența aditivilor E.P. (fig. 6), fie prin simpla aderare a particulelor de lubrifiant solid (fig. 8) în comparație cu cele formate în prezența acelorași medii lubrifiante neaditivate (fig. 2 și 7).

În ceea ce privește influența pozitivă a aditivului E.P., observația de mai sus pare puțin surprinzătoare, deoarece, după cum s-a mai spus, este cunoscut efectul negativ al substanțelor active din punct de vedere chimic asupra microdefectelor superficiale, prin sporirea prin efect de pană a acțiunii lubrifiantului în microfisurile preexistente rezultate la prelucrarea suprafețelor. La folosirea bilelor de rulmenți însă, al căror proces de finisare este foarte pretențios și conduce la formarea de suprafețe foarte netede și lipsite de microfisuri, *pitting*-ul este determinat mai ales de fenomenele de micșorare a durității și de mărire a volumului specific de material la o oarecare adîncime sub zona de contact.

În cazul de față deci se pare că reactivitatea chimică a aditivului E.P. (dialchilditiofosfat de zinc și parafină clorurată) în zona cu regim termic ridicat a avut ca urmare netezirea și mai bună a suprafețelor cu îndepărtarea microdefectelor care ar mai fi putut rezulta prin procesul de finisare a bilelor. În consecință, prezența acestui aditiv pe suprafețele de lucru ale rulmentului micșorează aportul participării efectului de pană la apariția ciupiturilor.

În plus, prezența straturilor aderente, solide și compacte, formate prin acțiunea aditivilor E.P., care tapetează suprafața metalică, contribuie la amortizarea șocurilor ciclice de tensiuni primite în zona de contact și care se transmit materialului din straturile superficiale imediat inferioare, determinînd o repartiție spațială a tensiunilor în această zonă mai puțin favorabilă dislocării materialului prin ciupituri. Așa cum s-a precizat anterior, aceste tensiuni ciclice constituie cauza principală a apariției *pitting*-ului.

În cazul folosirii lubrifianților solizi (MoS_2), efectul pozitiv al acestora se manifestă, pe de o parte, printr-o acțiune similară produselor solide de reacție obținute în prezența aditivilor E.P., aceea de strat amortizor de tensiuni, iar pe de altă parte prin umplerea sau blocarea microfisurilor superficiale preexistente, îmbunătățind astfel continuitatea suprafețelor.

În ceea ce privește comportarea unsorii minerale, se remarcă din figura 7 o mărire a rezistenței la oboseală a suprafeței supuse frecării de rostogolire față de cazul în care aceasta a lucrat în prezența uleiului 413 neaditivat (fig. 2), dar rămîne mai redusă față de acela în care a lucrat în prezența aditivului E.P. sau a MoS_2.

Stratul protector format de unsoarea consistentă folosită a avut o eficacitate mai redusă decît produsele de reacție ale aditivului E.P. (săruri anorganice solide) și decît lubrifiantul solid, aceasta ca urmare a posibilității de înmuiere a săpunului metalic datorită regimului termic local relativ ridicat. Ca urmare, acțiunea de protecție la oboseală superficială a suprafețelor metalice în prezența unsorii consistente a fost sensibil redusă.

Cel mai intens fenomen distructiv prin ciupituri s-a observat în prezența uleiului 413 neaditivat. Degradarea materialului s-a datorat acțiunii simultane atît a efectului de pană al stratului lichid de lubrifiant asupra microfisurilor superficiale, cît și a modificărilor de duritate în zona de contact. În acest caz nu s-a putut obține realizarea continuității și protecția suprafețelor prin efecte de dizolvare sau de tapetare cu compuși

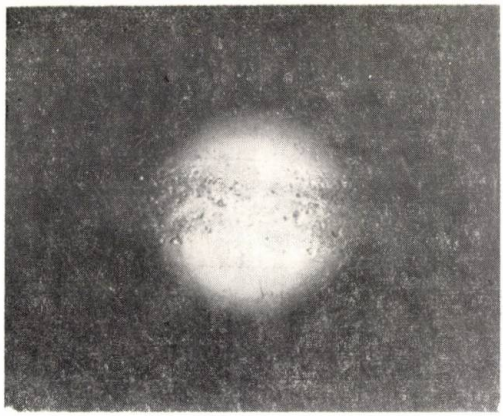


Fig. 2. — Amprenta obținută pe bila motoare în prezența uleiului 413 neaditivat (× 20).

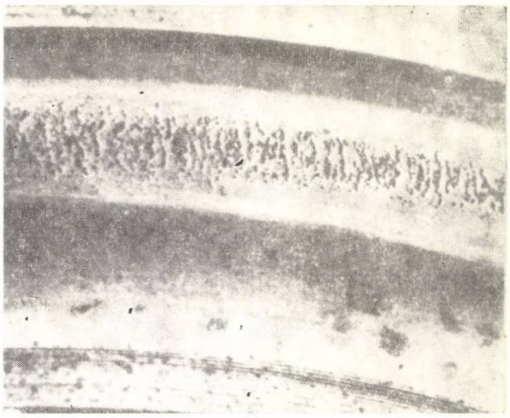


Fig. 3. — Amprenta obținută pe calea de rulare a unui inel de rulment [3] (× 20).

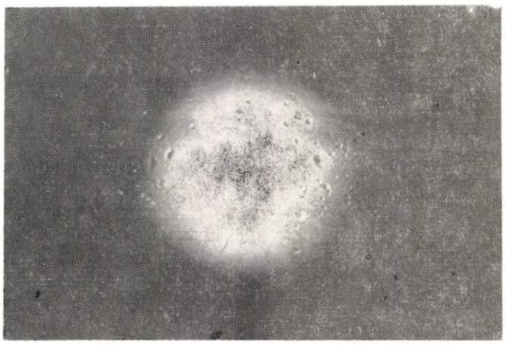
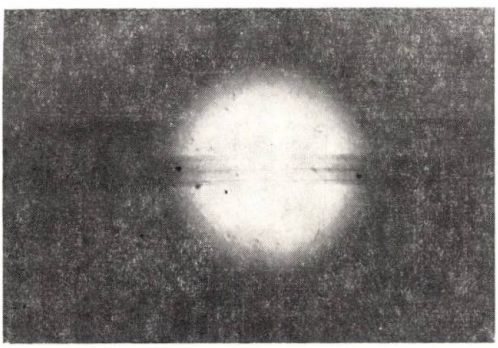


Fig. 4. — Amprenta *aa''* obținută pe una dintre bilele antrenate în prezența uleiului 413 (× 20).



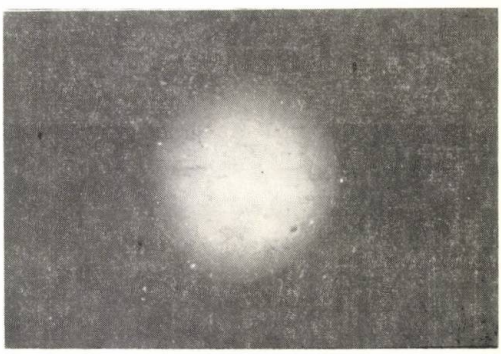


Fig. 5. — Amprentele *bb'* obținute pe bilele antrenate (× 20) : *a* — în prezența uleiului 413 ; *b* — în prezența uleiului 413 + 2 % M.G.

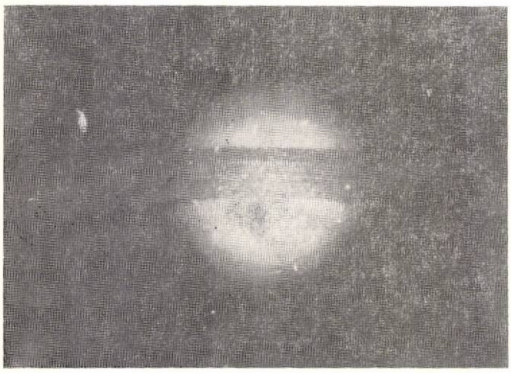


Fig. 6. — Amprenta obţinută pe bila motoare în prezenţa uleiului 413 + 2% M.G. (× 20).

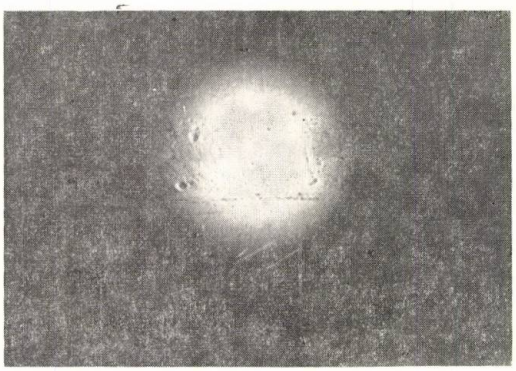


Fig. 7. — Amprenta obţinută pe bila motoare în prezenţa unsorii RUL 145 (× 20).

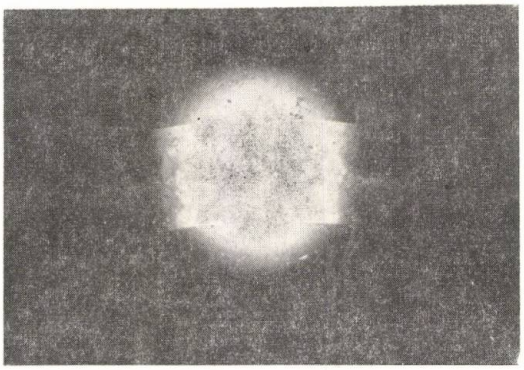


Fig. 8. — Amprenta obţinută pe bila motoare în prezenţa unsorii RUL 145+10% MoS_2 (× 20).

solizi, existînd condiții favorabile de manifestare simultană a ambelor posibilități de amorsare a procesului de oboseală superficială, cu degradarea mult mai intensă a suprafețelor.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Pavelescu, *Cu privire la aparatura experimentală destinată studiilor de frecare și uzură*, St. cerc. mec. apl., **22**, *4* (1966).
2. Olga Biță, I. Dincă, *Asupra influenței viscozității în lubrificația la sarcini ridicate*, St. cerc. mec. apl., **21**, *4* (1966).
3. B. I. Kosteţki, *Rezistența la uzură a organelor de mașini* (trad. l. rusă), Mașghiz, Moscova, 1959.
4. L. B. Sibley, F. K. Orcutt, *Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling-Contact Surfaces*, ASLE Trans., **4**, *2* (1961).
5. E. V. Zaretski, L. B. Sibley, W. J. Anderson, *The Role of Elastohydrodynamic Lubrication in Rolling-Contact Surfaces Fatigue*, ASME Trans., Serie D, *9* (1963).
6. J. C. Bell, J. W. Kamel, C. M. Allen, *The Rheological Behavior of the Lubricant in Contact Zone of Rolling Contact System*, ASME Trans., Serie D, *9* (1964).
7. G. I. Reichenbach, W. D. Syniuta, *An Electron Microscope Study of Rolling Contact Fatigue*, ASME Trans., Serie D, *8* (1965).

UTILIZAREA CALCULATOARELOR ELECTRONICE ÎN CALCULUL STATIC AL STRUCTURILOR FORMATE DIN BARE

de S. RĂUTU şi V. BĂNUŢ
Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România

539.4

În lucrare sînt prezentate metodele de calcul utilizate în cadrul Centrului de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România pentru rezolvarea structurilor static nedeterminate cu ajutorul calculatoarelor electronice. Calculul static adaptat pentru a fi introdus în maşinile electronice este prezentat sub formă matriceală.

Introducerea calculatoarelor electronice pentru calculul structurilor static nedeterminate apare ca o necesitate în proiectare şi cercetare. Această acţiune se desfăşoară pe două căi diferite, şi anume :

— elaborarea de algoritme de calcul pentru anumite tipuri de structuri (grinzi cu zăbrele, grinzi continue);

— elaborarea de algoritme de calcul pentru metodele generale de calcul ale staticii construcţiilor.

Prima modalitate este eficientă pentru institutele de proiectare specializate, iar a doua, mai generală, prezintă avantajul de a se putea utiliza pentru orice tip de structură şi este specifică institutelor de cercetare şi de proiectare cu profil larg.

În cadrul Centrului de mecanică a solidelor s-a urmărit să se elaboreze o metodă generală de calcul care să permită abordarea problemelor ce se pun activităţii de cercetare şi de proiectare. În acest sens s-au pus bazele a două metode de lucru, corespunzătoare celor două metode clasice ale staticii construcţiilor — metoda eforturilor şi metoda deplasărilor —, toate calculele fiind prezentate sub formă matriceală.

A. *Metoda eforturilor* a fost utilizată sub formă matriceală în lucrarea [1] pentru calculul grinzilor cu zăbrele care alcătuiesc structura de rezistenţă a aripii de avion.

În continuare se prezintă metoda de calcul pentru structurile static nedeterminate formate din bare la care efectul predominant este încovoierea, utilizînd calculul matriceal.

Sistemul de ecuații de condiție al metodei eforturilor în forma obișnuită este

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n. \tag{1}$$

În transcriere matriceală, acest sistem de ecuații se poate exprima prin ecuația matriceală

$$[C] \cdot [X_j] + [P] = 0, \tag{2}$$

în care

$[C]$ este matricea coeficienților necunoscutelor avînd $n \times n$ elemente;

$[X_j]$ — matricea vector a necunoscutelor avînd n elemente;

$[P]$ — matricea termenilor liberi. În cazul unei singure solicitări, matricea $[P]$ este o matrice vector cu n elemente, iar în cazul a s tipuri de solicitări matricea are s coloane.

Problemele principale ce se pun în rezolvarea pe această cale sînt:

1) stabilirea expresiei matriceale a coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi;

2) căile de simplificare a calculului acestor elemente și deci reducerea volumului de lucru în faza inițială.

1. Coeficienții necunoscutelor în metoda eforturilor se obțin ca rezultat al integrării unor diagrame unitare cu variație liniară (cu excepția barelor curbe). Scrierea matriceală a acestor integrale se face în modul următor. Fie diagramele din figura 1.

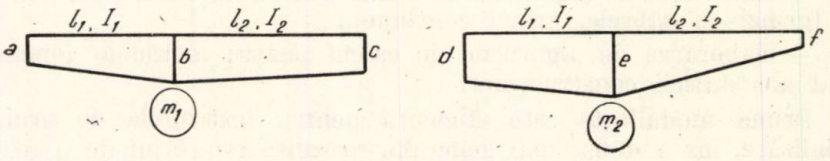


Fig. 1

Integrarea diagramelor m_1 și m_2 se poate scrie

$$\int \frac{m_1 \cdot m_2}{EI}\, dx = [m_1'] \cdot [A] \cdot [m_2], \tag{3}$$

unde

$$[m_1] = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad [m_2] = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}, \quad [A] = \frac{1}{6EI_0} \begin{bmatrix} 2l_1 \frac{I_0}{I_1} & l_1 \frac{I_0}{I_1} & 0 \\ l_1 \frac{I_0}{I_1} & 2\left(l_1 \frac{I_0}{I_1} + l_2 \frac{I_0}{I_2}\right) & l_2 \frac{I_0}{I_2} \\ 0 & l_2 \frac{I_0}{I_2} & 2l_2 \frac{I_0}{I_2} \end{bmatrix}.$$

Din modul de calcul prezentat mai sus rezultă că pentru integrarea a două diagrame liniare sînt necesare matricele $[m]$, care cuprind momentele în punctele caracteristice (capete de bară și schimbări de pantă), și matricea flexibilităților $[A]$, care depinde de elementele geometrice și de rigiditate ale barelor structurii.

Se observă de asemenea că matricea $[A]$ este o matrice de tip Iacobi, avînd ca elemente diferite de zero cele de pe diagonala principală și elementele care o încadrează la stînga și la dreapta.

Pentru cazul general al unei structuri de n ori static nedeterminată avînd p puncte caracteristice, matricea coeficienților necunoscutelor $[C]$ este

$$[C] = [m_i'] \cdot [A] \cdot [m_i], \tag{4}$$

unde

$[m_i]$ este o matrice avînd n coloane și p linii;
$[m_i']$ — transpusa matricei $[m_i]$;
$[A]$ — matricea flexibilităților avînd $p \times p$ linii și coloane.

Termenii liberi se vor calcula cu relația

$$[P] = [m_i'] \cdot [A] \cdot [M_p^0], \tag{5}$$

unde $[M_p^0]$ este o matrice avînd s coloane și p linii (s fiind numărul de tipuri de solicitări ale structurii).

Ecuația matriceală (2) se scrie dezvoltat astfel:

$$[m_i'] \cdot [A] \cdot [m_i] \cdot [X_j] + [m_i'] \cdot [A] \cdot [M_p^0] = 0. \tag{6}$$

În cazul structurilor cu p puncte caracteristice și $p-1$ intervale, matricea flexibilităților are expresia (7)

$$[A] = \frac{1}{6EI_0} \begin{bmatrix} 2l_1\frac{I_0}{I_1} & l_1\frac{I_0}{I_1} & 0 & 0 & 0\ldots0\ldots & 0 \\ l_1\frac{I_0}{I_1} & 2\left(l_1\frac{I_0}{I_1}+l_2\frac{I_0}{I_1}\right) & l_2\frac{I_0}{I_2} & 0 & 0\ldots0\ldots & 0 \\ 0 & l_2\frac{I_0}{I_2} & 2\left(l_2\frac{I_0}{I_2}+l_2\frac{I_0}{I_3}\right) & l_3\frac{I_0}{I_3} & 0\ldots0\ldots & 0 \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ 0 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & 0\ldots0\ldots & l_{p-1}\frac{I_0}{I_{p-1}} & 2l_{p-1}\frac{I_0}{I_{p-1}} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Elementele pe care proiectantul trebuie să le pregătească sînt matricele $[m_i]$, $[A]$ și $[M_p^0]$. Toate celelalte operații vor fi efectuate de mașina de calcul, care, pe baza programului, va furniza eforturile finale calculate cu o relație de forma

$$[M_p] = [M_p^0] + [m_i] \cdot [X_j]. \tag{8}$$

Matricea $[M_p]$ are s coloane și p linii, adică pune la dispoziție eforturile în toate punctele caracteristice p din cele s tipuri de solicitare. Comparînd diferitele valori ale eforturilor finale sau efectuînd combinațiile de solicitări cerute prin program, mașina de calcul va furniza direct eforturile de dimensionare a secțiunilor sub forma unei matrice $[M_p]_{\max}^{\min}$ cu două coloane și p linii.

Verificarea exactității calculelor se face determinînd deplasările pe direcțiile tuturor necunoscutelor :

$$[\Delta_i] = [m_i'] \cdot [A] \cdot [M_p]. \tag{9}$$

Matricea $[\Delta_i]$ este o matrice patratică $n \times n$ și trebuie să rezulte cu toți termenii zero.

Schema logică a operațiilor ce se execută de mașina de calcul este următoarea :

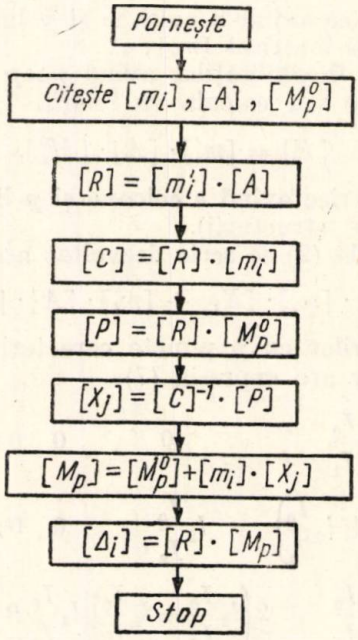


Fig. 2

Este necesar de făcut o observație în legătură cu calculul termenilor liberi. Dacă sarcinile exterioare sînt forțe sau momente concentrate, termenii liberi se calculează cu relația (5). În cazul în care pe una sau pe mai multe bare acționează sarcini uniform distribuite, atunci la valoarea calculată cu relația (5) se adaugă un termen de forma $\pm \frac{2k_i}{3EI_i} S_i$, în care $k_i = \frac{pl_i^2}{8}$ și S_i este suprafața diagramei unitare pe intervalul dintre două puncte caracteristice consecutive (i și $i+1$). Se poate evita acest inconvenient prin înmulțirea punctelor caracteristice pe barele respective și înlocuirea diagramei curbilinii cu o diagramă poligonală. Numărul punctelor se va alege astfel ca eroarea să fie practic neglijabilă.

De asemenea, în cazul structurilor cu bare curbe, se alege astfel numărul punctelor caracteristice pentru ca eroarea comisă prin aproximarea curbei cu poligonul rezultat să fie suficient de mică.

2. Pentru reducerea volumului de lucru în faza de pregătire a datelor inițiale ($[m_i]$, $[A]$ și $[M_p^0]$) se vor avea în vedere procedeele specifice metodei eforturilor și în același timp posibilitățile calculatorului electronic.

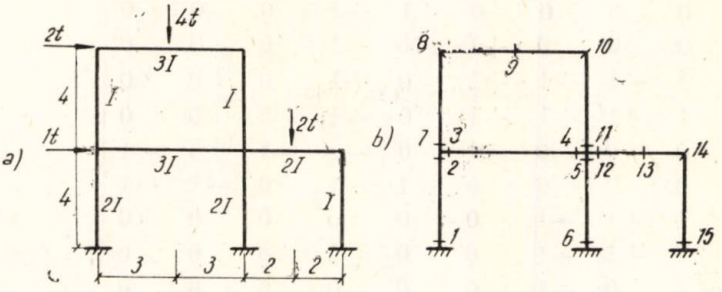


Fig. 3

Dacă în calculul static, efectuat cu rigla de calcul, se urmărea ca diagramele unitare să fie ortogonale pentru ca sistemul de ecuații să se poată rezolva ușor, pentru calculul cu ajutorul mașinilor electronice acest lucru nu mai este necesar. În acest caz se caută ca pentru reducerea timpului de întocmire a datelor inițiale să se obțină diagrame limitate la un număr redus de bare. Pentru aceasta se pot utiliza rezultatele obținute în lucrarea [3], în care, pornind de la noțiunea de diagramă static compatibilă (în echilibru cu sarcinile exterioare), se renunță la ideea de sistem de bază, iar diagramele se construiesc astfel încît să respecte condiția de echilibru static și să fie liniar independente.

Avantajul utilizării metodei eforturilor este că se poate aplica la orice tip de structură. Dezavantajul acestei metode este că necesită trasarea diagramelor static compatibile m_i și M_p^0, ceea ce reprezintă un consum important de timp.

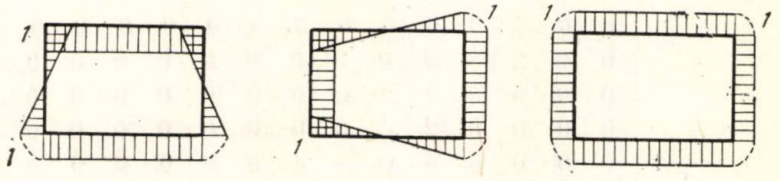


Fig. 4

Exemplu de utilizare a calculului matriceal pentru rezolvarea unei structuri prin metoda eforturilor.

Fie sistemul din figura 3, de nouă ori static nedeterminat.

Punctele caracteristice sînt date în figura 3*b*.

La trasarea diagramelor unitare se pot introduce unele diagrame tip. De exemplu, pentru contururile închise se pot alege ca diagrame static compatibile, în autoechilibru, diagrame de tipul celor din figura 4, care

prezintă avantajul că se extind numai asupra conturului respectiv și sînt liniar independente.

Considerînd pentru fiecare contur închis asemenea diagrame unitare, se obțin în cazul studiat valorile din matricea $[m_i]$. Pentru matricea $[M_p^0]$ se alege de asemenea o diagramă static compatibilă:

$$[m_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & +1 & +1 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & -1 \end{bmatrix}, \quad [M_p^0] = \begin{bmatrix} -20 \\ -8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -8 \\ 0 \\ +6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ +2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Matricea flexibilităților are 15×15 elemente. Alegînd $I_0 = I$, rezultă valorile din matricea $[A]$.

Matricele $[m_i]$, $[A]$ și $[M_p^0]$ se introduc în calculator, care, pe baza programului de operare cu matrice, urmînd succesiunea din schema logică (fig. 2), calculează direct eforturile finale:

$$[A] = \frac{1}{6EI} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

B. *Metoda deplasărilor* este metoda specifică de rezolvare a cadrelor complexe, multietajate, multiplu static nedeterminate.

Adaptarea metodei deplasărilor la calculul cu mașini electronice s-a făcut utilizînd calculul matriceal.

Diferiți cercetători, pornind de la faptul că eforturile care apar la capetele de bară pentru deplasări elastice (rotiri și translații de noduri) sînt cunoscute, au aplicat metoda matricei rigidităților în diferite variante [2], [4]. Această metodă constă în scrierea matricei de rigiditate pentru fiecare bară în funcție de tipurile de deplasări posibile ale nodurilor, urmînd ca pentru calculul coeficienților necunoscutelor din ecuațiile de condiție să se însumeze rigiditățile corespunzătoare (operație efectuată manual sau cu mașina).

Matricea rigidităților pentru o bară jk, care are ca deplasări numai rotiri de noduri, este de forma

$$[k_{jk}] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

iar pentru o bară kl, care are atît rotiri, cît și translații de noduri, este de forma

$$[k_{kl}] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{-6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{-6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & \frac{-12EI}{l^3} \\ \frac{-6EI}{l^2} & \frac{-6EI}{l^2} & \frac{-12EI}{l^3} & \frac{12EI}{l^3} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Sistemul de ecuații de condiție al metodei deplasărilor se scrie

$$[r_{ij}] \cdot [Z_j] + [R_{ip}] = 0. \tag{12}$$

Operația de pregătire a datelor inițiale și calculul eforturilor finale consumă un volum mare de timp și de muncă din partea proiectantului.

În continuare vom prezenta un nou procedeu de calcul al coeficienților necunoscutelor și termenilor liberi, procedeu în care se utilizează principiul lucrului mecanic virtual.

Alegînd diagrama finală de forma

$$M_p = \overline{M}_p^0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i \overline{m}_i, \tag{13}$$

unde $\overline{M}_p^0$ este o diagramă cinematic compatibilă produsă de sarcinile exterioare și $\overline{m}_i$ o diagramă cinematic compatibilă produsă de o deplasare elastică $Z_i = 1$, condiția de compatibilitate statică apare sub forma unor ecuații de echilibru static care pot fi exprimate ca ecuații de lucru mecanic virtual, $L_j = 0$ $(j = 1,2,\ldots, n)$.

Scriind cîte o asemenea ecuație pentru fiecare deplasare cinematică (numărul deplasărilor cinematice este egal cu numărul deplasărilor elastice ale nodurilor), se obține sistemul ecuațiilor de condiție, care are forma matriceală (12). Dezvoltat, sistemul se scrie

$$[\delta'_j]\cdot[\overline{m}_i]\cdot[Z_j]+[\delta'_j]\cdot[\overline{M}_p^0]=0, \tag{14}$$

unde

$[\delta_j]$ este matricea deplasărilor virtuale avînd n coloane și p linii; matricea $[\delta'_j]$ este transpusa matricei $[\delta_j]$;

$[\overline{m}_i]$ — matricea rigidităților tuturor barelor la rotiri de nod și de bară și are n coloane și p linii (matricea momentelor unitare);

$[\overline{M}_p^0]$ — matricea care conține efectul solicitărilor exterioare (momentele de încastrare perfectă și forțele exterioare) și are s coloane și p linii.

De remarcat faptul că deplasările cinematice pot fi aceleași cu deplasările elastice sau pot fi deplasări oarecare, cu condiția să fie liniar independente.

Pentru cazul curent întîlnit în construcțiile civile și industriale, al cadrelor cu bare rectangulare, alcătuirea matricelor $[\overline{m}_i]$ și $[\delta_j]$ devine foarte simplă dacă se utilizează deplasările și eforturile obișnuite în metoda deplasărilor.

Notînd cu $\rho = \dfrac{EI}{l}$ coeficientul de rigiditate a barelor dublu încastrate și cu $\rho = \dfrac{3}{4}\dfrac{EI}{l}$ coeficientul de rigiditate a barelor încastrate și articulate, valorile $\overline{m}_i$ produse de rotirile unitare de nod sînt 4ρ la capetele care se rotesc și 2ρ la capetele opuse, dacă bara este dublu încastrată, și 4ρ la capătul încastrat, dacă bara este încastrată și articulată. Cu aceleași notații în cazul rotirii unitare de bară (ψ), valorile $\overline{m}_i$ care apar în capete de bară sînt $6\rho\psi$ pentru bara dublu încastrată și $4\rho\psi$ pentru bara încastrată și articulată.

Matricea deplasărilor se întocmește la fel de simplu în sensul că vectorul de deplasări produs de rotirea unui nod are elementele egale cu -1 pentru toate punctele caracteristice de pe barele ce se întîlnesc în același nod și egale cu zero pentru toate celelalte puncte caracteristice. În cazul deplasărilor rotiri de bare, acestea sînt egale cu $+1$ pentru toate extremitățile barelor de la etajul respectiv. Valoarea deplasărilor în punctele caracteristice în care sînt aplicate forțe exterioare, puncte ce se deplasează datorită rotirii de bară, se determină direct fără a necesita trasarea epurelor de deplasări ale lanțului cinematic.

În cazul cadrelor oarecare (cu unele bare oblice), rotirile de bare se determină din epurele de deplasări ale lanțului cinematic, iar valorile $\overline{m}_i$ sînt, ca în cazul precedent, $6\rho\psi$ sau $4\rho\psi$.

Odată stabilite matricele $[\overline{m}_i]$, $[\delta_j]$ și $[\overline{M}_p^0]$, întreg calculul se efectuează de către mașină, conform următoarei scheme logice:

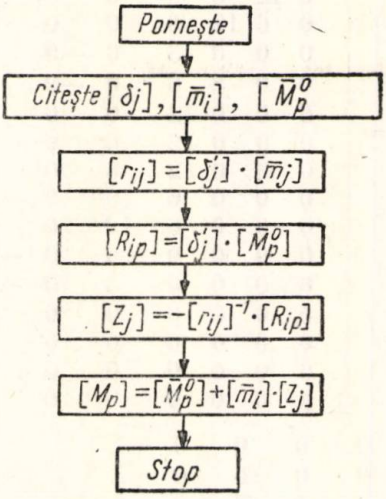


Fig. 5

Utilizarea metodei deplasărilor în această formă este avantajoasă în calculul cadrelor de orice formă, deoarece elementele inițiale se stabilesc cu deosebită ușurință (se calculează numai coeficienții de rigiditate ρ), iar calculele se efectuează în totalitate de mașină.

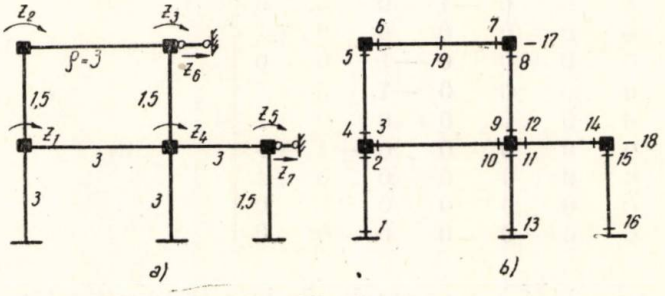


Fig. 6

Exemplu de utilizare a calculului matriceal pentru rezolvarea unui cadru prin metoda deplasărilor, utilizînd lucrul mecanic virtual.

Se reia structura din figura 3*a*. Coeficienții de rigiditate a barelor sînt indicați în figura 6*a*, iar punctele caracteristice în figura 6*b*.

Matricele inițiale sînt

$$[\overline{m}_i] = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 12 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 & -9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[\delta_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +4 & +4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad [\overline{M}_p^0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ +3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ +2 \\ +1 \\ +4 \\ +2 \end{bmatrix}$$

În matricea $[\overline{M}_p^0]$ momentele de încastrare perfectă se consideră pe bară, iar forțele exterioare se introduc cu semnul pozitiv dacă acționează de la stînga la dreapta sau de sus în jos.

★

Metodele prezentate permit automatizarea calculului în domeniul elastic pentru orice tip de structură.

Alegerea metodei de lucru depinde de tipul structurii.

Metoda eforturilor este avantajoasă în cazul structurilor cu număr mic de grade de nedeterminare statică, iar metoda deplasărilor este mai indicată în cazul structurilor multiplu static nedeterminate.

Calculul prin metoda eforturilor necesită o studiere mai atentă a diagramelor m_i și M_p^0 pentru alegerea celor mai indicate diagrame, în timp ce în metoda deplasărilor valorile momentelor unitare se obțin pe baza unor reguli simple.

Utilizarea principiului lucrului mecanic virtual la scrierea ecuațiilor de condiție ale metodei deplasărilor este avantajoasă, deoarece reduce sensibil timpul necesar scrierii datelor ce trebuie introduse în mașină.

BIBLIOGRAFIE

1. J. H. Argyris, *Die Matrizentheorie der Statik*, Ing. Archiv., **25**, *3* (1957).
2. S. C. Goel, *Calculul structurilor de clădiri cu multe etaje prin metoda matricei de rigiditate*, The Indian Concrete Journal, *12* (1964).
3. S. Răutu, *Considerații asupra calculului structurilor static nedeterminate*, St. cerc. mec. apl., **25**, *4* (1967).
4. P. M. Wright, *Folosirea mașinilor electronice de calculat pentru calculul cadrelor prin metoda deformațiilor*, Journal of the Structural Division, **89**, NST2 (1963).

CALCULUL BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI AVÎND PROFILUL ÎNCHIS ÎNCĂRCATE CU SARCINI PERTURBATOARE PERIODICE

de TOMA PANĂ
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", Bucuresti

539.4 : 539.3

În lucrare se prezintă modul în care pot fi calculate amplitudinile eforturilor dinamice din secțiunea transversală a barei cu pereți subțiri, aflată în regim staționar de vibrație forțată sub acțiunea sarcinilor exterioare periodice, folosind amplitudinile deplasărilor generale ale secțiunii. În acest scop se stabilesc în prealabil expresiile amplitudinilor deplasărilor generale, pentru secțiunile biaxial simetrice cu ajutorul metodei parametrilor inițiali.

Se consideră o bară cu pereți subțiri de secțiune constantă, avînd profilul închis și nedeformabil, încărcată cu sarcinile p_x, p_y, și p_z distribuite pe unitatea de suprafață mediană, dirijate după direcțiile axelor de coordonate. Presupunînd că în cazul răsucirii împiedicate este valabilă ipoteza lui Umanski și studiind echilibrul unui tronson de bară, se ajunge la următorul sistem de ecuații diferențiale de deformații [3]:

$$\begin{aligned} &EA\,\xi'' + q_x = 0,\\ &EI_z\,\bar{\eta}^{IV} - \int_c \frac{\partial p_x}{\partial x}\,y\,ds - q_y = 0,\\ &EI_y\,\zeta^{IV} - \int_c \frac{\partial p_x}{\partial x}\,z\,ds - q_z = 0,\\ &\frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu}\,\varphi^{IV} - GI_t\varphi'' - m_A - \int_c \frac{\partial p_x}{\partial x}\,\hat{\omega}\,ds + \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu GI_f}\,m_{tf}'' = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

în care

$$\begin{aligned} &q_x = \int_c p_x\,ds,\quad q_y = \int_c p_y\,ds,\quad q_z = \int_c p_z\,ds,\\ &m_A = \int_c p_y(z - z_0)\,ds - \int_c p_z(y - y_0)\,ds,\\ &m_{tf} = -(-m_A + q_y\cdot z_f - q_z y_f). \end{aligned} \tag{2}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, Nr. 4, 1968, P. 803–809

Notaţiile utilizate în acest sistem corespund următoarelor mărimi:

E — modulul de elasticitate longitudinal;
G — modulul de elasticitate transversal;
A — aria secţiunii transversale;
I_y, I_z — momentele de inerţie axiale principale ale secţiunii;
I_t — momentul de inerţie polar convenţional;
I_f — momentul de inerţie dirijat al secţiunii raportat la centrul de forfecare pură;
$I_{\hat{\omega}}$ — momentul de inerţie sectorial generalizat;
$\nu = 1 - \frac{I_t}{I_f}$ — coeficientul de deformaţie al secţiunii;
$\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \varphi$ — deplasările generale ale secţiunii;
$\hat{\omega}$ — deplanarea unitară în punctul $M(y, z)$ de pe linia mediană a secţiunii;
y_0, z_0 — coordonatele centrului de rotaţie al secţiunii;
y_f, z_f — coordonatele relative ale centrului de forfecare pură măsurate în raport cu centrul de rotaţie.

Dacă în ecuaţiile (1) deplasările generale ale secţiunii sînt considerate ca funcţii de x şi de timp, iar sarcinile p_x, p_y şi p_z sînt privite ca avînd două componente: una de natură masică, iar cealaltă nemasică, dar variabilă în timp după o lege armonică, atunci aceste ecuaţii reprezintă deformaţiile în cazul vibraţiilor forţate ale barelor cu masă distribuită.

După eliminarea variabilei timp, sistemul (1) se poate scrie sub forma

$$\xi_\theta'' + \varkappa \xi_\theta = \bar{q}_x(\theta),$$

$$\bar{\eta}_\theta^{IV} + \varkappa[\bar{\eta}_\theta'' - b_z^4 \bar{\eta}_\theta + z_0 b_z^4 \varphi_\theta] = \bar{q}_y(\theta),$$

$$\bar{\zeta}_\theta^{IV} + \varkappa[\bar{\zeta}_\theta'' - b_y^4 \bar{\zeta}_\theta - y_0 b_y^4 \varphi_\theta] = \bar{q}_z(\theta),$$

$$\varphi_\theta^{IV} + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2)\varphi_\theta'' - \varkappa(a_{\hat{\omega}}^4 - \varkappa a_f^2)\varphi_\theta - \varkappa a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} \bar{\eta}_\theta'' - \tag{3}$$

$$- \varkappa\left(\varkappa a_f^2 \frac{z_0 + z_f}{h_f^2} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{z_0}{h^2}\right)\bar{\eta}_\theta + \varkappa a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} \bar{\zeta}_\theta'' +$$

$$+ \varkappa\left(\varkappa a_f^2 \frac{y_0 + y_f}{h_f^2} - a_{\hat{\omega}}^4 \frac{y_0}{h^2}\right) \bar{\zeta}_\theta = \bar{m}(\theta),$$

în care amplitudinile deplasărilor generale ale secţiunii $\xi_\theta(\theta)$, $\bar{\eta}_\theta(\theta)$, $\bar{\zeta}_\theta(\theta)$ şi $\varphi_\theta(\theta)$, precum şi amplitudinile sarcinilor dinamice exterioare $\bar{q}_x(\theta)$, $\bar{q}_y(\theta)$, $\bar{q}_z(\theta)$ şi $\bar{m}(\theta)$, sînt funcţii numai de variabila adimensională

$$\theta = \frac{x}{l}. \tag{4}$$

Notațiile utilizate în sistemul (3) au următoarea semnificație:

$$\varkappa = \frac{\gamma p^2 l^2}{Eg}, \quad b_y^4 = \frac{Al^2}{I_y}, \quad b_z^4 = \frac{Al^2}{I_z},$$

$$a_f^2 = \frac{EA}{GI_t} h_f^2, \qquad c_{\hat{\omega}}^2 = \frac{GI_t}{EI_{\hat{\omega}}} \nu l^2, \qquad a_{\hat{\omega}}^4 = \frac{A\nu}{I_{\hat{\omega}}} h^2 l^2, \tag{5}$$

$$h^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + z_0^2 + y_0^2,$$

$$h_f^2 = h^2 + z_0 z_f + y_0 y_f.$$

În aceste notații, p reprezintă pulsația vibrației, l lungimea barei, iar $\frac{\gamma}{g}$ masa specifică a materialului din care este confecționată bara.

Prima ecuație a sistemului (3) descrie vibrația forțată axială, iar celelalte trei vibrația forțată de încovoiere-răsucire. Soluțiile sistemului format din ultimele trei ecuații (3) se pot scrie sub forma

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_\theta(\theta) &= \bar{\eta}_\theta^*(\theta) + \bar{\bar{\eta}}_\theta(\theta), \\ \bar{\zeta}_\theta(\theta) &= \bar{\zeta}_\theta^*(\theta) + \bar{\bar{\zeta}}_\theta(\theta), \\ \varphi_\theta(\theta) &= \varphi_\theta^*(\theta) + \bar{\varphi}_\theta(\theta), \end{aligned} \tag{6}$$

în care $\bar{\eta}_\theta^*(\theta)$, $\bar{\zeta}_\theta^*(\theta)$ și $\bar{\varphi}_\theta^*(\theta)$ reprezintă soluțiile generale ale sistemului omogen, iar $\bar{\bar{\eta}}_\theta(\theta)$., $\bar{\bar{\zeta}}_\theta(\theta)$ și $\bar{\varphi}_\theta(\theta)$ soluțiile particulare ale sistemului general.

Relațiile (6) pot fi puse sub formă concentrată, ușor de manevrat, dacă soluțiile sistemului omogen se exprimă cu ajutorul parametrilor inițiali, iar soluțiile particulare se determină prin metoda generală Cauchy-Krîlov.

În cazul particular al secțiunii cu două axe de simetrie, centrul de greutate, centrul de rotație și centrul de forfecare pură se confundă cu originea sistemului de coordonate, iar ecuațiile sistemului (3) devin independente. În consecință, sistemul (3) ia forma

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_\theta^{IV} + \varkappa(\bar{\eta}_\theta'' - b_z^4 \bar{\eta}_\theta) &= \bar{q}_y(\theta), \\ \bar{\zeta}_\theta^{IV} + \varkappa(\bar{\zeta}_\theta'' - b_y^4 \bar{\zeta}_\theta) &= \bar{q}_z(\theta), \\ \varphi_\theta^{IV} + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2)\varphi_\theta'' - \varkappa(a_{\hat{\omega}}^4 - \varkappa a_f^2)\varphi_\theta &= \overline{m_t}(\theta). \end{aligned} \tag{7}$$

Soluțiile generale ale acestui sistem, scris sub formă omogenă, sînt

$$\bar{\eta}_\theta^*(\theta) = \bar{\eta}_0 F'_{11}(\theta) + \bar{\eta}'_0 [F_{11}(\theta) + \varkappa F_{12}(\theta)] + \frac{M_{z_0} l^2}{EI_z} F'_{12}(\theta) + \frac{T_{y_0} l^3}{EI_z} F_{12}(\theta),$$

$$\bar{\zeta}_\theta^*(\theta) = \bar{\zeta}_0 F'_{21})(\theta) + \bar{\zeta}'_0 [E_{21}(\theta) + \varkappa F_{22}(\theta)] - \frac{M_{y_0} l^2}{EI_y} F'_{22}(\theta) + \frac{T_{z_0} l^3}{EI_y} F_{22}(\theta),$$

$$\varphi_\theta^*(\theta) = \varphi_0 [F'_{31}(\theta) + \varkappa a_f^2 F'_{32}(\theta)] + \nu \beta_0 l [F_{31}(\theta) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F_{32}(\theta)] +$$

$$+ \nu \frac{B_{\hat{\omega}_0} l^2}{EI_{\hat{\omega}}} F'_{32}(\theta) + \frac{M_{t_{fc}} l}{GI_f} \left[F_{31}(\theta) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \right) F_{32}(\theta) \right], \tag{8}$$

în care ca parametrii inițiali au fost alese

— deplasările secțiunii: $\bar{\eta}_0$, $\bar{\zeta}_0$,
— rotirile secțiunii: $\bar{\eta}_0$, ζ'_0, φ_0,
— deplanarea secțiunii: β_0,
— momentele încovoietoare: M_{z0}, M_{y0},
— forțele tăietoare: T_{z0}, T_{y0},
— bimomentul de încovoiere-răsucire: $B_{\hat{\omega}_0}$,
— momentul de răsucire față de centrul de forfecare pură M_{tf0} din secțiunea inițială $\theta = 0$.

Funcțiile $F(\theta)$ din relațiile (8) au expresiile

$$F_{11}(\theta) = \frac{s_{12}^2}{s_{11}(s_{12}^2 - s_{11}^2)} \operatorname{sh} s_{11}\theta - \frac{s_{11}^2}{s_{12}(s_{12}^2 - s_{11}^2)} \operatorname{sh} s_{12}\theta,$$

$$F_{12}(\theta) = \frac{1}{s_{11}(s_{12}^2 - s_{11}^2)} \operatorname{sh} s_{11}\theta - \frac{1}{s_{12}(s_{12}^2 - s_{11}^2)} \operatorname{sh} s_{12}\theta, \tag{9a}$$

$$F_{21}(\theta) = \frac{s_{22}^2}{s_{21}(s_{22}^2 - s_{21}^2)} \operatorname{sh} s_{21}\theta - \frac{s_{21}^2}{s_{22}(s_{22}^2 - s_{21}^2)} \operatorname{sh} s_{22}\theta,$$

$$F_{22}(\theta) = \frac{1}{s_{21}(s_{22}^2 - s_{21}^2)} \operatorname{sh} s_{21}\theta - \frac{1}{s_{22}(s_{22}^2 - s_{21}^2)} \operatorname{sh} s_{22}\theta, \tag{9b}$$

$$F_{31}(\theta) = \frac{s_{32}^2}{s_{31}(s_{32}^2 - s_{31}^2)} \operatorname{sh} s_{31}\theta - \frac{s_{31}^2}{s_{32}(s_{32}^2 - s_{31}^2)} \operatorname{sh} s_{32}\theta,$$

$$F_{32}(\theta) = \frac{1}{s_{31}(s_{32}^2 - s_{31}^2)} \operatorname{sh} s_{31}\theta - \frac{1}{s_{32}(s_{32}^2 - s_{31}^2)} \operatorname{sh} s_{32}\theta, \tag{9c}$$

în care au fost folosite notațiile

$$s_{11,12} = \sqrt{\frac{-\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 + 4\varkappa b_z^4}}{2}}, \tag{10a}$$

$$s_{21,22} = \sqrt{\frac{-\varkappa \pm \sqrt{\varkappa^2 + 4\varkappa b_y^4}}{2}}, \tag{10b}$$

$$s_{31,32} = \sqrt{\frac{-(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) \pm \sqrt{(\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2)^2 + 4\varkappa(a_{\hat{\omega}}^4 - \varkappa a_f^4)}}{2}} \tag{10c}$$

În baza metodei generale Cauchy-Krîlov, soluţiile particulare ale sistemului (7) au expresiile

$$\bar{\eta}_\theta(\theta) = -\int_0^\theta F_{12}(\theta - \Psi)\bar{q}_y(\Psi)\,d\Psi,$$

$$\bar{\zeta}_\theta(\theta) = -\int_0^\theta F_{22}(\theta - \Psi)\,\bar{q}_z(\Psi)\,d\Psi, \tag{11}$$

$$\bar{\varphi}_\theta(\theta) = -\int_0^\theta F_{32}(\theta - \Psi)\,\bar{m}(\Psi)\,d\Psi,$$

în care integrarea se face în raport cu noua variabilă Ψ, iar θ este parametru şi limită superioară a integralei.

Prin adăugarea soluţiei particulare la soluţia generală a sistemului omogen se obţine soluţia generală a sistemului (7). Deoarece soluţia particulară este funcţie de sarcinile exterioare, pentru ca soluţia generală a sistemului (7) să fie aplicabilă la orice mod de încărcare se presupune că bara este solicitată de un sistem de sarcini ca în figura 1. În acest caz, expresiile amplitudinilor deplasărilor generale ale secţiunii sînt

$$\bar{\eta}_\theta(\theta) = \bar{\eta}_0 F'_{11}(\theta) + \bar{\eta}'_0[F_{11}(\theta) + \varkappa F_{12}(\theta)] + \frac{M_{z_0} l^2}{EI_z} F'_{12}(\theta) + \frac{T_{y_0} l^3}{EI_z} F_{12}(\theta) +$$

$$+ \sum_1^n \frac{M_{zj}}{EI_z} F'_{12}(\theta - \theta_{1j}) - \sum_1^n \frac{P_{yj} l^3}{EI_z} F_{12}(\theta - \theta_{2j}) +$$

$$+ \sum_1^n \frac{q_{yj} l^2}{\varkappa EA}[F'_{11}(\theta - \theta_{3j}) - F'_{11}(\theta - \theta_{4j})],$$

$$\bar{\zeta}_\theta(\theta) = \bar{\zeta}_0 F'_{21}(\theta) + \bar{\zeta}'_0[F_{21}(\theta) + \varkappa F_{22}(\theta)] - \frac{M_{y_0} l^2}{EI_y} F'_{22}(\theta) + \frac{T_{y_0} l^3}{EI_y} F_{22}(\theta) -$$

$$- \sum_1^n \frac{M_{yj} l^2}{EI_y} F'_{22}(\theta - \theta_{1j}) - \sum_1^n \frac{P_{zj} l^3}{EI_y} F_{22}(\theta - \theta_{2j}) +$$

$$+ \sum_1^n \frac{q_{zj} l^2}{\varkappa EA}[F'_{21}(\theta - \theta_{3j}) - F'_{21}(\theta - \theta_{4j})], \tag{12}$$

$$\varphi_\theta(\theta) = \varphi_0[F'_{31}(\theta) + \varkappa a_f^2 F'_{32}(\theta)] + \nu\beta_0 l[F_{31}(\theta) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_{\hat{\omega}}^2) F_{32}(\theta)] +$$

$$+ \nu \frac{B_{\hat{\omega}_0} l^2}{EI_{\hat{\omega}}} F'_{32}(\theta) + \frac{M_{t_{f_0}} l}{GI_f}\left[F_{31}(\theta) + \left(\varkappa a_f^2 + \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2\right) F_{32}(\theta)\right] -$$

$$- \sum_1^n \frac{\nu}{1-\nu} c_{\hat{\omega}}^2 \frac{M_{tj} l}{GI_f} F_{32}(\theta - \theta_{2j}) + \sum_1^n \nu \frac{B_{\hat{\omega}_j} l^2}{EI_{\hat{\omega}}} F'_{32}(\theta - \theta_{1j}) +$$

$$+ \sum_1^n \frac{\nu l^4}{EI_{\hat{\omega}}} \cdot \frac{m_j}{\varkappa(a_{\hat{\omega}}^4 - \varkappa a_f^2)}[F'_{31}(\theta - \theta_{3j}) - F'_{31}(\theta - \theta_{4j})].$$

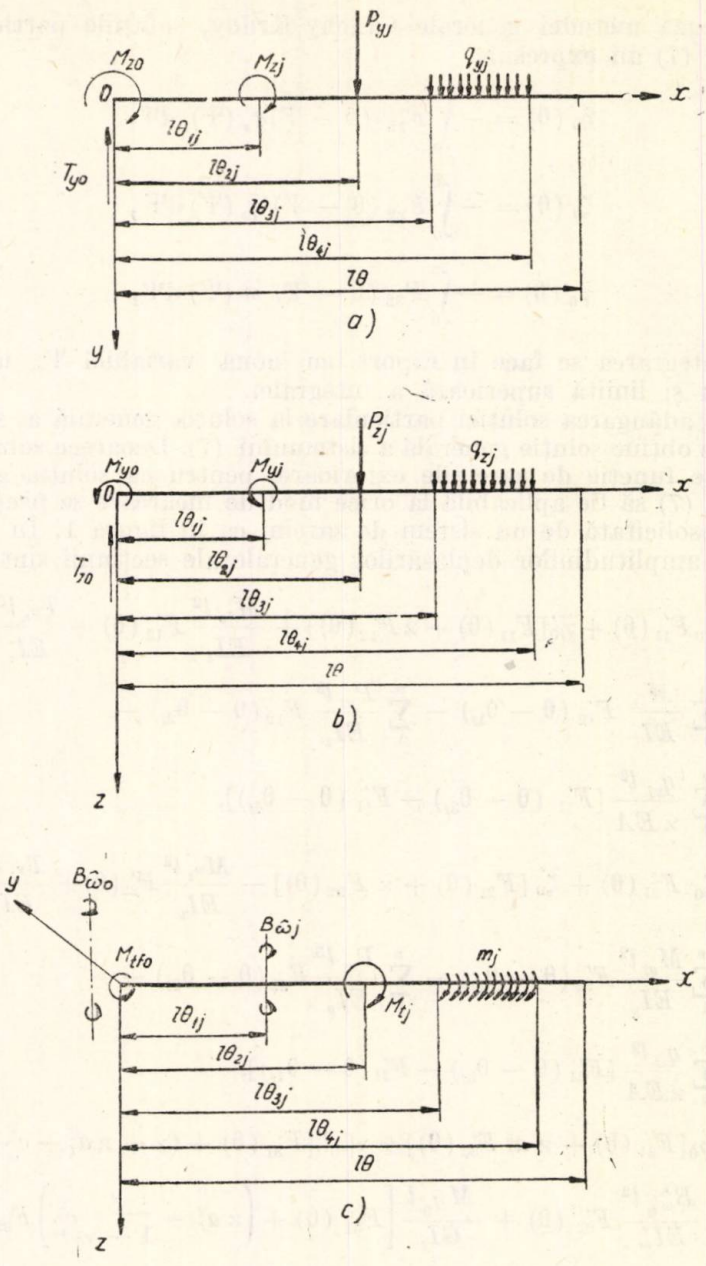


Fig. 1

Valorile amplitudinilor parametrilor inițiali care intră în componența acestor expresii se determină cu ajutorul condițiilor la limite. Indiferent de modul de rezemare, pentru fiecare dintre relațiile (12) doi dintre cei patru parametri inițiali sînt nuli. Aceasta rezultă din punerea condițiilor

la limită în secțiunea inițială $\theta = 0$. Valorile celor doi parametri nenuli se obțin prin rezolvarea sistemului de ecuații rezultat din punerea condițiilor la limită în cealaltă secțiune extremă a barei : $\theta = 1$.

Eforturile din secțiunea transversală a barei cu pereți subțiri, aflată în regim staționar de vibrație forțată sub acțiunea sarcinilor exterioare periodice, se pot exprima, în funcție de deplasările generale și de derivatele lor, cu ajutorul ecuațiilor de echilibru și al relațiilor diferențiale dintre eforturi. Astfel se obțin relațiile

$$
\begin{aligned}
M_z(\theta) &= -\frac{EI_z}{l^2}\,\bar{\eta}_\theta''(\theta),\\
T_y(\theta) &= -\frac{EI_z}{l^3}\,[\bar{\eta}_\theta'''(\theta) + \varkappa\,\bar{\eta}_\theta'(\theta)],\\
M_y(\theta) &= \frac{EI_y}{l^2}\,\bar{\zeta}_\theta''(\theta),\\
T_z(\theta) &= -\frac{EI_y}{l^3}\,[\bar{\zeta}_\theta'''(\theta) + \varkappa\,\bar{\zeta}_\theta'(\theta)],\\
B_\omega^{\wedge}(\theta) &= -\frac{EI_\omega^{\wedge}}{\nu l^2}\left[\varphi_\theta''(\theta) + \varkappa\, a_f^2\,\varphi_\theta(\theta) + \frac{m}{GI_f}\right],\\
M_{tf}(\theta) &= \frac{GI_f}{l\left(\varkappa - \dfrac{1}{1-\nu}\,c_\omega^{2\wedge}\right)}\,[\varphi_\theta'''(\theta) + (\varkappa + \varkappa a_f^2 - c_\omega^{2\wedge})\,\varphi_\theta'(\theta)].
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Se observă că în penultima relație este cuprins și momentul de răsucire repartizat m, care provine din sarcinile dinamice exterioare aplicate în secțiune.

Eliminînd deplasările generale ale secțiunii cu ajutorul relațiilor (12), rezultă expresiile amplitudinilor eforturilor dinamice din secțiunea θ, care solicită bara în timpul vibrației. Aceste expresii servesc la determinarea valorilor maxime ale eforturilor dinamice.

Valorile eforturilor unitare se obțin folosind relațiile cunoscute de la calculul static al barelor cu pereți subțiri [4].

BIBLIOGRAFIE

1. Н. И. Безухов, О. В. Лужин, К расчету тонкостенных стержней на вынужденные колебания, Исследования по теории сооружений, выпуск VII, Госстройиздат, Москва, 1957.
2. J. P. Den Hartog, *Mechanical vibrations*, McGraw-Hill, New York, 1956.
3. T. Pană, *Calculul pulsațiilor proprii ale vibrațiilor de încovoiere-răsucire la barele cu pereți subțiri având profilul închis*, St. cerc. mec. apl., **18**, *2*, (1965).
4. A. Petre, M. Atanasiu, *Bare cu pereți subțiri*, Edit. tehnică, București, 1960.

APLICAREA METODEI SCHIMBĂRII ELEMENTULUI CONDUCĂTOR PENTRU REZOLVAREA CINETOSTATICEI MECANISMELOR COMPLEXE *)

de A. ORĂNESCU
Institutul politehnic Galaţi

621.01 : 531.1

Se arată algoritmul prin care se pot determina reacţiunile în cuplurile cinematice în cazul mecanismelor conţinînd grupe asurice de clasă mare şi care satisfac următoarele ipoteze :
— gradul de mobilitate este egal cu unitatea ;
— dacă se schimbă convenabil manivela conducătoare, clasa mecanismului poate fi micşorată pînă la clasele 2—3. Se verifică metoda pentru un mecanism de clasa a 3-a, apoi se aplică pentru un mecanism de clasa a 5-a.

1. GENERALITĂŢI

Se ştie că determinarea reacţiunilor în cuplurile cinematice ale unui mecanism, datorită unui sistem de încărcări care include şi inerţia, se face — conform principiului d'Alembert — aplicînd ecuaţiile de echilibru (dinamic) elementelor din care este constituit mecanismul.

De asemenea se ştie că rezolvarea se face întrucîtva diferit faţă de metoda generală aplicată în mecanică la sistemele de solide rigide, cu scopul de a se obţine necunoscutele succesiv şi deci de a se evita numărul mare de ecuaţii de rezolvat, care, chiar în cazul mecanismelor simple, cu puţine elemente, ar necesita un timp prea îndelungat de rezolvare dacă nu se utilizează maşinile electronice de calcul. Pentru aceasta se demonstrează că fiecare grupă asurică poate fi tratată independent, elementul conducător fiind rezolvat la sfîrşit, considerînd la acesta o necunoscută suplimentară, forţa sau momentul de echilibrare.

Dacă clasa grupei asurice este mai mare decît clasa a 3-a, determinarea reacţiunilor prin metodele directe este greoaie sau chiar imposibilă.

*) Lucrarea a fost prezentată la Conferinţa de comunicări C.N.I.T., oct. 1967

Mai jos se arată modul cum se pot aplica totuși metodele clasice de rezolvare, elaborate pentru clasele 2—3 la mecanismele cu grupe asurice de clasă mai mare, prin schimbarea convențională a manivelei conducătoare dacă mecanismul satisface condițiilor de mai jos :

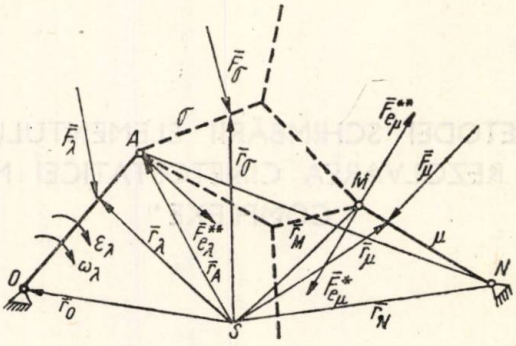


Fig. 1

— gradul de mobilitate este egal cu unitatea ;

— clasa mecanismului se poate reduce pînă la clasele 2—3 dacă se alege în loc de manivela conducătoare reală λ o altă manivelă conducătoare μ.

Se mai presupune că fiecare element σ este încărcat, în afară de forțele aplicate, cu o forță provenind din efectul inerției, rezultanta lor fiind notată în figura 1 cu $\overline{F}_\sigma$.

2. ALGORITMUL DE CALCUL

Pentru determinarea reacțiunilor în cuplurile cinematice (făcînd abstracție de frecări) se procedează în modul următor :

a) se rezolvă mecanismul prin procedeele clasice, considerînd element conducător manivela μ. Reacțiunile din cuplurile cinematice astfel găsite, notate cu un asterisc, sînt fictive. Dacă se scrie echilibrul elementului μ, rezultă forța de echilibrare $\overline{F}^{*}_{e\mu}$;

b) se aplică asupra manivelei λ, în punctul A, forța fictivă $\overline{F}^{**}_{e\lambda}$ cu un modul oarecare (de exemplu $|\overline{F}^{**}_{e\lambda}| = 1$), considerîndu-se în plus și o necunoscută $\overline{F}^{**}_{e\mu}$, unde și această forță de echilibrare, ca și precedentele, este perpendiculară pe manivelă. Mecanismul se rezolvă în întregime ca o grindă cu zăbrele, de exemplu grafic. Posibilitatea efectuării acestei rezolvări nu trebuie considerată ca o nouă ipoteză. Rezolvarea este întotdeauna posibilă dacă gradul de mobilitate este egal cu unitatea, așa după cum s-a presupus mai înainte ;

c) deoarece toate reacțiunile au fost găsite la b) numai din geometria mecanismului, pornind cu $\overline{F}^{**}_{e\mu}$ se poate pune la sfîrșit condiția pentru scările grafice astfel încît să se obțină egalitatea $\overline{F}^{**}_{e\mu} = -\overline{F}^{*}_{e\mu}$. Urmează că toate forțele obținute la b) (notate cu două asteriscuri) vor trebui citite la această scară grafică ;

d) reacțiunile reale se vor obține din însumarea reacțiunilor determinate la a) cu cele determinate la b), după ce s-a făcut calculul scării grafice ca la c).

Notă. Se va vedea mai departe că, dacă se calculează scara cîmpului b) ca mai sus, forța $\overline{F}^{**}_{e\lambda}$ este chiar forța reală de echilibrare $\overline{F}_{e\lambda}$ care s-ar fi găsit la manivela λ dacă mecanismul ar fi putut fi rezolvat direct. Această observație conține însuși fondul metodei.

★

Pentru demonstrarea algoritmului se vor introduce mai jos următoarele notații:

n — numărul elementelor mobile ale mecanismului ($n-1$ este numărul elementelor conduse);
p — numărul legăturilor mecanismului cu batiul;
$\overline{R}_{\alpha 0}$ — reacțiunea reală a mecanismului prin elementul α la batiul 0;
$\overline{R}^{*}_{\alpha 0}$ — aceeași reacțiune obținută prin cîmpul b);
$\overline{R}^{**}_{\alpha 0}$ — idem prin cîmpul c);

Dacă se mai consideră și un punct S fix în plan, se mai notează:

$\overline{r}_{\sigma}$ — raza vectoare a forței $\overline{F}_{\sigma}$ din S;
$\overline{r}_{R}$ — raza vectoare a reacțiunii $\overline{R}_{\alpha 0}$, $\overline{R}^{*}_{\alpha 0}$ sau $\overline{R}^{**}_{\alpha}$ (două raze vectoare sînt notate în figura 1 cu $\overline{r}_{M}$ și $\overline{r}_{0}$).

Celelalte notații se observă direct pe figura 1.

Dacă se scriu condițiile de echilibru pentru cîmpul real de forțe și pentru cîmpurile b) și c), cu notațiile arătate se obține

$$\sum_{1}^{n} \overline{F}_{\sigma} + \sum_{1}^{p} \overline{R}_{\alpha 0} + \overline{F}_{e\lambda} = \overline{0}, \tag{1}$$

$$\sum_{1}^{n} \overline{F}_{\sigma} + \sum_{1}^{p} \overline{R}^{*}_{\alpha 0} + \overline{F}^{*}_{e\mu} = \overline{0}, \tag{2}$$

$$\overline{F}^{**}_{e\lambda} + \sum_{1}^{p} \overline{R}^{**}_{\alpha 0} + \overline{F}^{**}_{e\mu} = \overline{0}, \tag{3}$$

$$\sum_{1}^{n} \overline{r}_{\sigma} \times \overline{F}_{\sigma} + \sum_{1}^{p} \overline{r}_{R} \times \overline{R}_{\alpha 0} + \overline{r}_{A} \times \overline{F}_{e\lambda} = \overline{0}, \tag{4}$$

$$\sum_{1}^{n} \overline{r}_{\sigma} \times \overline{F}_{\sigma} + \sum_{1}^{p} \overline{r}_{R} \times \overline{R}^{*}_{\alpha 0} + \overline{r}_{M} \times \overline{F}^{*}_{e\mu} = \overline{0}, \tag{5}$$

$$\overline{r}_{A} + \overline{F}^{**}_{e\lambda} + \sum_{1}^{p} \overline{r}_{R} \times \overline{R}^{**}_{\alpha 0} - \overline{r}_{M} \times \overline{F}^{**}_{e\mu} = \overline{0}. \tag{6}$$

Prin ipoteză,

$$\overline{F}^{*}_{e\mu} = -\overline{F}^{**}_{e\mu}. \tag{7}$$

Adunînd relațiile (2) și (3) și înlocuind în relația (1), se obține

$$\sum_{1}^{p} \overline{R}_{\alpha 0} - \left(\sum_{1}^{p} \overline{R}^{*}_{\alpha 0} + \sum_{1}^{p} \overline{R}^{**}_{\alpha 0} \right) = -\left(\overline{F}_{e\lambda} - \overline{F}^{**}_{e\lambda} \right). \tag{8}$$

Procedînd la fel cu relaţiile (4), (5) şi (6), se obţine

$$\sum_{1}^{p} \bar{r}_{R'}[\bar{R}_{\alpha 0} - (\bar{R}^{*}_{\alpha 0} + \bar{R}^{**}_{\alpha 0})] = -\bar{r}_{A} \times (\bar{F}_{e\lambda} - \bar{F}^{**}_{e\lambda}). \tag{9}$$

Se mai deduce din relaţiile (8) şi (9) că

$$\sum_{1}^{p} (\bar{r}_{R} - \bar{r}_{A}) \times [\bar{R}_{\alpha 0} - (\bar{R}^{*}_{\alpha 0} + \bar{R}^{**}_{\alpha 0})] = \bar{0}, \tag{10}$$

care reprezintă o sumă de momente a reacţiunii din paranteza mare faţă de punctul A egală cu zero. Rezultă:

$$\sum_{1}^{p} \bar{R}_{\alpha 0} = \sum_{1}^{p} (\bar{R}^{*}_{\alpha 0} + \bar{R}^{**}_{\alpha 0}). \tag{11}$$

Relaţia precedentă este valabilă în ipoteza că diferenţa $\bar{R}_{\alpha 0} - (\bar{R}^{*}_{\alpha 0} + \bar{R}^{**}_{\alpha 0})$ nu este un vector diferit de zero care să trecacă prin punctul A.

Pentru excluderea acestei posibilităţi, deşi fără justificare reală, se mai poate raţiona ca mai jos.

Se scrie conservarea puterilor în cazul real, date de $\bar{F}_{e\lambda}$ şi $\bar{F}_{\sigma}$, precum şi în cazul în care se suprapun cele două cîmpuri. Observîndu-se că reacţiunile la batiu nu produc puteri, deoarece s-a făcut abstracţie de frecări, rezultă

$$\bar{F}_{e\lambda} \cdot \bar{V}_{A} + \sum \bar{F}_{\sigma} \cdot \bar{V}_{\sigma} = 0,$$

$$\bar{F}^{**}_{e\lambda} \cdot \bar{V}_{A} + \sum \bar{F}_{\sigma} \cdot \bar{V}_{\sigma} + \bar{F}^{*}_{e\mu} \cdot \bar{V}_{M} + \bar{F}^{**}_{e\mu} \cdot \bar{V}_{M} = 0.$$

Dacă se consideră relaţia (7) şi se reaminteşte că $\bar{F}_{e\lambda}$ şi $\bar{F}^{**}_{e\lambda}$, pe de o parte, şi $\bar{F}^{*}_{e\mu}$ şi $\bar{F}^{**}_{e\mu}$, pe de altă parte, au aceleaşi direcţii, se poate scrie

$$\bar{F}_{e\lambda} = \bar{F}^{**}_{e\lambda}. \tag{12}$$

Se deduce atunci din (8) relaţia (11).

Din aceasta formal nu ar rezulta $\bar{R}_{\alpha 0} = \bar{R}^{*}_{\alpha 0} + \bar{R}^{**}_{\alpha 0}$. Dacă se reaminteşte însă principiul suprapunerii efectelor, unde prin suprapunerea celor două cîmpuri de forţe mecanismul apare încărcat cu forţele exterioare $\bar{F}_{\sigma}$ şi cu forţa de echilibrare $\bar{F}^{**}_{e\lambda} = \bar{F}_{e\lambda}$, ca şi în realitate urmează că fiecare reacţiune la batiu este egală cu reacţiunea obţinută prin sumarea (vectorială) a celor două cîmpuri de mai sus.

Generalizarea propoziţiei la reacţiunile interioare este evidentă.

3. VERIFICAREA ÎN CAZUL UNUI MECANISM DE CLASA A 3-A

a) Pentru ilustrarea metodei se consideră un mecanism de clasa a 3-a, ca în figura 4, la care se face rezolvarea directă, considerînd baza ternară formată din elementele 2—3—4—5, care se rezolvă.

Pentru aceasta se admite sistemul de forţe care încarcă elementele, avînd modulele $F_1 = 4N$, $F_2 = 3N$, $F_3 = 5N$, $F_4 = 3N$ şi $F_5 = 4N$ şi se des-

compun reacțiunile din punctele A, D și F, respectiv după direcțiile $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ și EF și perpendiculare pe ele. Acestea din urmă se obțin prin cîte o ecuație de momente a elementelor 2,4 și 5 față de punctele B, C și E. Se obține: $F''_{21} = 1{,}42$ N, $F''_{40} = 1{,}5$ N, $F''_{50} = 1{,}36$ N.

Se intersectează apoi prelungirile direcțiilor $\overline{AB}$ și $\overline{EF}$ în punctul S_3 și se determină componenta reacțiunii din D, F'_{40}, scriind o ecuație de momente față de punctul S_3. Această ecuație este

$$-8{,}5\,F''_{21} + 6{,}2\,F_2 + 0{,}55\,F_3 - 2{,}3\,F''_{40} + 0{,}8\,F_4 - 7\,F_5 + \\ + 11{,}2\,F''_{50} + 2{,}3\,F'_{40} = 0.$$

Rezultă $F'_{40} = 2$ N.

Pentru găsirea componentelor $\overline{F}'_{50}$ și $\overline{F}'_{21}$ din punctele F și A se construiește poligonul forțelor pentru întreaga grupă după ecuația

$$\overline{F}''_{21} + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 + \overline{F}''_{40} + \overline{F}'_{40} + \overline{F}_5 + \overline{F}''_{50} + \overline{F}'_{21} + \overline{F}'_{50} = \overline{0},$$

de unde rezultă

$$F'_{50} = 0{,}95\text{N} \text{ și } F'_{21} = 3{,}3\text{N}.$$

Construcția este arătată în figura 4 prin poligonul I. Se consideră apoi manivela 1, la care rezultă forța de echilibrare F_{e_1}, scriind o ecuație de momente pentru această manivelă față de punctul 0 și observînd egalitatea

$$\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}.$$

Această ecuație este

$$2{,}8\,F'_{12} - 2{,}8\,F''_{12} - 1{,}9\,F_1 + 4\,F_{e_1} = 0.$$

Rezultă

$$F_{e_1} = 0{,}585 \text{ N}.$$

Pentru găsirea reacțiunii $\overline{F}_{10}$ se construiește poligonul forțelor după ecuația

$$\overline{F}_{10} + \overline{F}'_{12} + \overline{F}''_{12} + \overline{F}_1 + \overline{F}_{e_1} = \overline{0}.$$

pentru manivelă și se găsește $F_{10} = 3$N. Construcția este arătată în poligonul VI.

b) Se consideră în mod fictiv că manivela conducătoare ar fi elementul 5. Atunci mecanismul este de clasa a 2-a și se rezolvă în ordinea 1—2, 3—4.

Reacțiunile diadei 1—2 în punctele O și B se descompun respectiv după direcțiile $\overline{OA}$ și $\overline{AB}$ și perpendiculare pe ele. Ultimele componente se găsesc scriind pentru elementele 1 și 2 cîte o ecuație de momente față de punctul A.

Rezultă

$$F''^{*}_{10} = 1{,}9 \text{ N}, \quad F''^{*}_{23} = 1{,}5 \text{ N}.$$

Pentru celelalte reacţiuni se desenează poligonul forţelor pentru toată grupa după ecuaţia

$$\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}''^{\star}_{10} + \overline{F}''^{\star}_{23} + \overline{F}'^{\star}_{10} + \overline{F}'^{\star}_{23} = \overline{0},$$

de unde rezultă

$$F''^{\star}_{23} = 5\text{N} \quad \text{şi} \quad F'^{\star}_{10} = 2{,}8\ \text{N}.$$

Construcţia grafică este arătată în poligonul II.

Diada 3—4 se rezolvă în mod similar.

Reacţiunea $F''^{\star}_{40}$ se determină ca mai sus şi se găseşte $F''^{\star}_{40} = 1{,}5$ N. În ecuaţia de momente a elementului 3 faţă de punctul C, reacţiunea din B, $\overline{F}^{\star}_{32} = -\overline{F}^{\star}_{23} = -(\overline{F}''^{\star}_{23} + \overline{F}'^{\star}_{23})$, intră ca o forţă cunoscută acum. Această ecuaţie este

$$-2{,}4\, F'^{\star}_{32} + 4{,}3\ F''^{\star}_{32} + 2{,}3\ F_3 = 4{,}1\ F''^{\star}_{35}.$$

Rezultă $F''^{\star}_{35} = 1{,}815$ N.

Reacţiunile $F'^{\star}_{40}$ şi $F'^{\star}_{35}$ se găsesc din poligonul forţelor (III) scris pentru toată grupa:

$$\overline{F}''^{\star}_{32} + \overline{F}'^{\star}_{32} + \overline{F}_3 + \overline{F}_4 + \overline{F}''^{\star}_{35} + \overline{F}''^{\star}_{40} + \overline{F}'^{\star}_{35} + \overline{F}'^{\star}_{40} = \overline{0}.$$

Rezultă $F'^{\star}_{35} = 2\text{N}$, $F'^{\star}_{40} = 0{,}35$ N.

Se scrie apoi ecuaţia de momente pentru elementul 5, faţă de punctul F, pentru găsirea forţei de echilibrare fictive $F^{\star}_{e_5}$. Aceasta este

$$-4{,}85\, F''^{\star}_{53} + 1{,}3\ F'^{\star}_{53} + 2{,}6\ F_5 = 5F^{\star}_{e_5}.$$

Rezultă $F^{\star}_{e_5} = 0{,}84$ N.

Reacţiunea din punctul F, $\overline{F}^{\star}_{50}$, se găseşte dintr-un poligon al forţelor pentru elementul 5 (VIII):

$\overline{F}^{\star}_{50} + \overline{F}_5 + \overline{F}''^{\star}_{53} + \overline{F}'^{\star}_{53} + \overline{F}^{\star}_{e_5} = \overline{0}$, de unde se găseşte $F^{\star}_{50} = 1{,}4$ N.

c) Se aplică apoi asupra elementului 1 o forţă de echilibrare $\overline{F}^{\star\star}_{e_1}$ convenţională, reprezentată în figura 4 prin 3 cm lungime. Se găsesc reacţiunile în bare datorită acestei forţe, construind poligonul forţelor în noduri după metoda Cremona, aşa cum este arătat în poligonul IV.

Pentru uşurinţa urmăririi desenului, eforturile din bare sînt notate acum cu doi indici, dintre care unul reprezintă punctul la care se scrie echilibrul forţelor, iar celălalt bara care acţionează asupra articulaţiei considerate. În paranteză este trecută şi calitatea efortului (tensiune sau compresiune).

Rezolvarea se face în ordinea A, B, C, E, unde la E s-a mai adăugat o necunoscută în plus $\overline{F}^{\star\star}_{e_5}$.

d) Se determină scara poligonului IV, astfel încît

$-\overline{F}^{\star\star}_{e_5} = \overline{F}^{\star\star}_{e_5}$, cu $F^{\star}_{e_5} = 0{,}204$ N. Se găseşte $\mu_F = 0{,}204\ \dfrac{\text{N}}{\text{cm}}$.

e) *Verificări.* Aşa cum s-a arătat mai sus, reacţiunile reale se vor găsi prin însumarea vectorială a reacţiunilor găsite la b) cu cele de la c), citite la scara precizată în d). Se fac succesiv următoarele verificări, ţinînd cont de reacţiunile reale determinate la a):

— Se observă că dacă se consideră scara forţelor din poligonul IV, ca la d), se obţine $F_{e_1} = F^{**}_{e_1} = 0{,}585$ N.

— reacţiunea din punctul D se verifică după ecuaţia următoare (poligonul vectorial IX):

$$\overline{F}'_{40} + \overline{F}''_{40} = \overline{F}'^{\star}_{40} + F'''^{\star}_{40} + \overline{F}^{\star\star}_{40}, \text{ unde } \overline{F}^{\star\star}_{40} = -\overline{F}_{04(t)} = \overline{F}_{c4(t)};$$

— reacţiunea din punctul A se verifică după ecuaţia (poligonul vectorial X)

$$\overline{F}'_{10} + \overline{F}''_{10} = \overline{F}'''^{\star}_{10} + \overline{F}'^{\star}_{10} + \overline{F}^{\star\star}_{10} \text{ unde } \overline{F}^{\star\star}_{10} = -\overline{F}_{10(t)} = \overline{F}_{A1(t)};$$

— reacţiunea din F se verifică după ecuaţia (poligonul vectorial XI)

$$\overline{F}'_{50} + \overline{F}''_{50} = \overline{F}^{\star}_{50} + \overline{F}^{\star\star}_{50}, \text{ unde } \overline{F}^{\star\star}_{50} = -\overline{F}_{F5(t)} = \overline{F}_{E5(t)}.$$

Note. 1. Eroarea relativă cea mai mare s-a obţinut în planşă pentru reacţiunea din punctul F (circa 3%). Erorile absolute sînt toate sub 0,05 N.

2. Nu s-au mai arătat în planşă toate verificările care s-au făcut (de exemplu echilibrul reacţiunilor la batiu cu forţele aplicate pentru mecanismul considerat în întregime, atît pentru cazul real, cît şi pentru cîmpul *b*).

3. În acest exemplu, reacţiunile au fost notate cu F în loc de $\overline{R}$, ca la paragraful 2. Acest lucru nu este esenţial.

4. REZOLVAREA UNUI MECANISM COMPLEX

Se propune acum rezolvarea cinetostaticii mecanismului de clasa a 5-a din figura 2, unde fiecare element este presupus încărcat cu cîte o forţă care include şi inerţia (pentru simplificarea desenului, aceste forţe nu au mai fost desenate).

Rezolvarea se va face în modul următor:

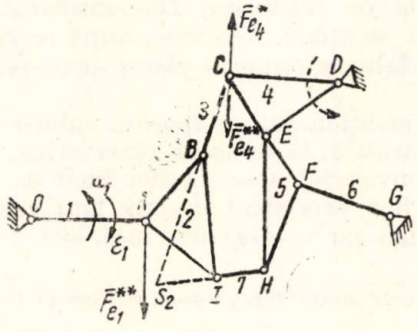


Fig. 2

— se observă că, dacă se alege ca element conducător placa 4, mecanismul este de clasa a 3-a (diada 5—6 şi triada 1—2—3—7);

— se determină reacțiunile în cuplurile cinematice în această situație (începînd, bineînțeles, cu baza ternară) și considerînd ca necunoscută forța de echilibrare $\overline{F}^{*}_{e_4}$;

— se aplică apoi pe manivela 1 forța arbitrară $\overline{F}^{**}_{e_1}$, găsindu-se alt cîmp de reacțiuni. Acest lucru se face cu ușurință dacă se observă că eforturile în barele 3 și 7 sînt pe direcția barelor, că plăcile 2, 4 și 5 pot fi considerate ca fiind constituite și din bare care formează un perimetru triunghiular și că efortul din bara 1 se găsește cu ușurință dacă se scrie echilibrul plăcii 2 față de punctul S_2 (vezi fig. 2), forța $\overline{F}^{**}_{e_1}$ fiind cunoscută. După aceea se scrie echilibrul nodurilor, succesiv, în ordinea A, B, I (rezultă și o condiție de verificare), H, F, E, C; la acest ultim punct se consideră și necunoscuta $\overline{F}^{**}_{e_4}$;

— se pune apoi condiția de scară pentru poligonul precedent, astfel ca $\overline{F}^{**}_{e_4} = -\overline{F}^{*}_{e_4}$, și se însumează apoi cele două cîmpuri găsite conform algoritmului.

Notă

Posibilitatea rezolvării cîmpului de forțe, admițînd o forță de echilibrare arbitrară $\overline{F}^{**}_{e_1}$ pe elementul conducător (real) în modul arătat mai sus, rezultă ca o consecință a valorii unitare a gradului de mobilitate.

Astfel, ca un nou exemplu, pentru mecanismul de clasa a 4-a din figura 3 se va începe rezolvarea tot prin scrierea unei ecuații de momente a plăcii 2 față de S_2, de unde se determină efortul din bara 1 etc.

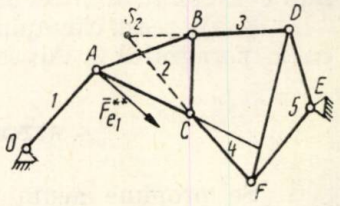


Fig. 3

5. CONCLUZII

În concluzie, prin procedeul descris se pot determina reacțiunile grupelor cinematice la batiu prin suprapunerea celor două cîmpuri de forțe arătate. Bineînțeles, celelalte reacțiuni interioare elementelor mobile care sînt în echilibru dinamic cu reacțiunile la batiu, vor satisface aceluiași algoritm de rezolvare. Demonstrarea riguroasă a acestei afirmații nu este însă esențială, deoarece, după ce reacțiunile la batiu au fost determinate, celelalte reacțiuni se găsesc de obicei prin metode directe suficient de simple.

În fine, se mai menționează că ipoteza valorii unitare a gradului de mobilitate poate fi părăsită, la fel ca în cinematică, dacă se dă întregului mecanism mișcări convenabil alese, astfel încît să se poată aplica prin suprapunerea mișcărilor procedeul descris mai sus.

Această problemă nu se dezvoltă însă aici.

Primită la redacție la 14 aprilie 1967; o nouă versiune la 11 ianuarie 1968.

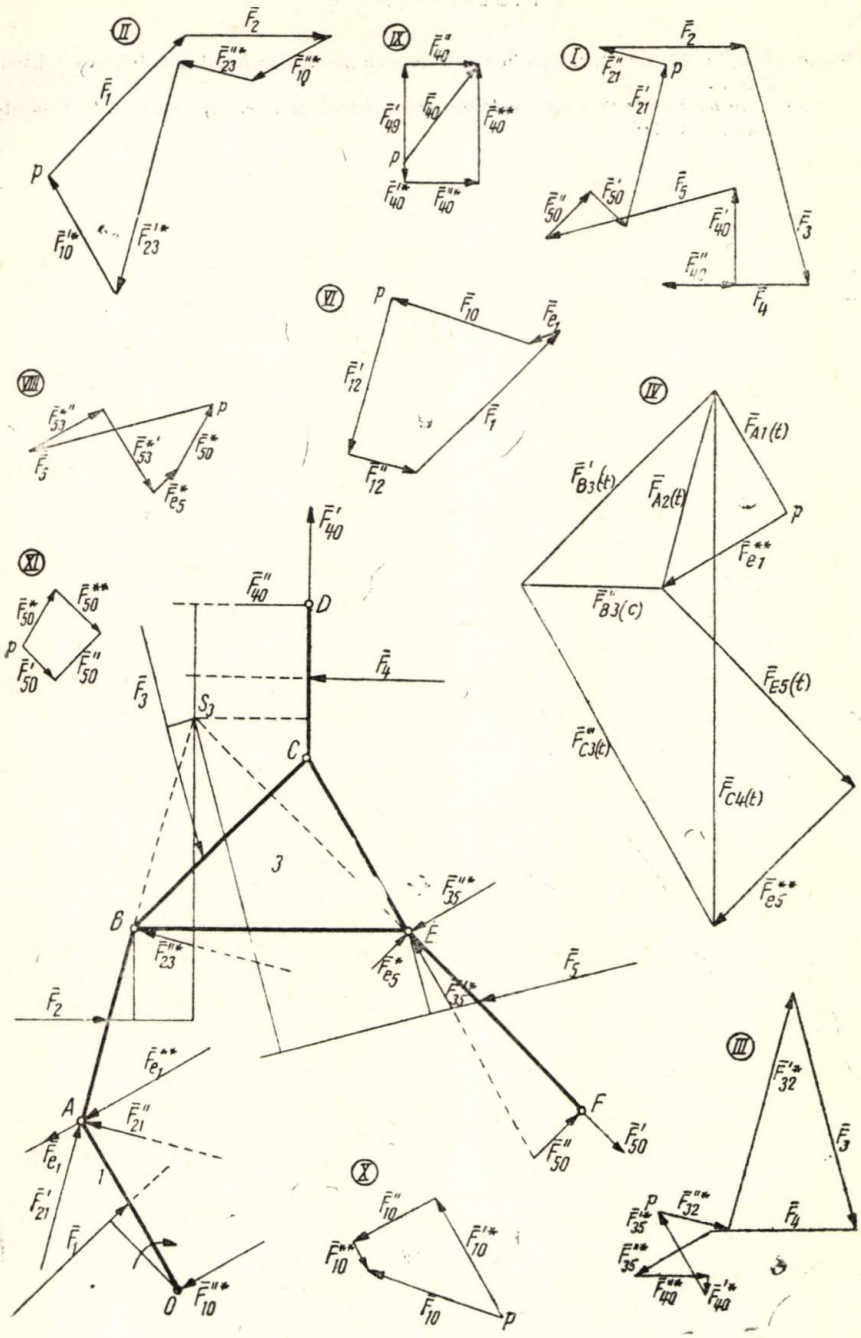


Fig. 4

BIBLIOGRAFIE

N. I. MANOLESCU, D. MAROŞ, *Cinetostatica şi dinamica mecanismelor*, Edit. tehnică, Bucureşti 1958.

A. ORĂNESCU, *O metodă generală pentru determinarea vitezelor şi acceleraţiilor*, Bul. Inst. politehnic Galaţi, I (1963).

STUDIUL CINEMATIC AL MECANISMELOR SPAȚIALE CU MAI MULTE GRADE DE MOBILITATE CU AJUTORUL FUNCȚIILOR DE TRANSMITERE

de I. SZÉKELY și V. HANDRALUCA
Institutul politehnic Cluj

621.01: 531.1

Pornind de la funcțiile de poziție în forma implicită, determinate cu ajutorul metodei Mangeron-Drăgan, se calculează funcțiile de transmitere de ordinul întîi și doi la mecanismele spațiale cu mai multe grade de mobilitate.

În lucrarea de față se extinde folosirea funcțiilor de transmitere [7], [8] la determinarea caracteristicilor cinematice ale mecanismelor spațiale cu mai multe grade de mobilitate, determinate de coordonatele lagrangiene q_j (unde $j = 1,2,\ldots,r$). Metoda folosită presupune că mecanismele conțin numai cuple cinematice de clasa a cincea. Dacă însă în mecanismul ce se studiază intră cuple cinematice de clase mai mici decît cinci, atunci acestea se înlocuiesc, în sensul lui Mangeron-Drăgan [1], [2], [4], cu elemente fictive și cuple cinematice de clasa a cincea. Determinarea caracteristicilor cinematice ale mecanismelor spațiale se face în următoarea succesiune : se leagă un sistem de axe, după o regulă riguros stabilită [1], [3], [4], de fiecare element real sau fictiv al mecanismului. Se scrie pentru fiecare circuit independent al lanțului cinematic care compune mecanismul cîte o ecuație tensorială echivalentă [3], [4].

Ecuațiile de acest fel stabilesc legături între coordonatele lagrangiene q_j ale mecanismului și parametrii ce caracterizează pozițiile relative ale elementelor. Rezolvînd aceste ecuații tensoriale echivalente, se obțin funcțiile de poziție în mișcarea relativă sub forma implicită [7], [8].

$$\rho_{k,k-1}\,(q_1\,,\ \ldots,\ q_j\ ,\ldots,\ q_r,\ q_{k,k-1}) = 0, \tag{1}$$

unde

$q_1\,,\ldots,\ q_r$ sînt cele r coordonate lagrangiene ale mecanismului în studiu (unghiurile sau distanțele ce poziționează cele r elemente motoare față de batiu),

$q_{k,k-1}$ parametrul ce caracterizează mișcarea elementului k față de elementul $k-1$.

Derivînd relaţia (1) în raport cu timpul avem

$$\sum_{j=1}^{j=r} \frac{\partial \rho_{k,k-1}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \rho_{k,k-1}}{\partial q_{k,k-1}} \dot{q}_{k,k-1} = 0. \tag{2}$$

Introducem notaţia

$$\dot{\mathcal{R}}^j_{k,k-1} = -\frac{\dfrac{\partial \rho_{k,k-1}}{\partial q_j}}{\dfrac{\partial \rho_{k,k-1}}{\partial q_{k,k-1}}}, \tag{3}$$

unde

$\dot{\mathcal{R}}^j_{k,k-1}$ sînt funcţii de transmitere relative de ordinul unu. Acestea caracterizează din punctul de vedere al vitezelor, mişcarea relativă a elementului k faţă de elementul $k-1$.

Înlocuind relaţia (3) în egalitatea (2), obţinem

$$\dot{q}_{k,k-1} = \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}^j_{k,k-1}. \tag{4}$$

Ataşînd versorul $\bar{e}_{k,k-1}$ axei dirijate de-a lungul cuplei de clasa a cincea care leagă elementul k de elementul $k-1$, se obţine vectorul vitezei relative $\bar{\dot{q}}_{k,k-1}$ cu ajutorul relaţiei

$$\bar{\dot{q}}_{k,k-1} = \bar{e}_{k,k-1} \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}^j_{k,k-1}. \tag{5}$$

Pentru determinarea vitezei unghiulare absolute $\dot{q}_k$ a elementului k se utilizează relaţia [6]

$$\dot{q}_k = \dot{q}_j + \dot{q}_{i,j} + \dot{q}_{i+1,i} \dot{q}_{i+2,i+1} + \ldots + \dot{q}_{k,k-1}, \tag{6}$$

unde i indică elementul legat nemijlocit de elementul motor j.

Din relaţia (6) rezultă că pentru determinarea vitezei absolute se alege din cele r elemente motoare unul arbitrar şi se scrie ecuaţia (6) parcurgînd lanţul cinematic corespunzător de la elementul motor j, arbitrar ales, pînă la elementul condus k (trecînd succesiv prin elementele i, $i+1$, $i+2$, ...). Subliniem faptul că, deşi relaţia (6) se scrie pentru cazul unui lanţ cinematic care leagă doar unul dintre elementele motoare cu elementul condus k, totuşi această relaţie ţine seama de influenţa pe care o exercită celelalte $r-1$ elemente motoare asupra elementului k, deoarece vectorii $\bar{\dot{q}}_{i,j}, \ldots, \bar{\dot{q}}_{k,k-1}$ se obţin din ecuaţia (5), în care intră toate cele j elemente motoare.

Derivînd (5) în raport cu timpul, obţinem

$$\bar{\ddot{q}}_{k,k-1} = \bar{e}_{k,k-1} \left(\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}^j_{k,k-1} + \sum_{\substack{m=1;n=1 \\ m \neq n}}^{m=r;n=r} \dot{q}_m \dot{q}_n \dot{\mathcal{R}}^{m,n}_{k,k-1} + \sum_{j=1}^{j=r} \ddot{q}_j \dot{\mathcal{R}}^j_{k,k-1} \right), \tag{7}$$

unde s-a notat

$$\ddot{\mathcal{R}}^{j}_{k,k-1} = -\frac{\dfrac{\partial^2 \rho_{k,k-1}}{\partial q_j^2} + 2\dfrac{\partial^2 \rho_{k,k-1}}{\partial g_j\, \partial q_{k,k-1}}\dot{\mathcal{R}}^{j}_{k,k-1} + \dfrac{\partial^2 \rho_{k,k-1}}{\partial q^2_{k,k-1}}(\dot{\mathcal{R}}^{j}_{k,k-1})^2}{\dfrac{\partial \rho_{k,k-1}}{\partial q_{k,k-1}}}, (j=1,\ldots,r, \tag{8}$$

$$\ddot{\mathcal{R}}^{m,n}_{k,k-1} = -\frac{\dfrac{\partial^2 \rho_{k,k-1}}{\partial q_m \partial q_n} + \dfrac{\partial^2 \rho_{k,k-1}}{\partial q_n \partial q_{k,k-1}}\dot{\mathcal{R}}^{m}_{k,k-1} + \dfrac{\partial^2 \rho_{k,k-1}}{\partial q_m \partial q_{k,k-1}}\dot{\mathcal{R}}^{n}_{k,k-1} + \dfrac{\partial^2 \rho_{k,k-1}}{\partial q^2_{k,k-1}}\dot{\mathcal{R}}^{m}_{k,k-1}\dot{\mathcal{R}}^{n}_{k,k-1}}{\dfrac{\partial \rho_{k,k-1}}{\partial \rho_{k,k-1}}},$$

$$\begin{aligned} m &= 1, \ldots, r, \\ n &= 1, \ldots, r, \\ m &\neq n. \end{aligned} \tag{9}$$

Ecuaţia (7) se mai poate scrie sub o formă convenţională astfel:

$$\ddot{q}_{k,k-1} = -\bar{e}_{k,k-1}\frac{\left[\sum\limits_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\left(\dfrac{\partial}{\partial q_j} + \dot{\mathcal{R}}^{j}_{k,k-1}\dfrac{\partial}{\partial q_{k,k-1}}\right)\right]^2 \rho_{k,k-1}}{\dfrac{\partial \rho_{k,k-1}}{\partial q_{k,k-1}}} + \bar{e}_{k,k-1}\sum_{j=1}^{j=r}\ddot{q}_j\dot{\mathcal{R}}^{j}_{k,k-1}. \tag{10}$$

Acceleraţia unghiulară absolută a elementului k se determină cu ajutorul relaţiei [6].

$$\ddot{\bar{q}}_k = \ddot{\bar{q}}_j + \ddot{\bar{q}}_{i,j} + \ddot{\bar{q}}_{i+1,i} + \ldots + \ddot{\bar{q}}_{k,k-1} + \dot{\bar{q}}_j \times \dot{\bar{q}}_{i,j} + \dot{\bar{q}}_{i+1} \times \dot{\bar{q}}_{i+2,i+1} + \ldots + \dot{\bar{q}}_{k-1} \times \dot{\bar{q}}_{k,k-1}. \tag{11}$$

Ţinînd seama de relaţia (6), ecuaţia (11) devine

$$\ddot{\bar{q}}_k = \ddot{\bar{q}}_j + \ddot{\bar{q}}_{i,j} + \ldots + \ddot{\bar{q}}_{k,k-1} + \dot{\bar{q}}_j \times \dot{\bar{q}}_{i,j} + (\dot{\bar{q}}_j + \dot{\bar{q}}_{i,j}) \times \dot{\bar{q}}_{i+1,i} + \ldots + (\dot{\bar{q}}_j + \dot{\bar{q}}_{i,j} + \ldots + \dot{\bar{q}}_{k,k-1}) \times \dot{\bar{q}}_{k,k-1}. \tag{12}$$

Înlocuind expresia (5), în relaţia (6) avem

$$\dot{q}_k = \dot{q}_1(\bar{e}_1 + \bar{e}_{21}\dot{\mathcal{R}}^{1}_{21} + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\dot{\mathcal{R}}^{1}_{k,k-1}) + \dot{q}_2(\bar{e}_{21}\dot{\mathcal{R}}^{2}_{21} + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\dot{\mathcal{R}}^{2}_{k,k-1}) + \ldots + \dot{q}_r(\bar{e}_{21}\dot{\mathcal{R}}^{r}_{21} + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\dot{\mathcal{R}}^{r}_{k,k-1}). \tag{13}$$

Considerînd funcţiile de transmitere ca vectori [8], relaţia (13) va avea forma

$$\dot{\bar{q}}_k = \dot{q}_1(\bar{e}_1 + \dot{\bar{\mathcal{R}}}^{1}_{21} + \ldots + \dot{\bar{\mathcal{R}}}^{1}_{k,k-1}) + \dot{q}_2(\dot{\bar{R}}^{2}_{21} + \ldots + \dot{\bar{\mathcal{R}}}^{2}_{k,k-1}) + \ldots + \dot{q}_r(\dot{\bar{\mathcal{R}}}^{r}_{21} + \ldots + \dot{\bar{\mathcal{R}}}^{r}_{k,k-1}). \tag{14}$$

Înlocuind relația (7) în relația (12), se obține

$$\ddot{\bar{q}}_k = \ddot{q}_1\bar{e}_1 + \bar{e}_{21}\left(\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j^2\,\ddot{\mathcal{R}}_{21}^j + \sum_{\substack{m=1;n=1\\m\neq n}}^{m=r;n=r}\dot{q}_m\dot{q}_n\,\ddot{\mathcal{R}}_{21}^{m,n} + \sum_{j=1}^{j=r}\ddot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^j\right) + \ldots +$$

$$+ \bar{e}_{k,k-1}\left(\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j^2\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j + \sum_{\substack{m=1;n=1\\m\neq n}}^{m=r;n=r}\dot{q}_m\dot{q}_n\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^{m,n} + \sum_{j=1}^{j=r}\ddot{q}_j\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j\right) +$$

$$+ \dot{q}_1\bar{e}_1 \times \bar{e}_{21}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\dot{\mathcal{R}}_{21}^j + \left(\dot{q}_1\bar{e}_1 + \bar{e}_{21}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\dot{\mathcal{R}}_{21}^j\right)\times\bar{e}_{32}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{32}^j +$$

$$+ \left(\dot{q}_1\bar{e}_1 + \bar{e}_{21}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^j + \bar{e}_{32}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{32}^j\right)\times\bar{e}_{43}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{43}^j + \ldots +$$

$$+ \left(\dot{q}_1\bar{e}_1 + \bar{e}_{21}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^j + \ldots + \bar{e}_{k-1,k-2}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k-1,k-2}^j\right)\times$$

$$\times\,\bar{e}_{k,k-1}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-k}^j$$

sau

$$\ddot{\bar{q}}_k = \ddot{q}_1\,(\bar{e}_1 + \bar{e}_{21}\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^1 + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^1) + \ddot{q}_2\,(\bar{e}_{21}\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^2 + \ldots +$$

$$+ \bar{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^2) + \ldots + \ddot{q}_r\,(\bar{e}_{21}\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^r + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^r) +$$

$$+ \dot{q}_1^2\,(\bar{e}_{21}\,\ddot{\mathcal{R}}_{21}^1 + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^1) + \dot{q}_2^2\,(\bar{e}_{21}\,\ddot{\mathcal{R}}_{21}^2 + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^2) +$$

$$+ \ldots + \dot{q}_r^2\,(\bar{e}_{21}\,\ddot{\mathcal{R}}_{21}^r + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^r) + \qquad (15)$$

$$+ \sum_{\substack{m=1;n=1\\m\neq n}}^{m=r;n=r}\dot{q}_m\dot{q}_n\,(\bar{e}_{21}\,\ddot{\mathcal{R}}_{21}^{m,n} + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^{m,n}) +$$

$$+ \dot{q}_1\bar{e}_1 \times \left(\bar{e}_{21}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\dot{\mathcal{R}}_{21}^j + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j\right) +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^j\right)\bar{e}_{21}\times\left(\bar{e}_{32}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{32}^j + \ldots + \bar{e}_{k,k-1}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j + \ldots +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k-1,k-2}^j\right)\bar{e}_{k-1,k-2}\times\bar{e}_{k,k-1}\sum_{j=1}^{j=r}\dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j\cdot\right.$$

Introducem următoarele notații:

$$\dot{\overline{\mathcal{R}}}_k^1 = \overline{e}_1 + \overline{e}_{21}\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^1 + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^1,$$

$$\dot{\overline{\mathcal{R}}}_k^j = \overline{e}_{21}\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^j + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j;\ j = 2,3,\ldots,r, \tag{16}$$

$$\ddot{\overline{\mathcal{R}}}_k^j = \overline{e}_{21}\,\ddot{\mathcal{R}}_{21}^j + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j;\ j = 1,2,\ldots,r,$$

$$\ddot{\overline{\mathcal{R}}}_k^{m,n} = \overline{e}_{21}\,\ddot{\mathcal{R}}_{21}^{m,n} + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^{m,n},$$

înlocuind valorile funcțiilor de transmitere vectoriale date de relațiile (16) în ecuațiile (14) și (15), avem

$$\dot{\overline{q}}_k = \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j\,\dot{\overline{\mathcal{R}}}_k^j, \tag{17}$$

$$\ddot{\overline{q}}_k = \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_k^2\,\ddot{\overline{\mathcal{R}}}_k^j + \sum_{\substack{m=1;n=1\\ m\neq n}}^{m=r;n=r} \dot{q}_m\dot{q}_n\,\ddot{\overline{\mathcal{R}}}_k^{m,n} + \sum_{j=1}^{j=r} \ddot{q}_j\,\dot{\overline{\mathcal{R}}}_k^j +$$

$$+ \dot{q}_1\overline{e}_1 \times \left(\overline{e}_{21}\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^j + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j\right) + \tag{18}$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{21}^j\right)\overline{e}_{21} \times \left(\overline{e}_{32}\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{32}^j + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j\right) +$$

$$+ \ldots + \left(\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k-1;k-2}^j\right)\overline{e}_{k-1,k-2} \times \overline{e}_{k,k-1}\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j.$$

Cu ajutorul relațiilor (17) și (18) se poate determina viteza și accelerația unghiulară a oricărui element al mecanismului dacă se cunosc funcțiile de transmitere de ordinul unu și doi, atît relative, cît și absolute.

Funcțiile de transmitere relative sînt mărimi scalare și se calculează cu ajutorul formulei (3), iar cele absolute sînt mărimi vectoriale date de relațiile (16).

În caz că mecanismul spațial are un singur grad de mobilitate, atunci relațiile (17) și (18) devin

$$\dot{\overline{q}}_k = \dot{q}_1\,\dot{\overline{\mathcal{R}}}_k, \tag{19}$$

$$\ddot{\overline{q}}_k = \dot{q}_1^2\,\ddot{\overline{\mathcal{R}}}_k + \ddot{q}_1\,\dot{\overline{\mathcal{R}}}_k, \tag{20}$$

în care

$$\dot{\overline{\mathcal{R}}}_k = \overline{e}_1 + \overline{e}_{21}\,\dot{\overline{\mathcal{R}}}_{21} + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1} = \overline{e}_1 + \dot{\overline{\mathcal{R}}}_{21} + \ldots + \dot{\overline{\mathcal{R}}}_{k,k-1}, \tag{21}$$

$$\ddot{\overline{\mathcal{R}}}_k = \overline{e}_{21}\,\ddot{\mathcal{R}}_{21} + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\,\ddot{\mathcal{R}}_{k,k-1} + \overline{e}_1 \times (\overline{e}_{21}\,\dot{\mathcal{R}}_{21} + \ldots +$$

$$+ \overline{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}) + \dot{\mathcal{R}}_{21}\overline{e}_{21} \times (\overline{e}_{32}\,\dot{\mathcal{R}}_{32} + \ldots + \overline{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}) + \ldots +$$

$$+ \dot{\mathcal{R}}_{k-1,k-2}\,\overline{e}_{k-1,k-2} \times \overline{e}_{k,k-1}\,\dot{\mathcal{R}}_{k,k-1} = \ddot{\overline{\mathcal{R}}}_{21} + \ldots + \ddot{\overline{\mathcal{R}}}_{k,k-1} + \overline{e}_1 \times \tag{22}$$

$$\times (\dot{\overline{\mathcal{R}}}_{21} + \ldots + \dot{\overline{\mathcal{R}}}_{k,k-1}) + \dot{\overline{\mathcal{R}}}_{21} \times (\dot{\overline{\mathcal{R}}}_{32} + \ldots + \dot{\overline{\mathcal{R}}}_{k,k-1}) + \ldots +$$

$$+ \dot{\overline{\mathcal{R}}}_{k-1,k-2} \times \dot{\overline{\mathcal{R}}}_{k,k-1}.$$

În caz că mecanismul este plan şi are un singur grad de mobilitate, relaţiile (17) şi (18) vor avea forma

$$\dot{q}_k = q_1 \dot{\mathcal{R}}_k ,$$

$$\ddot{q}_k = \dot{q}_1^2 \ddot{\mathcal{R}}_k + \ddot{q}_1 \dot{\mathcal{R}}_k ,$$

unde

$$\dot{\mathcal{R}}_k = - \frac{\dfrac{\partial \rho_k}{\partial q_1}}{\dfrac{\partial \rho_k}{\partial q_k}}, \tag{23}$$

$$\ddot{\mathcal{R}}_k = - \frac{\dfrac{\partial^2 \rho_k}{\partial q_1^2} + 2 \dfrac{\partial^2 \rho_k}{\partial q_1 \partial q_k} \dot{\mathcal{R}}_k + (\dot{\mathcal{R}}_k)^2 \dfrac{\partial^2 \rho_k}{\partial q_k^2}}{\dfrac{\partial \rho_k}{\partial q_k}} . \tag{24}$$

Admitem că mişcarea mecanismului se compune din mişcarea permanentă [5] sau de bază corespunzătoare $\dot{q}_j = \text{const}$, $\ddot{q}_j = 0$, precum şi din mişcarea adiţională caracterizată prin $\dot{q}_j = 0$; $\ddot{q}_j \neq 0$. În acest caz, acceleraţia totală a elementului k se determină cu ecuaţia

$$\ddot{q}_k = \ddot{q}_k^p + \ddot{q}_k^a , \tag{25}$$

unde

q_k^p, q_k^a sînt acceleraţiile corespunzătoare mişcărilor permanente, respectiv adiţionale, determinate de relaţiile

$$\ddot{q}_k^p = \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j^2 \ddot{\mathcal{R}}_k^j + \sum_{\substack{m=1;n=1 \\ m \neq n}}^{m=r;n=r} \dot{q}_m \dot{q}_n \ddot{\mathcal{R}}_k^{m,n} + \dot{q}_1 \bar{e}_1 \times \left(\bar{e}_{21} \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}_{21}^j + \ldots + \right.$$

$$\left. + \bar{e}_{k,k-1} \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j \right) + \left(\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}_{21}^j \right) \bar{e}_{21} \times \left(\bar{e}_{32} \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}_{32}^j + \right. \tag{26}$$

$$\left. + \ldots + \bar{e}_{k,k-1} \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^j \right) + \left(\sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}_{k-1,k-2}^j \right) \bar{e}_{k-1,k-2} \times \bar{e}_{k,k-1} \sum_{j=1}^{j=r} \dot{q}_j \dot{\mathcal{R}}_{k,k-1}^i ,$$

$$\ddot{q}_k^a = \sum_{j=1}^{j=r} \ddot{q}_j \dot{\mathcal{R}}_k^j . \tag{27}$$

CONCLUZII

Metoda determinării caracteristicilor cinematice ale mecanismelor folosind funcţiile de transmitere simplifică mult calculele prin faptul că la efectuarea lor se derivează parţial funcţii în forme implicite.

Faptul că folosirea funcţiilor de transmitere permite determinarea mişcării absolute a mecanismului ca suma a două mişcări, permanente şi adiţionale, creează posibilitatea de determinare la început a vitezelor

și accelerațiilor elementelor în funcție de coordonata generalizată și nu în funcție de timp. Pe urmă, ținînd seamă de forțele ce acționează asupra elementelor mecanismului, se determină legea de variație reală a coordonatei generalizate în funcție de timp. În fine, prin intermediul relației (25) se obține accelerația reală a unui element oarecare k.

Primită la redacție la 15 februarie 1967

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, C. Drăgan, *Asupra unei noi metode tensoriale de studiu a mecanismelor*, Bulet. Inst. politehnic Iași, *III*, (VIII), *1—2* (1957).
2. — *Aplicarea unei noi metode tensoriale la studiul cinematic al mecanismului bielă-manivelă spațial*, Bulet. Instit. politehnic Iași, **IV (VIII)**, *1—2* (1958).
3 — *Tensorii de poziție și tensorii de viteză în mecanismele spațiale cu culisă*, Bulet. Instit. politehnic Iași, **III (VII)**, *3—4* (1957).
4. — *Studiul cinematic al mecanismelor spațiale cu patru organe prin metoda matricealătensorială*, St. cerc. mec. apl., *6* (1961).
5. N. I. Manolescu, D. Maros, *Teoria mecanismelor și a mașinilor. Cinetostatica și dinamica*, București, Edit. tehnică, 1958.
6. R. Voinea, M. Atanasiu, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, București, Edit. tehnică, 1964.
7. I. Székely, V. Handraluca, *Studiul cinematic al mecanismelor plane cu mai multe grade de mobilitate cu ajutorul funcțiilor de transmitere*. Bulet. Instit. politehnic, Cluj, *8* (1965).
8. I. Székely, V. Handraluca, *Studiul cinematic al mecanismelor spațiale cu ajutorul funcțiilor de transmitere*, Bulet. Instit. politehnic Cluj, *9* (1966).

NOTE

CONSIDERAȚII VARIAȚIONALE ASUPRA PIERDERILOR DE ENERGIE ÎN CURGEREA LAMINARĂ A LICHIDELOR NEWTONIENE ÎN CONDUCTE RECTILINII DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

de MARIA ARSENIE și DUMITRU ARSENIE
Institutul politehnic Timișoara

532

În lucrare se dă o demonstrație a minimului absolut al pierderilor de energie în mișcarea laminară. Considerînd aceasta ca ipoteză se dă o demonstrație a relației cunoscute ce dă repartiția vitezei în secțiune.

1. Se fac la început cîteva considerații generale, necesare urmăririi mai ușoare a lucrării.

1.1. Se are în vedere curgerea fluidelor incompresibile, la care se presupune valabilă legea fundamentală a eforturilor de viscozitate, dată de Newton:

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}. \tag{1}$$

Modelul matematic al mișcării unor astfel de fluide este reprezentat de ecuațiile stabilite de Navier și Stokes:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} - \operatorname{grad} p - \eta \Delta^2 \vec{v}, \tag{2}$$

în care derivata din membrul stîng este o derivată totală (substanțială) în sistemul de reprezentare Euler.

Condițiile la limită obișnuite sînt:

— pe suprafețele solide viteza este nulă;

— pe suprafețele libere, eforturile de viscozitate sînt nule, iar presiunea pe aceste suprafețe variază după o lege cunoscută.

Unul dintre puținele cazuri în care s-a putut integra ecuația (2) este și cazul conductei rectilinii de secțiune circulară constantă, în care se pot face mari simplificări ținînd cont de caracterul axial-simetric al mișcării. În proiecție pe axa longitudinală a conductei, notînd cu y direcția radială,

ecuaţia (2) ia forma

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{gJ}{\nu}, \tag{3}$$

în care J este panta piezometrică şi ν coeficientul cinematic de viscozitate.

Rezolvînd o problemă Cauchy pentru ecuaţia (3) cu condiţiile la limită :

$$\left.\begin{aligned} &- \text{la } y = 0, \text{ corespunde } \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \ (u = u_{max}), \\ &- \text{la } y = r, \text{ să avem } u = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

se obţine legea de distribuţie a vitezelor în secţiune, exprimată prin ecuaţia unui paraboloid de revoluţie :

$$u = \frac{gJ}{4\nu}(r^2 - y^2). \tag{5}$$

Cu ajutorul relaţiei (5) se deduc şi următoarele relaţii importante :

$$Q = \int_0^r 2\pi y\, u\, dy = \frac{\pi}{8\nu} gJr^4, \tag{6}$$

$$u_{med} = \frac{Q}{\pi r^2} = \frac{gJ}{8\nu} r^2. \tag{7}$$

1.2. Formulele de mai sus permit şi o confirmare teoretică a ipotezei că în curgerea laminară din conducte circulare mişcarea se face în straturi cilindrice care îşi păstrează individualitatea (fluidul dintr-un strat nu trece în alte straturi) şi între care există eforturi tangenţiale de frecare vîscoasă. Această ipoteză se verifică experimental, de la acest model al mişcării provenind şi numele regimului de mişcare (*lamina* = strat). Confirmarea se face prin aceea că, folosind modelul mecanic al curgerii în straturi cilindrice coaxiale între care se dezvoltă eforturi de frecare vîscoasă şi aplicînd un procedeu de calcul energetic [4] (care se reproduce în esenţă), se ajunge la relaţia (7).

Forţele de frecare vîscoasă între două straturi cilindrice (suprafaţa de frecare fiind situată la distanţa y de axă), calculate pe o lungime unitară de conductă, sînt

$$F_y = 2\pi y \eta \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{8}$$

Deplasarea relativă a straturilor în unitatea de timp fiind $\frac{\partial u}{\partial y} dy$, rezultă că lucrul mecanic total pe unitatea de timp şi pe unitatea de lungime al forţelor de frecare vîscoasă va fi, ţinînd cont şi de (5),

$$P = \int_0^r 2\pi\eta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy = \frac{\pi\eta g^2 J^2 r^4}{8\nu^2}. \tag{9}$$

Egalînd pierderile de energie cu lucrul mecanic al forțelor vîscoase și ținînd cont că panta energetică, egală în cazul mișcării uniforme cu panta piezometrică, se obține prin împărțirea lui P cu greutatea lichidului în unitatea de timp și pe unitatea de lungime, rezultă

$$J = \frac{P}{\gamma Q} = \frac{gJ^2r^2}{8\nu u_{med}}, \tag{10}$$

adică tocmai relația (7).

2. În lucrarea de față se urmărește a se demonstra că în ipotezele de mai sus, la un debit constant, distribuția vitezei pe secțiune se face astfel încît pierderea de energie pe unitatea de timp să fie minimă și, deoarece debitul este constant, rezultă că și pierderea specifică de energie J este minimă. De asemenea se dă o demonstrație a formulei (5) care nu ține cont de ecuațiile Navier-Stokes, ci doar de legea frecării a lui Newton.

În concepția actuală curentă se consideră că în raport cu regimul turbulent (la care pierderea de energie specifică J este proporțională cu viteza medie la o putere mai mare ca unitatea) pierderea specifică de energie J este mai mică în regimul laminar (fiind proporțională cu viteza medie la puterea întîi), acest fapt fiind demonstrat teoretic și verificat experimental. În lucrare se arată că pierderea de energie specifică J este chiar un minim absolut și nu un minim în raport cu mișcarea turbulentă.

Cu alte cuvinte, nu există nici o repartiție imaginabilă a vitezei pe secțiune, exprimată matematic printr-o funcție continuă și cu derivata continuă care la un debit dat și la condițiile-limită date să conducă la o pierdere specifică de energie mai mică decît cea calculată cu repartiția vitezei din regimul laminar (în cazul lichidelor newtoniene).

Acest rezultat contravine oarecum intuiția, deoarece, pe baza faptului că în regim laminar (J proporțional cu u_{med} la puterea întîia) pierderea specifică de energie J este mai mică decît în regim turbulent (J proporțional cu u_{med} la puteri mai mari ca unitatea), s-ar părea că se pot imagina distribuții de viteze care să conducă la pierderi specifice mai mici (J proporțional cu u_{med} la puteri mai mici ca unitatea); pe baza demonstrației ce urmează se va vedea că aceasta nu este posibil.

3. Din punct de vedere matematic, problema ce trebuie rezolvată este o problemă de extremum condiționat. Se cere funcția $u_0(y)$, care este o extremală condiționată a funcționalei $P(u) = \int_0^r 2\pi\eta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dy$, cu condiția $Q(u) = \int_0^r 2\pi y u \, dy = \text{const.}$

Rezolvarea unei astfel de probleme se reduce la găsirea unei extremale necondiționate pentru funcționala

$$H(u) = P(u) - \lambda Q(u) = \int_0^r 2\pi y \left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \lambda u\right] dy. \tag{11}$$

Vom căuta acea extremală care satisface și condițiile la limită ale ecua-

ţiei (4). Pentru funcţionala (11) scriem ecuaţia lui Euler, care este satisfăcută în orice punct de-a lungul extremalei $u_0(y)$:

$$-2\pi\lambda y - 4\pi\eta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = 0. \tag{12}$$

Notînd derivatele în raport cu y prin accente, ecuaţia (12) se poate pune sub forma unei ecuaţii liniare şi neomogene de ordinul doi :

$$u'' + \frac{1}{y}u' + \frac{\lambda}{2\eta} = 0. \tag{13}$$

Cu substituţia $u'(y) = p(y)$ se ajunge la o ecuaţie liniară şi neomogenă de ordinul întîi, care se rezolvă uşor, ajungîndu-se la u dat de relaţia (5). Mai repede însă se arată că u din relaţia (5), care verifică şi condiţiile de margine (4), este o soluţie u_0 a ecuaţiei (13) :

$$u' = -\frac{gJ}{2\nu}y; \qquad u'' = -\frac{gJ}{2\nu}. \tag{14}$$

Introducîndu-se relaţia (14) în (13), se obţine pentru λ valoarea

$$\lambda = 2\rho gJ. \tag{15}$$

Conform teoremei de existenţă şi de unicitate Cauchy-Lipschitz, particularizată în cazul ecuaţiei diferenţiale liniare de ordinul doi, soluţia este unică pe tot intervalul pe care sînt continue funcţiile de y ce înmulţesc derivatele u' şi u''. Singurul punct în care se pune problema unicităţii este punctul $y = 0$, în care $1/y$ ia valoarea infinit şi care este eventual un punct singular. Se ştie însă că valorile integralelor P şi Q nu depind de valorile pe care funcţia $u(y)$ le ia într-un singur punct.

În punctul singular, funcţia obţinută se va prelungi prin continuitate (ceea ce corespunde şi intrepretării fizice), integrările făcîndu-se de la ε la r, şi apoi, punînd $\varepsilon \to 0$, se obţine soluţia căutată.

Pentru a constata natura extremumului (maxim sau minim) se aplică condiţia lui Legendre funcţionalei (11), derivînd de două ori expresia de sub semnul integral în raport cu u'. Deoarece se obţine astfel $4\eta\pi y \geqslant 0$ pe întreg domeniul de definiţie, rezultă că funcţia extremală $u(y)$, dată de relţia (5), este un minim necondiţionat pentru funcţionala (11).

4. CONCLUZII

În lucrare se dă o metodă de a deduce repartiţia vitezei în secţiune în cazul curgerii laminare plecînd de la ipoteza pierderilor specifice de energie minime în acest regim. Concordanţa cu valorile teoretice deduse din ecuaţiile Navier-Stokes constituie o demonstraţie a valabilităţii ipotezei făcute.

Se mai demonstrează că în regim laminar pierderea de energie este minimă, acest minim fiind un minim absolut şi nu numai un minim relativ la pierderea de energie din mişcarea turbulentă.

BIBLIOGRAFIE

1. D. Ghermani, *Hidraulica teoretică și aplicată*, București, 1945.
2. Cr. Mateescu, *Hidraulica*, București, 1963.
3. T. Oroveanu, *Mecanica fluidelor viscoase*, București, 1967.
4. Fl. Iorgulescu, *Metodă de calcul a pierderilor de sarcină în mișcarea laminară*, în Hidrotehnica, *1* (1953).
5. A. Haimovici, *Ecuațiile fizicii matematice și elemente de calcul variațional*, București, 1966.
6. D. V. Ionescu, *Ecuații diferențiale și integrale*, București, 1964.
7. N. Teodorescu, *Curs de ecuațiile fizicii matematice*, București, 1963.

NOTE

IMPORTANȚA PURITĂȚII LUBRIFIANTULUI ÎN REPRODUCTIBILITATEA MĂSURĂTORILOR COEFICIENTULUI DE FRECARE

de I. ILIUC
Centrul de mecanică a solidelor al Academei Republicii Socialiste România

531.4

Pentru studiul regimului de ungere-limită se folosește un lichid cu viscozitate mică, a cărui comportare la frecare este mult influențată de prezența substanțelor active. Se arată că substanțele active în cantități foarte mici (sub 0,001%) conduc la împrăștierea valorilor coeficientului de frecare. În cazul folosirii lichidelor cu viscozitate mică trebuie acordată o atenție deosebită purificării prealabile și pregătirii experienței.

CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Pentru ca o cuplă de frecare să funcționeze în regim de ungere-limită este necesară una dintre condițiile : viteză de alunecare mică, sarcină mare sau viscozitate redusă. Presupunînd condiții adecvate de rugozitate, în studiul regimului de ungere-limită se folosește de obicei o cuplă de frecare cu sarcină concentrată și viteză de alunecare mică. Viteza de alunecare mică și cupla cu sarcină concentrată, pentru realizarea presiunilor mari în încărcări totale mici, vor determina existența unei valori scăzute a temperaturii în zona de frecare. Deoarece temperatura este un parametru important în desfășurarea proceselor fizico-chimice, trecerea de la viteza foarte mică la viteză uzuală poate modifica calitativ, datorită creșterii temperaturii, desfășurarea fenomenului.

Un alt mijloc de a realiza regimul de ungere-limită este folosirea lichidelor lubrifiante cu viscozitate redusă. Este de așteptat ca și în acest caz efectul substanțelor active asupra frecării să fie mult mai important decît în cazul folosirii lubrifianților obișnuiți [1], [2].

DATE EXPERIMENTALE

În continuarea cercetărilor asupra frecării-limită [2], folosind lubrifianți cu viscozitate redusă, s-a urmărit în special obținerea de rezultate cu o împrăștiere minimă. Instalația se compune în principal dintr-o

cuplă de frecare formată dintr-o bucşă în rotaţie presată de trei pastile plane. Dispozitivul de încărcare este astfel construit, încît permite măsurarea cu precizie sporită a forţei de frecare. Măsurarea şi înregistrarea forţei de frecare se fac pe cale electrică. În timpul determinării, cupla de frecare se află cufundată în lubrifiantul studiat.

Din motivele arătate mai sus s-a folosit ca lubrifiant un amestec de hidrocarburi normale cu interval de fierbere între 80 şi 120°C. Determinările efectuate cu cuple de frecare din oţel STAS 28 TMC 12 şi fontă de cilindri au confirmat rezultatele anterioare, şi anume sensibilitatea ridicată a coeficientului de frecare în raport cu conţinutul de substanţe active datorată folosirii lichidelor cu viscozitate mică.

S-a constatat însă că în condiţii constante de lucru coeficientul de frecare a prezentat valori cuprinse între 0,18 şi 0,95, cu o frecvenţă mare în jurul valorii 0,2, cu toată grija care s-a acordat efectuării determinărilor. Prezenţa acidului oleic în concentraţie de 0,2%, pe lîngă o reducere a coeficientului de frecare, determină şi stabilizarea valorilor măsurate (fig. 1).

Această constatare şi faptul că lichidul folosit ca lubrifiant este un produs comercial uzual au condus la ipoteza că dispersia rezultatelor s-ar datora prezenţei unor urme de substanţe active provenite din procesul de

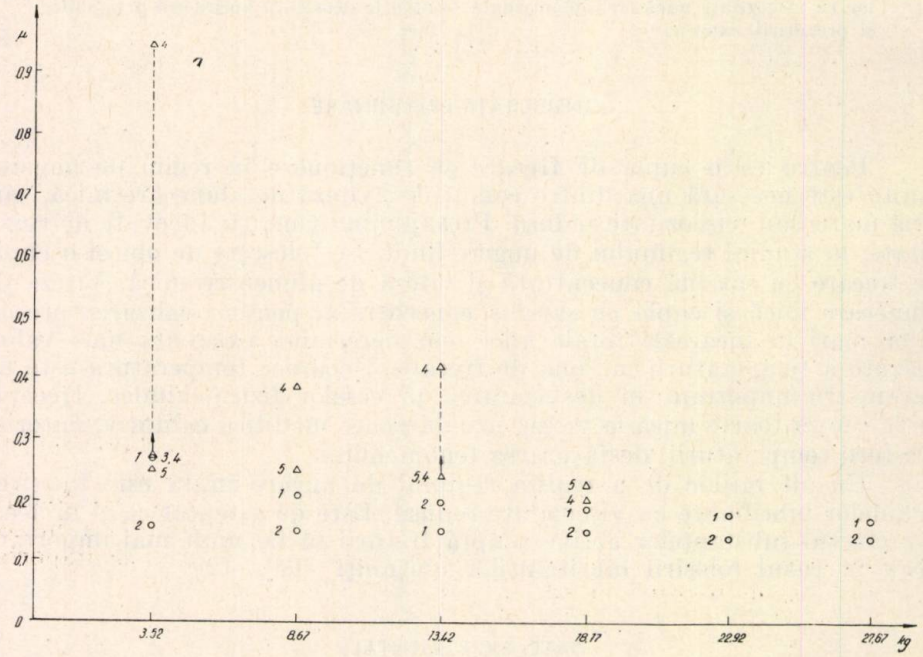


Fig. 1. — Coeficientul de frecare funcţie de sarcină.
⊙ Lubrifiant: amestec de hidrocarburi cu interval de fierbere 80—120°C + 0,2% acid oleic. Cupla de frecare: *1* — oţel pe oţel; *2* — fontă pe fontă.
Δ Lubrifiant: amestec de hidrocarburi cu interval de fierbere 80—120°C. Cupla de frecare: *3*, *4*, *5* — oţel pe oţel.
V = 0,7 m/s T = 30°C.

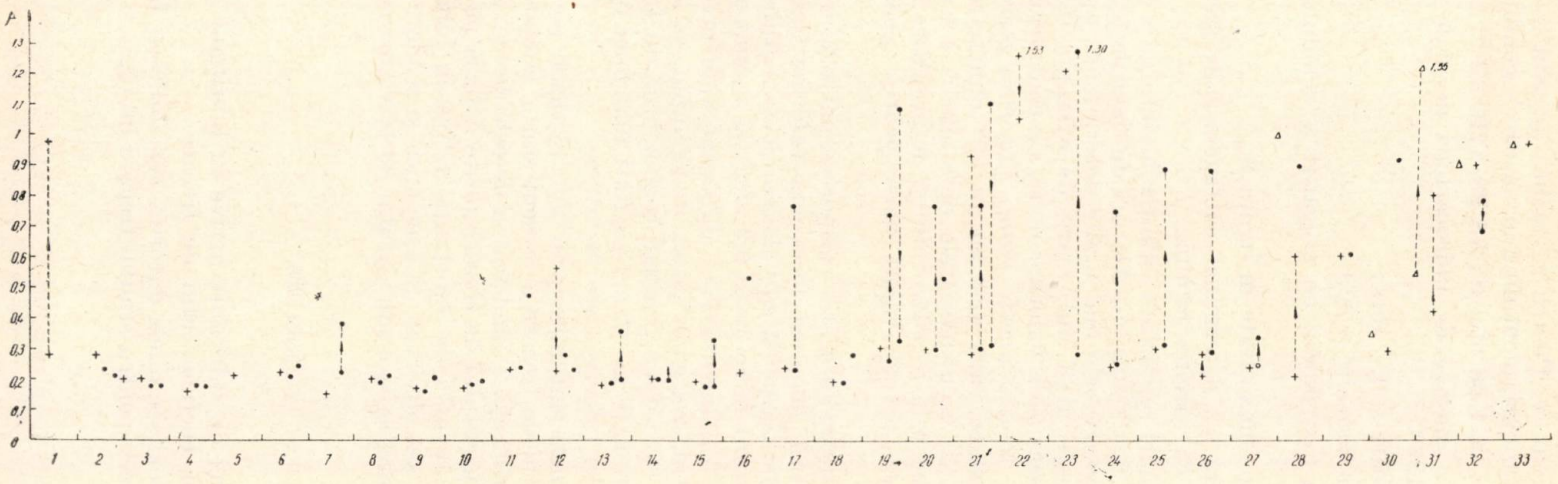


Fig. 2. — Coeficientul de frecare funcție de sarcină pentru diferite experiențe.
Lubrifiant : amestec de hidrocarburi cu interval de fierbere între 80 și 120°C.
Cupla de frecare : oțel pe oțel.
Δ Sarcina 1,36 kg și 2,75 kg
\+ ,, 3,92 kg
. ,, 8,67 și 13,42 kg

fabricaţie sau de la manipulare. Pentru a verifica această ipoteză a fost efectuată o serie de determinări, menţinînd următoarele condiţii de lucru :

— cuplă de frecare : oţel pe oţel STAS 28 TMC 12 ;

— lichid lubrifiant : amestec de hidrocarburi normale cu interval de fierbere între 80 şi 120°C ;

— viteză de alunecare : 0,7 m/s ;

— temperatura lubrifiantului : 30°C.

Singura variabilă a fost modul de pregătire a lichidului lubrifiant înainte de determinare.

Rezultatele obţinute sînt arătate în figura 2.

La fiecare experienţă s-a determinat coeficientul de frecare pentru diferite sarcini începînd cu sarcina minimă.

Primele 14 determinări reprezintă situaţia înainte de a se acorda o atenţie specială purităţii lubrifiantului. Alături de valorile din intervalul 0,18—0,25, în care se situează cele mai multe determinări, apar şi valori ale coeficientului de frecare mult mai mari, de exemplu 0,5 sau chiar 0,95. Cu toată frecvenţa scăzută a valorilor mari, s-a considerat, din motivele arătate mai sus, că tocmai aceste valori sînt caracteristice pentru lubrifiantul respectiv în stare pură (ele nu au fost eliminate la analiza rezultatelor). În consecinţă, în următoarele determinări s-a căutat prin diferite procedee de purificare a lubrifiantului şi de pregătire a aparaturii pentru experienţă să se obţină valori mari pentru coeficientul de frecare.

Următoarele determinări au arătat că ipoteza purităţii insuficiente a lubrifiantului a fost corectă, deoarece frecvenţa valorilor mari a crescut simţitor. S-a reuşit în cele din urmă ca valoarea coeficientului de frecare să se situeze în mod constant între 0,8 şi 0,9 chiar la sarcini mici.

Pentru o verificare suplimentară s-a procedat apoi invers, impurificînd controlat lubrifiantul. S-a găsit astfel, de exemplu, că acidul acetic în concentraţie de 0,001% reduce imediat coeficientul de frecare de la 0,8 la 0,3, iar prin funcţionare la 0,24. Cantităţi mai mici de substanţă activă au condus la valori intermediare instabile.

În figura 2 unele puncte sînt unite prin linii verticale pentru a indica cazurile în care coeficientul de frecare a crescut sau a scăzut, parametrii determinării rămînînd constanţi. Ţinînd seama de cele de mai sus, această variantă spontană a coeficientului de frecare poate fi pusă pe seama existenţei unei cantităţi foarte mici de substanţă activă în lubrifiant. Prin purificarea lubrifiantului s-a observat de asemenea şi scăderea treptată a sarcinii la care avea loc creşterea coeficientului de la valori mici la valori mari.

CONCLUZII

Cantităţi foarte mici de substanţe active în lubrifiant pot conduce la instabilitatea valorilor coeficientului de frecare.

Lubrifianţii cu viscozitate mică, datorită sensibilităţii faţă de substanţele active, sînt indicaţi pentru studiul frecării-limită.

Datorită sensibilităţii ridicate faţă de substanţele active, este necesară o atenţie deosebită la prelucrarea acestor lubrifianţi şi pregătirea experienţelor.

BIBLIOGRAFIE

1. Г. В, Виноградов, И. В. Коренова. Смазочное действие низкомолекулярных углеродов при тяжелых режимах трения. Теория смазочного действия и новые материалы, Изд. „Наука“ Москва, 1965.
2. I. Iliuc, *Aspecte ale frecării în regim-limită studiate pe un cuplu cu trei contacte liniare,* St cerc. mec. apl., 3 (1966)

RECENZII

B. DIZIOGLU *Getriebelehre (Mecanisme)*, vol. 1, Vieweg 1965, 190 p.

Este primul volum dintr-o serie de patru volume, care cuprind bazele, sinteza dimensională a mecanismelor, dinamica și o colecție de probleme în mecanisme și de dinamica mașinilor.

După introducerea generală (cap. I) sînt expuse în capitolul al II-lea noțiunile fundamentale privind cuplele cinematice, grade de libertate, lanțuri cinematice, formula lui Guebler, legături pasive. Capitolul al III-lea se ocupă de sistematizarea mecanismelor pe diverse criterii, iar în capitolul al IV-lea se expun cele mai utilizate mecanisme împreună cu unele proprietăți caracteristice. Capitolul al V-lea ne introduce în analiza mișcării mecanismelor, viteze, accelerații, traiectorii și curburi. Capitolul al VI-lea expune conceptele și proprietățile mișcării plane a unui element, încheind cu determinarea polurilor și a cercurilor lui Bresse. Alte proprietăți geometrice și cinematice ale mișcării plane, ca, de exemplu două poziții finit și infinit vecine, ecuația Euler-Savary, construcțiile Hartman și Bobillier, metodele grafo-analitice ale lui Kraus și Bottema sau singularitățile curbelor de bielă, sînt redate în capitolul al VII-lea.

Mișcarea relativă a trei plane (elemente) este redată în capitolul al VIII-lea și cuprinde însumarea vitezelor unghiulare relative, determinarea centrelor instantanee, utilizarea poligoanelor de vectori și funiculare, rapoarte de transmisie, compunerea vitezelor liniare și unghiulare în spațiu etc. Capitolul al IX-lea se referă la distribuția instantanee a accelerațiilor în mișcarea relativă a trei plane, subliniind componenta de acceleratie Coriolis, redate pentru diverse mișcări particulare și generale.

Capitolul al X-lea se ocupă de sistematizarea și determinarea forțelor din mecanisme cu și fără frecare în cuple, de utilizarea principiului încercărilor virtuale și procedeul Jurkovski, de forțele de inerție și de momentele lor, iar în ultimul capitol, al XI-lea se analizează forțele prin metodele suprapunerii și ale poligoanelor funiculare în grupele elementare ale mecanismelor.

Afară de figurile din text, volumul mai conține 25 de planșe cu diferite forme de cuple cinematice, de scheme de mecanisme cu 4, 6, 8, elemente, de mecanisme bine derivate bine sistematizate și de exemple pentru determinarea vitezelor, accelerațiilor, a centrelor instantanee, a curburilor și pentru analiza forțelor.

Volumul este scris într-un stil excelent de clar și de concis și cuprinde toate problemele importante pentru destinația sa, fiind alcătuit ca un curs de bază pentru învățămînt. Figurile sînt bine și clar executate, formulele și demonstrațiile foarte accesibile și totodată de mare rigurozitate, iar completarea de la sfîrșit cu exerciții grafice rezolvate este de mare ajutor în înțelegerea teoriei și în deprinderea rezolvărilor.

Materialul clasic, redat într-o excelentă formă modernă, este completat cu ultimele realizări în acest domeniu.

Volumul se adresează atît studenților din învățămîntul de specialitate sau profesorilor, cît și cercetătorilor și inginerilor din producție și din proiectare.

Chr. Pelecudi

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, Nr. 4, 1968, P. 841–844

S. HÎNCU, *Modelarea hidraulică în curenți de aer sub presiune*, Edit. Academiei, București, 1966, 246 p.

În lucrare se fundamentează o metodă nouă de cercetare teoretică și experimentală în domeniul hidraulicii, metoda modelării hidraulice în curenții de aer sub presiune. Lucrarea conține rezultatele cercetărilor teoretice și experimentale efectuate de autor în decursul a mai multor ani în legătură cu justificarea și cu domeniul de aplicație a metodei.

Deși metoda modelării hidraulice în curenți de aer sub presiune a fost aplicată în diverse laboratoare din străinătate, în special în U.R.S.S., unde de altfel a fost inițiată, o fundamentare teoretică corespunzătoare și o definire a domeniului ei de aplicabilitate nu fusese obținute pînă la apariția acestei lucrări. Unele dintre problemele tratate în lucrare, ca scurgerea fluidelor în canale cu rugozitate mixtă, scrugerea fluidelor în zona strangulărilor de secțiune, instabilitatea traseului rectiliniu al albiilor rîurilor ș.a., prezintă un interes mai general decît ar rezulta din titlul lucrării.

Lucrarea conține 11 capitole și două anexe. Primele două capitole tratează problemele generale privind conținutul și specificul metodei, avantajele principale ale folosirii ei și rezultatele mai importante obținute de diverși cercetători în folosirea modelelor cu aer sub presiune. Se scot în evidență principalele probleme nerezolvate de către cercetătorii străini.

În capitolul al 3-lea se descrie dinamica curenților sub presiune în albii cu rugozitate mixtă. Rezultatele teoretice și experimentale obținute de autor au importanță nu numai pentru fundamentarea metodei modelării hidraulice în curenți de aer sub presiune, ci și pentru rezolvarea problemelor generale de hidraulică a scurgerilor în albii cu pereți avînd diferite rugozități. Sînt prezentate rezultatele experiențelor sistematice efectuate într-un canal, cu combinarea a cinci feluri de rugozități luate cîte două. Modelul teoretic elaborat de autor, pornind de la rezultatele teoriei semiempirice a turbulenței, concordă foarte bine cu datele experimentale.

În capitolele 4 și 5 se prezintă teoria generală a modelării hidraulice în curenți de aer sub presiune. La elaborarea acestei teorii s-a pornit de la ideea că modelarea hidraulică în curenți de aer sub presiune presupune efectuarea a două operații:

— înlocuirea mișcărilor sub presiune cu mișcări corespunzătoare;

— transformarea prin similitudine a mișcării sub presiune astfel obținute și studiul ei pe model.

În mod deosebit se analizează mișcările potențiale, mișcările gradual variate și mișcarea fluidului în zona unor lărgiri bruște de secțiune. Se deduc relațiile de determinare a limitelor de aplicabilitate a metodei și criteriile de similitudine.

În capitolul al 6-lea se rezolvă teoretic cîteva probleme importante ale mișcării fluidelor cu suprafața liberă prin înlocuirea acestor mișcări cu mișcări corespunzătoare sub presiune (mișcarea fluidelor în zona de început a canalelor deschise, scurgerea în zona strangulărilor de secțiune, scurgerea în zona ramificațiilor). Rezultatele teoretice sînt comparate cu datele experimentale.

În capitolele 7—8 se prezintă rezultatele cercetărilor teoretice și experimentale referitoare la aplicarea metodei modelării hidraulice în curenți de aer sub presiune la studiul fenomenelor morfologice și al proceselor de albie a rîurilor. Se demonstrează imposibilitatea modelării aluviunilor în suspensie și se stabilește o nouă metodologie de modelare a mișcării aluviunilor. Se demonstrează că modelele cu pat mobil ale albiilor rîurilor sînt microrîuri, la care sînt valabile relații morfometrice de același timp ca la rîurile naturale. Pe baza unui principiu variațional se demonstrează că traseul rectiliniu al albiilor rîurilor este instabil, traseul stabil fiind cel meandrat, și se deduc relațiile care caracterizează o albie stabilă. Se deduc criteriile de similitudine a transportului aluvionar și a fenomenelor morfologice din albiile rîurilor.

În capitolul al 9-lea se prezintă rezultatele aplicării metodei modelării hidraulice în curenți de aer sub presiune la rezolvarea unor probleme concrete de regularizare a unor rîuri din Republica Socialistă România, iar în capitolul al 10-lea se expun ultimele realizări în domeniul tehnicii de construcție a modelelor și aparaturii de măsură. Capitolul al 11-lea conține concluzii generale.

Lia Crețoiu

OVIDIU DRAGNEA, *Teoria mecanismelor și mașinilor*, Edit. did. ped., București, 1964.

Lucrarea tratează toate problemele corespunzătoare programei analitice a cursului de teorie a mecanismelor și mașinilor pentru facultatea de utilaj de construcții, într-o formă bine sistematizată, clară și mai dezvoltată, ceea ce o face să completeze cu succes lecțiile pentru studenți.

Cuprinde patru părți, care se ocupă de structura, cinematica și cinetostatica mecanismelor și de dinamica mașinilor. Sînt separate de asemenea problemele mecanismelor plane cu cuple inferioare, de cele ale mecanismelor plane cu cuple superioare, mecanisme cu came sau cu roți dințate, ceea ce avantajează lucrarea, avînd în vedere atît scopul său didactic, cît și faptul că în acest mod se pot urmări și însuși îndeaprope metodele cele mai adecvate de rezolvare a celor două mari grupe de mecanisme.

O scurtă introducere și istoricul dezvoltării acestei discipline sînt conținute în capitolul I, după care, în capitolul al II-lea, este cuprinsă clasificarea mecanismelor după diferite criterii. Sînt expuse cuplele cinematice și lanțurile cinematice, cu gradele de libertate și de mobilitate indicate prin formulele Somov-Malișev, Dobrovolski și Ciobîșev.

Partea a doua cuprinde capitolele III—VI de cinematică grafică și analitică referitoare la mecanismele cu cuple inferioare și de cinematică a mecanismelor cu came și a roților dințate. Se începe cu determinarea pozițiilor și traiectoriilor, continuîndu-se cu metodele de determinare a distribuțiilor de viteze și de accelerații. Se consideră în general construcțiile grafice ale metodelor clasice de largă utilizare : rabaterea, ecuații vectoriale, proiecții, poligoane, puncte caracteristice și centre instantanee, dar sînt tratate analitic cîteva mecanisme importante : patrulaterul articulat, mecanismele cu culisă, mecanismul articulației universale, inversoare etc. Capitolele de mecanisme cu cuple superioare conțin, pe lîngă metodele adecvate ale analizei, și problemele sintezei acestora, necesare în proiectare. Ele sînt bine dezvoltate și se referă la unele mecanisme larg utilizate.

În partea a treia sînt determinate forțele de inerție și de frecare, împreună cu reacțiunile din cuplele cinematice. Sînt expuse metodele specifice pentru studiul echilibrului asupra grupelor structurale.

Ultima parte a dinamicii mașinilor se referă în capitolele X—XIII la transmiterea lucrului mecanic la studiul mișcării mașinii, neregularitatea mersului și la echilibrarea mașinilor, cuprinzînd problemele importante necesare inginerului de profil mecanic.

Lucrarea este încadrată de unele aplicații foarte utile pentru aprofundarea unor probleme teoretice. Materia este bine repartizată pe capitolele lucrării, evidențiindu-se capitolele de mecanisme cu came, care au un rol important în mecanizare și automatizare, precum și mecanismele planetare, care au aplicații din ce în ce mai mari în construcția de mașini.

Lucrarea este utilă studenților, tehnicienilor și inginerilor din producție și proiectare.

Chr. Pelecudi

R. S. BENSON, *Advanced engineering thermodynamics*, Pergamon Press Ltd., Headington Hill Hall, Oxford, 1967

Lucrarea profesorului R. S. Benson se adresează în primul rînd studenţilor din ultmii ani ai facultăţilor inginereşti, dar ea poate reprezenta un ghid bun şi pentru specialiştii gata formaţi în domenii ca maşini cu ardere internă, aviaţie, centrale termoelectrice etc. Volumul reprezintă un curs care conţine cîteva dezvoltări de termodinamică şi termochimie necesare aplicaţiilor în primul rînd în gazodinamică, dar şi în alte domenii, ca sisteme elastice, sisteme magnetice, termoelasticitate etc. Noţiunile de bază ale termodinamicii şi legile ei generale sînt presupuse cunoscute. În text se fac doar referiri şi trimiteri la tratate de specialitate pentru aceste chestiuni.

Prezentarea materiei este întrucîtva diferită de cea din alte tratate de acest gen. Astfel problema *echilibrului* sistemelor termodinamice este prezentată înainte de a se dezvolta subiectul propriu-zis al lucrării, consacrîndu-i-se primul din totalul de cinci capitole. Este de remarcat modul simplu, aproape elementar, dar deosebit de clar şi intuitiv, în care se introduc conceptele despre echilibru, lucru mecanic maxim, precum şi funcţiile lui Gibbs şi Helmholtz. Capitolul este completat cu un exemplu de aplicaţie a consideraţiilor generale la gazele care ascultă de ecuaţia de stare a lui Van der Waals.

În capitolul al 2-lea se introduc proprietăţile termodinamice ale sistemelor cu compoziţie chimică constantă. Capitolul conţine dezvoltarea relaţiilor lui Maxwell, derivatele căldurilor specifice, ecuaţia Clausius-Clapeyron şi o aplicaţie la sistemele conţinînd gaze lichefiate. Acest capitol este de fapt o scurtă prezentare a noţiunilor şi a relaţiilor de termodinamică clasică sub o formă concisă, potrivită dezvoltărilor conţinute în capitolele următoare.

Capitolul al 3-lea, consacrat proprietăţilor termodinamice ale gazelor ideale şi ale amestecurilor de gaze ideale cu compoziţie chimică constantă, urmează în descrierea fenomenelor o cale clasică, cu cîteva scurte discuţii asupra teoriei cuantice, fără însă a intra în detalii. Cu toate acestea, este greu să se găsească o metodă mai clară şi mai eficientă decît cea utilizată de autor pentru prezentarea într-un cadru atît de limitat a unor chestiuni de oarecare fineţe, ca principiul echipartiţiei energiei, dependenţa căldurilor specifice de gradele de libertate moleculară, energia moleculară medie (în timp), legea a treia a termodinamicii şi altele.

În cadrul capitolului al 4-lea se face o dezvoltare pe baze moderne a proprietăţilor amestecurilor gazoase cu compoziţie chimică variabilă. Se introduc noţiunile de potenţial chimic, echilibru chimic, constante de echilibru, etc., precum şi unele materiale de natură mai recentă, ca, de exemplu, gazul ideal de disociaţie al lui Lightole şi efectul de „îngheţare" chimică a unui curent de gaz.

Capitolul al 5-lea şi ultimul este consacrat prezentării unor aplicaţii speciale: sisteme elastice, sisteme cu tensiune superficială, celule reversibile, sisteme magnetice, termoelasticitate, termodinamică ireversibilă etc.

Volumul conţine la sfîrşitul fiecărui capitol numeroase exerciţii, iar la sfîrşitul lucrării se află răspunsurile la acestea. Volumul este completat de tabele cu coeficienţii polinomiali, cu proprietăţile gazelor ideale între 0 şi 12 000°K, cu căldurile de reacţie ale gazelor ideale între 0 şi 12 000°K şi cu constantele de echilibru ale gazelor ideale în acelaşi interval de temperaturi. Tabelele sînt calculate după cele mai recente date, după cum arată autorul în prefaţa lucrării.

În concluzie, lucrarea constituie o contribuţie valoroasă din punct de vedere didactic şi ştiinţific în domeniul termodinamicii aplicate.

Dan Pantazopol

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 27, nr. 5 1968

SUMAR

STUDII

Pag.

E. CARAFOLI şi C. BERBENTE, Determinarea cîmpului de presiuni în mişcarea plană supersonică-hipersonică moderată 847

ION ŞTEFAN, Consideraţii asupra rezistenţei la înaintare a corpurilor cu regim de mişcare supercavitant 865

IOAN DAVID, Efectul neuniformităţii curentului subteran asupra debitului drenului arcuit şi rectiliniu 877

D. MANGERON şi M. N. OGUZTÖRELI, Aplicarea transformatelor lui Laplace-Picone la studiul sistemelor diferenţiale interesînd fizica matematică. I. Probleme referitoare la ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al patrulea 883

GH. SILAŞ şi H. KLEPP, Aproximarea poligonală a caracteristicilor neliniare 899

T. HACKER, Stabilitatea dinamică neutră a avioanelor 909

AL. MARINESCU, Asupra manevrei optime de întîlnire, cu minimum de combustibil, a aparatelor cosmice pe orbite circulare considerînd ecuaţiile neliniare de mişcare a aparatului urmăritor. 921

M. M. NIŢĂ, Asupra perturbaţiilor vehiculelor orbitale staţionare la o latitudine arbitrară, datorite triaxialităţii pămîntului 933

E. SOÓS, Ecuaţii constitutive pentru materiale omogene, izotrope, simple cu microstructură şi memorie 949

GEORGE BĂRĂNESCU şi DINU TARAZA, Unele probleme privind calculul la oboseală 963

ERNEST BEIU-PALADI, Calculul iterativ al frecvenţelor proprii de vibraţie la sisteme elastice avînd mase concentrate dispuse „în lanţ" 975

A. PETRE şi V. DROBOTĂ, Flambajul lateral al grinzilor pendulare ţinînd seama şi de solicitarea de răsucire a acestora 985

VALERIU PETCU, Calculul plastic al planşeelor casetate de beton armat 993

ALEX. GHEORGHIU, C. PACOSTE, CR. IONESCU şi M. IORDĂNESCU, Utilizarea calculatoarelor electronice pentru stabilirea directă a ordinii de formare a articulaţiilor plastice la cadre încărcate proporţional 1015

TOMA PANĂ, Stabilitatea statică a barelor cu pereţi subţiri avînd profilul închis . 1035

St. cerc. mec apl., Tom. 27, Nr. 5, p. 845 — 1114, Bucureşti, 1968

Pag.

D. MANGERON, C. DRĂGAN, M. N. OGUZTÖRELI şi R. CHALEAT, Teoria generală a aproximaţiilor succesive în studiul mecanismelor şi maşinilor prin noua metodă matriceală-tensorială elaborată în vederea folosirii maşinilor electronice de calcul. Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale care conţin contururi închise nedeformabile prin metoda matriceală-tensorială 1045

CHR. PELECUDI, Multipoli cinematici cu elemente rigide 1061

CIGAN LEONTIN, Influenţa principalilor factori ai frecării asupra alunecării intermitente la ghidajele maşinilor-unelte 1079

DODOC PETRE, Mecanismul transmiterii vibraţiilor la suprafaţa piesei în procesul de strunjire 1091

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

IVAN ILIUC, Preocupări şi aplicaţii ale studiilor de frecare şi uzare 1101

RECENZII 1111

DETERMINAREA CÎMPULUI DE PRESIUNI ÎN MIŞCAREA PLANĂ SUPERSONICĂ-HIPERSONICĂ MODERATĂ*)

de E. CARAFOLI şi C. BERBENTE
Institutul de mecanica fluidelor
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej"

Pe baza unei expresii unitare a presiunilor, dedusă anterior, autorii stabilesc formule închise pentru determinarea cîmpului de presiuni şi a formei undelor de şoc în mişcarea în jurul profilelor aerodinamice în regim supersonic-hipersonic moderat. Comparaţiile făcute arată că rezultatele obţinute pe baza metodei propuse în lucrare practic coincid cu cele obţinute utilizînd metoda caracteristicilor sau diagrame şi tabele pentru expansiune şi unde de şoc. În acest fel se pot evita complet calculele laborioase necesitate de aceste din urmă metode, care trebuie repetate pentru fiecare caz în parte.

1. CONSIDERAŢII INTRODUCTIVE

În cazul mişcărilor supersonice la incidenţe şi numere MACH mari, rezultatele obţinute pe baza teoriei liniarizate nu se mai pot aplica. Pentru a obţine formule mai exacte se procedează în diferite moduri, prin operaţii mai mult sau mai puţin laborioase: sau se adaugă la rezultatele teoriei liniarizate (valabile în primă aproximaţie) efectul termenilor din a doua şi a treia aproximaţie sau se aplică metoda caracteristicilor, sau, în sfîrşit, se utilizează tabele de expansiune şi diagramele pentru undele de şoc.

În lucrarea de faţă ne propunem să dăm o metodă simplă, dar tot aşa de exactă, care ne permite să determinăm cu uşurinţă cîmpul de presiuni şi curba undelor de şoc în mişcarea în jurul profilelor aerodinamice, în regim supersonic-hipersonic moderat.

Metoda se bazează pe o expresie a coeficientului de presiune C_p, dedusă din ecuaţiile undelor de şoc şi valabilă tocmai pentru cele două regimuri [8]:

$$\frac{C_p}{m^2 \sin^2 \tau} = \frac{\gamma+1}{2} + \frac{2}{K}\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)K^2}, \qquad (1)$$

*) Sub tipar la Zeitschrift für Flugwissenschaften

unde τ reprezintă deviația curentului (fig. 1), γ este raportul căldurilor specifice, iar

$$K = mM_\infty \sin\tau \qquad \left(m = \frac{M_\infty}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\right), \tag{2}$$

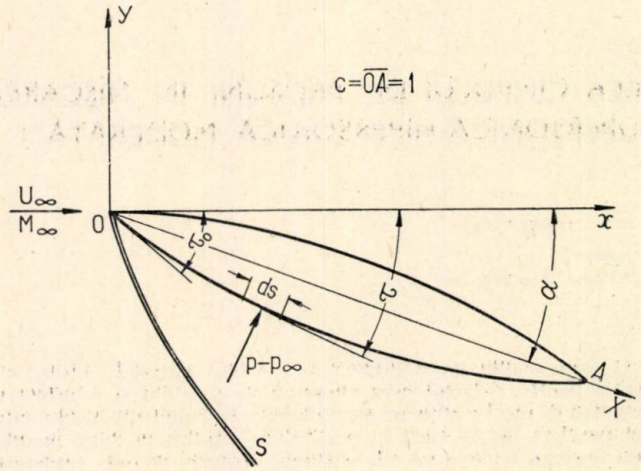


Fig. 1

reprezintă parametrul de similaritate pentru regimul supersonic-hipersonic moderat.

Formula (1) este valabilă atît pentru compresiune ($\tau > 0$), cît și pentru expansiune ($\tau < 0$), pe un larg interval de deviație și numere Mach [8], fiind în perfect acord și cu metoda caracteristicilor. Ambele sînt confirmate de experiențe ([9], [10]; fig. 2, 3).

La stabilirea formulei (1) s-a presupus că undele de șoc rămîn tot timpul atașate la bordul de atac ascuțit al profilului. De asemenea, se neglijează efectul undelor de șoc reflectate, precum și mișcarea turbionară care are loc în spatele undei de șoc atunci cînd profilul este curb.

Într-o altă lucrare [11] am folosit relația (1) pentru stabilirea caracteristicilor aerodinamice ale profilelor uzuale, formulele stabilite fiind de asemenea în bun acord cu experiența. Pentru aplicații am considerat profile de grosime relativă ε moderată, așezate în incidențe α care pot atinge valori mari ($\tau_0 \leqslant 30°$, fig. 1).

Notînd cu p presiunea într-un punct P de pe profil, pe un element de contur ds (fig. 1) acționează forțele elementare următoare :

$$(p - p_\infty)\, ds \cos\tau = (p - p_\infty)\, dx, \tag{3 a}$$

$$(p - p_\infty)\, ds \sin\tau = (p - p_\infty)\, \mathrm{tg}\,\tau\, dx, \tag{3 b}$$

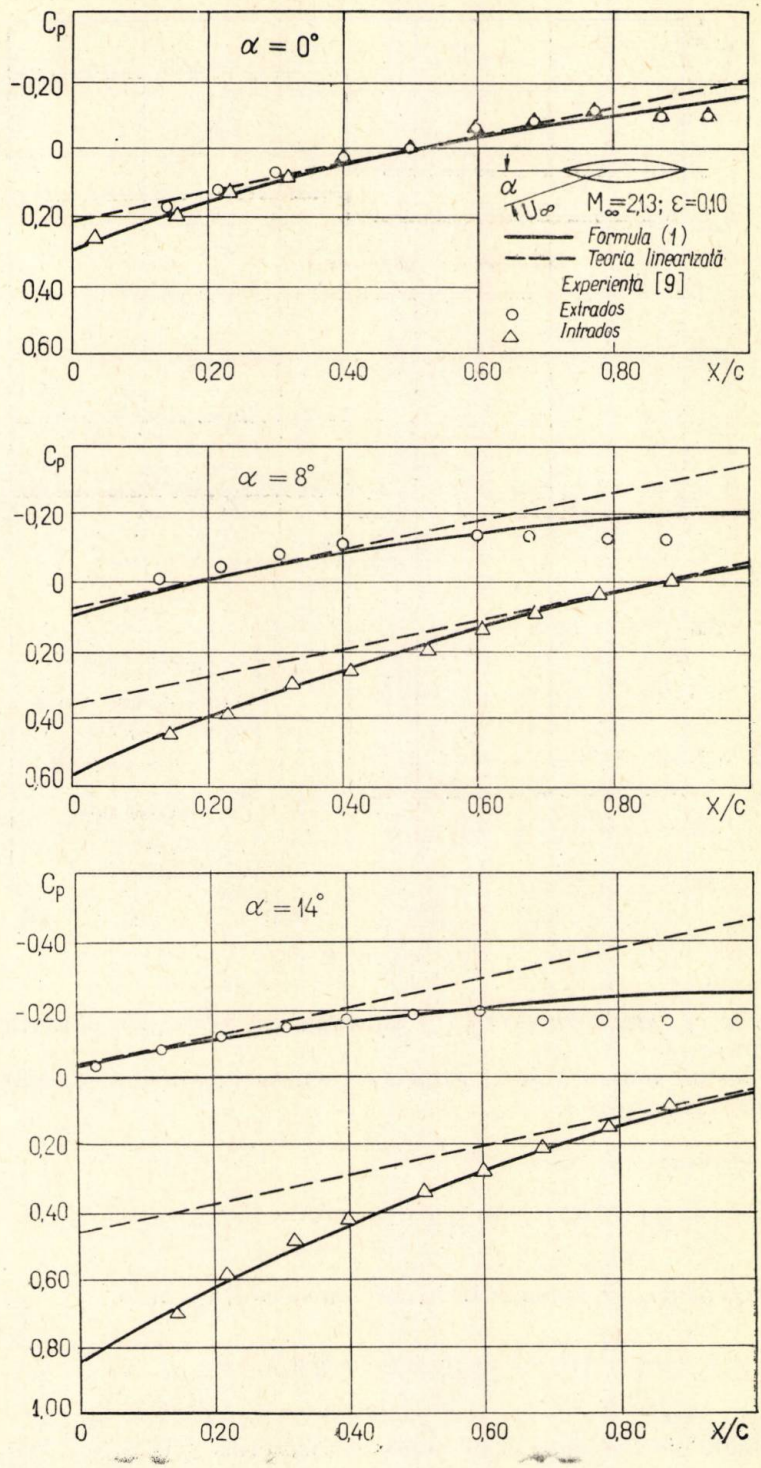

C_p
$\alpha = 0°$
-0,20
0
0,20
0,40
0,60
0
0,20
0,40
0,60
0,80
X/c
M_∞=2,13; ε=0,10
Formula (1)
Teoria linearizată
Experienta [9]
Extrados
Intrados
C_p
$\alpha = 8°$
-0,20
0
0,20
0,40
0,60
0
0,20
0,40
0,60
0,80
X/c
C_p
$\alpha = 14°$
-0,40
-0,20
0
0,20
0,40
0,60
0,80
1,00
0
0,20
0,40
0,60
0,80
X/c

Fig. 2

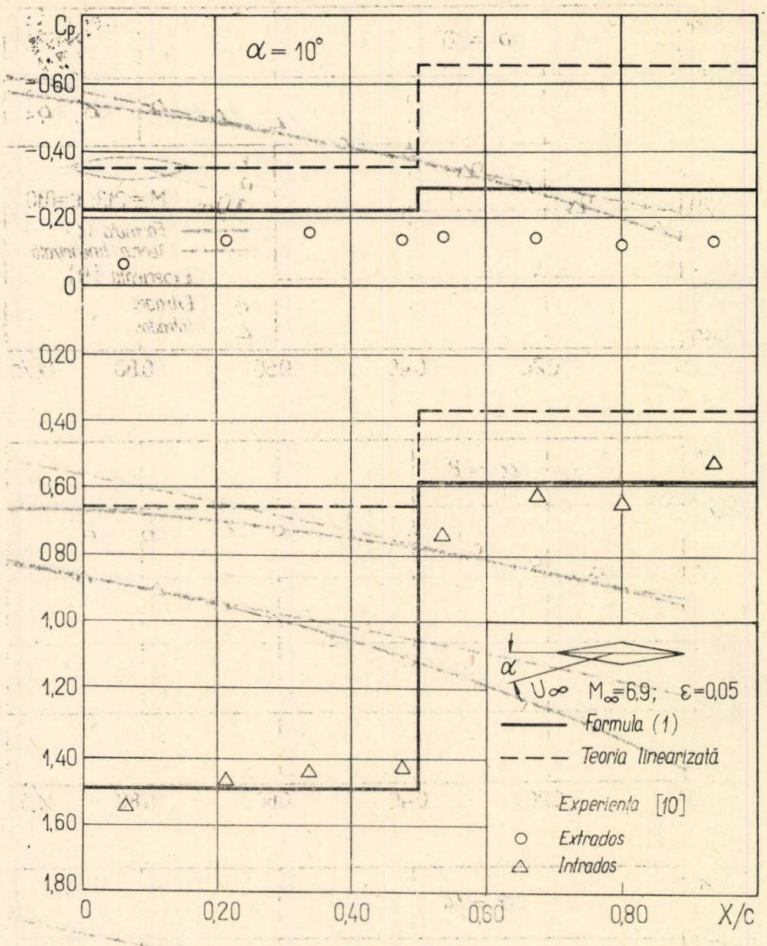


Fig. 3 *)

după direcția axelor Oy și Ox, p_∞ reprezentînd presiunea curentului liber de la infinit.

Folosind indicii 1 și 2, respectiv pentru intrados și extrados, vom obține prin integrare :

Coeficientul de portanță

$$C_z = \int_0^{\cos\alpha} (C_{p2} - C_{p1})\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

Coeficientul de moment în raport cu bordul de atac,

$$C_m = \int_0^{\cos\alpha} (C_{p2} - C_{p1})\,(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y), \tag{5}$$

*) Curba plină se obține și cu metoda caracteristicilor [10].

Ceficientul de rezistență,

$$C_x = \int_0^{\cos\alpha} (C_{p2} \operatorname{tg}\tau_2 + C_{p1} \operatorname{tg}\tau_1)\, dx. \tag{6}$$

Pentru un profil dublu-parabolic simetric, formulele (1), (4), (5) și (6) conduc la

$$C_z = \frac{\cos^2\alpha}{3\varepsilon a^2\sqrt{M_\infty^2 - 1}} (R_0^3 - R_A^3), \tag{7 a}$$

$$C_m = \frac{C_z}{2\cos\alpha} - \frac{2}{3}(\gamma + 1)\, m^2 \varepsilon \operatorname{tg}\alpha, \tag{7 b}$$

$$C_x = \frac{\cos^2\alpha}{8\varepsilon a^2\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\left[(2R_0^2 - 1)\, R_0\,(2\varepsilon + \alpha) + (2R_A^2 - 1)\, R_A\,(2\varepsilon - \alpha) + \frac{1}{a}\ln\frac{R_0 - a\,(2\varepsilon + \alpha)}{R_A + a\,(2\varepsilon - \alpha)}\right], \tag{7 c}$$

unde

$$R_0 = \sqrt{1 + a^2(2\varepsilon + \alpha)^2}; \qquad R_A = \sqrt{1 + a^2(2\varepsilon - \alpha)^2},$$

$$\left(a = \frac{\gamma + 1}{4} m M_\infty \cos\alpha\right). \tag{8}$$

În figura 4, valorile caracteristicilor aerodinamice calculate cu formulele (7) sînt comparate cu experiențele făcute de GARRICK [12], concordanța fiind foarte bună.

Comparațiile cu experiența făcute atît în ce privește distribuția de presiuni cît și caracteristicile aerodinamice obținute pe baza formulei (1) ne îndreptățesc să o considerăm drept o formulă de bază pentru calculul presiunilor și să o utilizăm pentru determinarea întregului cîmp de presiuni în jurul profilelor (pînă la unda de șoc inclusiv).

REMARCĂ. Pentru deviații și numere Mach mari, se poate face un calcul mai precis, utilizînd în locul relațiilor (7) formulele [11]

$$C_z = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \{C_{pi}^{(0)} + E_i [F_i + \alpha_i I_{2i} - (1 - 2\varepsilon_i \alpha_i) I_{1i}]\} \cos\alpha, \tag{8 a}$$

$$C_m = \sum_{i=1}^{2} (-1)^i \left\{\frac{1}{2} C_{pi}^{(0)} + E_i \left(F_i + \frac{1}{3\varepsilon} I_{2i}\right)\right\}, \tag{8 b}$$

$$C_x = \sum_{i=1}^{2} \{C_{pi}^{(0)} \operatorname{tg}\alpha_i + E_i [(\alpha_i - 2\varepsilon) F_i - I_{2i} - (\alpha_i + 2\varepsilon) I_{1i}]\} \cos\alpha, \tag{8 c}$$

$$E_i = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{M_{0i}^2}{M_\infty^2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 C_{pi}^{(0)}\right) \cos 2\varepsilon, \quad \alpha_i = (-1)^i \alpha \quad (i = 1, 2), \tag{8 d}$$

$$F_i = \frac{16}{3}(\gamma + 1)\varepsilon^3 \frac{M_{0i}^2}{M_{0i}^2 - 1} \cos 2\varepsilon \quad (i = 1, 2), \tag{8 e}$$

$$I_{ji} = \frac{1}{\sqrt{M_{0i}^2 - 1}} \int_0^{-4\varepsilon} t^j \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 \frac{M_{0i}^4 t^2}{M_{0i}^2 - 1} \cos^2 2\varepsilon}\, dt, \tag{8 f}$$

$$(i = 1, 2; \quad j = 1, 2),$$

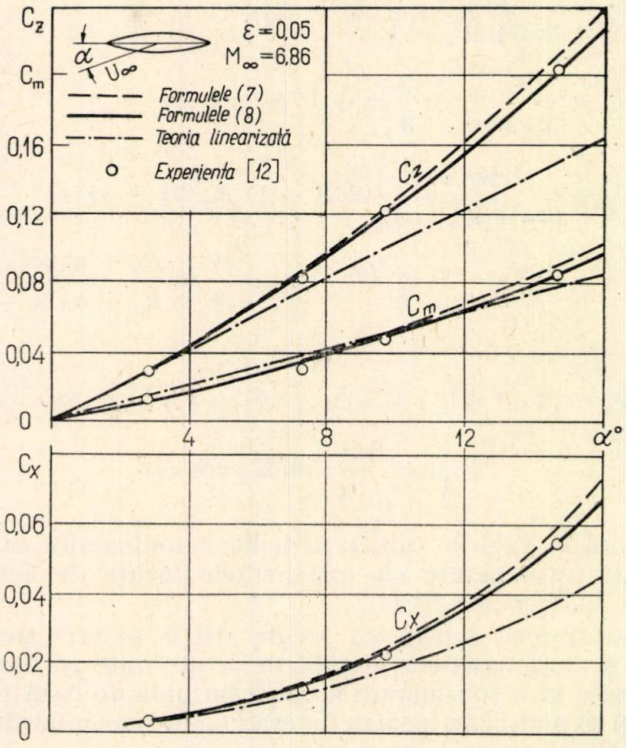


Fig. 4

unde M_{0i} și $C_{pi}^{(0)}$ $(i = 1, 2)$ reprezintă numerele Mach și coeficienții de presiune la intrarea profilului, respectiv pe extrados și pe intrados. Așa cum se observă în figura 4, punctele experimentale cad chiar pe curbele trasate folosind formulele (8).

2. DETERMINAREA PRESIUNILOR

Să considerăm un profil de formă oarecare, așezat la o incidență α într-un curent de viteză U_∞. Ne vom ocupa de ceea ce se întîmplă pe intrados, considerațiile pentru cazul cînd unda ar apare și pe extrados fiind similare.

După comprimarea la intrare prin unda de şoc OS, curentul suferă o expansiune, astfel încît, într-un punct P de pe profil (fig. 5), viteza este W iar numărul Mach M. Pe o linie caracteristică PP', făcînd cu tangenta la profil unghiul μ ($\sin\mu = 1/M$), parametrii curentului rămîn neschimbaţi. Mişcarea în jurul profilului va fi determinată dacă vom reuşi să scriem

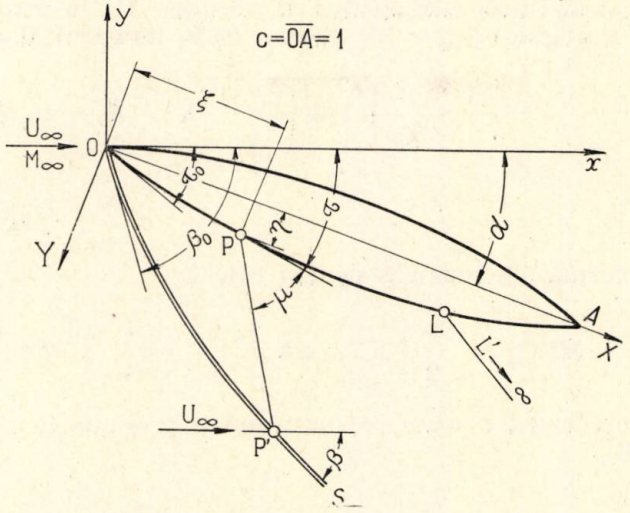


Fig. 5

ecuaţiile liniilor caracteristice, precum şi ale undei de şoc OS. Vom desfăşura calculul pe etape, astfel:

a) Vom determina numărul Mach M_0 al curentului imediat după unda de şoc în punctul O de pe profil cu ajutorul relaţiei cunoscute din teoria undelor de şoc [13]:

$$M_0^2 \sin^2(\beta_0 - \tau_0) = \frac{4 + (\gamma - 1) M_\infty^2 C_p^{(0)}}{2\,(2 + \gamma M_\infty^2 C_p^{(0)})}, \tag{9}$$

unde avem, tot din aceeaşi teorie,

$$\sin^2\beta_0 = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma + 1}{4} C_p^{(0)}. \tag{10}$$

Într-o lucrare anterioară am arătat că, pentru unghiuri α mari, expresia (1) se poate scrie cu mai mare exactitate [8],

$$\frac{C_p^{(0)}(1 - \nu_0)}{m^2 \sin^2\tau_0} = \frac{\gamma + 1}{2} + \frac{2}{K_0}\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 K_0^2} = P_0, \tag{11}$$

unde

$$\nu_0 = \left[1 - \frac{m^2 P_0}{2}\left(1 - \frac{m^2(\gamma + 1) - 2}{1 + R}\right)\right]\sin^2\tau_0, \tag{12a}$$

$$R = \sqrt{1 - m^2 P_0 [m^2(\gamma + 1) - 2]\,\mathrm{tg}^2\tau_0}, \quad K_0 = m M_\infty \sin\tau_0. \tag{12 b}$$

ν_0 reprezintă un coeficient de corecție care poate fi neglijat la unghiuri τ_0 mici.

Vom folosi formula (11) pentru a calcula cît mai exact coeficientul de presiune ca și numărul Mach M_0 după unda de șoc.

b) Determinarea numărului M într-un punct oarecare pe profil se face calculînd mai întîi coeficientul de presiune C_{pe} în urma expansiunii curentului cu unghiul $(\tau_0 - \tau)$, plecînd de la numărul Mach M_0:

$$\frac{C_{pe}}{m_0^2 \sin^2(\tau - \tau_0)} = \frac{\gamma+1}{2} + \frac{2}{K_e}\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)K_e^2}, \quad K_e = m_0 M_0 \sin(\tau - \tau_0),$$

$$m_0 = \frac{M_0}{\sqrt{M_0^2 - 1}} \tag{13}$$

sau, sub o formă convenabilă pentru calcul

$$M_0^2 C_{pe} = \frac{\gamma+1}{2} K_e^2 + 2K_e \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 K_e^2}. \tag{14}$$

Se poate calcula acum coeficientul de presiune în punctul P, raportat la M_∞

$$C_p = C_p^{(0)} + \left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma}{2} C_p^{(0)}\right) M_0^2 C_{pe} \tag{15}$$

și numărul Mach M al curentului în același punct:

$$M^2 - 1 = \operatorname{ctg}^2 \mu = \left(\frac{2}{\gamma-1} + M_0^2\right)\left(1 + \frac{\gamma}{2} M_0^2 C_{pe}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{\gamma-1}. \tag{16}$$

3. STABILIREA CURBEI UNDEI DE ȘOC

Fie ξ și η (fig. 5) coordonatele unui punct P de pe contur și X, Y coordonatele punctului P', în care caracteristica dusă din punctul P taie unda de șoc. Ecuația undei de șoc va rezulta atunci din condiția ca, după saltul în punctul P', corespunzător unghiului β (fig. 5), curentul U_∞ să realizeze parametrii din punctul P de pe profil, adică trebuie să fie satisfăcute relațiile:

$$Y - \eta = (X - \xi) \operatorname{tg}(\mu + \tau - \alpha), \tag{17 a}$$

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg}(\beta - \alpha), \tag{17 b}$$

$$\sin^2 \beta = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma+1}{4} C_p = \sin^2 \beta_0 + \frac{\gamma+1}{4}\left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma}{2} C_p^{(0)}\right) M_0^2 C_{pe}. \tag{17 c}$$

Relația (17 a) reprezintă ecuația caracteristicii PP', relația (17 b) este ecuația de definiție a pantei undei de șoc, iar relația (17 c) exprimă legătura între unghiul undei de șoc și coeficientul de presiune C_p după salt, a cărei valoare este dată de (15).

Putem acum, pentru un contur cunoscut, așezat într-un curent avînd numărul M_∞ și incidența α date, să determinăm ecuația undei de șoc.

Fie $\eta = \eta(\xi)$ ecuația conturului. Pentru orice ξ putem găsi atunci valoarea deviației τ și apoi valorile parametrilor C_{pe} (relația 13), μ (relația 16) și β (relația 17 c); din ecuațiile (17 a) și (17 b) rezultă apoi valorile coordonatelor X și Y ale punctului P' de pe unda de șoc.

Eliminînd Y din ecuațiile (17 a) și (17 b), se obține

$$X \operatorname{tg}(\mu + \tau - \alpha) - \int_0^\xi \frac{dX}{d\xi} \operatorname{tg}(\beta - \alpha)\, d\xi = \xi \operatorname{tg}(\mu + \tau - \alpha) - \eta, \quad (18)$$

unde am ținut seama că unda de șoc este atașată de vîrful O, ascuțit al profilului ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $X = 0$). Cunoscînd $X = X(\xi)$ dat de ecuația (18), Y se poate calcula direct din (17 a). Problema se reduce deci la găsirea lui X. În acest scop vom observa că, profilul fiind considerat de formă regulată, cu vîrful ascuțit, ecuația conturului poate fi reprezentată printr-un polinom de un grad oarecare h, adică putem scrie

$$\eta = \sum_{i=0}^{h} a_i \xi^i \quad (a_0 = 0). \quad (19)$$

În mod asemănător, putem reprezenta funcțiile $\operatorname{tg}(\beta - \alpha)$ și $\operatorname{tg}(\mu + \tau - \alpha)$ care intervin în ecuațiile (17) și (18) prin polinoame de grade oarecare, l și m:

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \sum_{i=0}^{l} b_i \xi^i, \quad \operatorname{tg}(\mu + \tau - \alpha) = \sum_{i=0}^{m} c_i \xi^i. \quad (20)$$

Fie k cel mai mare dintre numerele întregi h, l, m. Deoarece orice polinom de grad mai mic decît k poate fi considerat polinom de gradul k însă avînd o parte din coeficienți nuli, putem lua întotdeauna în (19) și (20)

$$h = l = m = k, \quad (21)$$

ceea ce vom și face în continuare pentru simplificarea scrierii.

Coordonata X a unui punct de pe unda de șoc o vom reprezenta atunci prin seria de puteri

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \xi^n, \quad (22)$$

coeficienții A_n fiind determinați din condiția ca dezvoltarea (22) să verifice identic ecuația (18). În (22) am inclus și condiția ca unda curbă să treacă prin vîrful O ($A_0 = 0$).

Introducînd expresiile (19), (20) și (22) în ecuația (18) și identificînd termenii în ξ^n se obține, după calcule simple:

$$(c_0 - b_0) A_n = \sum_{i=1}^{k} \left[\left(1 - \frac{i}{n}\right) b_i - c_i \right] A_{n-i} + \sum_{i=0}^{k} (\delta_{i+1,n} c_i - \delta_{i,n} a_i) \tag{23}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

unde $\delta_{i,n}$ este simbolul lui Kronecker

$$\delta_{i,n} = \begin{cases} 0 \text{ pentru } i \neq n \\ 1 \text{ pentru } i = n, \end{cases}$$

iar $(k + 1)$ numărul de termeni ai polinoamelor (19) și (20). La efectuarea sumelor după indicele „i" se are în vedere că

$$A_{n-i} = 0 \text{ pentru } n - i \leqslant 0.$$

Se observă că coeficienții A_n sînt ușor de calculat, întrucît ei rezultă succesiv din sistemul (23).

4. CONVERGENȚA DEZVOLTĂRII $X = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \xi^n$

Să observăm că într-un anumit punct L de pe profil (fig. 5), este posibil ca panta caracteristicei să devină egală cu panta undei de șoc:

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \operatorname{tg}(\mu + \tau - \alpha) \quad (\xi = \xi_L). \tag{24 a}$$

Ținînd cont de (20) relația (24 a) se mai scrie

$$(c_0 - b_0) + (c_1 - b_1)\, \xi_L + \ldots + (c_k - b_k)\, \xi_L^k = 0. \tag{24 b}$$

Unda de șoc și caracteristica din punctul L nu se mai întretaie $(X, Y \to \infty$ pentru $\xi = \xi_L)$. În consecință, dezvoltarea (22) este convergentă pentru $\xi < \xi_L$.

Din punct de vedere fizic rezultă că, în punctul L de pe profil curentul a revenit la presiunea p_∞ în timp ce unda de șoc OS s-a transformat pe ultima porțiune într-o linie Mach, paralelă cu caracteristica din punctul L. Pentru $p = p_\infty$ $(C_p = 0)$ din relațiile (15) și (17 c) rezultă

$$M_0^2 C_{pe} = -\frac{1}{\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{M_\infty^2 C_p^{(0)}}}; \quad \sin\beta = \frac{1}{M_\infty}; \quad \xi = \xi_L. \tag{25}$$

Prima relație (25) ne permite să determinăm ξ_L mult mai simplu decît relația (24 a). Astfel, din (14) și (25) rezultă

$$\sin(\tau_0 - \tau_L) = \frac{1}{m_0 M_0 \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2} + \frac{3\gamma - 1}{M_\infty^2 C_p^{(0)}} + \left(\frac{2}{M_\infty^2 C_p^{(0)}}\right)^2}}. \tag{26}$$

Cunoscînd deviația τ_L a curentului în punctul L, dată de (26), se deduce ușor ξ_L folosind ecuația conturului.

Să studiem în continuare cît de rapid converge dezvoltarea (22), deci îți termeni sînt necesari pentru calcul. În acest scop, vom observa că pentru $\lambda \to \infty$ în (23) se pot neglija termenii în $\frac{1}{n}$, iar $\sum_{i=0}^{k} (\delta_{i+1,n}\, c_i - \delta_{i,n}\, a_i) = 0$ pentru $n \geqslant k+2$, astfel încît putem scrie

$$c_0 - b_0) A_n = (b_1 - c_1) A_{n-1} + (b_2 - c_2) A_{n-2} + \ldots + (b_k - c_k) A_{n-k} \quad (27)$$

sau

$$c_0 - b_0) + (c_1 - b_1) \frac{A_{n-1}}{A_n} + (c_2 - b_2) \frac{A_{n-2}}{A_n} + \ldots + (c_k - b_k) \frac{A_{n-k}}{A_n} = 0. \quad (28)$$

Comparînd între ele relațiile (24.b) și (28) rezultă

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = \xi_L, \quad \frac{A_{n-2}}{A_n} = \xi_L^2, \ldots, \frac{A_{n-k}}{A_n} = \xi_L^k \quad (n \to \infty) \quad (29)$$

sau

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{A_{n-2}}{A_{n-1}} = \ldots = \frac{A_{n-k}}{A_{n-k+1}} = \xi_L \quad (n \to \infty). \quad (30)$$

Relația (30) confirmă faptul că raza de convergență a dezvoltării (22) este ξ_L. Să observăm în continuare, din relația (30), că, pentru $n \to \infty$, raportul a doi termeni consecutivi din dezvoltarea lui X tinde să devină constant. Putem trage concluzia că în orice punct $\xi < \xi_L$, această dezvoltare converge ca seria geometrică avînd rația $q = \xi/\xi_L < 1$.

5. METODA PRACTICĂ DE CALCUL

Pentru o gamă largă de aplicații, în limitele regimului supersonic-hipersonic moderat, ecuația (19) a profilului poate fi limitată la primii patru termeni :

$$\tau = a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 \quad (a_0 = 0). \quad (31)$$

Această limitare este întrutotul justificată ținînd seama mai ales că în determinarea curbei undei de șoc intervine de fapt porțiunea anterioară a conturului, care nu se depărtează mult nici de o parabolă de gradul al 2-lea. În mod asemănător, ținînd cont că nici curbura undei de șoc nu variază rapid, iar expansiunea curentului are loc pe un interval redus de deviație, și pentru funcțiile tg $(\beta - \alpha)$ și tg $(\mu + \tau - \alpha)$ putem folosi curbe care trec prin patru puncte (inclusiv vîrful profilului) deci putem scrie

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 + b_3 \xi^3 \quad (b_0 = \operatorname{tg}(\beta_0 - \alpha)), \quad (32\,a)$$

$$\operatorname{tg}(\mu + \tau - \alpha) = c_0 + c_1 \xi + c_2 \xi^2 + c_3 \xi^3 \quad (c_0 = \operatorname{tg}(\mu_0 + \tau_0 - \alpha)). \quad (32\,b)$$

Într-adevăr, din figurile 6 și 7 se observă că aceste funcții nu au forme complicate și variază rapid pentru valori mici ale unghiului de expansiune $(\tau_0 - \tau)$, deci pentru valori mici ale lui ξ.

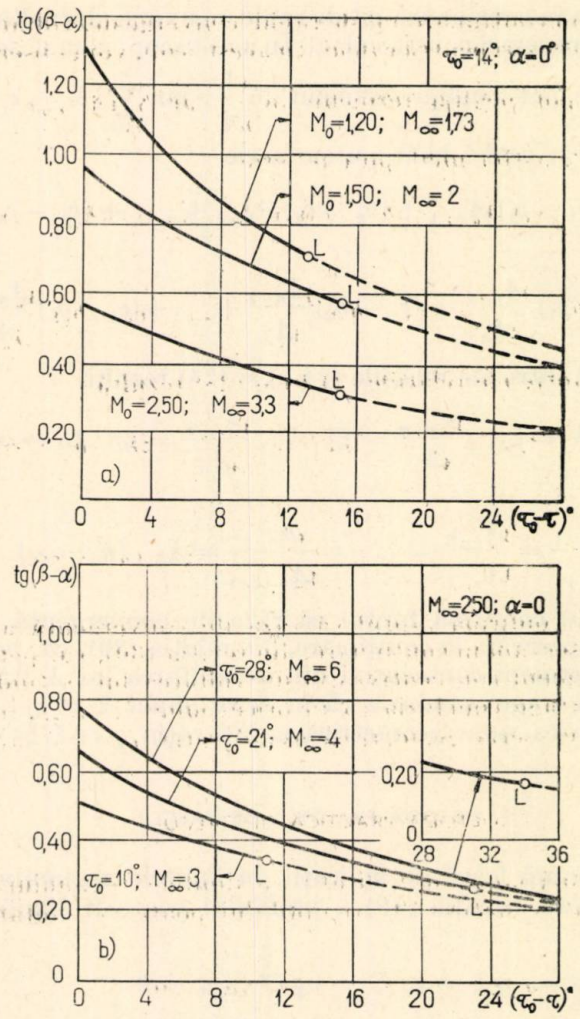


Fig. 6

Fie $\xi_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$ abscisele a trei puncte de pe profil în care ecuaţiile (32) trebuie să fie verificate. Coeficienţii b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ rezultă imediat rezolvînd sistemele liniare de trei ecuaţii cu trei necunoscute. Se obţine în acest fel

$$b_1 = \sum \frac{D_1 \xi_2 \xi_3}{\xi_1(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)}, \quad b_2 = -\sum \frac{D_1(\xi_2 + \xi_3)}{\xi_1(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)},$$
$$b_3 = \sum \frac{D_1}{\xi_1(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)}, \quad D_i = \operatorname{tg}(\beta_i - \alpha) - b_0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{33}$$

Coeficienţii c_i sînt daţi de aceleaşi relaţii (33) în care coeficienţii D_i se înlocuiesc cu coeficienţii C_i daţi de relaţiile

$$C_i = \operatorname{tg}(\mu_i + \tau_i - \alpha) - c_0 \quad (i = 1, 2, 3). \tag{34}$$

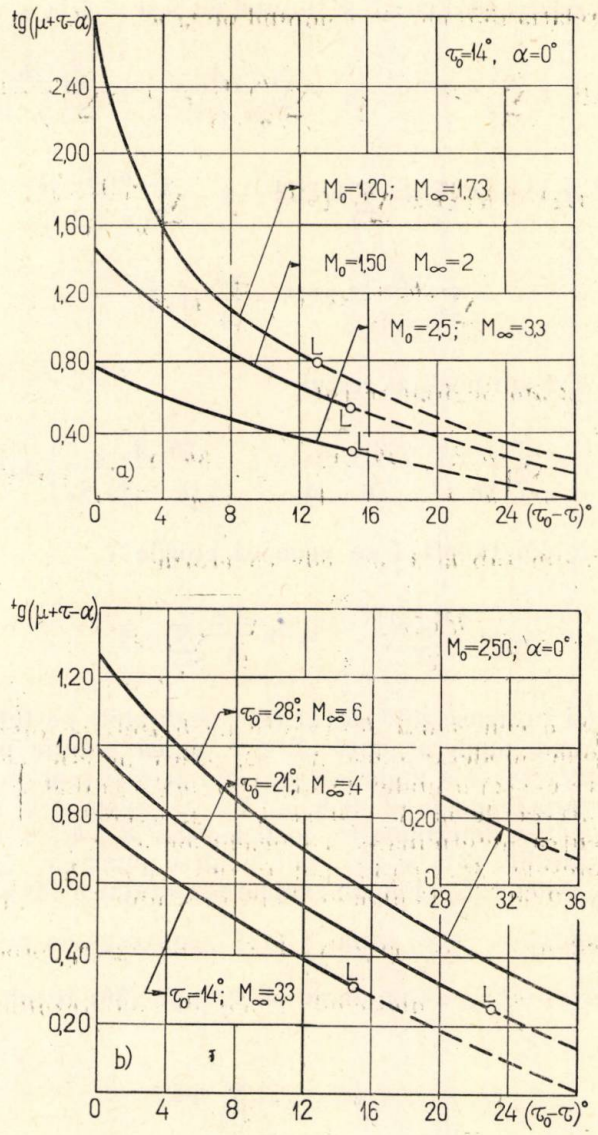


Fig. 7

În relațiile (33) însumările Σ se fac pentru toate permutările circulare ale indicilor (1, 2, 3). Coeficienții A_n rezultă apoi din (23) în care facem $k = 3$:

$$(c_0 - b_0) A_n = \sum_{i=1}^{3} \left[\left(1 - \frac{i}{n}\right) b_i - c_i \right] A_{n-i} + \sum_{i=0}^{3} (\delta_{i+1,n}\, c_i - \delta_{i,n}\, a_i) \qquad (35)$$

$$(n = 1, 2, 3 \ldots).$$

Înmulțind relația (35) cu ξ^n și sumînd de la $n = 1$ la $n = \infty$, rezultă

$$X\sum_{i=0}^{3}(c_i - b_i)\xi^i = \sum_{i=0}^{3} c_i\,\xi^{i+1} - \eta - \sum_{n=1}^{5}\frac{b_1 A_n}{n+1}\xi^{n+1} - \sum_{n=1}^{3}\frac{2b_2 A_n}{n+2}\xi^{n+2} -$$

$$-\frac{3b_3}{4}A_1\xi^4 + R(\xi) \approx \sum_{i=0}^{3} c_i\,\xi^{i+1} - \eta - \sum_{n=1}^{5}\frac{b_1 A_n}{n+1}\xi^{n+1} - \tag{36}$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\frac{2b_2 A_n}{n+2}\xi^{n+2} - \frac{3b_3}{4}A_1\xi^4$$

unde pentru $X \leqslant 2$ am neglijat restul

$$R(\xi) = -\sum_{n=6}^{\infty}\left(\frac{b_1\xi}{n+1} + \frac{2b_2}{n}\frac{A_{n-2}}{A_n} + \frac{3b_3 A_{n-4}}{\xi(n-1)A_n}\right)A_n\xi^n. \tag{37}$$

Într-adevăr, din tabela 1 se vede că erorile

$$\varepsilon_x = \frac{|R(\xi)|}{X}, \qquad \varepsilon_y = \frac{X\varepsilon_x}{Y}\sum_{i=0}^{3} c_i\,\xi^i$$

sînt neglijabile (și în consecință $R(\xi)$ este neglijabil) pe întreg regimul supersonic-hipersonic moderat dacă $X \leqslant 2$, adică practic pentru toată porțiunea care interesează a undei de șoc. Din același tabel se observă că atunci cînd X variază de la $X = 0$ la $X = 2$, avem $0 \leqslant \xi \leqslant 0{,}6\ \xi_L$. În consecință, pentru determinarea coeficienților a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3)$ care intră în expresiile (31) și (32) pot fi alese punctele $\xi_1 = 0{,}15\ \xi_L$, $\xi_2 = 0{,}30\ \xi_L$, $\xi_3 = 0{,}60\ \xi_L$. Pentru evaluarea restului $R(\xi)$ a fost folosită observația că, pentru $n \to \infty$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} A_n\xi^n$ converge ca progresia geometrică de rație $q = \xi/\xi_L$. Cunoscînd X dat de (36) rezultă imediat Y din (17 a):

$$Y = \eta + (X - \xi)\sum_{i=0}^{3} c_i\,\xi^i. \tag{38}$$

Ecuațiile (36) și (38) reprezintă ecuațiile parametrice ale undei de șoc; cînd parametrul ξ variază de la $\xi = 0$ la $\xi = \xi_L$, punctul $P(X, Y)$ descrie unda de șoc.

6. CAZURI PARTICULARE

1. În cazul plăcii plane ($\eta = 0$) avem

$$a_i = b_i = c_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots). \tag{39}$$

Ţinînd cont de (39), din (23) rezultă

$$(c_0 - b_0) A_1 = c_0, \quad A_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \ldots), \tag{40}$$

iar relaţiile (36) şi (38) conduc direct la

$$X = \frac{c_0 \xi}{c_0 - b_0}, \quad Y = (X - \xi) c_0 = X b_0 \tag{41}$$

sau

$$Y = X \operatorname{tg} (\beta_0 - \alpha), \quad Y = (X - \xi) \operatorname{tg} \mu_0. \tag{42}$$

Prima relaţie (42) ne dă ecuaţia undei de şoc plane; a doua relaţie (42) ne dă direcţia limită către care tind caracteristicile atunci cînd curbura profilului tinde să se anuleze, direcţie care este paralelă cu liniile Mach corespunzătoare numărului Mach M_0, de după unda de şoc.

2. În cazul perturbaţiilor mici ($K_0 \to 0$, deci $\tau_0 \to 0$) din relaţiile (9) şi (10) rezultă

$$M_0 \approx M_\infty, \quad M_\infty \sin \beta_0 \approx 1,$$

iar din relaţia (16) se obţine

$$M \approx M_0 \approx M_\infty$$

independent de forma conturului. În această situaţie $c_0 = b_0$, iar din (17 a), (22) şi (23) se deduce că X, $Y \to \infty$, pentru orice $\xi \neq 0$, în timp ce pentru $\xi = 0$, X, Y sînt nedeterminate. Cu alte cuvinte, unda de şoc şi caracteristica din orice punct $\xi \neq 0$ se intersectează la infinit, în timp ce caracteristica din vîrful O se confundă cu unda de şoc. Se obţine în acest fel configuraţia liniilor Mach cunoscută din teoria liniarizată.

7. APLICAŢIE LA UN PROFIL DUBLU PARABOLIC SIMETRIC. COMPARAŢIE CU ALTE METODE

Să considerăm un profil dublu-parabolic simetric, avînd grosimea maximă relativă ε şi coarda $\overline{OA} = c = 1$.

Ecuaţia intradosului profilului în sistemul XOY este

$$\eta = 2\varepsilon\xi (1 - \xi). \tag{43}$$

Rezultă:

$$a_0 = 0, \; a_1 = 2\varepsilon, \; a_2 = -2\varepsilon, \; a_3 = 0 \ldots \tag{44}$$

În tabela 1 sînt date rezultatele calculelor efectuate pentru un profil dublu parabolic simetric avînd $\varepsilon = 0{,}10$, aşezat la diverse incidenţe şi

numere Mach care acoperă întregul regim supersonic-hipersonic moderat. Din tabelă se constată că $R(\xi)$ poate fi neglijat în calcul pentru $X \leqslant 2$, fără ca erorile să depășească 2,1%.

Tabela 1

M_∞	M_0	τ_0^0	K_0	ξ_L	ξ	X	ε_x%	Y	ε_y%
1,3	1,150	4	0,142	0,175	0,09	1,93	1,30	3,67	1,30
1,5	1,275	6	0,212	0,292	0,14	2,08	1,80	2,64	2,00
2	1,580	11,3	0,462	0,515	0,25	2,10	1,00	1,58	1,20
5	3,85	11,3	1,020	0,525	0,29	2,14	1,80	0,630	2,10
6	3,22	21,3	2,220	1,040	0,55	2,13	1,20	0,422	1,40

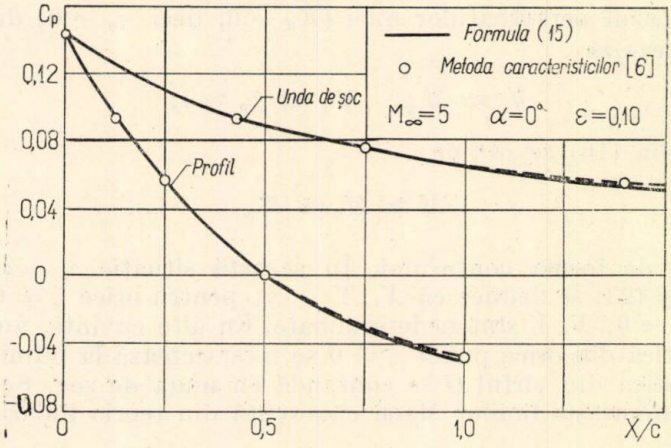


Fig. 8

În figurile 8 și 9, rezultatele obținute pentru același profil pe baza metodei propuse sînt comparate cu rezultatele date de metoda caracteristicilor [6], atît în ce privește coeficientul de presiune pe profil și unda de șoc (fig. 8), cît și în ce privește forma undei de șoc; se observă că valorile obținute, practic, coincid. Aceeași coincidență se observă și în fig. 10 și 11 în care metoda expusă este comparată cu calculul pe bază de tabele de expansiune și unde de șoc [7].

Din tabela 1 și fig. 9 și 11 rezultă justețea observației că unda curbă este determinată de porțiunea anterioară a profilului. Într-adevăr, pentru $X \geqslant 1{,}5\ \overline{OA}$, unda de șoc devine aproape o linie dreaptă, în timp ce caracteristicile duse din puncte avînd $\xi \leqslant 0{,}50$ taie unda la $X \leqslant 2$.

Se poate trage concluzia că expresia (1) poate servi ca bază pentru determinarea întregului cîmp de presiuni și a curbei undelor de șoc în

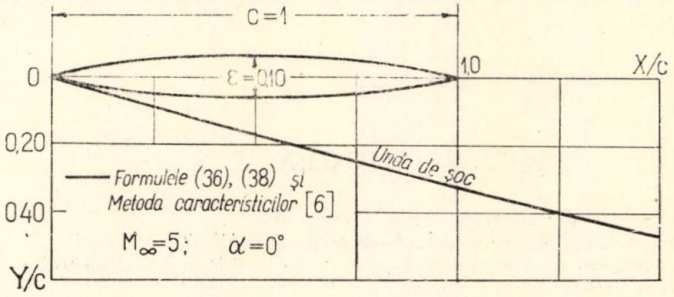


Fig. 9

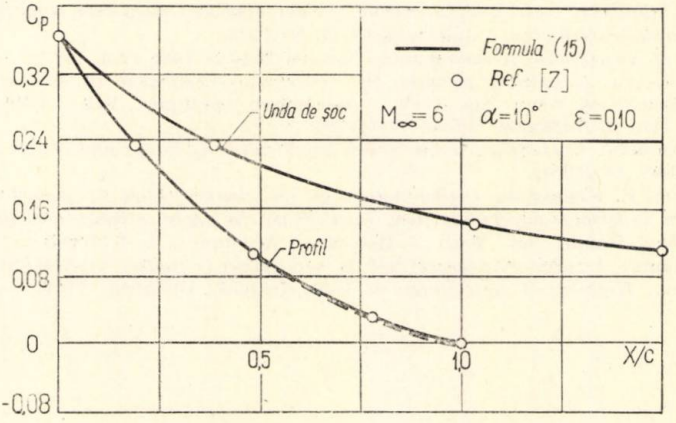


Fig. 10

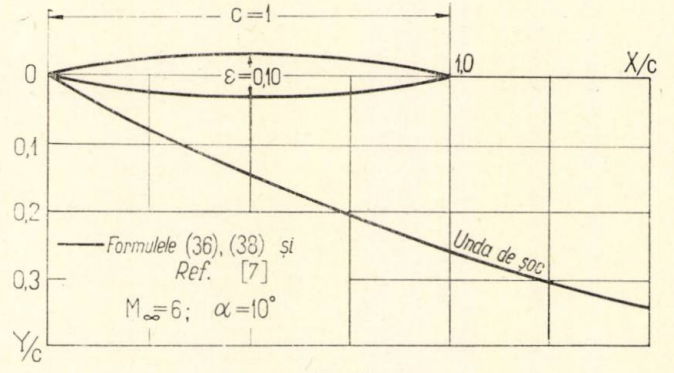


Fig. 11

mişcări în regim supersonic-hipersonic moderat. Se obţin în acest fel formule analitice simple care, practic, conduc la aceleaşi rezultate cu metoda caracteristicilor sau utilizînd tabelele exacte ale expansiunii şi compresiunii.

Primită la redacţie la 19 iulie 1967.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Busemann. *Atti del Convegno Volta*, Roma, 1935.
2. L. Prandtl, A. Busemann, *Stodola Festschrift*, Zürich, 1929.
3. A. Ferri, *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows*, The MacMillan Company, New York, 1949.
4. M. D. van Dyke, *A Study of Second-Order Supersonic Flow Theory*, NACA Report 1081, 1952.
5. M. D. Lighthill, *Oscillation Airfoils at High Mach Number*, JAS **20**, *6* (1953).
6. P. Ebeling, H. Schwarm, *Das Strömungsfeld ebener und rotationssymmetrischer Körper und Einläufe bei Über- und hyperschallgeschwindigkeiten nach dem nichtlinearen Charakteristikenverfahren*, Jahrbuch (WGLR) 1964.
7. *Handbook of Supersonic Aerodynamics*, Navord Report 1488 (vol. 2.)
8. E. Carafoli, *On a unitary formula for compression-expansion in supersonic-hypersonic flow*, Rev. Roum Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, **VII**, *5* (1962).
9. A. Ferri, *Atti di Guidonia*, Roma, *17* (1939).
10. C. H. McLellan, *Exploratory wind-tunnel investigation of wings and bodies at* $M\infty = 6.9$, JAS *18* (1951).
11. E. Carafoli, C. Berbente, *Determination of the characteristics of aerodynamics profiles in supersonic-hypersonic flow, considering the pressure losses through shock waves*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Mécanique Appliquée, **9**, *5* (1964).
12. J. E. Garrick, *Aerodynamic theory and its application to flutter*, AGARD Rep. 34 (1956).
13. E. Carafoli, *High-Speed Aerodynamics*, Edit. tehnică, Bucureşti 1956.

CONSIDERAȚII ASUPRA REZISTENȚEI LA ÎNAINTARE A CORPURILOR CU REGIM DE MIȘCARE SUPERCAVITANT

de ION ȘTEFAN
Academia militară generală

532

Se studiază mișcarea supercavitantă în jurul unui obstacol de formă alungită cu considerarea viscozității mediului și a stratului limită. Se demonstrează că zona în care are loc mișcarea cavitantă cuprinde stratul-limită în întregime și că în exteriorul acestei zone mișcarea este potențială. Avînd în vedere că pe frontiera zonei cavitante viteza și presiunea sînt constante se determină grosimea ei și efortul tangențial la perete. Cu ajutorul acestor mărimi se calculează rezistența de frecare și rezistența totală la înaintare și se arată că acestea sînt mai mici decît în cazul mișcărilor fără cavitație.

1. **Introducere.** Mișcarea cu cavitație ce apare la deplasarea sub apă a corpurilor cu viteză mare a fost studiată într-un mare număr de lucrări care au la bază diferite ipoteze simplificatoare. Soluțiile obținute au permis evaluarea rezistenței la înaintare, a dimensiunilor și a formei zonei cavitante. În majoritatea acestor lucrări fluidul se consideră fără vîscozitate, ipoteză care stă la baza formulării unor teoreme generale cu ajutorul cărora este construită întreaga teorie a mișcărilor cu cavitație.

Condiția esențială a apariției cavitației

$$p \leqslant p_v, \tag{1}$$

în care p_v este presiunea de vaporizare a lichidului, permite să se aprecieze destul de exact și să se definească zona cavitantă ce se formează în spatele obstacolului. De aici decurg două condiții suplimentare

$$p = p_v \tag{2}$$

pe frontiera zonei cavitante (cavernei) și

$$p \geqslant p_v \tag{3}$$

în lichidul care înconjură această zonă.

Dacă se notează cu p_c presiunea în interiorul zonei cavitante și p_∞, v_∞ presiunea și viteza lichidului la infinit-amonte atunci caracteristicile mișcării cu cavitație pot fi apreciate în funcție de coeficientul

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_c}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} \tag{4}$$

numit coeficient de cavitație. Cînd acest coeficient are valori mai mici decît o valoare critică, σ_{cr} apare primul stadiu al cavitației. După [1] această valoare critică se găsește în limitele $0{,}35 < \sigma_{cr} < 1$ și depinde de forma obstacolului, de tensiunea superficială, de cantitatea de gaze dizolvate în apă și de viscozitate.

În primul stadiu al cavitației se formează bule de vapori și gaze care, transportate în zone de presiune ridicată, se condensează brusc și produc sgomote, distrug suprafața obstacolului prin eroziune și coroziune iar în cazul mașinilor hidraulice (turbine, pompe, elici etc.) acest stadiu al cavitației marchează începutul micșorării performanțelor (în special a randamentului).

Cu micșorarea lui σ bulele de vapori se contopesc într-o zonă unică ce îmbracă suprafața obstacolului sau partea din aval al acestuia, zonă care în cazul mișcărilor permanente este staționară. Acest regim al mișcării se numește supercavitant și se întîlnește în toate cazurile în care viteza depășește de exemplu 30 m/s [1]. În cazul corpurilor de rotație mișcarea devine supercavitantă la valori ale numărului Froude

$$F_r = 0{,}323 \frac{v_\infty}{\sqrt{D}} \geqslant 10, \tag{5}$$

în care D este diametrul maxim al obstacolului [2].

Experiențele au arătat că mișcarea în zona cavitantă este turbulentă ceea ce este normal dacă se are în vedere vitezele mari la care apare acest regim.

Principalele concluzii ce decurg din studiul mișcărilor cavitante în cazul ideal se stabilesc cu ajutorul ecuației de continuitate și ecuațiilor lui Euler pentru mișcări potențiale permanente

$$\operatorname{div} \bar{v} = 0\,; \quad \bar{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = (\bar{v}\nabla)\bar{v}, \tag{6}$$

în care $\bar{v} = \operatorname{grad} \varphi$ (φ, potențialul vitezelor) iar $\bar{F}$ este forța ce acționează asupra unității de masă.

Prin integrarea ecuațiilor de mișcare se obține

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho W = p + \frac{\rho}{2} (\nabla\varphi)^2 + \rho w = C, \tag{7}$$

în care W este potențialul forțelor masice ($\bar{F} = \operatorname{grad} W$), iar C o constantă de integrare.

Fără a intra în detaliile demonstrațiilor care pot fi găsite în lucrările [1], [3], din ecuațiile precedente rezultă următoarele concluzii : 1) dacă ρ_c este densitatea mediului în zona cavitantă și $\rho_c \ll \rho$, atunci, pe frontiera acestei zone, $p \approx$ const. Această frontieră se numește liberă ; 2)

viteza v_c pe frontiera liberă este constantă; 3) presiunea este minimă pe frontiera liberă; 4) liniile de curent se curbează în sensul creşterii vitezei (principiul lui Brillouin); 5) dacă sînt îndeplinite condiţiile (2) şi (3) şi $\sigma \geqslant 0$ atunci frontiera liberă este convexă; 6) pe frontiera domeniului cavitant de dimensiuni finite (cu $v_c = \text{const.}$) nu există puncte critice; 7) în cazul cînd viteza schimbă de semn pe frontiera domeniului cavitant de dimensiuni finite trebuie să existe un punct de ascuţire şi $\sigma \leqslant 0$; 8) desprinderea fluidului are loc cît mai aproape de punctul critic; acest punct se găseşte în partea frontală a obstacolului; 9) curbura frontierei libere în punctul de desprindere este finită.

La stabilirea acestor concluzii nu s-a luat în considerare efectul cîmpului gravific care influenţează vizibil atît forma şi dimensiunile domeniului cavitant cît şi forţele ce acţionează asupra obstacolului. Această problemă este tratată în lucrările [4]—[10] pentru obstacole cu partea din aval plană (placă dreaptă, diedru, con etc.). Considerarea cîmpului gravific în cazul liniar sau neliniar a complicat mult rezolvarea problemei, necesitînd în unele cazuri folosirea calculatoarelor electronice numerice. Metoda de rezolvare a problemei în cele mai multe din lucrările menţionate constă în transformarea conformă a domeniului cavitant într-un alt domeniu pentru care se poate determina potenţialul complex al mişcării.

În general, soluţiile obţinute pentru mişcările cu cavitaţie conţin un mare grad de aproximare ca urmare a ipotezelor ce se fac — printre acestea şi neglijarea viscozităţii — cu scopul de a simplifica sau, în unele cazuri, de a face posibilă rezolvarea problemei.

Urmărind determinarea rezistenţei la înaintare a corpurilor cu regim de mişcare supercavitant, în prezenta lucrare problema este abordată într-un alt mod luîndu-se în considerare viscozitatea mediului şi stratul-limită de pe suprafaţa obstacolului. Acest mod de tratare a problemei este impus de faptul că la obstacolele de formă alungită zona cavitantă îmbracă aproape în întregime suprafaţa lor, ceea ce face ca obstacolul să se deplaseze într-un mediu cu densitatea mult mai mică decît a apei. În acest fel lucrarea încearcă să evidenţieze prin calcul unele fapte constatate experimental. Este cunoscut, de exemplu, că la elicele supercavitante în momentul cînd este atins regimul de mişcare supercavitant creşte rapid turaţia motoarelor. Acest fenomen nu poate avea loc decît ca urmare a reducerii substanţiale a rezistenţei de profil a palelor. Reducerea rezistenţei la înaintare se observă şi la submarinele sau torpilele ce se deplasează cu viteză mare pentru care este îndeplinită condiţia (5). De altfel depăşirea pragului de cavitaţie constituie una din problemele de bază pentru obţinerea unui însemnat spor de viteză a corpurilor submersibile, bineînţeles, concomitent cu găsirea unui propulsor adecvat.

Studiile mişcărilor cu cavitaţie întreprinse pînă în prezent nu dau răspuns acestei probleme. Ocupîndu-se numai de mişcarea domeniului cavitant din spatele obstacolului aceste studii, în general, nu ţin seama de mişcarea mediului din acest domeniu în raport cu obstacolul. Valorile obţinute pentru coeficientul rezistenţei la înaintare

$$C_R = \frac{R}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 A} \tag{8}$$

sînt în general mai mari decît în cazul cînd lipseşte cavitaţia (aici A reprezintă aria secţiunii transversale a obstacolului). O formulă utilizată mai des pentru calculul lui C_R în regim de cavitaţie are forma [11]—[14],

$$C_R(\sigma) = (1 + \sigma)C_R(0), \tag{9}$$

în care $C_R(0)$ reprezintă coeficientul rezistenţei la înaintare în cazul cînd lipseşte cavitaţia. Cum $\sigma > 0$ rezultă $C_R(\sigma) > C_R(0)$. Pentru corpurile de formă alungită această concluzie este în contradicţie cu faptele constatate experimental.

2. **Stratul-limită.** Fiind vorba de viteze mari mişcarea în interiorul stratului-limită se consideră turbulentă. Este necesar însă să se stabilească dacă zona cavitantă cuprinde întregul strat-limită sau numai o parte a acestuia. Cu alte cuvinte, forţele de viscozitate acţionează numai în interiorul zonei cavitante sau şi în afara ei? Pentru a răspunde la această întrebare presupunem că frontiera zonei cavitante nu este o suprafaţă de discontinuitate pentru viteze ci numai pentru densitatea mediului. Altfel spus, frontiera zonei cavitante nu este o suprafaţă de lunecare aşa cum se presupune în cazul fluidelor fără viscozitate. Această ipoteză este apropiată de realitate dacă avem în vedere că în zona cavitantă pătrunde în permanenţă lichid care ajuns la presiuni mici ($p < p_v$) se evaporează. Prin urmare în zona cavitantă are loc în permanenţă vaporizarea şi $p_c = \text{const}$ în toate punctele acestei zone.

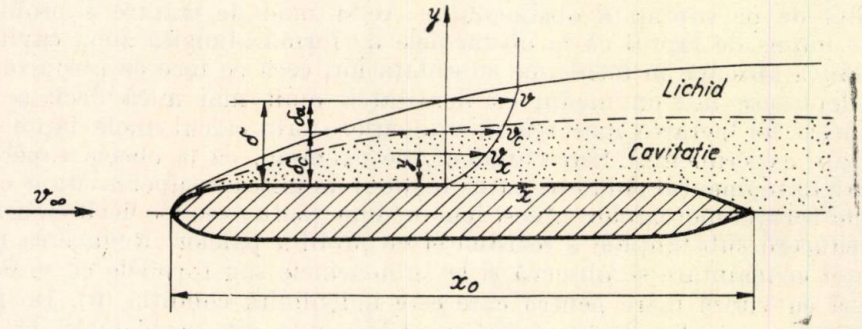


Fig. 1

Presupunem cazul general, adică stratul-limită de grosime δ se compune din : stratul-limită cavitant de grosime δ_c şi stratul-limită de lichid cu grosimea δ_a (fig. 1) astfel încît

$$\delta = \delta_c + \delta_a. \tag{10}$$

Se consideră mişcarea plană în jurul unui corp fără curburi pronunţate şi se păstrează toate ipotezele introduse la stabilirea ecuaţiilor de

mișcare în stratul-limită. Neglijînd forțele masice și presupunînd mișcarea permanentă se obține sistemul de ecuații cunoscut (Prandtl)

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0, \tag{13}$$

cu condițiile la limită:

$$\begin{aligned} &v_x,\ v_y=0 && \text{la } y=0,\\ &v_x=v_c && \text{la } y=\delta_c,\\ &v_x=v && \text{la } y=\delta. \end{aligned} \tag{14}$$

Întrucît în exteriorul stratului-limită mișcarea este potențială avem relația cunoscută

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho v\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{15}$$

care înlocuită în (11) rezultă

$$v\frac{\partial v}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}=v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{16}$$

În continuare se stabilește teorema impulsului pentru stratul-limită de lichid și pentru cel cavitant.

Pentru stratul-limită de lichid integrăm ecuația (16), după înmulțirea cu dy, între limitele $y=\delta_c$ și $y=\delta$. Rezultă

$$v\frac{\partial v}{\partial x}\delta_a-\frac{\tau_c}{\rho}=\frac{\partial}{\partial x}\int_{\delta_c}^{\delta}v_x^2\,dy-v\frac{\partial}{\partial x}\int_{\delta_c}^{\delta}v_x\,dy, \tag{17}$$

adică se obține o relație de tip Kármán în care τ_c este efortul tangențial la limita de separație a zonei cavitante de lichid.

Pentru profilul vitezelor se adoptă legea exponențială folosită adesea în cazul mișcărilor turbulente sub forma

$$v_x=v\left(\frac{y}{\delta}\right)^n, \tag{18}$$

în care $n=\frac{1}{11},\ldots,\frac{1}{7}$. Presupunînd că la limita de despărțire a celor două straturi viteza nu prezintă o discontinuitate, pe frontiera zonei cavitante se obține

$$v_c=v\left(\frac{\delta c}{\delta}\right)^n. \tag{19}$$

Pentru efortul tangențial τ_e, din (18) cu folosirea legii lui Newton rezultă

$$\tau_e = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_{y=\delta_e} = \frac{\mu n v_e}{\delta_e}. \tag{20}$$

Înlocuind (18) și (20) în (17) și integrînd se obține

$$v\frac{\partial v}{\partial x}\delta_a - \frac{\nu n v_e}{\delta_e} = \frac{1}{2n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{v^2\delta\left[1-\left(\frac{\delta_e}{\delta}\right)^{2n+1}\right]\right\} - \\ - \frac{v}{n+1}\frac{\partial}{\partial x}\left\{v\delta\left[1-\left(\frac{\delta_e}{\delta}\right)^{n+1}\right]\right\}. \tag{21}$$

Din (10) deducem

$$\frac{\delta_e}{\delta} = 1 - \frac{\delta_a}{\delta}$$

și prin dezvoltare

$$\left(\frac{\delta_e}{\delta}\right)^{2n+1} = \left(1-\frac{\delta_a}{\delta}\right)^{2n+1} = 1 - (2n+1)\frac{\delta_a}{\delta} + (2n+1)n\left(\frac{\delta_a}{\delta}\right)^2 + \dots \tag{22}$$

$$\left(\frac{\delta_e}{\delta}\right)^{n+1} = \left(1-\frac{\delta_a}{\delta}\right)^{n+1} = 1 - (n+1)\frac{\delta_a}{\delta} + \frac{(n+1)n}{2}\left(\frac{\delta_a}{\delta}\right)^2 + \dots \tag{23}$$

Avînd în vedere $n < 1$ și $\frac{\delta_a}{\delta} < 1$ din dezvoltările (22) și (23) se pot lua în considerare numai primii doi termeni. Înlocuind în (21) se obține

$$\frac{\tau_e}{\rho} = \frac{\nu n v_e}{\delta_e} \approx 0. \tag{24}$$

Cum $v_e \neq 0$ rezultă că $\delta_e \to \infty$. Cu alte cuvinte, în limitele aproximației introduse, stratul-limită cuprinde întreaga zonă cavitantă. Prin urmare se poate presupune că $\delta_a \approx 0$, iar în exteriorul zonei cavitante mișcarea este potențială. Avem astfel posibilitatea să calculăm viteza $v_e = v$ pe frontiera zonei cavitante folosind metodele de studiu pentru mișcarea potențială.

Ecuația (11) pentru stratul-limită cavitant se simplifică dacă avem în vedere că în interiorul zonei cavitante presiunea este constantă în toate punctele $\left(\frac{\partial p}{\partial x} = 0\right)$. Teorema impulsului pentru acest strat dă

$$-\frac{\tau_0}{\rho_e} = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_e} v_x^2\,\mathrm{d}y - v_e\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta_e} v_x\,\mathrm{d}y, \tag{25}$$

în care τ_0 este efortul tangențial pe suprafața corpului. Folosind (18) ecuația precedentă devine

$$(n+1)(2n+1)\frac{\tau_0}{\rho_e} = nv_e^2\frac{\mathrm{d}\delta_e}{\mathrm{d}x} - v_e\delta_e\frac{\mathrm{d}v_e}{\mathrm{d}x}, \tag{26}$$

avînd în vedere că δ_e și v_e sînt funcții numai de x.

Este cunoscut că în cazul adoptării profilului exponențial pentru viteze, efortul tangențial la perete se poate exprima în funcție v_c, δ_c și proprietățile fluidului cu formula cunoscută

$$\tau_0 = \beta \rho_c \frac{v_c^2}{2} \left(\frac{v_c \delta_c}{\nu_c} \right)^{-\frac{2n}{n+1}}, \tag{27}$$

în care β este un coeficient adimensional a cărui valoare variază în funcție de n [15]. Înlocuind τ_0 în (26) se obține ecuația diferențială

$$\delta_c v_c' - n v_c \delta_c' + A v_c^{\frac{1-n}{1+n}} \delta_c^{\frac{-2n}{n+1}} = 0, \tag{28}$$

în care

$$A = (n+1)(2n+1) \frac{\beta}{2} \nu_c^{\frac{2n}{n+1}}, \tag{29}$$

$$\delta_c' = \frac{\mathrm{d}\delta_c}{\mathrm{d}x}, \quad v_c' = \frac{\mathrm{d}v_c}{\mathrm{d}x}.$$

Soluția ecuației (28) are forma

$$\delta_c = \left(\frac{A}{nm} \right)^m v_c^{\frac{1}{n}} \left(\int_0^x v_c^{-\frac{2n+1}{n}} \mathrm{d}x \right)^m \tag{30}$$

cu $m = \dfrac{n+1}{3n+1}$. Viteza v_c poate fi determinată din ecuația lui Bernoulli

$$p + \frac{\rho}{2} v_c^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} v_\infty^2, \tag{31}$$

în care p_∞ și v_∞ sînt presiunea și viteza într-un punct situat suficient de departe de corp pentru ca mișcarea să nu fie influențată de prezența lui. Pe frontiera zonei caviante $p = p_c$, presiunea vaporilor saturați. Prin urmare

$$v_c = v_\infty \sqrt{\frac{p - p_c}{\frac{\rho v_\infty^2}{2}} + 1} = v_\infty \sqrt{\sigma + 1}. \tag{32}$$

Cum p_c este constantă în toate punctele zonei cavitante se poate considera că ea este constantă și pe frontiera acestei zone și deci $v_c = \text{const.}$ pentru valori ale lui σ date. Cu aceste considerații formula (30) devine

$$\delta_c = \left(\frac{A}{mn} \right)^m \cdot v_c^{\frac{-2n}{3n+1}} x^m \tag{33}$$

sau avînd în vedere (32)

$$\delta_c = \left[\beta \frac{(2n+1)(3n+1)}{2n} \right]^{\frac{n+1}{3n+1}} \left(\frac{v_\infty}{\nu_c} \right)^{\frac{-2n}{3n+1}} (1+\sigma)^{\frac{-n}{3n+1}} x^{\frac{n+1}{3n+1}}. \tag{34}$$

Înlocuind δ_c (în (28) se obține

$$\tau_0 = \beta\left[\beta\frac{(2n+1)(3n+1)}{2n}\right]^{\frac{-2n}{3n+1}}\rho_c\frac{v_c^2}{2}\left(\frac{v_c x}{\nu_c}\right)^{\frac{-2n}{3n+1}} \tag{35}$$

sau

$$\tau_0 = \beta\left[\beta\frac{(2n+1)(3n+1)}{2n}\right]^{\frac{-2n}{3n+1}}(1+\sigma)^{\frac{2n+1}{3n+1}}\rho_\infty\frac{v_\infty^2}{2}\left(\frac{v_\infty x}{\nu_c}\right)^{\frac{-2n}{3n+1}}. \tag{36}$$

Formulele (34) și (36) se aseamănă cu formulele obținute în cazul plăcii drepte de grosime neglijabilă cu strat-limită lichid. Aceste formule sînt (15]

$$\delta_p = \left[\beta\frac{(2n+1)(3n+1)}{2n}\right]^{\frac{n+1}{3n+1}}\left(\frac{v_\infty}{\nu}\right)^{\frac{-2n}{3n+1}}x^{\frac{n+1}{3n+1}}, \tag{37}$$

$$\tau_{0p} = \beta\left[\beta\frac{(2n+1)(3n+1)}{2n}\right]^{\frac{-2n}{3n+1}}\rho\frac{v_\infty^2}{2}\left(\frac{v_\infty x}{\nu}\right)^{\frac{-2n}{3n+1}}. \tag{38}$$

Comparînd cu (34) și (36) rezultă

$$\delta_c = K_1\delta_p;\ K_1 = \left(\frac{\nu_c}{\nu}\right)^{\frac{2n}{3n+1}}(1+\sigma)^{\frac{-n}{3n+1}}, \tag{39}$$

$$\tau_0 = K_2\tau_{0p};\ K_2 = \frac{\rho_c}{\rho}K_1(1+\sigma). \tag{40}$$

Cum $\nu_c > \nu$ (de exemplu la 15°C, pentru cazul cînd în zona cavitantă se găsesc numai vapori, $\nu_c = 7{,}56.10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$ iar pentru apă $\nu = 1{,}14.10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$) iar $(1+\sigma)$ este apropiat de unitate rezultă $K_1 > 1$ și $\delta_c > \delta_p$. Prin urmare grosimea zonei cavitante este mai mare decît grosimea stratului-limită al plăcii drepte ce se mișcă în apă fără regim de cavitație. Ea crește cu x ca și în cazul plăcii drepte.

Coeficientul $K_2 \ll 1$ deoarece $\frac{\rho_c}{\rho} \ll 1$ $\left(\text{după [16], } \frac{\rho_c}{\rho} \approx 3.10^{-5}\right)$ și deci $\tau_0 \ll \tau_{0p}$, ceea ce concordă cu faptele reale; rezistența la înaintare a corpurilor cu regim supercavitant este mai mică decît cazul cînd lipsește cavitația.

Extinderea zonei cavitante în avalul obstacolului poate fi stabilită prin metoda indicată în lucrarea [9].

3. **Rezistența la înaintare.** Pe baza celor stabilite mai sus se pot face unele aprecieri asupra formelor rezistenței la înaintare și a unei metode de determinare a acesteia.

Cunoscînd repartiția eforturilor tangențiale pe suprafața corpului se poate determina ușor rezistența de frecare. Dacă se notează cu z_0 dimensiunea corpului normală la planul xy și cu x_0 dimensiunea maximă în direcția axei x rezultă

$$R_f = 2z_0\int_0^{x_0}\tau_0\,\mathrm{d}x = K_2R_{fp}, \tag{41}$$

în care R_{fp} este rezistența de frecare a plăcii drepte cu suprafața de frecare $S_p = 2x_0z_0$. Prin urmare calculul rezistenței de frecare a corpului ce se deplasează în regim supercavitant se reduce la calculul rezistenței de frecare a unei plăci netede echivalente care se deplasează în apă cu viteza corpului. Coeficientul rezistenței de frecare se va determina cu relația

$$C_f = \frac{R_f}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 S} = K_2 C_s C_{fp}, \tag{42}$$

în care $C_s = \frac{S_p}{S}$ (S este suprafața de frecare a corpului) iar C_{fp} este coeficientul rezistenței de frecare pentru placa dreaptă netedă a cărui valoare se determină în funcție de numărul Reynolds după metodele cunoscute.

La calculul rezistenței de frecare se va ține seama și de rugozitatea suprafeței care mai sus a fost considerată netedă.

Pentru determinarea rezistenței totale la înaintare se folosește metoda cunoscută [17] cu particularitățile impuse de caracterul mișcării în zona cavitantă. În acest scop se folosește teorema impulsului pentru fluidul din suprafața de control 11′22′1 (fig. 2). Fețele acestei suprafețe

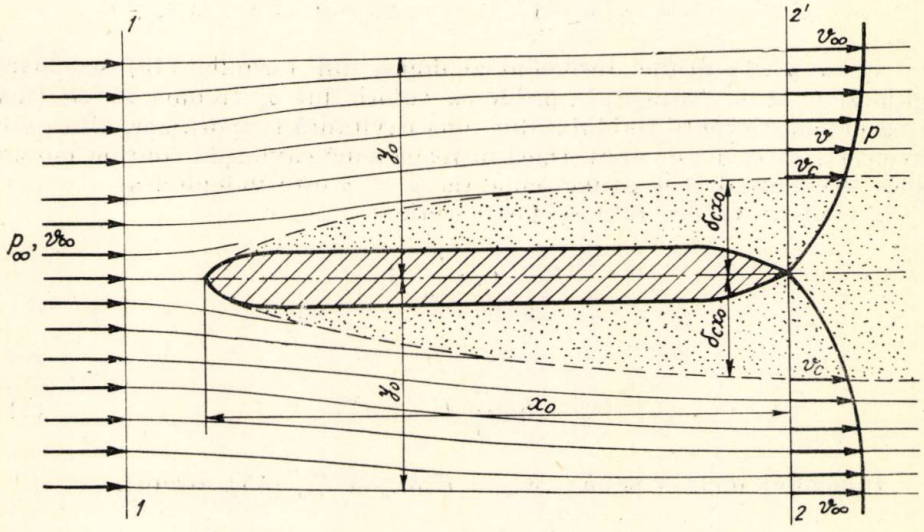


Fig. 2

au fost adoptate astfel: 1—1′ la infinit în amonte (practic suficient de depărtată de corp); 2—2′ la bordul de scurgere al obstacolului; 1—2 și 1′—2′ la distanța y_0 de axa de simetrie a obstacolului considerată suficient de mare pentru ca $v = v_\infty$ și $p = p_\infty$.

Se presupune că nu are loc desprinderea stratului-limită (teoretic acest lucru este justificat de faptul că $\frac{\partial p_c}{\partial x} = 0$) și că în stratul-limită profilul vitezelor este exponențial

$$v_x = v_c \left(\frac{y}{\delta_c}\right)^n . \tag{43}$$

În secțiunea $2-2'$ în exteriorul stratului-limită (zonei cavitante) se consideră, aproximativ, $p = p_\infty$ și $v = v_\infty$. Cu aceste ipoteze, pentru rezistența totală la înaintare se obține

$$R = R_f + \rho_c z_0 \int_{-\delta_{cx_0}}^{\delta_{cx_0}} v_x(v_\infty - v_x)\,dy + z_0 \int_{-\delta_{cx_0}}^{\delta_{cx_0}} (p_\infty - p_c)\,dy. \tag{44}$$

Înlocuind v_x conform cu (43) și avînd în vedere (4) rezultă

$$R = R_f + C_p \rho \frac{v^2}{2} A_c , \tag{45}$$

în care $A_c = 2z_0\delta_{cx_0}$ este aria secțiunii transversale a zonei cavitante la $x = x_0$, iar

$$C_p = \sigma + \frac{\rho_c}{\rho}\left[\frac{2}{n+1}\sqrt{1+\sigma} - \frac{2}{2n+1}(1+\sigma)\right]. \tag{46}$$

Dacă $\rho_c \ll \rho$ atunci termenul al doilea din formula (46) se poate neglija și $C_p \approx \sigma$. Totuși la aprecierea valorii lui ρ_c trebuie să se țină seama de constituenții fluidului din zona cavitantă (vapori, aer, alte gaze și eventual particule de apă). Dacă întreaga zonă cavitantă conține numai vapori și eventual gaze atunci cnodiția $\rho_c \ll \rho$ este îndeplinită.

Avînd în vedere (42) se poate scrie

$$R = C_R \rho \frac{v_\infty^2}{2} A_c$$

cu

$$C_R = K_2 \frac{S_p}{A_c} C_{fp} + C_p. \tag{47}$$

Înlocuind în (47) pe K_2, $\delta_{cx_0} = K_1\delta_{px_0}$ și C_{fp} [15], rezultă

$$C_R = \sigma + \frac{2}{n+1}\frac{\rho_c}{\rho}\left(\sqrt{1+\sigma} - \frac{1+\sigma}{2n+1}\right). \tag{48}$$

Și aici termenul al doilea poate fi neglijat dacă $\rho_c \ll \rho$. Dacă se adoptă, de exemplu, $\sigma = 0{,}6$, $\frac{\rho_c}{\rho} = 3.10^{-5}$ și $n = \frac{1}{9}$ pentru cel de-al doilea termen din (48) se obține $2{,}1.10^{-5}$ și deci se poate lua, aproximativ,

$C_R \approx \sigma$. Cum $A_c < S$ (aria suprafeţei obstacolului) rezultă că rezistenţa la înaintare în cazul cavitaţiei este mai mică decît în cazul cînd cavitaţia lipseşte. Concluzia este justă pentru valori obişnuite ale cifrei de cavitaţie. În figura 3 sînt reprezentate curbele $C_R = C_R\left(\sigma, \frac{\rho_c}{\rho}\right)$ pentru $0{,}2 \leqslant \sigma \leqslant 1{,}2$ şi $10^{-1} \leqslant \frac{\rho_c}{\rho} \leqslant 10^{-5}$. Se observă că termenul care conţine $\frac{\rho_c}{\rho}$ din formula (48) influenţează destul de puţin asupra lui C_R chiar şi la valori mai mari ale raportului $\frac{\rho_c}{\rho}$. De aceea se poate adopta $C_R \approx \sigma$. Valorile obţinute cu formula (48) nu diferă prea mult de cele obţinute în lucrarea [9] pentru diedru cu unghiul la vîrf de 30°. Diferenţele provin nu numai din faptul că s-a folosit un alt obstacol ci şi ca urmare a neglijării efectului

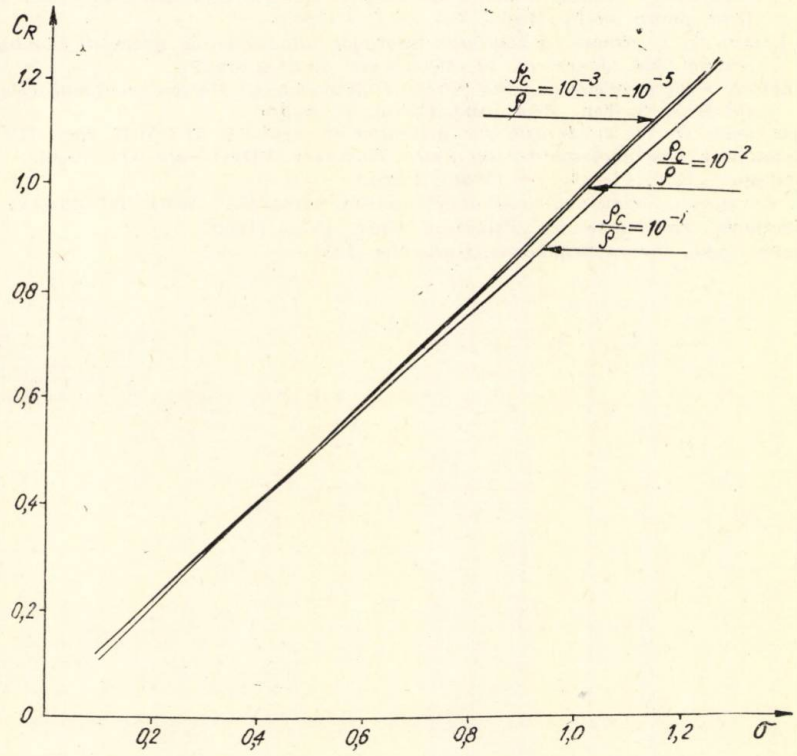


Fig. 3

gravitaţional. Bineînţeles trebuie menţionate şi celelalte ipoteze care au stat la baza stabilirii formulei (48).

Metoda de calcul prezentată aici este evident aproximativă dar ea poate fi folosită pentru calcule preliminare.

Desigur, ca şi în alte cazuri similare, sînt necesare experienţe pentru a se preciza în ce măsură rezultatele obţinute pe cale teoretică concordă cu realitatea.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, E. Zarantonello, *Jets, Wakes and Cavities*, New York, Academic Press (1957).
2. * * *, „American Rochet Society Journal" Nr. 12 (1960).
3. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, New York, 1960, Ed. IV.
4. D. Gilbarg, *Jets and cavities*, Encyclopedia of Physics, vol. IX, Berlin : Springer-Verlag, (1960).
5. A. J. Acosta, *The effect of a longitudinal field on the supercavitating flow over a wedge*, J. Appl. Mech. 28 (1961).
6. B. R. Parkin, *A note on the cavity flow past a hydrofoil in a liquid with gravity*, Engr. Div. Teh. Rep. Nr. 47—9, Pasadena, California (1957).
7. B. R. Parkin, *Liniarized theory of cavity flow in two dimensions*, RAND Corp. Rep. Nr. P 1745, Santa Monica, California (1959).
8. W. C. Lenau, *A nonlinear theory for supercavitating flow past a wedge in a longitudinal gravity field*, Dept. of C.E.Teh. Rep. Nr. 28 Stanford University (1963).
9. W. C. Lenau, R. L. Street, *A nonlinear theory for simetric, supercavitating flow in a gravity field*, Journ. of Fl. Mech., Vol. 21 P 2 (1965).
10. B. E. Larock, R. L. Street, *A nonlinear theory for fully cavitating hydrofoil in a transverse gravity field*, Journ. of. Fl. Mech., vol. 29 P 2 (1967).
11. I. Ackeret, *Experimentelle und theoretische Untersuchungen Hohleraumbildung (Kavitation im Wasser)*, Teh. Mech. und Therm. 1 (1930).
12. P. Eisenberg, *On the mechanism and prevention of cavitation*, D.T.M.B. Rep. 712 (1950).
13. H. Reichardt, *Gesetzmässigkeiten der freien Turbulenz*, VDI Forsch 414 (1950).
14. G. Birkhoff, Rev. Ciencias 50 (1948), Lima.
15. G. E. Pavlenko, *Soprotivlenie vodi dvijenie sudov*, GOSIZDAT VOD. TR Moscova (1953).
16. G. Birkhoff, *Hydrodynamics*, Princeton Univ. Press (1960).
17. H. Schlichting, *Grenzschichttheorie*, Karlsruhe (1951).

EFECTUL NEUNIFORMITĂȚII CURENTULUI SUBTERAN ASUPRA DEBITULUI DRENULUI ARCUIT ȘI RECTILINIU

de IOAN DAVID
Institutul politehnic, Timișoara

532 : 551.4

În lucrare se urmărește punerea în evidență a efectului neuniformității (curbura, divergența) curentului subteran asupra debitului drenului de captare orizontal, arcuit și particular în a celui rectiliniu de lungime finită.

1. În aplicațiile tehnice soluțiile de captare prin drenuri sînt aproape tot atît de frecvente ca și cele cu puțuri.

În general însă în calculul hidraulic al acestora nu se ține seama de o serie de condiții care influențează considerabil funcționarea lor. Astfel de exemplu, de faptul că sînt de lungime finită, menționat și în [1] unde se tratează drenul rectiliniu de lungime finită, situat în curentul subteran plan-axial. De asemenea nu se ține seama de neuniformitatea curentului subteran caracterizat prin curbura, divergența și convergența liniilor de curent. Ori din măsurătorile hidrogeologice care stau la baza dimensionării oricărui sistem de captare rezultă în general un curent caracterizat prin neuniformitatea liniilor de curent [2].

În lucrarea de față se propune punerea în evidență a efectului neuniformității curentului subteran asupra debitului drenului arcuit și în particular a celui rectiliniu, care urmează să fie amplasate în curentul subteran (acestea se vor considera de lungime finită).

2. Fie drenul arcuit $M_1M_2M_3$ (fig. 1a) care urmează să fie amplasat într-un curent subteran. Configurația dată a hidroizopiezelor rezultă din măsurătorile hidrogeologice determinînd o neuniformitate a liniilor de curent (curbura, divergența etc.) în general cu mult diferită de imaginea unei rețele de drepte paralele caracteristic curentului plan-axial.

Pentru reprezentarea curentului în condițiile menționate se va aplica o metodă aproximativă. Se consideră că, curentul subteran dat este generat de un sistem de surse situate în exteriorul zonei de influență a drenului, ale căror intensități le vom determina astfel ca hidroizopiezele EF și GL să constituie porțiuni de linii echipotențiale în mișcarea generată de surse.

Fie sursele situate în punctele $P_j(x_j, y_j)$ $(j = 1, 2, \ldots n)$ (puncte impuse situate în exteriorul zonei de influenţă a drenului) şi $M(x_s, y_s)$ $(s = 1, 2, \ldots n)$ puncte de pe hidroizopiezele EF şi GL (fig. 1a).

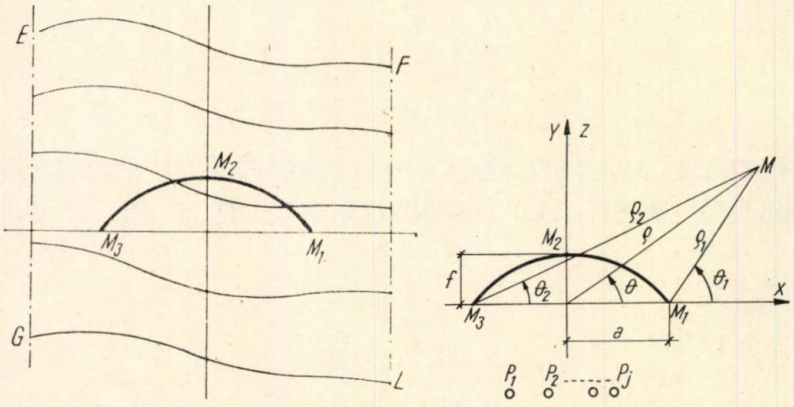


Fig. 1a, 1b.

Mişcarea generată de surse este reprezentată prin potenţialul complex de forma

$$f_0(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln(z - z_j), \tag{1}$$

de unde

$$\varphi(x, y) = \mathrm{Re}\{f_0(z)\} = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln|z - z_j|. \tag{2}$$

Punînd condiţia ca în punctele $M(x_s, y_s)$ $(s = 1, 2, \ldots n)$ hidroizopiezele EF şi GL să coincidă cu porţiuni din liniile echipotenţiale date de (2) şi ţinînd seama că pe cele două hidroizopieze avem:

$$\varphi_1 = -kh_1 \text{ respectiv } \varphi_2 = -kh_2 \tag{2'}$$

(h_1 şi h_2 fiind cotele piezometrice faţă de patul impermeabil pe EF respectiv GL) găsim sistemul liniar în q_j

$$-kh_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln|z_s - z_j|, \quad s = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

$$l = 1, 2, \text{ după cum } z_s \in EF \text{ sau } z_s \in GL.$$

Sistemul liniar (3) permite calculul debitelor q_j ale surselor care generează mişcarea considerată. Gradul de aproximaţie depinde de numărul punctelor $M(x_s, y_s)$ în care liniile echipotenţiale coincid. Este de observat însă că, cu cît numărul punctelor M creşte (adică creşte precizia) cu atît creşte şi numărul surselor ceea ce duce la o complicare a expresiilor.

Asimilînd drenul arcuit cu tăietura $M_1M_2M_3$ (acest lucru este posibil deoarece grosimea drenului este neglijabilă în raport cu lungimea lui) rezolvarea problemei va consta în determinarea unei funcții analitice

$$F(z) = h(z) + g(z) \tag{4}$$

$h(z)$ reprezentînd mișcarea plană considerată (aproximată cu sistemul de surse) în prezența drenului arcuit (drenul va trebui să fie o linie echipotențială), iar $g(z)$ sursa negativă distribuită de-a lungul drenului de debit total Q.

$F(z)$ va trebui să satisfacă condițiile:

— $\mathrm{Re}\,\{F(z)\} = \text{const}$, $z \in M_1M_2M_3$;

— să fie regulată în domeniul exterior arcului, cu excepția punctelor P_j unde admite singularități logaritmice;

— să fie mărginită la infinit.

Pentru a ușura determinarea lui $F(z)$ vom reprezenta conform domeniul exterior tăieturii $M_1M_2M_3$ pe exteriorul cercului de rază R din planul (ζ), centrat în origine. Această reprezentare se realizează prin

$$\zeta = if + \sqrt{z^2 - a^2}, \tag{5}$$

raza cercului fiind $R = \sqrt{a^2 + f^2}$, iar pentru radical alegîndu-se determinarea care pentru $z > a$ și real, devine $\sqrt{x^2 - a^2}$. Sursele vor fi situate în punctele

$$\zeta_j = z_j - if + \sqrt{z_j^2 - a^2}, \quad j = 1, 2, \ldots n. \tag{6}$$

Funcția $h(\zeta)$ se determină din $f_0(\zeta)$ aplicînd teorema cercului [3]

$$h(\zeta) = f_0(\zeta) - \overline{f_0\left(\frac{R^2}{\zeta}\right)}, \tag{7}$$

care ținînd seama de (1) devine

$$h(\zeta) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln \frac{\zeta(\zeta - \zeta_j)}{R^2 - \zeta\bar{\zeta}_j} \tag{8}$$

sau, revenind la planul fizic,

$$h(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{2\pi} \ln \frac{(z - if + \sqrt{z^2 - a^2})(z - z_j + \sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z_j^2 - a^2})}{a^2 + f^2 - (z - if + \sqrt{z^2 - a^2})(\bar{z}_j + if + \sqrt{\bar{z}_j^2 - a^2})}. \tag{9}$$

Pentru determinarea lui $g(z)$ observăm că tăietura $M_1M_2M_3$ devine prin (5) cercul de raza R, deci $g(\zeta)$ va trebui să reprezinte mișcarea către o sursă negativă centrată în origine și de rază R, exteriorul cercului fiind ocupat de mediul poros. Avem deci

$$g(\zeta) = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\zeta}{R} \tag{10}$$

sau, revenind la planul fizic,

$$g(z) = -\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + f^2}}. \tag{11}$$

Potențialul complex al mișcării generale se va obține prin simpla însumare a celor două funcții (9) și (11)

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{2\pi}\ln\frac{(z - if + \sqrt{z^2 - a^2})(z - z_j + \sqrt{z^2 - a^2} - \sqrt{z_j^2 - a^2})}{a^2 + f^2 - (z - if + \sqrt{z^2 - a^2})(\bar{z}_j + if + \sqrt{\bar{z}_j^2 - a^2})} -$$

$$-\frac{Q}{2\pi}\ln\frac{z - if + \sqrt{z^2 - a^2}}{\sqrt{a^2 + f^2}}. \tag{12}$$

Cazul drenului rectiliniu de lungime $2a$ se obține din (12) pentru $f = 0$.

Pentru determinarea debitului total al drenului Q, determinăm partea reală a funcției (12).

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n}\frac{q_j}{4\pi}\ln\frac{(A^2 + B^2)[A^2 + B^2 - 2(AA_j + BB_j) + A_j^2 + B_j^2]}{(a^2 + f^2)[a^2 + f^2 - 2(AA_j + BB_j)] + (A^2 + B^2)(A_j^2 + B_j^2)} -$$

$$-\frac{Q}{4\pi}\ln\frac{A^2 + B^2}{a^2 + f^2}, \tag{13}$$

unde s-a notat

$$A = \rho\cos\theta + \sqrt{\rho_1\rho_2}\cdot\cos\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}, \tag{14}$$

$$B = \rho\sin\theta - f + \sqrt{\rho_1\rho_2}\cdot\sin\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}.$$

S-a ținut seama ca $z = \rho e^{i\theta}$ și $\rho_1\ \rho_2$, θ_1, θ_2 sînt coordonatele bipolare (fig. 1*b*). A_j și B_j se obțin pentru $\rho = \rho_j$; $\theta = \theta_j$ și $\rho_1 = \rho_{1j}$, $\rho_2 = \rho_{2j}$, $\theta_1 = \theta_{1j}$, $\theta_2 = \theta_{2j}$ $(j = 1, 2, \ldots n)$.

În ipoteza valabilității lui Darcy avem

$$\Phi = -kh + \text{const}, \tag{15}$$

unde

h este cota piezometrică în raport cu patul impermeabil;

k — coeficientul de filtrație.

Introducînd ipoteza Dupuit cu privire la caracterul limitat al razei de influență a drenului [1], expresia debitului se scrie sub forma

$$Q = \frac{2\pi k\,\delta(H + U)}{\ln\frac{k}{\sqrt{1 + \beta^2}}}, \tag{16}$$

unde

δ reprezintă grosimea stratului acvifer;

H — diferența dintre cota piezometrică în dren și stratul acvifer la distanța razei de influență R_0 (raza de influență se consideră în direcție frontală);

$$K = \alpha - \beta + \sqrt{1 + \alpha^2}; \tag{17}$$

$$U = \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{4\pi k} \ln k^2 \frac{K(K - 2B_j^*) + A_j^{*2} + B_j^{*1}}{(1+\beta^2)[1 + \beta^2 - 2KB_j^*] + K^2(A_j^{*2} + B_j^{*2})} \tag{18}$$

A_j^* și B_j^* obținîndu-se din (14)

$$\begin{aligned} A_j^* &= \frac{1}{a}\left(\rho_j \cos\theta_j + \sqrt{\rho_{1j}\,\rho_{2j}} \cos\frac{\theta_{1j} + \theta_{2j}}{2}\right) \\ B_j^* &= \frac{1}{a}\left(\rho_j \sin\theta_j - f + \sqrt{\rho_{1j}\,\rho_{2j}} \sin\frac{\theta_{1j} + \theta_{2j}}{2}\right) \end{aligned} \tag{19}$$

$$(j = 1, 2, \ldots n).$$

Este de observat că A_j^*, B_j^* sînt niște parametri adimensionali și caracterizează poziția surselor care generează mișcarea plană.

α și β sînt de asemenea niște coeficienți adimensionali:

$\alpha = \frac{R_0}{a}$ — raportul dintre raza de influență și semicoardă (respectiv semilungime în cazul drenului rectiliniu)

$\beta = \frac{f}{a}$ — raportul dintre săgeata arcului și semicoardă — deci un parametru care caracterizează curbura.

Drenul rectiliniu de lungimea $2a$ se obține pentru $\beta = 0$.

Este de remarcat că efectul curentului subteran neuniform considerat este înglobat în parametrul U. Efectul neuniformității curentului comparativ cu un curent plan axial se poate pune în evidență comparînd expresia (16) particularizată pentru drenul rectiliniu cu expresia debitului obținută în [1] care este tot de forma (16) avînd însă pentru U forma simplificată:

$$U = -IR_0, \tag{20}$$

unde

I reprezintă panta hidraulică a curentului subteran;

R_0 — raza de influență în direcție frontală.

Un caz particular interesant ar fi cînd hidroizopiezele sînt cercuri și în consecință curentul subteran poate fi generat de o singură sursă. În acest caz simplificat, pentru drenul rectiliniu frontal obținem

$$U = -\frac{(R_0 + r_1) I_0}{2} \ln \frac{K^2[K(K + 2K_1) + K_1^2]}{1 + KK_1(2 + KK_1)}, \tag{21}$$

unde

$$K = \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}; \quad K_1 = \alpha_1 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}, \tag{22}$$

$$\alpha_1 = \frac{r_1}{a}, \tag{23}$$

r_1 — determina poziția sursei generatoare care se găsește în punctul de afixă „$-ir_1$";

I_0 — panta hidraulică a curentului subteran la distanța razei de influență R_0, a drenului.

BIBLIOGRAFIE

1. E. Trofin, *Contribuții la calculul hidraulic al drenurilor de captare de lungime finită*, St.cerc. mec. apl., **16**, *4*, 963—981 (1964).
2. M. Negulescu, *Captarea apelor subterane*, Editura tehnică, 1960.
3. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucureşti—Paris, 1961.

APLICAREA TRANSFORMATELOR LUI LAPLACE-PICONE LA STUDIUL SISTEMELOR DIFERENȚIALE INTERESÎND FIZICA MATEMATICĂ. I. PROBLEME REFERITOARE LA ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL PATRULEA

de D. MANGERON [1],
Institutul politehnic, Iași

M. N. OGUZTÖRELI,
Department of Mathematics. University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

517.9

Autorii expun numeroase teoreme relative la unicitatea, existența și determinarea soluțiilor problemei lui Cauchy pentru ecuații cu derivate parțiale de ordin superior de tip ,,compus'' (în sensul lui J. Hadamard) în vederea stabilirii unor aspecte privitoare la tratarea problemelor din domeniul fizicii matematice, grație folosirii transformatei Laplace-Picone cu intervalul de integrație finit. Cu acest prilej se rezolvă o serie de probleme referitoare la ecuații cu derivate parțiale de ordinul patru, în care se cuprinde, printre multe altele, problema de vibrații transversale ale grinzilor elastice de secțiune variabilă.

I. INTRODUCERE

1. Atenția specialiștilor acordată studiilor elaborate de primul dintre autori privitoare la o nouă metodă de cercetare a sistemelor cu derivate parțiale de ordin superior cu ajutorul transformatei lui Laplace-Picone cu intervalul de integrație finit [1], cristalizată, de exemplu, în volumul lui L. Poli și P. Delerue ,,Le calcul symbolique à deux variables et ses applications'' prin cuvintele ,,Lui Picone, Mangeron le datorăm două contribuții de seamă (On doit à Picone, Mangeron, deux progrès principaux)'' . . . [2], a condus pe autori să reexamineze în prezenta lucrare și în cîteva următoare metoda lui Laplace-Picone cu intervalul

[1] ,,Visiting professor'' la Universitatea din Alberta, Edmonton, Alberta, Canada; The first of the authors wishes to express his sincere thanks to the University of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics of this University.

[2] [2, pp. 40—50].

de integrație finit în cazul funcțiilor de mai multe variabile avînd în vedere în principal elaborarea de metode de investigație pentru rezolvarea sistemelor diferențiale cu derivate parțiale, și poate și integro-diferențiale, de ordin superior [3]).

Menționăm ca în lucrarea [3] au fost elaborate premisele unei *teorii unitare* pentru ecuații cu derivate parțiale poliarmonice (M. Picone [4], M. Nicolescu [5]), policalorice (M. Nicolescu [6]) și polivibrante (D. Mangeron [7]), pe cînd într-o serie de lucrări publicate de primul dintre autori, de cel de-al doilea și recent de ambii autori în colaborare s-au expus metode de calculul numeric al soluțiilor diferitelor sisteme diferențiale și integro-diferențiale, ca, de exemplu, metoda integrală [8], metoda polinomială [9], metode de rezolvare a unor noi probleme mixte generalizate liniare și neliniare cu operatori calorici și cu argument întîrziat [10], [13], [14], o parte din problematică elaborată, cu citări corespunzătoare de lucrări datorite primului dintre autori, a fost cristalizată de cel de-al doilea în două cărți cu totul recente apărute în editura "Academic Press" [11], —[12].

În ceea ce urmează vom da mai multe teoreme referitoare la existența, unicitatea și determinarea soluțiilor problemei lui Cauchy pentru ecuații cu derivate parțiale de ordin superior de tip „compus" (în sensul lui Hadamard [15]), de forma

$$D\,[E(u)] = f(x,\ y), \tag{1}$$

în care operatorii diferențiali D și E posedă respectiv conuri caracteristice real și imaginar și au drept prototip ecuația lui Hadamard

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0. \tag{2}$$

Vom trece apoi la unele studii referitoare la tratarea ecuațiilor cu derivate parțiale de ordin superior prin folosirea transformatei lui Laplace-Picone cu intervalul de integrație finit. În legătură cu acest din urmă fapt ajunge să menționăm că expresia [4]) $\frac{1}{xy}$ nu are imagine în sens clasic. Însă se poate foarte bine considera o funcție egală cu $\frac{1}{xy}$ în dreptunghiul

$$0 < a < x < b, \quad 0 < c < y < d$$

și egală cu zero în afara acestui domeniu dreptunghiular.

O funcție astfel „mutilată", redusă la un domeniu finit, posedă întotdeauna o imagine $f^*(p,\ q)$ și această imagine este o funcție întreagă de p și de q.

Acest fapt conduce la noi condiții (uneori chiar în număr infinit) care permit să se determine funcțiile fundamentale și, în consecință, conduce la dezvoltarea soluției într-o serie.

---

[3]) Menționăm că, pe măsura adîncirii legăturii între tehnica înaltă și Matematica, schematizările matematice ale fenomenelor fizice devin din ce în ce mai complicate. De ex., acad. gruzin G. Oniașvili în studiul dinamicii pînzelor subțiri ajunge la ecuații cu derivate parțiale din ordinul al 16-lea.

[4]) Pentru a nu complica expunerea, în această lucrare ne vom mărgini la considerarea cazului în care nu intervin decît *două* variabile independente, de exemplu x și y.

II. PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE TIP „COMPUS"

2. Fie $\overset{>}{D}$ dat în (1)-operator diferențial liniar hiperbolic și E-un operator eliptic cu coeficienți analitici [5]). Vom presupune că coeficienții care intră în expresia operatorului D și funcția $f(x, y)$ sînt dați într-un domeniu A al planului x, y, în care coeficienții operatorului E sînt funcții analitice [5]). Fie acum

$$Du = 0. \tag{3}$$

Vom presupune că prin fiecare punct P al domeniului A trece întotdeauna una și numai una curbă caracteristică din cele două sisteme de caracteristice ale ecuației (3).

Fie C^* o porțiune regulată dintr-o curbă C, aleasă arbitrar în domeniul A și avînd extremități în două puncte P_1 și P_2. Vom presupune că C^* nu este nicăieri tangentă la curbele caracteristice ale ecuației (3) și este în întregime conținută în patrulaterul Q determinat de cele două caracteristici duse prin P_1 și celelalte două duse prin P_2.

Se poate afirma că, în patrulaterul Q, nu poate exista mai mult decît o singură soluție a ecuației (1), astfel ca această soluție și derivatele sale parțiale de primul, al doilea și al treilea ordin să aibă valori prescrise de-a lungul curbei C^*. Clasa funcțională a unei atare soluții unice este C^{IV}. Punînd

$$E(u) = v, \tag{a}$$

se cunosc valorile funcției v și a derivatei sale de primul ordin de-a lungul curbei C^* și, deoarece aceasta verifică ecuația $Dv = f$, funcția v rezultă determinată în virtutea clasicelor rezultate referitoare la teoria ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic în tot cadrilaterul Q. O dată cunoscută funcția V, se obține u din ecuația (a) deoarece lui u i se prescriu datele lui Cauchy de-a lungul curbei C^* și, după cum se știe, făcînd aici abstracție de eventuala teoremă de existență, funcția u rezultă univoc determinată acolo unde este dat termenul liber v din ecuația (a), adică în Q.

Se poate prin urmare enunța următoarea :

TEOREMA 1. *În ipotezele formulate mai sus, unicitatea soluției problemei lui Cauchy este asigurată pentru ecuația (1) în patrulaterul Q în clasa funcțiilor C^{IV} (finite și continue în domeniul A cu derivatele sale parțiale pînă la ordinul al patrulea inclusiv).*

3. Vom considera în cele ce urmează, dat fiind domeniul de aplicații în fizică matematică, ecuația lui Hadamard (2). În corespondență cu ecuația (2) domeniul A devine întreg planul x, y, deoarece cele două sisteme de caracteristice formează o rețea carteziană constituită din totali-

[5]) Menționăm cu acest prilej unele lucrări recente ale lui J. Favard [17] privitoare la ecuații ale căror coeficienți nu sînt funcții analitice.

tatea paralelelor la cele două bisectoare ale sistemului de axe x, y. Să luăm pentru arcul C^* al curbei C un segment constituit din intervalul (a, b) al axei x, iar pentru condițiile lui Cauchy

$$\left(\frac{\partial^i u}{\partial y^i}\right)_{y=0} = S_i(x) \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{4}$$

Folosind un raționament datorit lui M. Picone [16] care permite unificarea diferitelor teorii și metode răzlețe, începînd cu metoda clasică a lui Bernoulli-Fourier, datorită conexiunii între o bandă convenabil aleasă și un domeniu dat referitor la ecuații cu derivate parțiale și la probleme de contur ce li se asociază, într-o singură problemă ce s-ar putea numi *problema stratului conex cu un domeniu dat*, se poate enunța următoarea teroemă :

TEOREMA 2. *Condiția necesară de existență într-un dreptunghi*

$$(R_c) \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \ |y| < c, \ \alpha \leqslant a, \ \beta \geqslant b, \ c \leqslant \frac{b-a}{2}$$

a soluției ecuației (2), *satisfăcînd condițiile*

$$\left(\frac{\partial^i u}{\partial y^i}\right)_{y=0} = \overline{S}_i(x) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} u(\alpha, y) = u(\alpha, 0) = \overline{S}_0(\alpha), \ u_{xx}(\alpha, y) = u_{xx}(\alpha, 0) = \overline{S}_0''(\alpha), \\ u(\beta, y) = u(\beta, 0) = \overline{S}_0(\beta), \ u_{xx}(\beta, y) = u_{xx}(\beta, 0) = \overline{S}_0''(\beta), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

și ținînd seama de condițiile necesare de existență a soluției aceleiași ecuații satisfăcînd în intervalul (a, b) *condițiile lui Cauchy* (4), *constă în convergența pentru* $Q \cdot R_c$ *a seriilor*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k^{(i)}(y)|^2 \quad (i = 1, 0, 2, 3, 4), \tag{7}$$

unde am introdus următoarele notații și unde au loc egalitățile de mai jos :

$$u_k(y) = \left(\frac{2}{\beta - \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \int_\alpha^\beta u(\xi, y) \sin k\rho(\xi - \alpha)\, d\xi$$

$$(k = 1, 2, \ldots), \ \rho = \frac{\pi}{\beta - \alpha}, \tag{8}$$

$$u_k^{(i)}(0) = \left(\frac{2}{\beta - \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \int_\alpha^\beta \overline{S}(\xi) \sin k\rho(\xi - \alpha)\, d\xi \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{9}$$

$$\frac{d^4 u_k}{dy^4} - (k\rho)^2 u_k = A_k, \tag{10}$$

$$A_k = k\rho(\overline{S}_0''(\alpha) - (-1)^k \overline{S}_0''(\beta) - (k\rho)^3(\overline{S}_0(\alpha) - (-1)^k \overline{S}_0(\beta)), \tag{11}$$

$$u_k(y) = \frac{1}{4}\left\{\sum_{s=0}^{3} \frac{1}{(k\rho)^s} u_k^{(s)}(0)\,[e^{k\rho y} + (-1)^s\, e^{-k\rho y} + i^s\, e^{-ik\rho y} + \right.$$

$$\left. + (-i)^s\, e^{ik\rho y}]\right\} + \frac{1}{(k\rho)^4}\,\frac{A_k}{4}\,(e^{k\rho y} + e^{-k\rho y} + e^{ik\rho y} +$$

$$+ e^{-ik\rho y} - 4),\ i = \sqrt{-1}, \tag{12}$$

$$u_k(y) = \frac{1}{2}\left[u_k(0) + \frac{1}{(k\rho)^2}\,u_k''(0) + \frac{A_k}{(k\rho)^4}\right] \operatorname{ch} k\rho y +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k\rho}\,u_k'(0) + \frac{1}{(k\rho)^3}\,u_k'''(0)\right] \operatorname{sh} k\rho y +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[u_k(0) - \frac{1}{(k\rho)^2}\,u_k''(0) + \frac{A_k}{(k\rho)^4}\right] \cos k\rho y +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k\rho}\,u_k'(0) - \frac{1}{(k\rho)^3}\,u_k'''(0)\right] \sin k\rho y - \frac{A_k}{(k\rho)^4}. \tag{13}$$

În consecință, unicitatea problemei formulate este demonstrată. Mai mult decît atît, soluția căutată este *efectiv construită* și dată prin formula

$$u \approx \left(\frac{2}{\beta - \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \sin k\rho(x - \alpha). \tag{14}$$

În ceea ce privește problema de determinare a condițiilor suficiente de existență și de problematică în domeniu referitoare la Matematica constructivă, se poate enunța următoarea

TEOREMA 3. *Dacă funcția* $\overline{S}_0(x)$ *de clasa* C^{IV} *posedă în intervalul* (α, β) *derivata de ordinul 5 cu variație mărginită și este împreună cu derivatele sale de ordin 2 și 4 la extremitățile intervalului* (α, β) *egală cu zero; dacă* $S_1(x)$ *este de clasa* C''', *posedă în* (α, β) *derivata de ordinul 4 cu variație mărginită și se anulează la extremitățile intervalului* α *și* β *și dacă, în fine,* $\overline{S}_2 \equiv \overline{S}_0''$ *și* $\overline{S}_3 \equiv \overline{S}_1''$, *soluția căutată a problemei lui Cauchy există în întregul domeniu* Q *și este determinată efectiv prin dezvoltarea dată prin formula* (14).

Ca o consecință a faptului că în acest caz se poate lua în considerație și datele analitice pentru problema studiată, rezultatul obținute precizează și de această dată domeniul de existență al soluției. În legătură cu aceasta, avem, de exemplu, următoarea

TEOREMA 4. Existența soluției problemei lui Cauchy este asigurată *în domeniul* Q *dacă funcțiile* $\overline{S}_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ *sînt combinații liniare constituite dintr-un număr finit de sinusuri din sistemul ortonormal complet în intervalul* (α, β) $\left[\left(\frac{2}{\beta - \alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \sin k\rho(x - \alpha)\right]$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *pe care l-am folosit cu prilejul stabilirii relațiilor* (7)—(13) *și, în particular, cu ocazia obținerii transformatelor Euler-Fourier* $u_k(y)$ (8) *ale funcției* $u(x, y)$.

Un număr de teoreme care constituie generalizare a teoremei 3 poate fi enunțat. Avem, de exemplu

TEOREMA 5. *Dacă, menținînd condițiile teoremei 3 relative la funcțiile* $\overline{S}_0(x)$ *și* $\overline{S}_1(x)$, *funcțile* $\overline{S}_2(x)$ *și* $\overline{S}_3(x)$ *sînt astfel încît pentru* $0 < c \leqslant \frac{b-a}{2}$ avem în (α, β)

$$\overline{S}_2(x) = \overline{S}_0''(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\operatorname{ch} k\rho c} \sin k\rho(x-\alpha), \quad |q_k| = Mk^{\alpha},$$

$$\overline{S}_3(x) = \overline{S}_1''(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{\operatorname{sh} k\rho c} \sin k\rho(x-\alpha), \quad |p_k| = Nk^{\beta},$$

M, N, α, β *fiind numere constante, soluția problemei lui Cauchy* (5), (6) *există în acea parte a domeniului Q care corespunde la inegalitatea* $|y| < c$ *și este dată prin dezvoltarea* (14) [6]).

Vom indica mai jos o largă clasă de ecuații cu derivate parțiale de tip „compus", care pot fi încadrate în teoria discutată adineaori. Are loc aici următoarea

TEOREMA 6. *Fie*

$$D \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma$$

și

$$E \equiv a_{20} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\, a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{02} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + \delta$$

cei doi operatori diferențiali de ordinul al doilea menționați în (1). *Condiția suficientă pentru ca problema lui Cauchy relativă la ecuația*

$$\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \beta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \gamma\right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[a_{20} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\, a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{02} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \delta\right]\right\} = f(x, y),$$

să fie solubilă prin aplicarea metodei benzilor a lui Picone conexe cu domeniile considerate se exprimă prin egalitățile

$$\beta_1 = b_1 = a_{11} = 0$$

și prin faptul ca toți ceilalți coeficienți care figurează în operatorii D și E trebuie să fie funcții de o singură variabilă y. În fine se mai cere ca a_{02} *și* a_{21} *să aibă același semn pentru* $|y| \leqslant \frac{b-a}{2}$.

---

[6]) O clasă largă de noi rezultate interesante pot fi obținute pentru problema lui Cauchy referitoare la ecuația (2) dacă se iau diferite date neanalitice, ținînd seama de contribuțiile lui C. Popovici, menționate în bine cunoscutul volum al lui J. Pérès [18].

În corespondență cu (7)—(13), se obțin în acest caz următoarele egalități:

$$D[E(u)] = c_0(y)\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + c_1(y)\frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + c_2(y)\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + c_3(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} +$$

$$+ c_4(y)\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + c_5(y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_6(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_7(y)\frac{\partial u}{\partial y} + c_8(y)\,u;$$

$$c_0 = a_{20},\ c_1 = -a_{02},\ c_2 = a_{02} - a_{20},\ c_3 = \beta_2 a_{20} - 2\frac{\partial a_{20}}{\partial y} + b_2,$$

$$c_4 = \beta_2 a_{02} - 2\frac{\partial a_{02}}{\partial y} - b_2,\ c_5 = \gamma a_{20} + \beta_1\frac{\partial a_{20}}{\partial y} + \frac{\partial^2 a_{20}}{\partial y^2} + \delta,$$

$$c_6 = \gamma a_{02} + \beta_2\frac{\partial a_{02}}{\partial y} + \beta_2 b_2 - \frac{\partial^2 a_{02}}{\partial y^2} - 2\frac{\partial b_2}{\partial y} - \delta,$$

$$c_7 = \gamma b_2 + B_2\frac{\partial b_2}{\partial y} + \beta_2\delta - \frac{\partial^2 b_2}{\partial y^2} - 2\frac{\partial \delta}{\partial y},\ c_8 = \gamma\delta + \beta_2\frac{\partial \delta}{\partial y} - \frac{\partial \delta^2}{\partial y^2};$$

$$c_1 u_k^{IV} + c_4 u_k''' + (c_6 - (k\rho)^2 c_2)\,u_k'' + (c_7 - (k\rho)^2 c_3)\,u_k' +$$

$$+ [(k\rho)^4 c_0 - (k\rho)^2 c_5 + c_8]\,u_k = f_k + k\rho[A_k(x, y)\cos k\rho(x-\alpha)]_\alpha^\beta,$$

$$f_k = \left(\frac{2}{\beta-\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \int_\alpha^\beta f(\xi, y)\sin k\rho(\xi-\alpha)\,d\xi,$$

$$A_k(x, y) = (-k\rho)^2 c_0 u + c_0 u_{xx} + c_2 u_{yy} + c_3 u_y + c_5 u.$$

III. METODA TRANSFORMATEI LUI LAPLACE-PICONE CU INTERVALUL DE INTEGRAȚIE FINIT [7])

4. Să considerăm ecuația în două variabile reale x și t de ordin n,

$$E^*(u) \equiv \sum a_{rs}(x)\frac{\partial^{r+s} u}{\partial x^r \partial t^s} = f(x, t)\ \begin{pmatrix} 0 \leqslant r+s \leqslant n,\ n \text{ întreg pozitiv} \\ r,\ s, \text{ întregi pozitivi sau nuli,} \end{pmatrix} \quad (15)$$

pentru x variind într-un interval deschis I de puncte extreme x_1 și x_2, finit sau infinit și pentru $t \geqslant 0$ (aceasta din urmă ipoteză este făcută exclusiv pentru a fixa ideile, nefiind restrictivă), în care coeficienții $a_{rs}(x)$ sînt funcții date de o singură variabilă x, continue în I.

[7]) Socotim că este cazul să fie menționate aici, printre alte metode de investigație a ecuațiilor cu derivate parțiale, și în particular printre metode ce se referă la problematica fizicii matematice, metoda calculului operațional în domeniul funcțiilor generalizate (distribuții), cu mai multe suporturi, datorită lui S. Vasilache [19], precum și numeroase metode operaționale directe [20]. În ceea ce privește lucrarea noastră imediat următoare, dedicată aplicării transformatelor lui Laplace-Picone în două variabile, menționăm aici recentul volum al lui A Ditkin și A. P. Prudnikov [21].

Fie $g(x)$ o funcţie pozitivă în I. Vom nota prin $J(g)$ mulţimea de puncte din planul (x, t) pentru care x este în I şi $0 \leqslant t \leqslant g(x)$. O funcţie de două variabile x şi t, $u(x, t)$, se zice că este regulată în raport cu ecuaţia (15) în mulţimea $J(g)$ dacă ea este finită şi continuă cu toate derivatele sale parţiale care figurează în ecuaţie şi cu toate derivatele care pot fi deduse prin derivări succesive din acestea din urmă. Vom lua în consideraţie în mod exclusiv probleme de determinare a soluţiilor ecuaţiei (15), în mulţimea $J(g)$, regulate în raport cu această mulţime. Atare soluţii se vor numi pur şi simplu regulate în raport cu (15).

Vom presupune ca funcţia căutată $u(x,t)$ satisface condiţiile iniţiale

$$\sum_{h=1}^{n-s} \sum_{i=0}^{n-h-s} a_{i,h+s}(x) \left[\frac{\partial^{i+h-1} u(x, t)}{\partial x^i \partial t^{h-1}} \right]_{t=0} = \Psi_s(x), \tag{16}$$

în care $\Psi_s(x)$ sînt funcţii date de variabilă x şi indicele s parcurge numerele $0,1,\ldots, \nu-1$, ν fiind ordinul maxim de derivare în raport cu variabila t care figurează în ecuaţia (15). Trebuie subliniat că aceste condiţii conţin într-însele, ca un caz, particular, clasicile condiţii ale lui Cauchy.

Problema pe care am formulat-o include totodată şi condiţia ca soluţia $u(x, t)$ să aparţină la o anume clasă funcţională Γ. Fie Γ_0 totalitatea funcţiilor care conţine pe zero şi toate diferenţele şi numai acestea ale funcţiilor aparţinînd clasei funcţionale Γ. Teorema de unicitate pentru problema considerată va fi demonstrată dacă se va stabili că o soluţie regulată a ecuaţiei omogene

$$E^*(u) \equiv \sum a_{rs}(x) \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} = 0, \begin{pmatrix} 0 \leqslant r+s \leqslant n, \ n \text{ întreg pozitiv} \\ r, \ s \text{ întregi pozitivi sau nuli} \end{pmatrix} \tag{17}$$

care verifică condiţiile iniţiale omogene

$$\sum_{h=1}^{n-s} \sum_{i=0}^{n-h-s} a_{i,h+s}(x) \left[\frac{\partial^{i+h-1} u(x, t)}{\partial x^i \partial t^{h-1}} \right]_{t=0} = 0 \tag{18}$$

şi aparţine clasei funcţionale Γ_0 trebuie să fie în mod necesar egală cu zero.

5. Introducînd o funcţie $T(x)$, depinzînd de o singură variabilă x, de semn constant în I, presupusă pozitivă şi regulată în raport cu ecuaţia (16), se obţine din (16), pentru x în I,

$$\sum a_{rs}(x) \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} \frac{\partial^{r+s} u(x, t)}{\partial x^r \partial t^s} \, dt = \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} f(x, t) \, dt. \tag{19}$$

Să notăm prin

$$u^*(x, \lambda) = \int_0^{T(x)} e^{\lambda[T(x)-t]} u(x, t) \, dt \tag{20}$$

transformata lui Laplace-Picone cu intervalul de integraţie finit $[0, T(x)]$ a funcţiei $u(x, t)$.

Executînd unele transformări ce nu sînt nici imediate nici prea simple, se găsește că transformata (20) verifică următoarea ecuație diferențială ordinară într-o singură variabilă:

$$a_{n,0}\frac{\mathrm{d}^n u^*}{\mathrm{d}x^n}+\sum_{k=1}^{n}\left[a_{n-k,0}+\sum_{r=1}^{k}\lambda^r(a_{n-k,r}-B_{n-k,r})\right]\frac{\mathrm{d}^{n-k}u^*}{\mathrm{d}x^{n-k}}=$$

$$=\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-h-1}X_h^{(t)}\sum_{k=h+1}^{n-t}B_{t,k}\,\lambda^{k-h-1}+\mathrm{e}^{\lambda T}\sum_{s=0}^{\nu-1}\lambda^s\Psi_s(x)+f^*(x,\lambda), \qquad (21)$$

în care am folosit notația $f^*(x,\lambda)$ pentru transformata

$$f^*(x,\lambda)=\int_0^{T(x)}\mathrm{e}^{\lambda[T(x)-t]}f(x,t)\,\mathrm{d}t,$$

pe cînd celelalte simboluri sînt definite prin

$$B_{n-k,r}=\sum_{t=1}^{k}\binom{n-k-t}{t}\sum_{l=0}^{k-t}a_{n-k+t,l}\,C_{r-l-1,t-1},$$

$C_{l,i}$ fiind coeficientul puterii a $(l+1)$ — a lui λ care apare în funcția $P_i[\lambda T'(x)]$ definită prin recurență după cum urmează [8])

$$P_0=\lambda T'(x),\quad P_i=(P_{i-1})'-\lambda T'\cdot P_{i-1}\quad (i=1,2,\ldots), \qquad (22)$$

în care accentul indică derivarea în raport cu variabila x. Funcțiile $\Psi_s(x)$ sînt definite prin (16), iar funcțiile $X_h^{(s)}$ prin

$$X_h^{(s)}=\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s}X_h=\left[\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s}\frac{\partial^h u}{\partial t^h}\right]_{t=T(x)}\qquad\begin{pmatrix}h=0,1,\ldots,\nu-1\\ s=0,1,\ldots,n-h-1\end{pmatrix}.$$

Să notăm prin $A_i(x,\lambda)$ coeficientul derivatei de ordin i a funcției u^* din primul membru al ecuației (21). Putem scrie

$$V(x,\lambda)=\sum_{h=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-h-1}X_h^{(t)}\sum_{k=h+1}^{n-t}B_{t,k}\,\lambda^{k-h-1},$$

$$\Phi(x,\lambda)=\mathrm{e}^{\lambda T}\sum_{s=0}^{\nu-1}\lambda^s\Psi_s(x).$$

În consecință, ecuația transformată (21) poate fi scrisă sub forma

$$\sum_{i=0}^{n}A_i(x,\lambda)\frac{\mathrm{d}^i u^*}{\mathrm{d}x^i}=V(x,\lambda)+\Phi(x,\lambda)+f^*(x,\lambda), \qquad (23)$$

în care termenii $V(x,\lambda)$ conțin funcții necunoscute $X_0, X_1, \ldots, X_{\nu-1}$.

[8]) Polinoamele speciale ce se obțin din (22) punînd $\lambda T'=x^*$ fac parte din serii de funcții noi găsite de primul dintre autori. O vastă clasă de atare funcții noi a fost în particular determinată cu ocazia studiilor sale referitoare la ecuații polivibrante, numite de numeroși cercetători (de ex. M. Salvadori, Columbia University, J. Favard, Sorbona, L. E. Krivoșein, Frunze, ...) „ecuațiile Mangeron". Ele sînt deosebit de utile în variate probleme de teoria aproximării funcțiilor și în dezvoltări în serii de funcții.

Expresia obținută pentru ecuația transformată permite să enunțăm următoarea teoremă :

TEOREMA 7. *Dacă o funcție $T(x)$ regulată și pozitivă în I poate fi determinată astfel încît pentru orice soluție $u(x, t)$ a ecuației (17) regulată în $J(T)$, care verifică condițiile inițiale (18) și aparține mulțimii funcționale Γ_0, se poate deduce, ținînd în seamă ecuația.*

$$\sum_{i=0}^{n} A_i(x, \lambda) \frac{\mathrm{d}^i u^*}{\mathrm{d}x^i} = V(x, \lambda) \tag{24}$$

care trebuie să fie satisfăcută de către transformata u^* a funcției $u(x, t)$ că pentru această transformată are loc inegalitatea de forma

$$| \chi^*(x, \lambda) | < K(x) \lambda^{p(x)} \tag{25}$$

cel puțin pentru valori pozitive și suficient de mari ale lui λ, $K(x)$ și $p(x)$ fiind funcții reale și finite de x în mulțimea $J(T(x))$ din planul (x, t), definită ca loc al punctelor pentru care x aparține lui I și $0 \leqslant t \leqslant T(x)$, *rezultă că nu poate exista mai mult decît o singură soluție regulată a ecuației* (15) *care verifică condițiile* (16) *și aparține mulțimii funcționale* Γ.

Pentru a ilustra posibilitățile de găsire a inegalităților de forma (25), să dăm în cele ce urmează următoarea teoremă :

TEOREMA 8. *Pentru orice soluție regulată a sistemului de ecuații constituit din* (24) *și din*

$$\lim_{x \to x_1} \frac{d^i u^*}{dx^i} = \lim_{x \to x_2} \frac{d^i u^*}{\mathrm{d}x^i} = 0, \; i = 0, 1, \ldots, \frac{n-2}{2} \text{ dacă } n \text{ este par}, \tag{26}$$

sau din

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\mathrm{d}^i u^*}{\mathrm{d}x^i} = \lim_{x \to x_2} \frac{\mathrm{d}^i u^*}{\mathrm{d}x^i} = 0, \; i = 0, 1, \ldots, \frac{n-3}{2} \text{ dacă } n \text{ este impar},$$

$$\lim_{x \to x_1} \frac{\mathrm{d}^{\frac{n-1}{2}} u^*}{\mathrm{d}x^{\frac{n-1}{2}}} = \lim_{x \to x_2} \frac{\mathrm{d}^{\frac{n-1}{2}} u^*}{\mathrm{d}x^{\frac{n-1}{2}}} \tag{27}$$

și pentru valori ale lui λ pozitive și suficient de mari, are loc următoarea formulă de majorare în I

$$\max | u^* | < K \lambda^{\nu - 1}, \; K = \text{const.}, \tag{28}$$

de îndată ce sînt verificate inegalitățile ce urmează

$$a_{n,0} \geqslant 0, \; (-1)^i \; (a_{2i, n-2i} - B_{2i, n-2i}) > 0, \tag{29}$$

$$\begin{pmatrix} i = 0,1, \ldots, \dfrac{n-2}{2}, \text{ dacă } n \text{ este par} \\ \\ i = 0,1, \ldots, \dfrac{n-1}{2}, \text{ dacă } n \text{ este impar.} \end{pmatrix}.$$

Dacă se presupune că $T(x) \equiv \tau$, τ fiind o constantă pozitivă, formula de majorare (28) este satisfăcută dacă se iau

$$a_{n,0} \geqslant 0, \quad (-1)^n a_{2in-2i} > 0, \tag{30}$$

în care indicele i are semnificația dată în (29).

6. În legătură cu ecuația (15) ne vom mărgini să expunem aici următoarea problemă generală de integrație :

Problema A. *Presupunînd că coeficienții ecuației* (15) *sînt funcții continue în intervalul finit și închis* $I + FI$, *că este dată în acest interval și este pozitivă în* I *o funcție* $T(x)$ *de clasă* $C^{(n)}$, *punînd* $T(x_i) = t_i (i = 1,2)$ *pentru* $t_i > 0$, *sînt date funcții continue* $u_{i,k}(t)$ *în intervalul închis* $(0, t_i)$. *Fie* Γ*-mulțimea funcțiilor din clasa funcțională* $C^{(n-1)}$ *în* $J(T) + FJ(T)$ *și satisfăcînd la condițiile a)* n *este par* $\left(k = 0,1,\ldots, \dfrac{n-2}{2}\right)$, *dacă* $t_i > 0$, *pentru* $0 \leqslant t \leqslant t_i$,

$$\left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]_{x=x_i} = u_{k,i}(t), \tag{31}$$

sau b) n *este impar* $\left(k = 0,1,\ldots, \dfrac{n-3}{2}\right)$, *dacă* $t_i > 0$, *pentru* $0 \leqslant t \leqslant t_i$,

$$\left[\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right]_{x=x_i} = u_{k,i}(t), \left[\frac{\partial^{\frac{n-1}{2}} u}{\partial x^{\frac{n-1}{2}}}\right]_{x=x_1} = \left[\frac{\partial^{\frac{n-1}{2}} u}{\partial x^{\frac{n-1}{2}}}\right]_{x=x_2}. \tag{32}$$

Vrem să considerăm o soluție a ecuației (15) *regulată în* $J(T)$, *aparținînd la mulțimea* Γ *și satisfăcînd condițiile inițiale* (16).

În legătură cu această problemă are loc următoarea teoremă generală de unicitate :

TEOREMA 9. *Problema de integrație* A *nu poate avea decît o singură soluție dacă funcția* $T(x)$ *verifică în* I *inegalitățile* (29).

Dacă se pune, de exemplu, $T(x) \equiv \tau$, τ *fiind o constantă pozitivă, avem următoarea*

TEOREMA 10. *Dacă în* $I + FI$ *inegalitățile* (30) *sînt satisfăcute, punînd* $T(x) \equiv \tau$, τ *fiind o constantă pozitivă, în dreptunghiul* $J(T) + FJ(T)$ *nu poate exista decît o singură soluție a problemei A.*

Să ilustrăm în ceea ce urmează rezultatele generale obținute luînd în studiu unele clase de ecuații cu derivate parțiale ale fizicii matematice.

IV. UNELE PROBLEME REFERITOARE LA ECUAȚIILE CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL PATRULEA ALE FIZICII MATEMATICE

7. *Fie*

$$D^* \equiv [a(x)\xi^2 + b(x)\xi + c(x)][a_1(x)\xi^2 + b_1(x)\xi + c_1(x)],$$
$$a \geqslant 0, \; a_1 \geqslant 0, \; \xi = \frac{dt}{dx},$$

primul membru al ecuațiilor caracteristicilor referitor la ecuația cu derivate parțiale de ordinul al patrulea considerată.

7a. *Ecuații total eliptice* (aici se includ, de exemplu, probleme de vibrație a plăcilor, studiate de noi în unele cazuri în paginile acestei reviste [24]). Considerăm în primul rînd cazul în care avem, în $I + FI$

$$b^2 - 4\,ac < 0 \text{ și } b_1^2 - 4\,a_1c_1 < 0. \tag{33}$$

Avem în acest caz următoarea

TEOREMA 11. *Pentru clasa de ecuații de tip eliptic pentru care are loc, în afara, bineînțeles, de* (33), *în* $I + FI$, *inegalitatea*

$$ac_1 + a_1c + bb_1 < 0,$$

și există două numere pozitive m_1 *și* m_2 *— extremele inferioare sau minimele, în* $I + FI$, *ale funcțiilor pozitive*

$$\pm\frac{ab_1 + ba_1}{4\,aa_1} + \sqrt{\left(\frac{ab_1 + ba_1}{4\,aa_1}\right)^2 - \frac{ac_1 + a_1c + bb_1}{6\,aa_1}},$$

este posibil să se determine o funcție $T(x)$ *de care se vorbește în teorema 7, astfel că numai singurele condiții ale lui Cauchy, chiar și neanalitice, să fie suficiente pentru a se putea afirma unicitatea soluției (dacă aceasta există) în domeniul (care de altfel nu este unic)* $J(T) + FJ(T)$.

Să arătăm aici cum se poate construi un domeniu simplu $J(T)$ despre care vorbește teorema 11. Fie m cel mai mic dintre numerele m_1 și m_2. Definim, în $I + FI$, o funcție $T'(x)$, de clasă C''', în așa fel ca $-m \leqslant T'(x) \leqslant m$ și totodată astfel încît să avem $\int_{x_1}^{x_2} T(x')\,dx = 0$, pe cînd $\int_{x_1}^{x} T'(x)\,dx$ să rezulte a fi mereu pozitivă în I (deschis). Funcția $T(x) = \int_{x_1}^{x} T(x)\,dx$ determină un domeniu în care enunțul de mai sus este valid. În particular, se poate alege pentru T' o funcție liniară ce ia în x_1 și x_2 respectiv valorile $-m$ și m. $T(x) = t$ va reprezenta prin urmare un arc de parabolă ce conține FI și $J(T)$ va fi un segment parabolic.

7b. *Ecuații eliptico-hiperbolice.* Considerăm acum cazul în care au loc, în $I + FI$, inegalitățile

$$b^2 - 4\,ac \geqslant 0,\ b_1^2 - 4\,a_1c_1 < 0. \tag{34}$$

În această ordine de idei are loc următoarea

TEOREMA 12. *Pentru clasa de ecuații eliptico-hiperbolice pentru care au loc, în* $I + FI$, *inegalitățile*

$$c > 0,\ ac_1 + a_1c + bb_1 < 0,$$

(în afara, bineînțeles, de (34)), *și există două numere pozitive* m_1 *și* m_2 *indicate mai sus, sînt valabile concluziile teoremei precedente.*

Se poate preciza şi aici o anume delimitare a domeniilor $J(T)$. Presupunem, pentru a fixa ideile, că cea mai mică rădăcină a ecuaţiei $D^* = 0$ este pozitivă în I. Domeniile se prezintă limitate de către caracteristica referitoare la acea rădăcină, ce trece prin punctul $(x_1, 0)$ şi de către simetrica sa faţă de verticala, ce trece prin $(x_2, 0)$.

7c. *Ecuaţii complet hiperbolice şi ecuaţii parabolice.* Presupunem că avem, în $I + FI$, inegalităţile

$$b^2 - 4ac \geqslant 0, \quad b_1^2 - 4a_1c_1 \geqslant 0 \tag{35}$$

şi că, atunci cînd în (35) are loc semnul de egalitate, coeficienţii a, b, c şi a_1, b_1, c_1 nu sînt proporţionali, cu alte cuvinte şi în acest caz ecuaţia va rezulta hiperbolică. Dacă, pentru a fixa ideile, se presupune că $c > 0$, $c_1 > 0$, $b_1 > 0$, $b > 0$, are loc următoarea

TEOREMA 13. *Pentru clasa de ecuaţii de tip hiperbolic pentru care are loc, în $I + FI$, (în afară, bineînţeles, de (35)) inegalitatea*

$$ac_1 + a_1c + bb_1 < 0,$$

şi există un număr pozitiv m *astfel ca să fie verificate inegalităţile*

$$0 < m < \left| \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{a_1} - \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\left(\frac{ab_1 + ba_1}{aa_1}\right) - \frac{2(ac_1 + a_1c + bb_1)}{3aa_1}},$$

este întotdeauna posibil să se determine un domeniu $J(T)$ pentru care să aibă loc teorema de unicitate pentru problema A şi al cărui maximum este dat de domeniul ce are drept frontieră constituită din intervalul I pentru $t = 0$ şi din arcele caracteristicilor

$$\alpha(x) = t_1 + \int_{x_1}^{x} \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1} \quad \text{şi} \quad \beta(x) = t_2 + \int_{x}^{x_2} \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

fiind $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$, ce trec prin $(x_0 t_0)$, şi pentru care $x_1 < x_0 < x_2$, $t_0 > 0$.

Presupunem acum că ecuaţia este parabolică şi cu coeficienţi constanţi. $T' = \text{const} = c$ este atunci înclinarea unicei caracteristici multiple. În acest caz are loc următoarea

TEOREMA 14. *Dacă, conservînd condiţiile de adineaori pentru soluţiile căutate, ecuaţia considerată este, în $I + FI$, parabolică şi cu coeficienţi constanţi, soluţia problemei* A *este unică într-un domeniu determinat, de exemplu, de $t = c(x - x_1)$, $c > 0$, $x = x_2$, $t = 0$.*

7d. *Ecuaţii hiperparabolice.* Ne întrebăm acum, situîndu-ne mereu în această parte a lucrării în cadrul stabilirii unicităţii soluţiilor dacă sînt cazuri în care ne putem dispensa de formule de majorare. Acest lucru va avea loc în mod sigur dacă în membrul al doilea al ecuaţiei obţinută prin

aplicarea transformatei lui Laplace-Picone (23) vor dispărea funcţiile necunoscute X_s. Acest lucru are loc dacă ecuaţia de ordinul al patrulea are următoarea formă :

$$a_{40}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha^*(x)\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(4)}u+a_{30}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha^*(x)\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(3)}+$$

$$+a_{20}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha^*(x)\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)}u+a_{10}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha^*(x)\frac{\partial}{\partial t}\right)u+a_{00}u+$$

$$+6\,a_{40}\alpha'\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha^*\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)}\frac{\partial u}{\partial t}+3\,a_{40}\alpha'^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+(4a_{40}\,\alpha''+$$

$$+a_{30}\alpha')\left(\frac{\partial}{\partial x}+\alpha^*\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial u}{\partial t}+(a_{40}\alpha^{*\prime\prime\prime}+a_{30}\alpha^{*\prime\prime}+a_{20}\alpha^{*\prime})\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,t), \qquad (36)$$

în care simbolul $(i)\equiv(4),(3),(1)$, are semnificaţie clasică.

Pentru aceste ecuaţii, pe care le vom numi (provizor) *hiperparabolice*, are loc, de exemplu, următoarea

TEOREMA 15. *Dacă* $a_{40}(x)>0$ *şi funcţia* $\alpha^*(x)$ *este astfel încît avem* $T(x)=t_1+\int_{x_1}^{x}\alpha^*\,d\xi>0$, $t_1>0$, *în intervalul deschis* I, *unicitatea soluţiei pentru ecuaţiile iperparabolice, este asigurată în cadrul problemei* A, *de îndată ce unitatea nu este o valoare caracteristică în spectrul valorilor caracteristice* μ *pentru ecuaţia*

$$a_{40}u^{*\mathrm{IV}}+a_{30}u^{*\prime\prime\prime}+a_{20}u^{*\prime\prime}+a_{10}u^{*\prime}+\eta a_{00}u^*=0,$$

corespunzătoare cu problema de contur

$$u^*(x_1)=u^*(x_2)=u^{*\prime}(x_1)=u^{*\prime}(x_2)=0.$$

De îndată ce $\alpha^*=\text{const}$ se poate enunţa şi o generalizare a teoremei 15 pentru ecuaţia (7).

Noi rezultate de interes deosebit referitoare la ecuaţii complet hiperbolice, eliptico-parabolice (G. Fichera [22]), hiperparabolice (D. Mangeron [23]) etc. privitoare la ecuaţii cu derivate parţiale de ordin superior vor fi expuse ulterior.

Primită la redactie la 24 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. MANGERON, *Applicazione del calcolo simbolico nel senso di Laplace-Picone alla teoria delle equazioni a derivate parziali d'ordine qualunque*, Rend. Accad. Naz. dei Lincei, s. 7, I, 1, 1939, 1–9.
2. L. POLI, P. DELERUE, *Le calcul symbolique à deux variables et ses applications*, Gauthier-Villars, Editeurs, Paris, 1954, pp. 49–50.
3. D. MANGERON, *Prémisses d'une théorie unitaire des équations aux dérivées partielles de différents types*, IV-e Congrès des Mathématiciens Roumains. 27 mai–4 juin 1956. Bucureşti, Lucrările Congresului.
4. M. PICONE, *Vita e Opera*, Annuario dell'Accademia Nazionale dei Lincei, XL, Roma, 1961, 287–311.

5. M. NICOLESCU, *Fonctions polyharmoniques*, Hermann, Paris, 1936.
6. — *Asupra unor proprietăți caracteristice de medie ale funcțiilor policalorice*, Com. Acad. R.P.R., 1954, **4** *11—12*, 552—554.
7. D. MANGERON, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur*, Comptes rendus Acad. Sci. Paris, 1962, **225**, 2894—2896.
8. — *Metoda ecuațiilor integrale în studiul ecuațiilor „polivibrante"*, Lucrări științifice. Institutul politehnic, Brașov, **VI**, 1963, 23—34.
9. D. MANGERON, L. E. KRIVOCHÉINE, *Recherches des solutions des équations intégro-différentielles par la méthode polynomiale*, Comptes rendus Acad. Bulgare Sci., 1962, **15**, *4*, 345—348.
10. M. N. OĞUZTÖRELI, *A theorem concerned with generalized heat transfer phenomena*, Bul. Inst. politehn. Iași, s. n., 1967, *3—4*, 419—422.
11. — *Time-lag control systems*, Academic Press, N.Y., 1966, XII, 323.
12. — *Integro-differential operators in the control systems*, Academic Press, N.Y.
13. — *Optimization in Distributed Parameter Control Systems. A Dynamic Programming Approach*, Department of Math. The University of Alberta, Series A : Preprint of Research Papers, Vol. **3**, No. *28*, June, 1967, 76 p.
14. — *A Class of Nonlinear integro-Differential Equations of Parabolic Type with a Delayed Argument*, Dept. of Math., University of Alberta, Series A : Preprint of Research Papers, Vol. *4*, No. *10*, Sept. 1967.
15. D. MANGERON, *Alcuni problemi concernenti l'equazione di Hadamard*, Boll. Un. Mat. Ital. s. II, **II**, *1*, 1939, 18—25.
16. M. PICONE, *Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della Fisica Matematica*, Ann. Sci. Univ. Iași, I Sect., **XXVI**, *I*, 183 — 232, 1940.
17. J. FAVARD, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Gauthier-Villars, Editeurs, Paris, **I—III**, 1964.
18. J. PÉRÈS, *Problèmes différentiels*, Gauthier-Villars, Paris, 1938.
19. S. VASILACHE, *Noi probleme de contur pentru unele ecuații integro-diferențiale cu derivate parțiale*, Rev. math. pures et appl. Acad. R.P.R., 1960, **5**, *2*, 251—274.
20. T. P. G. LIVERMAN, *Generalized Functions and Direct Operational Methods*, Vol. I, *Non-Analytic Generalized Functions in One Dimension*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J., 1964, XII, 338.
21. V. A. DITKIN, A. P. PRUDNIKOV, *Operational Calculus in two variables and its Applications*, Pergamon Press, N. Y., 1962, X, 167.
22. G. FICHERA, *Equazioni ellittico-paraboliche*, Ist. Alta Mat., Roma.
23. D. MANGERON, *Connections between solutions of some polydimensional boundary value problems*, Bul. Inst. politehn. Iași, s. n. **4(8)**, *1—2*, 1958, 61—64.
24. D. MANGERON, A. F. SHESTOPAL, *The problem of triangular plane spectra*, Revue Roumaine Sci. Techn. Série de Méc. Appl., 1964, **9**, *4*, 835—842.

APROXIMAREA POLIGONALĂ A CARACTERISTICILOR NELINIARE [1])

de GH. SILAŞ şi H. KLEPP
Institutul politehnic, Timişoara

531.3 : 517.9

În lucrare se prezintă o metodă pentru studiul aproximativ al oscilaţiilor unui sistem cu un grad de libertate care revine la rezolvarea unei probleme cu valori iniţiale pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul al doilea. Metoda se bazează pe înlocuirea caracteristicii neliniare prin caracteristici poligonale ajungîndu-se astfel la rezolvarea unui sistem de ecuaţii diferenţiale liniare.

Pentru studiul aproximativ al oscilaţiilor unui sistem cu un grad de libertate a cărui ecuaţie diferenţială are forma

$$\ddot{q} + f(q) = F, \quad f(0) = 0, \quad F = \text{const}$$

au fost elaborate multe metode. Unele din ele pentru $F = 0$ sau $F \neq 0$ înlocuiesc caracteristica neliniară cu una liniară [3], [4], biliniară [5], [6] sau poligonală [7]. Altele înlocuiesc caracteristicile neliniare prin parabole [8], polinoame ultrasferice [9], [10], [11] sau prin n arce de curbă de forma dată [12] impunînd diferite condiţii acestor caracteristici aproximative.

În prezenta lucrare vom expune o altă metodă aproximativă care înlocuieşte caracteristica neliniară prin caracteristici poligonale.

A. PREZENTAREA METODEI DE APROXIMARE POLIGONALĂ

1. Fie

$$\ddot{q} + f(q) = F_1 - N(0) = F$$

ecuaţia diferenţială a mişcării unui sistem cu un grad de libertate avînd caracteristica $N(q) = f(q) + N(0) \cdot F_1$ poate reprezenta forţa constantă ce acţionează asupra sistemului, iar $N(0)$ este termenul constant din

[1]) Lucrare prezentată la Conferinţa de mecanică, Bucureşti, 1968.

ecuația caracteristicii. Studiul mișcării se va face ca și cum asupra unui sistem cu caracteristica $f(q)$ ar acționa o forță constantă F. Vom presupune F dirijat în sensul pozitiv de măsurare a deplasărilor și vom considera momentul inițial cînd sistemul se află în poziția $q = 0$ avînd viteza v_0.

Domeniul de oscilație $[Q_1, Q_2]$ se poate determina din relația

$$\int_0^Q f(q)\,\mathrm{d}q = \frac{1}{2}v_0^2 + FQ. \tag{1}$$

Această ecuație admite în general două soluții $Q_1 \leqslant 0$ și $Q_2 \geqslant 0$.

Din ecuația (1) rezultă și o construcție grafică intuitivă pentru determinarea domeniului de oscilație care poate fi folosită dacă ecuația (1) este de grad mai mare decît trei sau transcendentă și soluțiile se determină prin încercări.

Reprezentăm într-un plan pe abscisă q iar pe ordonată $E_p(q) = \int_0^q f(q)\,\mathrm{d}q$. Această curbă va trece prin originea sistemului de axe ales. Pe ordonată luăm un punct situat la distanța $v_0^2/2$ de origine. O dreaptă Δ ce trece prin acest punct și are coeficient unghiular F va intersecta curba E_p în două puncte care sînt extremitățile domeniului de oscilație căutat. În figura 1 este reprezentat cazul unui sistem avînd caracteristica $f(q) = q + c^2 q^3$. Pe abscisă sînt reprezentate $x = cq$, iar pe ordonată

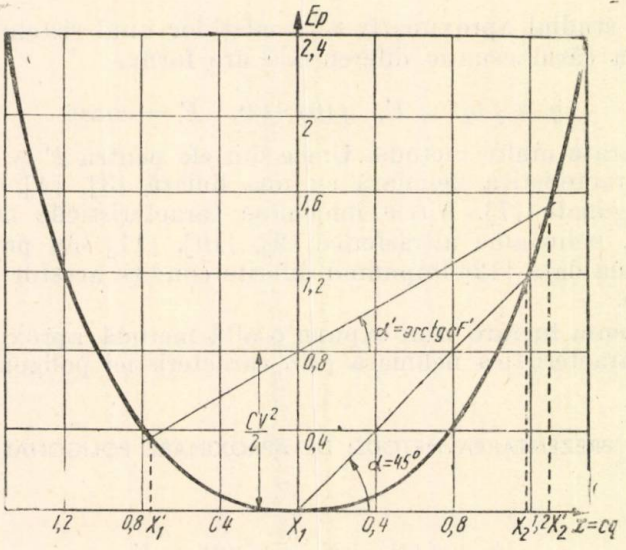


Fig. 1

$\xi_p = c^2 E_p$ respectiv $c/2 \cdot v_0^2$; coeficientul unghiular al dreptei Δ este $cF = f$. Se observă că, creșterea lui F duce la micșorarea lui $|Q_1|$ și mărirea lui Q_2.

2. Domeniul de oscilație $[Q_1, Q_2]$ îl împărțim prin punctele q_i $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ $(q_1 = Q_1, q_{n+1} = Q_2)$ în n domenii parțiale. În fiecare

domeniu parțial $[q_i, q_{i+1}]$ vom înlocui $f(q)$ prin una din cele două caracteristici biliniare $L_{i1}(q)$, $L_{i2}(q)$ sau $D_{i1}(q)$, $D_{i2}(q)$ care le definim mai jos.

a) Caracteristica $L(q)$.

Dreapta L_{i1} să treacă prin punctul $(q_i, f(q_i))$ $(i = 1, 2, \cdot n)$ și să fie tangentă caracteristicii neliniare în acest punct. Vom avea

$$L_{i1}(q) = f'(q_i)\, q - f'(q_i)\, q_i + f(q_i) = a_{i1}\, q - b_{i1}. \tag{2}$$

Dreapta L_{i2} să treacă prin punctul $(q_{i+1}, f(q_{i+1}))$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Fie ξ_i abscisa punctului de intersecție a celor două drepte. Pentru determinarea ei vom mai pune și condiția ca ariile să fie egale, adică

$$\int_{q_i}^{q_{i+1}} f(q)\, dq = \int_{q_i}^{\xi_i} L_{i1}(q)\, dq + \int_{\xi_i}^{q_{i+1}} L_{i2}(q)\, dq.$$

De aici rezultă

$$\xi_i = \frac{2\int_{q_i}^{q_{i+1}} f(q)\, dq + q_i[f'(q_i)(q_{i+1} - q_i) + 2f(q_i)] - q_{i+1}[f(q_i) + f(q_{i+1})]}{f(q_i) - f(q_{i+1}) + f'(q_i)(q_{i+1} - q_i)}. \tag{2'}$$

Ecuația dreptei L_{i2} va fi

$$L_{i2}(q) = \frac{f(q_{i+1}) - L_{i1}(\xi_i)}{q_{i+1} - \xi_i}\, q - \frac{f(q_{i+1})\,\xi_i - L_{i1}(\xi_i)\, q_{i+1}}{q_{i+1} - \xi_i}, \tag{2''}$$

$$L_{i2}(q) = a_{i2}\, q - b_{i2}.$$

b) Caracteristica $D(q)$.

Dreapta D_{i2} să treacă prin punctul $(q_{i+1}, f(q_{i+1}))$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ și să fie tangentă caracteristicii neliniare în acest punct. Ecuația ei va fi

$$D_{i2}(q) = f'(q_{i+1})\, q - f'(q_{i+1})\, q_{i+1} + f(q_{i+1}) = c_{i2}\, q - d_{i2}. \tag{3}$$

Dreapta D_{i1} să treacă prin punctul $(q_i, f(q_i))$ $(i = 1, 2, \ldots n)$.

Pentru determinarea abscisei η_i a punctului de intersecție a celor două drepte punem condiția ca ariile să fie egale, adică

$$\int_{q_i}^{q_{i+1}} f(q)\, dq = \int_{q_i}^{\eta_i} D_{i1}(q)\, dq + \int_{\eta_i}^{q_{i+1}} D_{i2}(q)\, dq.$$

De aici rezultă

$$\eta_i = \frac{2\int_{q_i}^{q_{i+1}} f(q)\, dq + q_{i+1}[f'(q_{i+1})(q_{i+1} - q_i) - 2f(q_{i+1})] + q_i[f(q_i) + f(q_{i+1})]}{f(q_i) - f(q_{i+1}) + f'(q_{i+1})(q_{i+1} - q_i)}. \tag{3'}$$

Ecuația dreptei D_{i1} va fi

$$D_{i1}(q) = \frac{D_{i2}(\eta_i) - f(q_i)}{\eta_i - q_i}\, q - \frac{D_{i2}(\eta_i)\, q_i - f(q_i)\, \eta_i}{\eta_i - q_i}, \tag{3''}$$

$$D_{i1}(q) = c_{i1}\, q - d_{i1}.$$

Pentru o cît mai bună aproximare a caracteristicii $f(q)$ vom alege ca puncte q_i $(i = 2,3,\ldots n)$ în primul rînd punctele în care avem $f(q) = 0$, $f'(q) = 0$ sau $f''(q) = 0$. Se mai pot alege și altele. Cu cît domeniile parțiale sînt mai mici, cu atît aproximarea va fi mai bună.

3. Vom arăta acum proprietăți ce rezultă din condițiile de mai sus. Să presupunem un domeniu parțial q_i, q_{i+1} în care avem $q \cdot f''(q) < 0$. Făcînd notațiile

$$L(q) = \begin{cases} L_{i1} & q_i \leqslant q \leqslant \xi_i \\ L_{i2} & \xi_i \leqslant q \leqslant q_{i+1} \end{cases} \qquad D(q) = \begin{cases} D_{i1} & q_i \leqslant q \leqslant \eta_i \\ D_{i2} & \eta_i \leqslant q \leqslant q_{i+1} \end{cases}$$

vom avea inegalitățile

$$\int_{q_i}^{q} L(q)\,\mathrm{d}q \geqslant \int_{q_i}^{q} f(q)\,\mathrm{d}q \geqslant \int_{q_i}^{q} D(q)\,\mathrm{d}q, \quad q_i \leqslant q \leqslant q_{i+1}. \tag{4}$$

Din felul cum au fost alese caracteristicile poligonale rezultă că în pozițiile q_i $(i = 1, 2, \ldots n = 1)$ sistemul avînd oricare caracteristică $f(q)$, $L(q)$ sau $D(q)$ va avea aceeași valoare a forței de restituire, aceeași energie cinetică și aceeași energie potențială.

Într-adevăr integrînd relația

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^2\right) = [F - f(q)]\,\mathrm{d}q,$$

se găsește

$$\frac{1}{2}\dot{q}^2 = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + Fq - \int_0^q f(q)\,\mathrm{d}q.$$

Înlocuind în această relație $f(q)$ prin $L(q)$ sau $D(q)$ se găsesc v_{I} și v_{II}. Deoarece pentru caracteristici care satisfac la condiția $q \cdot f''(q) < 0$ avem inegalitatea (4) și sistemul avînd oricare caracteristică este conservativ, rezultă cele afirmate mai sus.

Relația mai poate fi scrisă sub forma

$$v^2 = v_i^2 + 2F(q - q_i) - 2\int_{q_i}^{q} f(q)\,\mathrm{d}q$$

și relațiile analoge

$$\begin{aligned} v_{\mathrm{I}}^2 &= v_i^2 + 2F(q - q_i) - 2\int_{q_i}^{q} L(q)\,\mathrm{d}q, \\ v_{\mathrm{II}}^2 &= v_i^2 + 2F(q - q_i) - 2\int_{q_i}^{q} D(q)\,\mathrm{d}q. \end{aligned} \tag{5}$$

Ținînd seama de (4) rezultă

$$|v_{\mathrm{I}}| \leqslant |v| \leqslant |v_{\mathrm{II}}|. \tag{9}$$

Pentru caracteristici pentru care $q \cdot f''(q) > 0$ urmează

$$|v_{\mathrm{I}}| \geqslant |v| \geqslant |v_{\mathrm{Ii}}|. \tag{7}$$

Considerînd o aproximare poligonală, mişcarea sistemului o vom studia cu ajutorul a doi n ecuaţii diferenţiale liniare de forma

$$\ddot{q}_j + \alpha_{ij}\, q_j = \beta_{ij} + F = \gamma_{ij},\ j = 1, 2;\ i = 1, 2, \ldots n.$$

Legile de mişcare vor fi

$$\alpha_{ij} > 0\ \ q_j = \frac{\gamma_{ij}}{\alpha_{ij}} + \left(x_j - \frac{\gamma_{ij}}{\alpha_{ij}}\right) \cos \sqrt{\alpha_{ij}}\, t + \frac{\dot{x}_j}{\sqrt{\alpha_{ij}}} \sin \sqrt{\alpha_{ij}}\, t,$$

$$\alpha_{ij} = 0\ \ q_j = \frac{1}{2}\, \gamma_{ij}\, t^2 + \dot{x}_j\, t + x_j,$$

$$\alpha_{ij} < 0\ \ q_j = \frac{\gamma_{ij}}{\alpha_{ij}} + \left(x_j - \frac{\gamma_{ij}}{\alpha_{ij}}\right) \operatorname{ch} \sqrt{|\alpha_{ij}|}\, t + \frac{\dot{x}_j}{\sqrt{|\alpha_{ij}|}} \operatorname{sh} \sqrt{|\alpha_{ij}|}\, t.$$

Aici am folosit următoarele notaţii

$$\alpha_{ij},\ \beta_{ij},\ x_1,\ \dot{x}_1,\ x_2,\ \dot{x}_2 =$$

$$= \begin{cases} a_{ij},\ b_{ij},\ q_i,\ \dot{q}_i,\ \xi_i,\ \dot{\xi}_i & \text{caracteristica } L(q), \\ c_{ij},\ d_{ij},\ q_i,\ \dot{q}_i,\ \eta_i,\ \dot{\eta}_i & \text{caracteristica } D(q). \end{cases}$$

Fie t timpul cînd sistemul cu caracteristica neliniară $f(q)$ ajunge în poziţia q. Vom nota cu $q_{\mathrm{I}}(t)$ şi $q_{\mathrm{II}}(t)$ poziţiile în care se va găsi sistemul în acelaşi moment t avînd caracteristicile $L(q)$ respectiv $D(q)$. Ţinînd seama de relaţiile ce există între viteze (6) sau (7), rezultă că $q(t)$ este cuprins între $q_{\mathrm{I}}(t)$ şi $q_{\mathrm{II}}(t)$. De aceea legea mişcării $q^*(t) = \frac{1}{2}(q_{\mathrm{I}} + q_{\mathrm{II}})$ va aproxima mai bine legea mişcării $q(t)$ decît legile $q_{\mathrm{I}}(t)$ sau $q_{\mathrm{II}}(t)$.

Cu t_i notăm timpul necesar sistemului pentru a se deplasa din poziţia q_i în poziţia q_{i+1}. Alegînd $t = 0$ în domeniile parţiale $[q_i, \xi_i]$ şi $[\xi_i, q_{i+1}]$ în momentul cînd sistemul se află în poziţia q_i respectiv ξ_i, vom avea $t_i = t_{i1} + t_{i2}$, t_{i1} şi t_{i2} calculîndu-se din ecuaţiile $q_1(t_{i1}) = \xi_i$ şi $q_2(t_{i2}) = q_{i+1}$.

Pentru perioadă se găseşte valoarea

$$\tau = 2 \sum_{i=1}^{n} (t_{i1} + t_{i2}).$$

Folosind aproximarea $L(q)$ sau $D(q)$ în cazul cînd avem $q \cdot f''(q) < 0$ din (5) rezultă pentru domeniul parţial $[q_i, q_{i+1}]$ cînd sistemul se mişcă în sensul pozitiv

$$\int_{q_i}^{q_{i+1}} \frac{dq}{v_{\mathrm{I}}} > \int_{q_i}^{q_{i+1}} \frac{dq}{v} > \int_{q_i}^{q_{i+1}} \frac{dq}{v_{\mathrm{II}}},$$

adică $t_{i\,\mathrm{I}} > t_i > t_{i\,\mathrm{II}}$.

Dacă $q \cdot f''(q) > 0$, atunci

$$t_{i\,\mathrm{I}} < t_i < t_{i\,\mathrm{II}}. \tag{8}$$

Pentru sisteme în care caracteristica satisface în toate domeniile parțiale una din inegalitățile $q \cdot f''(q) \lesseqgtr 0$, perioada T va fi cuprinsă între τ_I și τ_{II}.

Valoarea $\tau^* = \frac{1}{2}(\tau_I + \tau_{II})$ va aproxima mai bine perioada T decît τ_I sau τ_{II}.

B. APLICAREA METODEI DE APROXIMARE POLIGONALĂ

4. Vom studia mișcarea unui sistem avînd caracteristica $f(q) = \omega^2 q(1 + cq^2)$ asupra căruia acționează o forță constantă F. Poziția inițială este $q = 0$, sistemul aflîndu-se în repaus. Ecuația diferențială a mișcării este

$$\ddot{q} + \omega^2 q(1 + c^2 q^2) = F. \tag{9}$$

Introducem timpul adimensional $\tau = \omega t$ și facem notația $x = cq$. Ecuația (9) se transformă în

$$x'' + x + x^3 = \frac{Fc}{\omega^2} = f. \tag{10}$$

Presupunem $f = \frac{Fc}{\omega^2} = 1$. Cu ajutorul ecuației (1) se găsește domeniul de oscilație $X_1 = 0$ și $X_2 = 1{,}179505$.

În figura 1 este reprezentat acest caz pentru $\alpha = \operatorname{arctg} f = \operatorname{arctg} 1 = 45°$. Folosind o scară convenabilă se găsește pentru X_2 valoarea 1,18.

Vom determina timpul $\tau = \tau_1 + \tau_2$ necesar sistemului pentru a se deplasa din poziția $X_1 = 0$ în poziția $X_2 = 1{,}179505$.

Cu ajutorul relațiilor (2) și (3) calculăm elementele caracteristicilor biliniare și scriem ecuațiile diferențiale ale mișcării pe porțiuni.

a) Caracteristica $L(x)$

$$x_1'' + x_1 = 1, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}589753,$$

$$x_2'' + 3{,}782464\, x_2 = 2{,}640965, \quad 0{,}589753 \leqslant x_2 \leqslant 1{,}179505.$$

b) Caracteristica $D(x)$

$$x_1'' + 1{,}463744\, x_1 = 1, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 0{,}884629,$$

$$x_2'' + 5{,}173696\, x_2 = 4{,}2819302, \quad 0{,}884629 \leqslant x_2 \leqslant 1{,}179505.$$

După ce găsim legile de mișcare vom pune următoarele condiții pentru determinarea lui τ:

a) pentru caracteristica $L(x)$

$$x_1(\tau_1) = 0{,}589753; \quad x_2(\tau_2) = 1{,}179505,$$

b) pentru caracteristica $D(x)$

$$x_1(\tau_1) = 0{,}884629; \quad x_2(\tau_2) = 1{,}179505.$$

Se obține

$$\tau_I = 2{,}072649, \quad \tau_{II} = 2{,}164801.$$

Deoarece în tot domeniul de oscilaţie este satisfăcută condiţia $x \cdot f''(x) > 0$ rezultă conform (8) $\tau_I < \tau < \tau_{II}$.

Pentru $\tau^* = \frac{1}{2}(\tau_I + \tau_{II})$ obţinem valoarea 2,118725.

Folosind pentru determinarea lui τ metoda Panovko [3] se găseşte valoarea 2,075338.

În continuare vom calcula valoarea exactă a timpului necesar sistemului pentru a se deplasa din poziţia $x = X_1 = 0$ într-o poziţie oarecare x.

Din ecuaţia (10) se obţine, înmulţind cu dx şi integrînd,

$$\frac{dx}{d\tau} = \pm \sqrt{2\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)}$$

sau

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{2\left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)}}.$$

Cu ajutorul unor schimbări de variabile [13] integrala poate fi pusă sub forma

$$\tau(x) = \sqrt[4]{\frac{8X_2^2}{2 + X_2^3}} \cdot \frac{1}{2} F(k^2, \varphi),$$

unde $F(k^2, \varphi)$ este integrala eliptică de speţa întîia, iar k^2 şi φ se determină din

$$k^2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{6 - X_2}{2\sqrt{2(2 + X_2^3)}}\right] = 0{,}0534 \text{ şi } \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} = \frac{X_2 - x}{x\sqrt{1 + \frac{1}{2}X_2^3}}.$$

Pentru $x = X_2$ se obţine timpul necesar sistemului pentru a se deplasa din poziţia $x = 0$ în poziţia $x = X_2 = 1{,}179505$ din

$$\tau(X_2) = \sqrt[4]{\frac{8X_2^2}{2 + X_2^3}} K(k^2),$$

unde K este integrala eliptică completă de prima speţă.

Pentru $\tau(X_2)$ se găseşte valoarea [14] $\tau = 2{,}1056085$.

Se observă că valoarea τ^* dă aproximaţia cea mai bună, eroarea fiind 0,62%. Valoarea găsită cu metoda Panovko [3] dă o eroare de 1,44%.

5. Reproducem în continuare rezultate ce le-am obţinut în alte lucrări unde se aplică metoda de aproximare poligonală pentru cîteva caracteristici particulare şi pentru $F = 0$.

Pentru cazul caracteristicii de forma $f(q) = \sin q$, ecuația diferențială a mișcării este (pendulul matematic)

$$\ddot{q} + \sin q = 0.$$

În tabela 1 sînt trecute valorile ce se găsesc la studiul unui sfert de perioadă pentru elongațiile unei oscilații cu amplitudinea $\pi/2$ cu metoda aproximativă și cele exacte, iar în tabela 2 valorile pentru un sfert de perioadă pentru diferite amplitudini folosind diferite metode aproximative.

Tabela 1

t	q	q_{I}	q_{II}	q^*
0,14189	0,2	0,19998	0,20008	0,20003
0,43786	0,6	0,59962	0,60204	0,60083
0,77976	1,0	0,99573	1,00743	1,00158
1,26935	1,4	1,39299	1,40708	1,40004

Tabela 2

Q	q_1	q_2	q_3	$\frac{T}{4}$	$\frac{\tau^*}{4}$	E^*	$\frac{T_1}{4}$	E_1	$\frac{T_2}{4}$	E_2
$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	—	1,85407	1,85499	0,05 %	1,84901	0,27 %	1,83455	1,05 %
	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	1,85407	1,85434	0,01 %				
$5\pi/6$	0	$\pi/2$	$5\pi/6$	2,76806	2,77183	0,14 %	2,63333	4,87 %	2,56605	7,30 %

T — valoarea exactă

T_1 — aproximata de ordinul întîi cu metoda Krîlov-Bogoliubov

T_2 — valoarea determinată cu metoda Panovko.

Pentru un sistem avînd caracteristica

$$f(q) = \omega^2 q\,(1 - \lambda^2/3 \cdot q^2)$$

se găsesc pentru o oscilație cu amplitudinea $Q = 1/\lambda$ elongațiile în decursul unui sfert de perioadă trecute în tabela 3, iar pentru sferturile de perioadă

Tabela 3

ωt	$\frac{q}{Q}$	$\frac{q_{\mathrm{I}}}{Q}$	$\frac{q_{\mathrm{II}}}{Q}$	$\frac{q^*}{Q}$
0,22087	0,2	0,19999	0,20017	0,20008
0,45329	0,4	0,39976	0,40131	0,40054
0,71419	0,6	0,59813	0,60380	0,60097
1,04193	0,8	0,79579	0,80548	0,80063

ale oscilaţiilor cu amplitudini de $Q = 1/2\lambda$ şi $Q = 1/\lambda$ se obţin valorile trecute în tabela 4.

Tabela 4

Q	$\frac{T}{4}$	$\frac{\tau_I}{4}$	E_I	$\frac{\tau_{II}}{4}$	E_{II}	$\frac{\tau^*}{4}$	E^*	$\frac{T_1}{4}$	E_1
$1/2\lambda$	1,62247	1,62536	0,18%	1,62014	0,14%	1,62275	0,02%	1,61974	0,17%
$1/\lambda$	1,81803	1,83146	0,74%	1,80586	0,67%	1,81866	0,03%	1,79957	1,02%

T reprezintă valoarea exactă

T_1 s-a calculat cu metoda Panovko

Dacă caracteristica sistemului este $f(q) = a_3 q^3$ se găsesc pentru elongaţiile într-un sfert de perioadă şi valorile pentru sfertul de perioadă, mărimile trecute în tabelele 5 şi 6.

Tabela 5

$\frac{q}{Q}$	ωt	$\frac{q_I}{Q}$	$\frac{q_{II}}{Q}$	$\frac{q^*}{Q}$
0,2	0,282876	0,200024	0,199802	0,199913
0,4	0,567130	0,400452	0,399243	0,399848
0,6	0,860158	0,600503	0,599116	0,599810
0,8	1,158225	0,802223	0,797029	0,799626

Tabela 6

Metoda	ωt_1	ωt_2	$\frac{\omega T}{4}$	Eroare
Exact	0,711646	1,142429	1,854075	—
Caracteristica L	0,710897	1,133335	1,844232	0,53%
Caracteristica D	0,712762	1,150065	1,862827	0,47%
Media aritmetică	—	—	1,853530	0,03%
Metoda Panovko	—	—	1,858590	0,24%

Din aceste cîteva exemple se poate trage concluzia asupra preciziei cu care se pot determina cu metoda expusă legea mişcării şi perioada de oscilaţie a unui sistem neliniar.

Aplicarea metodei este ușoară oricare ar fi caracteristica, deoarece punctele singulare ale caracteristicilor și direcțiile segmentelor care formează caracteristica poligonală se determină din formule (care pot fi programate pentru mașini electronice cifrice) cu orice precizie și nu din ecuații de grad superior cum rezultă din alte metode. Alegînd convenabil numărul domeniilor parțiale se poate îmbunătăți oricît de mult precizia determinărilor.

BIBLIOGRAFIE

1. Hans Kauderer, *Nichtlineare Mechanik*, Springer Verlag Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1958.
2. Z. Gaboș, D. Mangeron, I. Stan, *Fundamentele mecanicii*, Edit. Academiei R.P.R.
3. Я. Г. Пановко, *Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебании*, Инженерный сборник т. 13, изд. АНСССР 1952.
4. Н. К. Куликов : *Приближенное определение периода свободных колебаний нелинейной системы с одной степенью свободы*, Инженерный сорник, т. 13, изд. АНСССР, 1952.
5. E. J. Ergin, *Transient response of a nonlinear system by bilinear approximation method*, Journal of Aplied Mechanics, **23**, *4* (1956).
6. Т. Н. Чачава, *К вопросу определения расчетных параметров билинейной диаграммы восстанавливающей силы*, Сообщения А. Н. Грузинскои ССР, 32, 3, 597 (1963).
7. Ю. А. Гошп, *Линеаризация позиционной силы методом кусочнолинейной апроксимации*, Инженерный сворник, т. 18, Изд. АНСССР, 1955.
8. Alfred Breier, *Asupra calculului aproximativ al pulsației oscilațiilor sistemelor neliniare conservative*, Bul. Inst. politehnic Iași, *5(9)*, 1—2, 1959.
9. H. H. Denman, *Amplitude-Dependence of Frequency in a Linear Approximation to the Pendulum Equation*, Am. J. Phys., 27, 1959.
10. H. H. Denman, J. E. Howard, *Application of Ultraspherical Polynomials to Non-Linear Oscillations. I, Free Oscillation fo the Pendulum*, Quarterly of Applied Mathematics, **XXI**, *4*, (1964).
11. H. H. Denman, Liu-King,'*Application of Ultraspherical Polynomials to Non-Linear Oscillations. II. Frees Oscillations*, Quarterly of Applied Mathematics, **XXII**, *4*,1965.
12. R. Aris, M. M. Denn, *N-segment leastsquares approximation*, AIAA Journal 1964, 2, nr. 8.
13. V. I. Smirnov, *Curs de matematici superioare III, partea II*, Edit. tehnică 1955, 680,684.
14. В. М. Беляков, Р. И. Кравцова, М. Г. Рапоппорт, *Таблицы эллиптических интегралов*, Том 1, Изд. А. Н. СССР, 1962, Москва.

STABILITATEA DINAMICĂ NEUTRĂ A AVIOANELOR

de T. HACKER

Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

629.13 : 531.3

În partea 1 se reiau şi se dezvoltă unele idei schiţate în [7] privind raportul dintre conţinutul empiric şi cel teoretic al noţiunii de stabilitate dinamică neutră. Se subliniază aspectul esenţial comun al unor comportări dinamice teoretic diferite (diferite pe planul modelului matematic) anume de stabilitate neutră (neasimptotică în sensul lui Liapunov), mişcări perturbate uşor instabile sau divergente şi asimptotic stabile cu un decrement de amortizare redus.
În partea a 2-a se prezintă o situaţie de stabilitate neutră pură din punct de vedere teoretic, referitoare la mişcarea fugoidă. Caracterul singular al unei asemenea comportări va fi ilustrat prin ipotezele restrictive necesare la construirea modelului matematic corespunzător.

PARTEA 1

DEFINIŢIA MATEMATICĂ ŞI UNELE COMENTARII

În literatura consacrată dinamicii zborului prin stabilitate neutră se înţelege de obicei o stabilitate neasimptotică în raport cu variabilele considerate. Întrucît în teoria liniară a sistemelor autonome nu pot apărea situaţii de stabilitate neasimptotică decît în cazul existenţei a cel puţin unei rădăcini caracteristice nule sau pur imaginare, celelalte avînd partea reală negativă, s-a stabilit o legătură directă între o asemenea configuraţie a rădăcinilor caracteristice şi proprietatea, de fapt empirică, de stabilitate dinamică neutră. Anume, în limbajul modelului matematic, prin stabilitate neutră s-a convenit să se înţeleagă comportarea dinamică corespunzătoare existenţei pe lîngă rădăcinile caracteristice cu partea reală negativă cel puţin a uneia cu partea reală nulă [1]). Examinînd acum sensurile în care termenul de stabilitate neutră este folosit în literatură se

[1]) Vezi [1], paragraful 4.10 ; [2], pagina 130 („cînd $E_1=0$, [E_1 fiind termenul liber al ecuaţiei caracteristice ; nota autorului], ecuaţia caracteristică are o rădăcină nulă, reprezentînd o stare de stabilitate neutră") etc.

discerne conținutul empiric al noțiunii, rezultînd o neconcordanță cu cel teoretic, definit mai sus. Într-adevăr, conținutul empiric pare să fie legat nu de caracterul asimptotic al mișcării perturbate ci de viteza ei de variație. Astfel, se vorbește despre stabilitate neutră atît în cazul unei comportări indiferente a unghiului de azimut [2]) — corespunzînd unei stabilități uniforme neasimptotice în sensul lui Liapunov —, cît și în cazul unor mișcări perturbate lent amortizate sau slab divergente — fugoide [3]) sau spirale [4]). O comportare riguros indiferentă, corespunzătoare unei sau unor rădăcini caracteristice nule ale sistemului liniar de primă aproximație constituie mai curînd o excepție [5]). Domeniul în care pe lîngă rădăcinile caracteristice cu părți reale negative există și cel puțin una cu parte reală nulă pe de o parte și domeniul de stabilitate neasimptotică după Liapunov pe de altă parte, coincid numai în cazul sistemelor de ecuații fără termeni neliniari. Dacă însă sistemul liniar este un sistem de primă aproximație, cum se întîmplă în general în teoria matematică a stabilității zborului, stabilitatea neasimptotică a sistemului neliniar complet constituie doar una din cele trei situații posibile și încă nu cea mai probabilă. În cele mai multe cazuri adausurile neliniare determină, pentru configurația indicată a rădăcinilor caracteristice, fie stabilitate asimptotică, fie instabilitate [3].

Un model matematic cu aplicații interesante în probleme de stabilitate a avionului îl constituie sistemele de forma

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= Ax + X(x,\ y), \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= x, \end{aligned} \tag{a}$$

unde A este o matrice hurwitziană iar termenii neliniari $X(x, y)$ satisfac o condiție Lipschitz în raport cu x : $\| X(x, y) \| \leqslant kx$, $k = \text{const}$. Evident ecuația caracteristică a sistemului liniarizat admite, pe lîngă valorile proprii ale matricii A care au părțile reale negative prin ipoteză, și o rădăcină nulă. Un asemenea sistem este asimptotic stabil în raport cu variabilele x și stabil neasimptotic (neutru) în raport cu y, tinzînd, pentru $t \to \infty$, către o valoare constantă oricît de mică pentru condiții inițiale suficient de mici (vezi [4], pagina 83). În aplicațiile din domeniul dinamicii zborului variabilele x reprezintă viteze unghiulare, iar y coordonate unghiulare. Forțele și momentele induse de o perturbație, în general, sînt independente — cel puțin în aproximație liniară — de acestea din urmă. Cea de a doua ecuație vectorială a sistemului (a) reprezintă relațiile cinematice dintre unghiurile y și vitezele unghiulare x. Este cazul comportării indiferente în azimut în zbor liber cu comenzile blocate [6]), a stabilității neutre (neasimptotice) în raport cu atitudinea laterală (unghiul de ruliu)

---

[2]) Vezi [2], pagina 417 („stabilitate neutră în giratie, adică în azimut").

[3]) Ibid., pagina 130 (vezi nota 1).

[4]) Ibid., pagina 421 („dacă $E_2 = 0$ ecuația caracteristică are o rădăcină nulă, reprezentînd o stare neutru stabilă").

[5]) Un asemenea caz va fi considerat în partea a 2-a.

[6]) Vezi, de exemplu, [5], paginile 234—235, sau [2] pagina 417.

şi a stabilităţii asimptotice în raport cu restul variabilelor neconstrînse, cînd sînt constrînse unghiul de azimut şi de derapaj, sau, pe lîngă acestea două viteza unghiulară de giraţie ; este cazul, de asemenea, a comportării indiferente a unghiurilor lui Euler ale avioanelor cu decolare şi aterizare la verticală (fixînd atitudinea lui în spaţiu) în zborul cu viteză cvasinulă.

În ceea ce priveşte cazul unei rădăcini fugoide nule sau al unei rădăcini spirale nule, comportarea soluţiei, modelînd mişcarea perturbată, este determinată de termenii neliniari. Totuşi chiar dacă mişcarea de bază în zbor liber rezultă instabilă, este de aşteptat ca instabilitatea să fie slabă, în general, uşor de eliminat prin comenzi. Cercetarea soluţiei pe interval finit poate da informaţii utile prin evaluări ale principalilor indici cantitativi ai eficienţei stabilizării prin comenzi : viteza de amplificare a perturbaţiilor şi frecvenţa de oscilaţie a acestora. Comportarea va rezulta acceptabilă sau nu în raport cu sistemul de comandă, evident, pentru intervalul finit pentru care s-au obţinut evaluările şi nu se vor putea trage concluzii asupra stabilităţii mişcării de bază libere, definite pe un interval de timp infinit.

Este de remarcat că din punctul de vedere al practicii de zbor s-ar putea să nu existe, în multe situaţii, o diferenţă esenţială între comportarea indiferentă pe interval infinit (stabilitate neasimptotică în sensul lui Liapunov) şi o instabilitate uşoară în cazul unei frecvenţe a oscilaţiilor induse de o perturbaţie suficient de joase, ambele cazuri necesitînd şi în acelaşi timp permiţînd, aplicarea unor comenzi de corecţie pentru ameliorarea artificială a caracteristicilor de stabilitate şi amortizare. Mai mult decît atît, în aceeaşi situaţie se încadrează şi cazurile de stabilitate asimptotică, după Liapunov, cu un slab decrement de amortizare (de exemplu, fugoidă sau spirală), cu atît mai mult cu cît o stabilitate asimptotică locală poate însemna de fapt o instabilitate practică. De aceea şi în cazurile amintite de uşoară instabilitate sau stabilitate asimptotică slabă pare mai indicat, în locul cercetării stabilităţii prin procedee calitative, a se recurge la calculul de răspuns, constînd aici în evaluarea vitezei de creştere, respectiv, de amortizare a deviaţiilor induse (pe lîngă estimarea mărimii domeniului de atracţie, în cel de al doilea caz) şi în evaluarea frecvenţei de oscilaţie a acestor deviaţii.

Pentru modelarea matematică a noţiunii empirice de stabilitate neutră, legate de viteza lentă a variaţiei deviaţiilor induse, în [7] s-a propus folosirea conceptului matematic de frontieră nepericuloasă de stabilitate în spaţiul parametrilor. Aceasta înlesneşte stabilirea unei legături cu modelul tradiţional al sistemelor liniare cu rădăcini caracteristice nule.

Prin urmare, proprietatea, care apare pilotului ca o cvasiindiferenţă dinamică, denumită curent stabilitate neutră, corespunde din punct de vedere matematic fie comportării locale a soluţiilor sistemelor de tipul (a), fie comportării unor soluţii situate în vecinătatea unor puncte nepericuloase a frontierei de stabilitate, fie, în sfîrşit, ca un caz particular mai puţin frecvent, comportării unor soluţii global stabile (neasimptotic) (vezi partea 2). Sistemele respective de ecuaţii modelează evident zborul liber, stabilitatea neutră fiind o proprietate specifică a avionului necomandat. Din punctul de vedere al zborului efectiv (viz. real) stabilitatea neutră a mişcării libere constituie pe de o parte un criteriu de eficienţă al stabilizării prin comenzi (care, totuşi, trebuie completat cu cel legat de frecvenţa

de oscilație), iar pe de altă parte, și acest aspect pare esențial, o indicație asupra necesității stabilizării artificiale.

Dar, precum s-a amintit, stabilitatea dinamică neutră nu constituie singura situație care implică necesitatea stabilizării prin comenzi și — parțial — o permite. Pilotul trage aceeași concluzie și reacționează similar și în unele cazuri de instabilitate practică sau teoretică, corespunzînd, de exemplu, vecinătății unui punct periculos al frontierei de stabilitate. Reacțiile de pilotaj pot fi aceleași sau similare chiar și în cazuri de stabilitate asimptotică în zbor liber, dacă amortizarea perturbației nu este suficient de rapidă. Toate acestea atrag după sine o diminuare a importanței practice a cercetări izborului liber în situații insuficient de pregnante, între care și în aceea a stabilității neutre. Astfel, în aceste cazuri de regulă se impune cercetarea stabilității sistemului comandat în ansamblu.

PARTEA a 2-a

UN MODEL NEUTRU STABIL PENTRU MIȘCAREA FUGOIDĂ

În partea 1, s-a reamintit că dacă sistemul liniar de primă aproximație are cel puțin o rădăcină caracteristică nulă sau o pereche de rădăcini caracteristice pur imaginare, el încetează a fi concludent și devine obligatorie pentru punerea în evidență a stabilității, cercetarea sistemului neliniar. În această situație, soluția banală a sistemului poate fi sau stabilă asimptotic, sau instabilă, sau, în sfîrșit, stabilă indiferent sau neutru. S-a făcut de asemenea remarca, că în cazurile curente stabilitatea neutră teoretică a soluției nule a sistemului neliniar este excepțională. În cele ce urmează se va considera o asemenea situație, în cazul mișcării longitudinale a avionului, mai mult pentru a ilustra, prin ipotezele particulare necesare, caracterul singular al comportării indiferente (neutre).

Pentru acest scop, se va construi pentru modelarea mișcării perturbate longitudinale a avionului, un sistem de ecuații de forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + X(x), \tag{1}$$

unde A este o matrice patrată de rang n avînd una din valorile proprii egală cu zero cu divizori elementari simpli, celelalte valori proprii avînd părțile reale negative. Funcția vectorială X desemnînd termenii neliniari, este astfel încît sistemul (1) poate fi adus printr-o transformare liniară la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = By + Y(y,\ z_0), \tag{2}$$

unde z_0 este un parametru, B o matrice hurwitziană de rang $n - 1$, iar funcția vectorială Y, conținînd termenii neliniari în y satisface condiția

$$\frac{\partial Y}{\partial y}(0,\ z_0) = 0$$

și deci $\| Y \|$ este oricît de mică, dacă y este suficient de mic.

Din faptul că în raport cu y, funcția Y conține numai termeni cel puțin de gradul al doilea rezultă că, pentru o valoare suficient de mică a parametrului z_0 există $y_0(z_0)$ unic astfel încît $By_0(z_0)+Y(y_0(z_0), z_0)=0$ și $\lim_{z_0 \to 0} y_0(z_0) = 0$. Aceasta înseamnă că sistemul (2) admite în vecinătatea originii punctul staționar unic $y_0(z_0)$, care, după cum se vede ușor, este asimptotic stabil.

Rezultă că orice soluție a sistemului (1) va tinde asimptotic către o constantă depinzînd de condițiile inițiale și mică împreună cu acestea. De aici, orice mișcare perturbată modelată acceptabil de sistemul (1) va tinde către o mișcare staționară diferind oricît de puțin vrem, în raport cu variabilele de stare folosite [7]), de cea neperturbată, pentru o perturbație inițială suficient de mică.

Pentru a construi sistemul (1) se pornește de la ecuațiile cunoscute ale mișcării perturbate longitudinale a avionului cu comenzile blocate, raportate la un sistem de referință legat de traiectoria centrului de greutate (tangenta și normala), corespunzătoare unei mișcări de bază uniforme despre care, pentru simplitate, se presupune în plus că este orizontală și rectilinie. Aceste ecuații pot fi scrise sub forma

$$\frac{d\Delta\hat{V}}{d\hat{t}} = a_{11}\Delta\hat{V} + a_{12}\Delta\alpha + a_{13}\Delta\theta + f_1(\Delta\hat{V}, \Delta\alpha, \Delta\theta, \Delta\hat{q}),$$

$$\frac{d\Delta\alpha}{d\hat{t}} = a_{21}\Delta\hat{V} + a_{22}\Delta\alpha + \Delta\hat{q} + f_2(\Delta\hat{V}, \Delta\alpha, \Delta\theta, \Delta\hat{q}),$$

$$\frac{d\Delta\theta}{d\hat{t}} = \Delta\hat{q},$$

$$\frac{d\Delta\hat{q}}{d\hat{t}} = a_{41}\Delta\hat{V} + a_{42}\Delta\alpha + a_{44}\Delta\hat{q} + f_4(\Delta\hat{V}, \Delta\alpha, \Delta\theta, \Delta\hat{q}),$$

unde [8])

$$a_{11} = (-C_D - \mathbf{M}C_{D_\mathbf{M}}/2 + C_{T_V}\cos(\alpha-\varphi))/\mu, \quad a_{12} = (C_L - C_{D_\alpha}/2 - \hat{\mu g})/\mu,$$

$$a_{13} = -\hat{g}, \quad a_{21} = -(C_L + \mathbf{M}C_{L_\mathbf{M}}/2 + C_{T_V}\sin(\alpha-\varphi))/\mu, \quad a_{22} = -(C_{L_\alpha} + C_D)/\mu,$$

$$a_{41} = (1/i_B)[\mathbf{M}C_{m_\mathbf{M}}/2 - C_{T_V}\hat{z}_T - (C_{m_{\dot{\alpha}}}/2\mu)(C_L + \mathbf{M}C_{L_\mathbf{M}}/2 + C_{T_V}\sin(\alpha-\varphi))],$$

$$a_{42} = (1/i_B)[C_{m_\alpha}/2 - (C_{m_{\dot{\alpha}}}/2\mu)(C_{L_\alpha} + C_D)], \quad a_{44} = (C_{m_q} + C_{m_{\dot{\alpha}}})/2i_B,$$

iar f_1, f_2 și f_4 reprezintă termenii neliniari respectivi.

[7]) Această rezervă („în raport cu variabilele de stare folosite"), implicată în mod evident de însăși definiția stabilității ca noțiune matematică, va fi ilustrată printr-un exemplu la sfîrșitul paragrafului.

[8]) Pentru semnificația simbolurilor nedefinite în text vezi lista notațiilor, paginile 918–919.

Se admit următoarele ipoteze suplimentare :
(i) termenul liber al ecuației caracteristice

$$\lambda^4 - (a_{11} + a_{22} + a_{44})\,\lambda^3 + [-a_{42} + a_{22}\,a_{44} + a_{11}\,(a_{22} + a_{44}) - \\ - a_{12}\,a_{21}]\,\lambda^2 + [-a_{11}\,(-a_{42} + a_{22}\,a_{44}) + a_{12}\,(-a_{41} + a_{21}\,a_{44}) - \\ - a_{13}\,a_{41}]\,\lambda - a_{13}\,(a_{22}\,a_{41} - a_{21}\,a_{42}) = 0 \tag{3}$$

a sistemului (1) liniarizat este nul, deci, întrucît $a_{13} \neq 0$, avem $a_{41} = a_{21}a_{42}/a_{22}$; în consecință ecuația caracteristică va avea o rădăcină nulă ; ecuația caracteristică mai are o rădăcină reală negativă și o pereche de rădăcini complex conjugate cu parte reală negativă.

(ii) $f_1(\Delta\hat{V},\ \Delta\alpha,\ \Delta\theta,\ \Delta\hat{q})$ notat de aici încolo fără indice $f(\Delta\hat{V},\ \Delta\alpha,\ \Delta\theta,\ \Delta\hat{q})$, este diferit de zero iar $f_i\,(\Delta\hat{V},\ \Delta\alpha,\ \Delta\theta,\ \Delta\hat{q}) = 0$ pentru $i \neq 1$.

Deci sistemul (1) va avea următoarea formă particulară

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}\hat{t}} = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + a_{13}\,x_3 + f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4),$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}\hat{t}} = a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + x_4, \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}\hat{t}} = x_4,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}\hat{t}} = \frac{a_{21}\,a_{42}}{a_{22}}\,x_1 + a_{42}\,x_2 + a_{44}\,x_4$$

cu $x_1 = \Delta\hat{V},\ x_2 = \Delta\alpha,\ x_3 = \Delta\theta,\ x_4 = \Delta\hat{q}$.

Acest sistem va fi adus la forma (3) printr-o transformare liniară cu matricea [9])

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{a_{42}}{a_{22}} & \dfrac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44} & \dfrac{1}{a_{22}} \end{pmatrix},$$

[9]) Transformarea se deduce căutîndu-se să se înlocuiască una din variabilele sistemului, anume x_4, printr-o nouă variabilă $z = \mu_1\,x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3\,x_3 + \mu_4\,x_4$, astfel încît derivata $\mathrm{d}z/\mathrm{d}\hat{t}$ în virtutea sistemului (3) liniarizat să fie identic nulă (cu alte cuvinte ca z să reprezinte o integrală primă a sistemului liniar).

în urma căreia se obține

$$\frac{dx_1}{d\hat{t}} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + h(x_1, x_2, x_3, z),$$

$$\frac{dx_2}{d\hat{t}} = a_{21}x_1 + \left(\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{22}\right)x_2 + \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44}\right)x_3 + \frac{1}{a_{22}}z$$

$$\frac{dx_3}{d\hat{t}} = \frac{a_{42}}{a_{22}}x_2 + \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44}\right)x_3 + \frac{1}{a_{22}}z$$

$$\frac{dz}{d\hat{t}} = 0,$$

unde prin h s-a notat totalitatea termenilor neliniari în x_1, x_2, x_3 din prima ecuație a sistemului. Întrucît $z = z_0 = \text{const.}$ sistemul căutat, de forma (2), va fi

$$\frac{dy_1}{d\hat{t}} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + h(y_1, y_2, y_3, z_0),$$

$$\frac{dy_2}{d\hat{t}} = a_{21}y_1 + \left(\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{22}\right)y_2 + \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44}\right)y_3 + \frac{z_0}{a_{22}}, \qquad (5)$$

$$\frac{dy_3}{d\hat{t}} = \frac{a_{42}}{a_{22}}y_2 + \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44}\right)y_3 + \frac{z_0}{a_{22}},$$

unde $y_1 = x_1 = \Delta\hat{V}$, $y_2 = x_2 = \Delta\alpha$, $y_3 = x_3 = \Delta\theta$, $z_0 = -a_{42}x_2 + (a_{42} - a_{22}a_{44})x_3 + x_{22}x_4 = \text{const.}$, dacă $\dfrac{\partial h}{\partial y_i}(0, 0, 0, z_0) = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Se vede ușor că valorile proprii ale matricii sistemului (5) liniarizat sînt identice cu rădăcinile nenule ale ecuației (3), în care a_{41} a fost înlocuit prin $a_{21}a_{42}/a_{22}$ și, prin urmare, această matrice este hurwitziană pe baza presupunerii (i). Atunci, conform raționamentului de mai sus, sistemul (5) are în vecinătatea originii un punct staționar unic, asimptotic stabil, și oricît de apropiat de origine pentru condiții inițiale suficient de mici. Anume orice soluție $y_1(\hat{t})$, $y_2(\hat{t})$, $y_3(\hat{t})$ a acestui sistem va tinde, pentru $\hat{t} \to \infty$ către soluția staționară $y_1 = \nu_1$, $y_2 = \nu_2$, $y_3 = \nu_3$, unde constantele ν_i,

depinzînd de parametrul z_0, sînt rădăcinile următorului sistem de ecuaţii algebrice [10]):

$$a_{11}\,\nu_1 + a_{12}\,\nu_2 + a_{13}\,\nu_3 + h(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ z_0) = 0,$$

$$a_{21}\,\nu_1 + \left(\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{22}\right)\nu_2 + \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44}\right)\nu_3 + \frac{z_0}{a_{22}} = 0,$$

$$\frac{a_{42}}{a_{22}}\,\nu_2 + \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44}\right)\nu_3 + \frac{z_0}{a_{22}} = 0.$$

Într-adevăr, în urma schimbării de variabile

$$y_1 = \xi_1 + \nu_1,\ y_2 = \xi_2 + \nu_2,\ y_3 = \xi_3 + \nu_3,$$

sistemul (5) devine

$$\dot{\xi}_1 = \left(a_{11} + \frac{\partial h}{\partial y_1}(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3, z_0)\right)\xi_1 + \left(a_{12} + \frac{\partial h}{\partial y_2}(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3,\ z_0)\right)\xi_2 +$$

$$+ \left(a_{13} + \frac{\partial h}{\partial y_3}(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3, z_0)\right)\xi_3 + \Xi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ z_0), \qquad (6)$$

$$\dot{\xi}_2 = a_{21}\,\xi_1 + \left(\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{22}\right)\xi_2 + \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44}\right)\xi_3,$$

$$\dot{\xi}_3 = \frac{a_{42}}{a_{22}}\,\xi_2 + \left(-\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44}\right)\xi_3,$$

unde Ξ conţine termenii neliniari în ξ_1, ξ_2 şi ξ_3 anulîndu-se evident în origine. Deoarece $\frac{\partial h}{\partial y_i}(0, 0, 0, z_0) = 0$, $i=1, 2, 3$, prin ipoteză, $\frac{\partial h}{\partial y_i}(\nu_1, \nu_2, \nu_3, z_0)$ sînt mici împreună cu ν_j şi deci cu z_0 [11]), z_0 fiind egal la rîndul lui cu $\sum_i^4 \mu_i\, x_i\,(\hat{t}_0)$. Prin urmare, pentru condiţii iniţiale suficient de mici, $\frac{\partial h}{\partial y_i}(\nu_1, \nu_2, \nu_3, z_0)$, $i = 1, 2, 3$, sînt arbitrar de mici, de unde matricea

---

[10]) Întrucît $\frac{\partial h}{\partial y_i}(0, 0, 0, z_0) = 0$, $i = 1, 2, 3$, jacobianul se reduce în origine la determinantul

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{22} & -\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44} \\ 0 & \frac{a_{42}}{a_{22}} & -\frac{a_{42}}{a_{22}} + a_{44} \end{vmatrix}.$$

Matricea părţii sistemului liniar în (5) fiind hurwitziană (neavînd deci valori proprii nule), acest determinant este diferit de zero în origine. Atunci, conform teoremei de existenţă a funcţiilor implicite, sistemul de ecuaţii algebrice în ν_i va avea rădăcini unice, funcţii olonome de z_0, anulîndu-se pentru $z_0 = 0$.

[11]) Vezi nota precedentă.

sistemului (6) este hurwitziană concomitent cu aceea a sistemului (5) și, prin urmare, soluția nulă a sistemului (6) este uniform asimptotic stabilă. Rezultă că $x_i \to \nu_i$, $i = 1, 2, 3$, $x_4 \to z_0 - \frac{1}{\mu_4} \sum_i^3 \mu_i \nu$, pentru $\hat{t} \to \infty$, cu alte cuvinte că mișcarea perturbată acceptabil descrisă de sistemul (4) tinde asimptotic către o mișcare staționară diferită de cea de bază, dar, în ceea ce privește variabilele de stare folosite, oricît de puțin, pentru o perturbație inițială suficient de mică.

Pentru fixarea ideilor, funcția f și condițiile inițiale se vor particulariza după cum urmează. Se va presupune că singurul termen de grad superior este cel în $\Delta\alpha^2$. Anume, dacă $C_D = C_{D_0} + k\, C_L^2(\alpha)$, cu coeficientul de rezistență la înaintare corespunzător portanței nule C_{D_0} și coeficientul k caracterizînd rezistența indusă constante, $f = a\Delta\alpha^2$ cu $a = k\,(C^2_{L_\alpha}(\alpha_0) + C_{L_{\alpha^2}}(\alpha_0)) \approx k\, C^2_{L_\alpha}(\alpha_0) = \text{const}$; prin α_0 s-a notat incidența neperturbată. Se consideră drept inițial momentul $\hat{t}_0$ în care o rafală de vînt verticală provoacă o schimbare bruscă a valorii incidenței cu cantitatea $\Delta\alpha_0$. Deci condițiile inițiale vor fi $\Delta\hat{V}(\hat{t}_0) = 0$, $\Delta\alpha(\hat{t}_0) = \Delta\alpha_0 \neq 0$, $\Delta\theta(\hat{t}_0) = 0$, $\Delta\hat{q}(\hat{t}_0) = 0$. Atunci $z_0 = -a_{42}\,\Delta\alpha_0$ (vezi notațiile la sistemul (5)) și mișcarea perturbată va tinde asimptotic către mișcarea staționară

$$\hat{V} = \hat{V}_1, \quad \alpha = \alpha_1, \quad \theta = \theta_1, \quad \hat{q} = 0 \tag{7}$$

cu

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_0 - \frac{a_{22}}{a_{21}}\left(-\delta + \sqrt{\delta^2 + a_{42}\,\eta\,\Delta\alpha_0}\right),$$

$$\alpha_1 = \alpha_0 - \delta + \sqrt{\delta^2 + a_{42}\,\eta\,\Delta\alpha_0},$$

$$\theta_1 = \alpha_0 - \frac{a\eta}{-a_{13}}\left(-\Delta\alpha_0 - \delta + \sqrt{\delta^2 + a_{42}\eta\,\Delta\alpha_0}\right),$$

unde $\eta = a_{13}\,a_{42}/[a\,(-a_{42} + a_{22}a_{44})]$, iar $\delta = (-a_{12} + a_{11}\,a_{22}/a_{21})/2a + \eta/2$. Pentru $\Delta\alpha_0 = 0$, $\hat{V}_1$, α_1 și θ_1 se reduc evident, la $\hat{V}_0$, α_0 și $\theta_0 = \alpha_0$. Deci mișcarea staționară (7) este oricît de aproape de mișcarea de bază $\hat{V} = \hat{V}_0$, $\alpha = \alpha_0$, $\theta = \alpha_0$, $\hat{q} = 0$ (în ceea ce privește aceste variabile).

În concluzie, zborul orizontal, rectiliniu și uniform al unui avion, descris în ipoteza valabilității simplificărilor admise de sistemul (4) avînd o rădăcină caracteristică nulă (celelalte cu parte reală negativă), este neutru (neasimptotic) stabil la perturbații instantanee simetrice. Mișcarea indusă de perturbație tinde pentru $\hat{t} \to \infty$ către o nouă mișcare staționară diferind de cea de bază oricît de puțin, în raport cu variabilele de stare ale sistemului, pentru o perturbație suficient de mică. Mișcarea staționară limită este descrisă în aceleași ipoteze de soluția (7). În acest caz, deci, avionul are o stabilitate fugoidă neutră.

Se vede ușor că situația descrisă mai sus este una excepțională, legată de forma specială a sistemului. Sisteme de forma (4) modelează des-

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁRA 1848

tul de corect mişcarea perturbată longitudinală, corespunzătoare, de exemplu, unei mişcări de bază în regim incompresibil la viteze apropiate de viteza de zbor maximă. Însă de îndată ce coeficienţii altor termeni neliniari, adică derivatele de ordin superior în raport cu V, α, θ, sau q ale portanţei sau ale momentului longitudinal încetează a fi neglijabile ca mărime (de exemplu în anumite porţiuni din domeniul compresibil sau aproape de viteză minimă de sustentaţie), sistemul care conţine aceşti termeni poate deveni instabil, deşi partea liniară este identică cu cea din (4).

Mai mult decît atît, chiar stabilitatea soluţiei banale a sistemului (4) în ipotezele adoptate este una precară, menţinîndu-se numai în cazul constanţei stricte a coeficienţilor a_{jk}.

În sfîrşit, este de remarcat că o stabilitate neutră ca cea dedusă mai sus este, într-un fel, o falsă stabilitate, din cauza modelului folosit. Într-adevăr, stabilitatea mişcării de bază este asigurată numai în raport cu variabilele de stare alese: cu viteza de zbor, incidenţa, atitudinea longitudinală sau panta traiectoriei şi cu viteza unghiulară de tangaj. În raport încă cu alte variabile de stare, care n-au fost luate în consideraţie la întocmirea modelului fizic şi apoi matematic, sistemul poate deveni instabil. O asemenea variabilă de stare faţă de care sistemul este instabil este înălţimea de zbor. Într-adevăr, conform rezultatelor de mai sus, unghiul de înclinare a pantei traiectoriei tinde asimptotic către mărimea constantă $\theta_1 - \alpha_1$, diferită, în general de zero, (în rest oricît de mică pentru valori suficiente de mici ale perturbaţiei $\Delta\alpha_0$). În consecinţă, după un interval de timp suficient de lung scurs de la apariţia perturbaţiei, altitudinea de zbor indusă va diferi oricît de mult de cea neperturbată, cu alte cuvinte mişcarea de bază este divergentă în raport cu înălţimea. Rezultă obligativitatea stabilizării altitudinii de zbor, de exemplu, prin constrîngerea unghiului de tangaj, dacă stabilitatea fugoidă în raport cu variabilele utilizate mai sus este doar neutră.

Rezervele enumerate subliniază necesitatea considerării stabilităţii zborului comandat în cazul stabilităţii neutre a zborului liber şi aceea a urmăririi de a se obţine o stabilitate asimptotică cu un decrement de amortizare suficient de mare.

NOTAŢII

V — viteza de zbor
α — incidenţa avionului
θ — unghiul de tangaj
q — viteza unghiulară de tangaj
M — numărul Mach

Semnul Δ (delta mare) indică deviaţii induse de o perturbaţie iniţială; astfel ΔV reprezintă deviaţia indusă a vitezei de zbor, $\Delta\alpha$ aceea a incidenţei avionului etc.

Semnul grafic al accentului circumflex ($\hat{}$) desemnează mărimi adimensionale; de exemplu $\hat{t}$ este timpul adimensional, $\Delta\hat{V}$ — perturbaţia vitezei adimensionale, $\hat{g}$ — acceleraţia gravitaţională adimensională

etc. : $\hat{t} = t(\bar{c}/2V)$, $\Delta\hat{V} = \Delta V/V$, $\Delta\hat{q} - \Delta q\bar{c}/2V$, $\hat{g} = g(\bar{c}/2V^2)$, $\hat{z}_T = z_T/(\bar{c}/2)$; aici prin $\bar{c}$ s-a notat coarda de referinţă, prin t — timpul (dimensional, de exemplu, în secundă), iar prin z_T braţul de pîrghie a tracţiunii în raport cu centrul de greutate, cînd tracţiunea dă un moment de picaj.

μ — densitatea relativă a avionului; $\mu = 2\,m/\rho S\bar{c}$, unde prin m, ρ şi S s-au notat, respectiv, masa avionului, densitatea aerului şi aria suprafeţei portante;

i_B — momentul de inerţie adimensional în raport cu axa transversală $i_B = \mu k_y^2/(\bar{c}/2)^2$, unde k_y reprezintă raza de giraţie a avionului în raport cu axa transversală;

C_L — coeficientul de portanţă;

C_D — coeficientul de rezistenţă la înaintare;

$$C_{L_{\mathbf{M}}} = \partial C_L/\partial \mathbf{M},\quad C_{L_\alpha} = \partial C_L/\partial\alpha,\quad C_{L_{\alpha^2}} = \partial^2 C_L/\partial\alpha^2,$$

$$C_{D_{\mathbf{M}}} = \partial C_D/\partial \mathbf{M},\quad C_{D_\alpha} = \partial C_D/\partial\alpha,\quad C_{m_{\mathbf{M}}} = \partial C_m/\partial \mathbf{M},\quad C_{m_\alpha} = \partial C_m/\partial\alpha,$$

$$C_{m_{\hat{q}}} = \partial C_m/\partial\hat{q},\quad C_{m_{\dot{\alpha}}} = \partial C_m/\partial(\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}\hat{t});\quad C_{T_V} = (\partial T/\partial V)/\rho SV,$$

T desemnînd forţa de tracţiune sau împingere dezvoltată de motoare; C_m este oeficientul momentului aerodinamic longitudinal.

BIBLIOGRAFIE

1. W. J. Duncan, *The Principles of the Control and Stability of Aircraft*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.
2. A. W. Babister, *Aircraft Stability and Control*, Pergamon Press, New York, Oxford, London, Paris, 1961.
3. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1950.
4. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale*, Edit. Academiei R.P.R., 1963.
5. B. Etkin, *Dynamics of Flight: Stability and Control*, Wiley, New York—London, 1959.
6. T. Hacker, *Unele probleme ale stabilizării automate a avioanelor DAV în zbor imobil*, St. cerc. mec. apl., **13**, 2, 295—310 (1962).
7. — *Unele probleme neclasice ale stabilităţii zborului*, St. cerc. mec. apl., 21, **2**, 531—548 (1966).

ASUPRA MANEVREI OPTIME DE ÎNTÎLNIRE, CU MINIMUM DE COMBUSTIBIL, A APARATELOR COSMICE PE ORBITE CIRCULARE CONSIDERÎND ECUAȚIILE NELINIARE DE MIȘCARE A APARATULUI URMĂRITOR

de AL. MARINESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

531 : 629.136.3

În lucrare se studiază manevra optimă de întîlnire a două aparate cosmice pe orbite circulare considerînd ecuațiile neliniare de mișcare a aparatului urmăritor, care este prevăzut cu instalație de propulsie.
Aparatul urmărit (ținta) nu are instalație de propulsie.
Formulîndu-se problema găsirii legilor optime de variație a parametrilor mișcării aparatului urmăritor ca o problemă variațională de extremum condiționat, în lucrare se arată că aceste legi pot fi deduse în final printr-un procedeu de aproximații succesive.

În lucrările [1], [2] s-a studiat manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil, considerînd ecuațiile liniare de mișcare a aparatului urmăritor.

Problema variațională a manevrei a fost formulată ca și în cazul de față ca o problemă de extremum condiționat, legile optime de variație a parametrilor mișcării aparatului urmăritor fiind deduse în final prin integrarea unor ecuații diferențiale liniare.

Considerarea ecuațiilor neliniare de mișcare a aparatului urmăritor așa cum se arată în lucrarea de față, modifică în mod substanțial deducerea legilor optime de variație a parametrilor mișcării lui.

Menținînd ipotezele din lucrările citate mai sus, considerăm aparatul urmărit A lipsit de instalația de propulsie care se mișcă pe o orbită circulară de rază R în jurul pămîntului cu viteza unghiulară constantă ω (fig. 1).

De aparatul urmărit A este legat sistemul de axe $Axzy$ astfel încît z este în direcția razei R, x în direcția tangentei la orbită și y normală pe planul xz.

Fie B aparatul urmăritor prevăzut cu instalație de propulsie aflat pe o orbită în apropierea aparatului urmărit A.

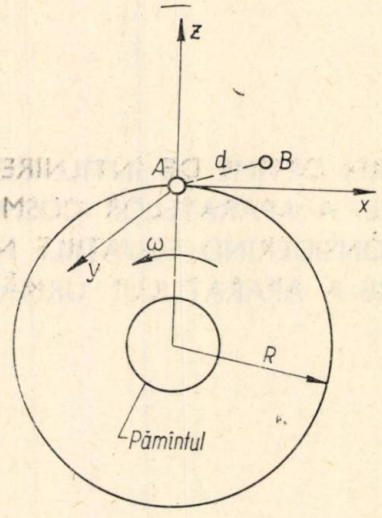


Fig. 1

Să însemnăm cu a_x, a_z, a_y componentele accelerației datorită tracțiunii după cele trei axe x, z, y, accelerație definită de relația

$$\vec{a}(t) = \frac{T}{M} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}\vec{c}}{M}, \tag{1}$$

unde T este tracțiunea, M masa aparatului urmăritor și $\vec{c}$ vectorul vitezei efective de ejecție.

Dacă notăm cu τ durata arderii atunci manevra optimă cu minimum de comubstibil are loc cînd integrala

$$J = \int_0^{\tau} a^2 \, \mathrm{d}t \tag{2}$$

este minimă.

Pe de altă parte însă componentele a_x, a_z, a_y ale accelerației datorită tracțiunii $\vec{a}$ sînt conținute în ecuațiile de mișcare ale aparatului urmăritor și din această cauză minimul funcționalei (2) este condiționat de aceste ecuații.

Problema variațională a manevrei sus-menționate poate fi formulată deci ca o problemă de extremum condiționat așa cum s-a formulat și în lucrările [1], [2] care au ca punct de plecare lucrarea [3]. Considerăm

ecuațiile neliniare de mișcare ale aparatului urmăritor față de sistemul $Axzy$ legat de țintă,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega^2 x + 2\omega\frac{dz}{dt} - \omega^2 R^3 \frac{x}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_x,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \omega^2 R - 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2 z - \omega^2 R^3 \frac{R+z}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_z, \qquad (3)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 R^3 \frac{y}{(x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_y,$$

deduse pe baza lucrărilor [4], [5].

Notînd componentele vitezei aparatului urmăritor față de sistemul $Axzy$ cu

$$V_x = \frac{dx}{dt},$$

$$V_z = \frac{dz}{dt},$$

$$V_y = \frac{dy}{dt},$$

sistemul (3) devine

$$\frac{dx}{dt} = V_x,$$

$$\frac{dV_x}{dt} = \omega^2 x + 2\omega V_z - \omega^2 R^3 \frac{x}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_x,$$

$$\frac{dz}{dt} = V_z,$$

$$\frac{dV_z}{dt} = \omega^2 R - 2\omega V_x + \omega^2 z - \omega^2 R^3 \frac{R+z}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_z, \qquad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = V_y,$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -\omega^2 R^3 \frac{y}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} + a_y.$$

Se poate ușor verifica faptul că dacă înlocuim în ecuațiile (4) componentele accelerației gravitației care depind neliniar de coordonatele x, z, y

$$g_x = -\omega^2 R^3 \frac{x}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$g_z = -\omega^2 R^3 \frac{R+z}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$g_y = -\omega^2 R^3 \frac{y}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}},$$

prin componentele care depind liniar

$$g_x = -\omega^2 x,$$

$$g_z = -\omega^2 R + 2\omega^2 z,$$

$$g_y = -\omega^2 y,$$

sistemul (4) se transpune în sistemul de ecuații liniare

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_x,$$

$$\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t} = 2\omega V_z + a_z,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = V_z,$$

$$\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t} = -2\omega V_x + 3\omega^2 z + a_z, \qquad (4')$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = V_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t} = -\omega^2 y + a_y,$$

care este bine cunoscut.

Problema care se pune acum și anume problema manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil revine la a găsi minimul integralei

$$J = \int_0^\tau (a_x^2 + a_z^2 + a_y^2)\,\mathrm{d}t,$$

cu condițiile (4). Scriem pentru aceasta ecuațiile (4) sub forma

$$\Phi_1 = \frac{dx}{dt} - V_x = 0,$$

$$\Phi_2 = \frac{dV_x}{dt} - \omega^2 x - 2\omega V_z + \omega^2 R^3 \frac{x}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_x = 0,$$

$$\Phi_3 = \frac{dz}{dt} - V_z = 0, \tag{5}$$

$$\Phi_4 = \frac{dV_z}{dt} - \omega^2 R + 2\omega V_x - \omega^2 z + \omega^2 R^3 \frac{R+z}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_z = 0,$$

$$\Phi_5 = \frac{dy}{dt} - V_y = 0,$$

$$\Phi_6 = \frac{dV_y}{dt} + \omega^2 R^3 \frac{y}{[x^2 + (R+z)^2 + y^2]^{\frac{3}{2}}} - a_y = 0.$$

Cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6$ alcătuim funcția

$$F = a_x^2 + a_z^2 + a_y^2 + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 + \lambda_3\Phi_3 + \lambda_4\Phi_4 + \lambda_5\Phi_5 + \lambda_6\Phi_6, \tag{6}$$

și problema variațională revine la a găsi minimul necondiționat al integralei

$$J' = \int_0^\tau F\, dt. \tag{7}$$

Cu ajutorul condițiilor lui Legendre se poate ușor proba că de-a lungul extremalei funcționala (7) este într-adevăr minimă.

Folosind funcția (6), ecuațiile lui Euler

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dx}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dV_x}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dz}{dt}} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \frac{dV_z}{dt}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial V_y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t}} = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_z} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}a_z}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial F}{\partial \frac{\mathrm{d}a_y}{\mathrm{d}t}} = 0,$$

şi condiţiile sus-menţionate (5) conduc la sistemul de ecuaţii diferenţiale care integrat va da funcţiunile căutate $x(t)$, $z(t)$ $y(t)$, $V_x(t)$, $V_z(t)$, $V_y(t)$, $a_x(t)$, $a_z(t)$, $a_y(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ... $\lambda_6(t)$, funcţiuni care caracterizează manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil.

Ecuaţiile (8) ale lui Euler după efectuarea calculelor conduc la sistemul

$$-\lambda_2\omega^2 + \lambda_2\omega^2R^3\frac{-2x^2+(R+z)^2+y^2}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$+\lambda_4\omega^2R^3\frac{-3x\,(R+z)}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}+$$

$$+\lambda_6\omega^2R^3\frac{-3xy}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}-\frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$-\lambda_1+2\omega\lambda_4-\frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t}=0, \tag{9}$$

$$\lambda_2\omega^2R^3\frac{-3x(R+z)}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}-\lambda_4\omega^2+\lambda_4\omega^2R^3\frac{x^2-2(R+z)^2+y^2}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$+\lambda_6\omega^2R^3\frac{-3y(R+z)}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}-\frac{\mathrm{d}\lambda_3}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$-2\lambda_2\omega-\lambda_3-\frac{\mathrm{d}\lambda_4}{\mathrm{d}t}=0,$$

$$\lambda_2\omega^2R^3\frac{-3xy}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}+\lambda_4\omega^2R^3\frac{-3(R+z)y}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}$$
$$+\lambda_6\omega^2R^3\frac{x^2+(R+z)^2-2y^2}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}-\frac{d\lambda_3}{dt}=0, \tag{9}$$

$$-\lambda_5-\frac{d\lambda_6}{dt}=0,$$

$$2a_x-\lambda_2=0,$$
$$2a_z-\lambda_4=0,$$
$$2a_y-\lambda_6=0.$$

Din ecuațiile (4) și (9) obținem sistemul de ecuații diferențiale ale extremalelor pe care-l vom scrie sub forma

$$\frac{dx}{dt}=V_x=\varphi_1\ (t,\ x,\ z,\ y,\ V_x,\ V_z,\ V_y,\ \lambda_1,\ \ldots\ \lambda_6),$$

$$\frac{dV_x}{dt}=\omega^2x+2\omega V_z-\omega^2R^3\frac{x}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}+a_x$$
$$=\varphi_2\ (t,\ x,\ z,\ y,\ V_x,\ V_z,\ V_y,\ \lambda_1,\ \ldots\ \lambda_6),$$

$$\frac{dz}{dt}=V_z=\varphi_3\ (t,\ x,\ z,\ y,\ V_x,\ V_z,\ V_y,\ \lambda_1,\ \ldots\ \lambda_6),$$

$$\frac{dV_z}{dt}=\omega^2R-2\omega V_x+\omega^2z-\omega^2R^3\frac{R+z}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}+a_z$$
$$=\varphi_4\ (t,\ x,\ z,\ y,\ V_x,\ V_z,\ V_y,\ \lambda_1\ \ldots\ \lambda_6),$$

$$\frac{dy}{dt}=V_y=\varphi_5\ (t,\ x,\ z,\ y,\ V_x,\ V_z,\ V_y,\ \lambda_1\ \ldots\ \lambda_6),$$

$$\frac{dV_y}{dt}=-\omega^2R^3\frac{y}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}+a_y$$
$$=\varphi_6\ (t,\ x,\ z,\ y,\ V_x,\ V_z,\ V_y,\ \lambda_1\ \ldots\ \lambda_6),$$

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=-\lambda_2\omega^2+\lambda_2\omega^2R^3\frac{-2x^2+(R+z)^2+y^2}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}$$
$$+\lambda_4\omega^2R^3\frac{-3x(R+z)}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}+\lambda_6\omega^2R^3\frac{-3xy}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}$$
$$=\varphi_7\ (t,\ x,\ z,\ y,\ V_x,\ V_z,\ V_y,\ \lambda_1,\ \ldots\ \lambda_6), \tag{10}$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = -\lambda_1 + 2\omega\lambda_4$$

$$= \varphi_8 (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = \lambda_2\omega^2 R^3 \frac{-3x(R+z)}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} - \lambda_4\omega^2$$

$$+ \lambda_4\omega^2 R^3 \frac{x^2 - 2(R+z)^2 + y^2}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_6\omega^2 R^3 \frac{-3y(R+z)}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \varphi_9 (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6),$$

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -2\lambda_2\omega - \lambda_3$$

$$= \varphi_{10} (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1 \ldots \lambda_6), \qquad (10)$$

$$\frac{d\lambda_5}{dt} = \lambda_2\omega^2 R^3 \frac{-3xy}{(x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$+ \lambda_4\omega^2 R^2 \frac{-3(R+z)y}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_6\omega^2 R^3 \frac{x^2+(R+z)^2-2y^2}{[x^2+(R+z)^2+y^2]^{\frac{5}{2}}}$$

$$= \varphi_{11} (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6),$$

$$\frac{d\lambda_6}{dt} = -\lambda_5 = \varphi_{12} (t, x, z, y, V_x, V_z, V_y, \lambda_1, \ldots \lambda_6).$$

Pornind de la datele inițiale $x(t_0) = x_0, \ldots, V_x(t_0) = V_{x0}, \ldots \lambda_6(t_0) = \lambda_{60}$ sistemul (10) poate fi soluționat prin aproximații succesive dacă funcțiunile $\varphi_i (i = 1, 2, \ldots 12)$ sînt continue pentru $|t - t_0| < \tilde{t}$ $(\tilde{t} \neq \tau)$, $|x - x_0| < \tilde{x}$, $|V_x - V_{x0}| < \tilde{V}_x, \ldots |\lambda_6 - \lambda_{60}| < \tilde{\lambda}_6$ unde $\tilde{t}$, $\tilde{x}, \ldots \tilde{\lambda}_6$ sînt mărimi pozitive dinainte fixate încadrate în domeniul mărimilor care apar efectiv în practică și în plus funcțiunile sus-amintite îndeplinesc condițiile lui Lipschitz.

Deoarece toți termenii care alcătuiesc funcțiunile φ_i sînt funcțiuni continue în intervalele de variație sus-menționate funcțiunile φ_i sînt continue. În ceea ce privește condițiile lui Lipschitz este suficient să arătăm că $\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}, \frac{\partial\varphi_i}{\partial V_x}, \ldots \frac{\partial\varphi_i}{\partial\lambda_6}$ sînt continue în intervalele închise $|t - t_0| \leqslant \tilde{t}$, $|x - x_0| \leqslant \tilde{x} \ldots |\lambda_6 - \lambda_{60}| \leqslant \tilde{\lambda}_6$.

Or, este ușor de verificat că și această condiție este îndeplinită.

Calculul poate fi deci condus prin aproximații succesive și în aproximația de ordinul n, putem scrie

$$\frac{dx^{(n)}}{dt} = \varphi_1 (t, x^{(n-1)}, \ldots V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}),$$

$$\frac{dV_x^{(n)}}{dt} = \varphi_2 (t, x^{(n-1)}, \ldots V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\lambda_6^{(n)}}{dt} = \varphi_{12} (t, x^{(n-1)}, \ldots V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)}), \tag{11}$$

iar ca urmare soluțiile vor fi

$$x^{(n)} = x_0 + \int_{t_0}^{t} \varphi_1 (t, x^{(n-1)}, \ldots V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)})\, dt,$$

$$V_x^{(n)} = V_{x0} + \int_{t_0}^{t} \varphi_2 (t, x^{(n-1)}, \ldots V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)})\, dt, \tag{12}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_6^{(n)} = \lambda_{60} + \int_{t_0}^{t} \varphi_{12} (t, x^{(n-1)}, \ldots V_x^{(n-1)}, \ldots \lambda_6^{(n-1)})\, dt.$$

În probleme de acest gen [6], fixarea riguroasă a valorilor inițiale a multiplicatorilor lui Lagrange $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_6$ este în general destul de delicată și de aceea integrarea ecuațiilor (10) este la rîndul ei laborioasă.

Soluțiile problemei liniare însă ne pot furniza elemente aproape precise de calcul facilizînd integrarea sistemului (10).

Într-adevăr, luînd din problema liniară $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots \lambda_{60}$ și cu aceasta din ultimele trei ecuații (9) a_{x0}, a_{z0}, a_{y0} integrarea sistemului (10) devine foarte facilă. Cu titlul de aplicație, deoarece $t_0 = 0$, soluțiile (12) ale sistemului (10) în prima aproximație vor fi

$$x^{(1)} = x_0 + V_{x0}\, t,$$

$$z^{(1)} = z_0 + V_{z0}\, t,$$

$$y^{(1)} = y_0 + V_{y0}\, t, \tag{13}$$

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_{10} + \left\{ -\lambda_{20}\omega^2 + \lambda_{20}\omega^2 R^3 \frac{-2x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right.$$

$$\left. + \lambda_{40}\omega^2 R^3 \frac{-3x_0(R+z_0)}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_{60}\omega^2 R^3 \frac{-3x_0 y_0}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} t,$$

$$\lambda_2^{(1)} = \lambda_{20} + (-\lambda_{10} + 2\omega\lambda_{40})\, t,$$

$$\lambda_3^{(1)} = \lambda_{30} + \left\{ \lambda_{20}\omega^2 R^3 \frac{-3x_0(R+z_0)}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} - \lambda_{40}\omega^2 \right.$$

$$\left. + \lambda_{40}\omega^2 R^3 \frac{x_0^2 - 2(R+z_0)^2 + y_0^2}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_{60}\omega^2 R^3 \frac{-3y_0(R+z_0)}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} t,$$

$$\lambda_4^{(1)} = \lambda_{40} - (2\lambda_{20}\omega + \lambda_{30})\, t,$$

$$\lambda_5^{(1)} = \lambda_{50} + \left\{ \lambda_{20}\omega^2 R^3 \frac{-3x_0 y_0}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right.$$

$$\left. + \lambda_{40}\omega^2 R^3 \frac{-3(R+z_0)\, y_0}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} + \lambda_{60}\omega^2 R^3 \frac{x_0^2 + (R+z_0)^2 - 2y_0^2}{[x_0^2 + (R+z_0)^2 + y_0^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} t,$$

$$\lambda_6^{(1)} = \lambda_{60} - \lambda_{50}\, t.$$

Cu aceleaşi date care s-au folosit în exemplul numeric din lucrarea [2] unde se va considera $x(0) = 11{,}5.10^3$m, $z(0) = 9.10^2$m, $y(0) = 4.10^2$m procedînd riguros la determinarea constantelor de integrare (fără condiţiile restrictive la joncţiune $a_x(\tau) = 0$, $a_z(\tau) = 0$, $a_y(\tau) = 0$) s-au calculat valorile iniţiale ale componentelor acceleraţiei datorită tracţiunii. Pe baza acestor valori iniţiale s-au calculat cu teoria dezvoltată mai sus componentele acceleraţiei datorită tracţiunii în prima aproximaţie $a_x^{(1)}$, $a_z^{(1)}$, $a_y^{(1)}$ care s-au prezentat în diagramele din figurile 2, 3 şi 4.

Se remarcă cu această ocazie, faptul, că la începutul manevrei valorile componentelor acceleraţiei datorită tracţiunii calculate riguros pe

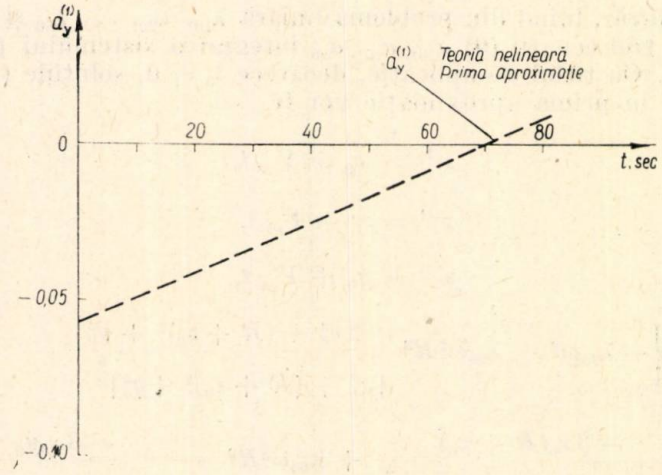


Fig. 2

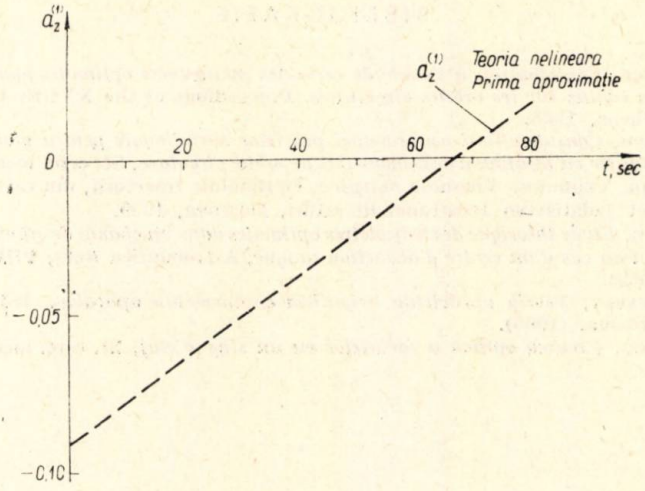


Fig. 3

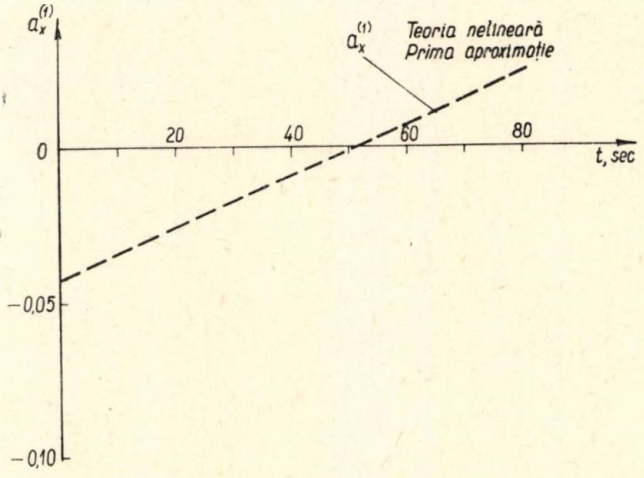


Fig. 4

baza teoriei liniare nu diferă cu mult față de cele calculate aproximativ în [2] pentru valori ale parametrilor mișcării întîlnite efectiv în practică.

Deosebiri mai importante apar natural la joncțiune, uneori cînd se pun condiții restrictive de tipul celor menționate. Se remarcă faptul că teoria neliniară dezvoltată în lucrarea de față pune în evidență chiar de la prima aproximație schimbarea sensului tracțiunii, cu alte cuvinte apariția frînajului care există realmente în apropierea acostajului.

BIBLIOGRAFIE

1. AL. MARINESCU, *Contribution à l'étude de certaines manœuvres optimales pour le rendez-vous des engins sur les orbites circulaires*, Proceedings of the XVI-th I.A.F. Congress-Athens, 1965.
2. AL. MARINESCU, *Considerațiuni asupra unei probleme variaționale pentru manevra optimă de întîlnire cu minimum de combustibil pe orbite circulare*, St. cerc. mec. apl. *1*, (1967).
3. B. FRAEIJS DE VEUBEKE, *Vnesnaia balistica*, Optimalnie traectorii, din cartea Dvijenie rachet Izdatelstvo Inostranoi literaturi, Moscova, 1959.
4. P. CONTENSOU, *Etude théorique des trajectoires optimales dans un champ de gravitation. Application au cas d'un centre d'attraction unique*, Astronautica Acta, **VIII** fascicule 2—3 (1962).
5. V. M. PONOMAREV, *Teoria upravlenia dvijeniem cosmiceschih aparatov*, Izdatelsto Nauka, Moscova, (1965).
6. AL. MARINESCU, *Urcarea optimă a rachetelor cu un singur etaj*, St. cerc. mec. apl. *2* (1964).

ASUPRA PERTURBAȚIILOR VEHICULELOR ORBITALE STAȚIONARE LA O LATITUDINE ARBITRARĂ, DATORITE TRIAXIALITĂȚII PĂMÎNTULUI

de M. M. NIȚĂ
Institutul de mecanica fluidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

531 : 629.136.3

Se stabilesc condițiile realizării unui vehicul orbital staționar la o latitudine arbitrară cu ajutorul unui motor-rachetă de mică tracțiune, luîndu-se în considerație turtirea Pămîntului și forma eliptică a ecuatorului. Se studiază apoi mișcarea vehiculului în cazul unor perturbații inițiale mici.

1. INTRODUCERE

Unul dintre obiectivele utilizării sateliților artificiali în scopuri practice constă în realizarea unui satelit artificial care gravitează în sensul mișcării diurne a Pămîntului, pe o orbită circulară ecuatorială, cu perioada egală cu o zi siderală.

Proprietatea acestui tip de satelit artificial, denumit „satelit staționar" sau „satelit de 24 ore", de a se menține deasupra aceluiași punct de pe ecuatorul terestru, permite utilizarea sa ca releu de televiziune sau pentru telecomunicații, ca reper pentru navigația maritimă și aeriană etc.

Deoarece un satelit artificial nu poate deveni staționar decît deasupra unor puncte situate pe ecuatorul terestru, rezultă că utilizările sale în domeniile indicate mai sus, sînt într-o oarecare măsură limitate : pentru locuri situate la mari latitudini calitatea recepțiilor scade, iar în regiunile polare devine chiar imposibilă ; acest satelit nu poate fi de asemenea utilizat ca reper de navigație de navele situate la latitudini foarte mari, adică chiar în regiunile în care majoritatea metodelor ordinare de navigație devin ineficace.

În lucrările [6] și [7], prezentate la Congresele internaționale de Astronautică care au avut loc la Varna în 1962 și la Paris în 1963, noi am demonstrat posibilitatea realizării unui vehicul staționar deasupra unui punct situat la o latitudine oarecare φ, cu ajutorul unui motor-

fuzee de mică tracțiune, a cărui axă trece continuu printr-un punct fix de pe linia polilor.

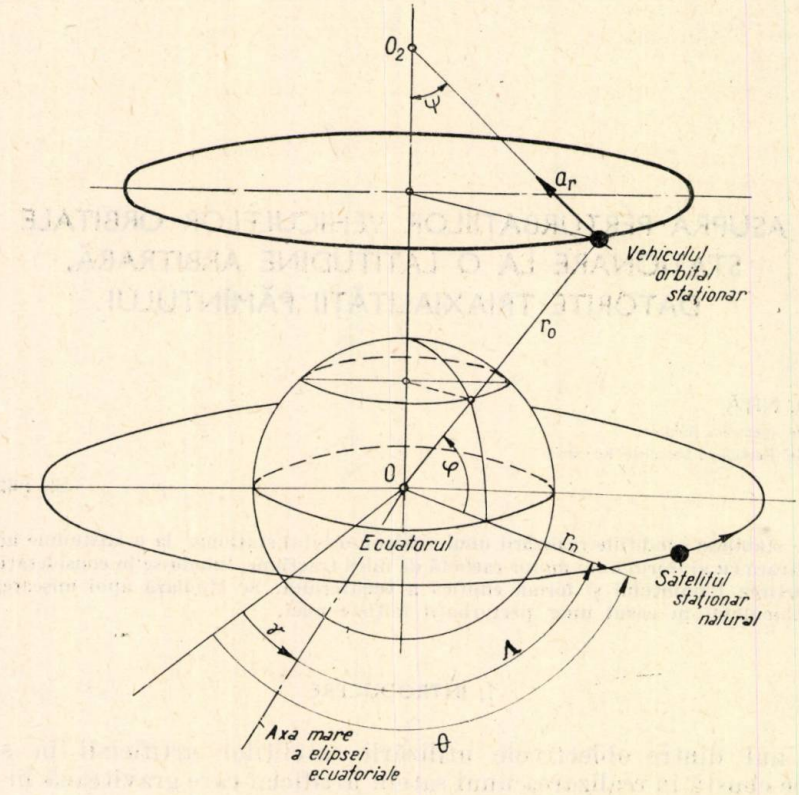


Fig. 1

Realizarea unui astfel de vehicul staționar impune condiția ca tracțiunea motorului raportată la masa vehiculului să aibă valoarea

$$a_r = g \frac{\sin \varphi}{\cos \psi}, \tag{1}$$

unde g este accelerația locală a gravității, iar ψ este unghiul format de axa motorului cu linia polilor (fig. 1), dat de:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\rho - 1}{\operatorname{tg} \varphi}, \tag{2}$$

unde

$$\rho = \frac{r_0^3}{r_n^3}, \tag{3}$$

r_0 fiind distanța geocentrică a vehiculului, iar r_n raza orbitei satelitului staționar natural.

De remarcat că în acest mod pot fi realizate vehicule orbitale la diverse distanțe geocentrice care devin staționare deasupra locurilor situate la latitudini arbitrare, inclusiv în planul ecuatorial.

Aceste rezultate au fost obținute în ipoteza că Pământul este un corp sferic, omogen.

În această lucrare ne propunem să analizăm problema realizării unui vehicul staționar la o latitudine arbitrară, luînd pentru potențialul gravitațional o expresie mai apropiată de realitate, prin considerarea termenilor corespunzători turtirii Pământului și elipticității ecuatorului.

În acele ce urmează vom denumi „vehicul orbital staționar" vehiculul spațial care poate deveni staționar cu ajutorul unui sistem de propulsie, spre a-l deosebi de satelitul ecuatorial cu orbită circulară, a cărui rază este

$$r_n = \sqrt[3]{\frac{kM}{\omega^2}},$$

unde

k este constanta atracției universale,

M — masa Pământului,

ω — viteza unghiulară diurnă a Pământului, pe care îl vom denumi „satelit staționar natural".

2. EFECTELE TURTIRII PĂMÎNTULUI

Dacă se neglijează termenii de ordin superior, potențialul gravitațional terestru poate fi exprimat prin [1], [9]

$$V = -\frac{\mu}{r}\left[1 - J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{3\sin^2\varphi - 1}{2} + \varepsilon\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{\cos^2\varphi \cos 2\Lambda}{2}\right], \quad (4)$$

unde J_2 și ε sînt coeficienți adimensionali, R este raza medie a ecuatorului, iar $\mu = kM$; termenul ce conține pe J_2 exprimă influența turtirii Pământului, iar termenul ce conține pe ε exprimă influența formei eliptice a ecuatorului.

În această lucrare se consideră următoarele valori pentru J_2 și ε [4], [1]

$$J_2 = 1{,}082.10^{-3},$$

$$\varepsilon = 1{,}01.10^{-5}.$$

În relația (4) și în cele ce urmează, r reprezintă distanța geocentrică, φ latitudinea, iar Λ-longitudinea măsurată de la axa mare a elipsei ecuatoriale (fig. 1).

În studiul mișcării se va considera, așa dar, funcția de forță

$$U^* = -V + U_1, \quad (5)$$

unde U_1 reprezintă funcția de forță corespunzătoare tracțiunii motorului

$$U_1 = -a_r r \frac{\cos\varphi}{\sin\psi}. \quad (6)$$

Poziția vehiculului în spațiu este definită prin coordonatele r, φ, θ, unde θ este longitudinea măsurată față de o direcție fixă ; se poate scrie că

$$\theta = \gamma + \Lambda,$$

unde γ este unghiul care definește poziția axei mari a elipsei ecuatoriale. Ținînd seama că

$$\dot{\gamma} = \omega,$$

unde ω este viteza unghiulară diurnă a Pămîntului, ecuațiile de mișcare în raport cu sistemul menționat devin

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\cos^2\varphi\,(\dot{\Lambda} + \omega)^2 = -\frac{\mu}{r^2} +$$

$$+ \frac{3\,\mu\,J_2\,R^2}{2\,r^4}(3\sin^2\varphi - 1) - \tag{7}$$

$$- \frac{3\,\mu\,\varepsilon\,R^2}{2\,r^4}\cos^2\varphi\cos 2\Lambda + a_r \sin(\varphi - \psi),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[r^2\cos^2\varphi\,(\dot{\Lambda} + \omega)] = -\frac{\mu\,\varepsilon\,R^2}{r^3}\cos^2\varphi\sin 2\Lambda, \tag{8}$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi}) - \frac{r^2(\dot{\Lambda} + \omega)^2}{2}\sin 2\varphi = \tag{9}$$

$$= \frac{3\,\mu\,J_2\,R^2}{2\,r^3}\sin 2\varphi + \frac{\mu\,\varepsilon\,R^2}{2\,r^3}\sin 2\varphi\cos 2\Lambda - a_r\,r\cos(\varphi - \psi).$$

Pozițiile staționare

$$r = r_0 = \text{const.},\quad \varphi = \varphi_0 = \text{const.},\quad \Lambda = \Lambda_0 = \text{const.},$$

sînt soluții ale acestor ecuații, dacă r_0, φ_0, a_r, Λ_0 și ψ satisfac condițiile

$$-r_0\,\omega^2\cos^2\varphi_0 = -\frac{\mu}{r_0^2} + \frac{3\mu\,J_2\,R^2}{2\,r_0^4}(3\sin^2\varphi_0 - 1) -$$

$$- \frac{3\,\mu\,\varepsilon\,R^2}{2\,r_0^4}\cos^2\varphi_0\cos 2\Lambda_0 + a_r\sin(\varphi_0 - \psi_0), \tag{7'}$$

$$0 = \frac{\mu\,\varepsilon\,R^2}{r_0^3}\cos^2\varphi_0\sin 2\Lambda_0, \tag{8'}$$

$$-\frac{r_0^2\omega^2}{2}\sin 2\varphi_0 = \frac{3\,\mu\,J_2\,R^2}{2\,r_0^3}\sin 2\varphi_0 +$$

$$+ \frac{\mu\,\varepsilon\,R^2}{2\,r_0^3}\sin 2\varphi_0\cos 2\Lambda_0 - a_r\,r_0\cos(\varphi_0 - \psi_0). \tag{9'}$$

Considerînd că $\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}$, condiția (8′) este satisfăcută dacă

$$\Lambda_0 = n\frac{\pi}{2}, \quad (n = 0, 1, 2, 3), \tag{10}$$

de unde rezultă că pozițiile staționare sînt situate în planele definite de linia polilor și axele elipsei ecuatoriale.

Din relațiile (7′) și (9′) în care se ține seama de (10), rezultă valorile pentru accelerația corespunzătoare tracțiunii a_r și pentru unghiul format de axa motorului cu linia polilor ψ_0, necesare menținerii vehiculului în unul din aceste plane la distanța geocentrică r_0 deasupra unui loc situat la latitudinea φ_0. Astfel,

$$a_r = a_{rs} + \Delta a_r, \tag{11}$$

unde a_{rs} este valoarea corespunzătoare cîmpului gravitațional sferic, dată de (1), iar

$$\Delta a_r = a_{rs}\frac{5(3J_2 \pm \varepsilon)\cos^2\varphi_0 - 6J_2}{2k^2\rho^{2/3}}, \tag{11′}$$

unde

$$k = \frac{r_0}{R}, \qquad \rho = \left(\frac{r_0}{r_n}\right)^3.$$

De asemenea,

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \operatorname{tg}\psi_s + \Delta(\operatorname{tg}\psi), \tag{12}$$

unde ψ_s reprezintă valoarea unghiului corespunzătoare cîmpului gravitațional sferic, dată de relația (2), iar

$$\Delta(\operatorname{tg}\psi) \approx -\frac{3\operatorname{tg}\psi_s}{2k^2(\rho-1)\rho^{2/3}}[(3\rho-2)(J_2\pm\varepsilon) - \rho(5J_2\pm 3\varepsilon)\sin^2\varphi_0]. \tag{12′}$$

Din relațiile (11), (11′) și (12), (12′) se observă că influența turtirii Pămîntului și elipticității ecuatorului se manifestă prin mici variații ale accelerației a_r și unghiului ψ, față de valorile necesare menținerii vehiculului la aceeași distanță geocentrică și la aceeași latitudine, într-un cîmp gravitațional sferic. În aceste relații cît și în cele ce urmează, la termenii cu semn ambiguu s-a considerat semnul superior pentru $\lambda = 0; \pi$ și semnul inferior pentru $\lambda = \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}$.

Totodată, din relațiile (7′) și (9′) se observă că pentru aceleași valori ale accelerației a_r și unghiului ψ, pozițiile staționare la aceeași latitudine sînt situate la distanțe geocentrice diferite, după cum vehiculul este situat în unul din planele meridiane definite de relația (10). Diferența Δr dintre distanța geocentrică a vehiculului situat în planul meridian, care conține axa mare a elipsei ecuatoriale terestre și distanța geocentrică a vehiculului situat într-un plan meridian perpendicular, este dată de

$$\Delta r = (\Delta r)_n\frac{5\rho\cos^2\varphi_0 - 2}{3\rho^{2/3}}, \tag{13}$$

unde

$$(\Delta r)_n = \varepsilon r_n \left(\frac{R}{r_n}\right)^2. \tag{14}$$

Din formula (14) se observă că pentru fiecare distanţă geocentrică există o latitudine φ^* dată de

$$\varphi^* = \arccos \sqrt{\frac{2r_n}{5r_0}},$$

pentru care diferenţa Δr devine nulă. Pentru latitudini mai mari decît φ^*, această diferenţă este negativă, iar pentru $\varphi < \varphi^*$, distanţa geocentrică a vehiculului situat în planul meridian ce conţine axa mare a elipsei ecuatoriale este mai mare decît distanţa geocentrică a vehiculului situat într-un plan perpendicular.

Se observă că pentru cazul satelitului staţionar natural ($\rho = 1$, $\varphi_0 = 0$), se obţine pentru Δr expresia menţionată în [2].

3. ECUAŢIILE VARIAŢIILOR

Ne propunem să studiem mişcarea vehiculului spaţial, considerînd funcţia de forţă dată de expresia (5), în cazul cînd condiţiile iniţiale sînt afectate de perturbaţii mici, adică

$$r = r_0 + (\delta r)_0,\ \varphi = \varphi_0 + (\delta\varphi)_0,\ \theta = \gamma + \Lambda_0 +$$
$$+ (\delta\Lambda)_0,\ \dot r = (\delta\dot r)_0,\ \dot\varphi = (\delta\dot\varphi)_0,\ \dot\theta = \omega + (\delta\dot\Lambda)_0.$$

În acest caz, la un moment oarecare t, vom avea

$$r = r_0 + \delta r,\ \varphi = \varphi_0 + \delta\varphi,\ \theta = \gamma +$$
$$+\Lambda_0 + \delta\Lambda,\ \dot r = \delta\dot r,\ \dot\varphi = \delta\dot\varphi,\ \dot\theta = \omega + \delta\dot\Lambda.$$

Aceste soluţii pot fi obţinute cu uşurinţă dacă ne limităm la aproximaţia liniară. Astfel, plecînd de la ecuaţiile lui Hamilton, se obţine un sistem de 6 ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, de forma

$$\dot x_i = X_i(x_1,\ x_2, \ldots, x_6),$$

unde variabilele r, φ, θ, p_r, p_φ, p_θ, în care

$$p_r = \frac{\partial E}{\partial \dot r},\quad p_\varphi = \frac{\partial E}{\partial \dot\varphi},\quad p_\theta = \frac{\partial E}{\partial \dot\theta},$$

au fost notate, pentru simplificare, respectiv prin x_1, $x_2 \ldots$, x_6.

Funcţiile căutate $\delta x_i = f_i(t)$ sînt, în limitele aproximaţiei liniare, soluţii ale sistemului de ecuaţii [8]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_i) = \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}\,\delta x_j, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

În cazul considerat, aceste ecuații devin

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_1) = a_{14}\,\delta x_4 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_2) = a_{25}\,\delta x_5 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_3) = a_{31}\,\delta x_1 + a_{32}\,\delta x_2 + a_{36}\,\delta x_6 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_4) = a_{41}\,\delta x_1 + a_{42}\,\delta x_2 + a_{46}\,\delta x_6 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_5) = a_{51}\,\delta x_1 + a_{52}\,\delta x_2 + a_{56}\,\delta x_6 \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta x_6) = a_{63}\,\delta x_3, \end{cases} \tag{15}$$

unde

$$\begin{cases} a_{14} = 1,\ a_{25} = \dfrac{1}{r_0^2},\ a_{31} = -\dfrac{2\omega}{r_0},\ a_{32} = -\dfrac{2\,\omega \sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}, \\ a_{36} = \dfrac{1}{r_0^2 \cos^2 \varphi_0},\ a_{41} = -3\,\omega^2 \cos^2 \varphi_0 - a_r \dfrac{\cos^2(\varphi_0 - \psi_0) \sin \psi_0}{r_0 \cos \varphi_0} + \\ + \dfrac{2\mu}{r_0} - \dfrac{6 J_2 R^2 \mu}{r_0^5}(3 \sin^2 \varphi - 1) \pm \dfrac{6\,\mu\,\varepsilon\,R^2}{r_0^5} \cos^2 \varphi_0, \\ a_{42} = -\omega^2 \sin 2\,\varphi_0 - a_r \dfrac{\cos^2(\varphi_0 - \psi_0) \cos \psi_0}{\cos \varphi_0} - \\ - \dfrac{9 J_2 R^2 \mu}{2 r_0^4} \sin 2\,\varphi_0 \mp \dfrac{3\,\mu\,\varepsilon\,R^2}{2 r_0^4} \sin 2\,\varphi_0, \\ a_{46} = -a_{31},\ a_{51} = a_{42}, \\ a_{52} = -r_0\,\omega^2 (2 \sin^2 \varphi_0 + 1) - a_r r_0 \dfrac{\sin 2(\varphi_0 - \psi_0) \cos \psi_0}{2 \cos \varphi_0} - \\ - \dfrac{3 J_2 R^2 \mu}{r_0^3} \cos 2\,\varphi_0 \mp \dfrac{\mu\,\varepsilon\,R^2}{r_0^3} \cos 2\,\varphi_0, \\ a_{56} = 2\,\omega^2 \operatorname{cotg} \varphi_0, \\ a_{63} = \mp \dfrac{2\,\mu\,\varepsilon\,R^2}{r_0^3} \cos^2 \varphi_0. \end{cases} \tag{16}$$

4. SOLUȚIILE ECUAȚIILOR VARIAȚIILOR

Funcțiile $\delta x_i = f_i(t)$, $(i = 1, 2, \ldots 6)$ obținute prin integrarea sistemului (15) prezintă o importanță deosebită pentru studiul mișcării. Dacă aceste soluții sînt astfel încît pentru $(\delta x_i)_0$ mici, variabilele $|\delta x_i|$ rămîn mici pentru orice valoare a timpului, atunci mișcarea originală a vehiculului este stabilă. În acest caz, soluțiile sistemului (15) descriu mișcarea perturbată a vehiculului cu precizia oferită de aproximația liniară.

Ecuația caracteristică a sistemului (15) este

$$\det(A^* - \lambda I) = 0, \tag{17}$$

unde A^* este transpusa matricei coeficienților, iar I este matricea unitate.

Ecuația (17) este, în cazul studiat, de forma

$$\lambda^6 - S\lambda^4 + P\lambda^2 + R = 0, \tag{17'}$$

unde

$$S = -\omega^2\left\{4 - \frac{2}{\rho} - \frac{1}{k^2\rho^{5/3}}[J_2(3 - 12\sin^2\varphi_0 \pm \varepsilon(4\cos^2\varphi_0 - 1)]\right\}, \tag{18}$$

$$P = -\omega^4\left\{\frac{8\operatorname{tg}^4\varphi_0 - [3\rho - 2 + (3\rho - 8)(\rho - 1)^2]\operatorname{tg}^2\varphi_0 - (\rho - 1)^2(3\rho - 2)}{\rho(1 + \operatorname{tg}^2\varphi_0)[(\rho - 1)^2 + \operatorname{tg}^2\varphi_0]} + P_1J_2 + P_2\varepsilon + P_3J_2^2 + P_4\varepsilon^2 + P_5J_2\varepsilon\right\}, \tag{19}$$

$$R = \mp\frac{2\varepsilon\omega^6}{k^2\rho^{5/3}}\cos^2\varphi_0\left\{\frac{(4\rho^3 - 12\rho^2 + 9\rho + 2)\operatorname{tg}^2\varphi + (\rho + 2)(\rho - 1)^2}{\rho[\operatorname{tg}^2\varphi + (\rho - 1)^2]} + R_1J_2 + R_2\varepsilon + R_3J_2^2 + R_4\varepsilon^2 + R_5J_2\varepsilon\right\}, \tag{20}$$

în care

$$P_i = P_i(\rho, \varphi_0),$$

$$R_i = R_i(\rho, \varphi_0), \quad (i = 1, 2, \ldots, 5).$$

Dacă în ecuația (17') facem substituția $\lambda^2 = y$, obținem ecuația

$$y^3 - Sy^2 + Py + R = 0. \tag{21}$$

Se observă că condiția de stabilitate a mișcării impune ca toate rădăcinile ecuației (21) să fie negative. Pentru aceasta este necesar în primul rînd ca $R > 0$; observînd că toți factorii care intervin în expresia lui R sînt pozitivi, rezultă că trebuie considerat al doilea semn din fața acestei expresii. Aceasta înseamnă că dintre cele patru poziții staționare existente la fiecare distanță geocentrică și fiecare latitudine, numai două

sînt stabile și anume acelea situate în planele definite de linia polilor și axa mică a elipsei ecuatoriale. Rezultatul obținut este valabil pentru orice valoare a latitudinii φ_0 și pentru $\rho > \rho_0$ unde $\rho_0 \approx \frac{1}{2}$.

Se observă că dacă se consideră cazul satelitului staționar natural ($\rho = 1$, $\varphi_0 = 0$), rezultă că doar pozițiile staționare situate la intersecția

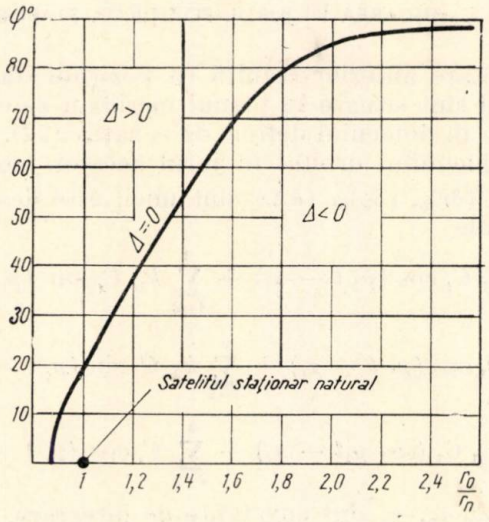


Fig. 2

axei mici a elipsei ecuatoriale cu cercul de rază r_n vor fi stabile, în timp ce celelalte două poziții ecuatoriale vor fi instabile, rezultat semnalat în numeroase lucrări [1], [2], [3], [5].

Pe de altă parte, pentru ca toate rădăcinile ecuației (21) să fie reale și negative, este necesar ca discriminantul acestei ecuații să satisfacă condiția $\Delta \leqslant 0$, ceea ce conduce la o relație de forma

$$f\left(\frac{r_0}{r_n}, \varphi_0\right) \leqslant 0 \tag{22}$$

Curba $f\left(\frac{r_0}{r_n}, \varphi_0\right) = 0$, reprezentată în figura 2, delimitează regiunea pozițiilor stabile de aceea a pozițiilor instabile.

Ecuația $f\left(\frac{r_0}{r_n}, \varphi_0\right) = 0$ reprezintă în sistemul de coordonate (r, φ, θ) o suprafață de revoluție în jurul liniei polilor, care admite planul ecuatorial ca plan de simetrie. Această suprafață tinde asimptotic către linia polilor cînd $\varphi_0 \to \frac{\pi}{2}$ și intersectează planul ecuatorial după un cerc a cărui rază r^* este dată de

$$r^* \approx r_n \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

Condiția (22) impune ca orbita vehiculului staționar să fie situată în afara acestei suprafețe. Se observă că pentru fiecare distanță geocentrică r_0 există un domeniu de latitudini pentru care vehiculul poate deveni staționar

$$-\varphi^*(r_0) < \varphi < \varphi^*(r_0).$$

Latitudinile limită $\pm\varphi^*$ tind către $\pm 90°$ cînd $r_0 \to \infty$.

5. MIȘCAREA ÎN JURUL POZIȚIILOR STABILE

Din cele arătate anterior rezultă că pozițiile staționare stabile ale vehiculului orbital sînt situate în planul meridian ce conține axa mică a elipsei ecuatoriale, în domeniul definit de ecuația (22).

Mișcarea vehiculului orbital în jurul acestor poziții, în cazul cînd $(\delta r)_0$, $(\delta\varphi)_0$, $(\delta\Lambda)_0$, $(\delta\dot{r})_0$, $(\delta\dot{\varphi})_0$, $(\delta\dot{\Lambda})_0$ sînt mici, este descrisă cu suficientă precizie de ecuațiile

$$\begin{cases} \delta r = k_{11} C_1 \cos(p_1 t - \alpha_1) + \sum_{i=2}^{3} k_{1i} C_i \sin(p_i t - \alpha_i), \\ \delta\varphi = C_1 \cos(p_1 t - \alpha_1) + \sum_{i=2}^{3} k_{2i} C_i \sin(p_i t - \alpha_i), \\ \delta\Lambda = k_{31} C_1 (\sin p_1 t - \alpha_1) + \sum_{i=2}^{3} C_i \cos(p_i t - \alpha_i), \end{cases} \tag{23}$$

unde C_1, C_2, C_3, α_1, α_2, α_3 sînt constante de integrare.

Coeficienții k_{ij} sînt dați de următoarele relații

$$\begin{cases} k_{11} = a_{14} \dfrac{a_{32} a_{46} a_{63} - a_{42}(p_1^2 + a_{36} a_{63})}{K}, \\ k_{31} = p_1 \dfrac{a_{32}(p_1^2 + a_{44} a_{41}) - a_{14} a_{42} a_{31}}{K}, \end{cases} \tag{24}$$

în care

$$K = (p_1^2 + a_{14} a_{41})(p_1^2 + a_{36} a_{63}) - a_{14} a_{46} a_{63} a_{31},$$

iar

$$\begin{cases} k_{1i} = -\dfrac{p_i^2 + a_{36} a_{63}}{a_{31} p_i} - \dfrac{a_{32}}{a_{31}} k_{2i}, \\ k_{2i} = -\dfrac{a_{25}}{p_i} \cdot \dfrac{a_{31} a_{56} a_{63} - a_{51}(p_i^2 + a_{36} a_{63})}{a_{31}(p_i^2 + a_{25} a_{52}) - a_{25} a_{32} a_{51}}, \quad (i = 2, 3), \end{cases} \tag{25}$$

unde a_{ij} sînt dați de expresiile (16), iar pulsațiile p_i sînt date de

$$p_i = \sqrt{-y_i}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

unde y_i sînt rădăcinile ecuației (21) considerate toate negative.

În general, fiecare din ecuațiile (23) reprezintă compunerea a trei oscilații cu perioadele T_1, T_2, T_3

$$T_i(r_0, \varphi_0) = \frac{2\pi}{p_i(r_0, \varphi_0)}, \quad (i = 1, 2, 3),$$

care sînt funcții de distanța geocentrică r_0, și latitudinea φ_0 la care este plasat vehiculul staționar.

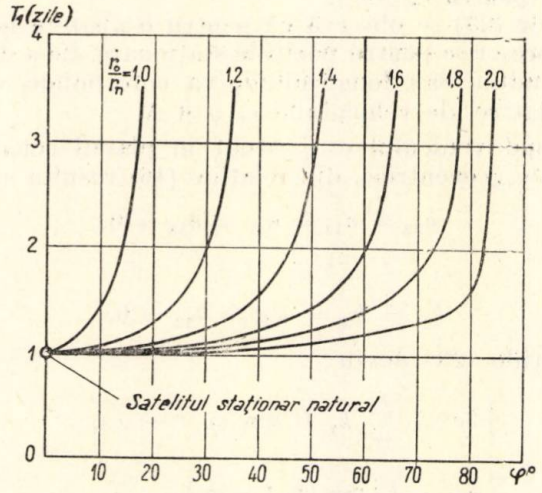


Fig. 3

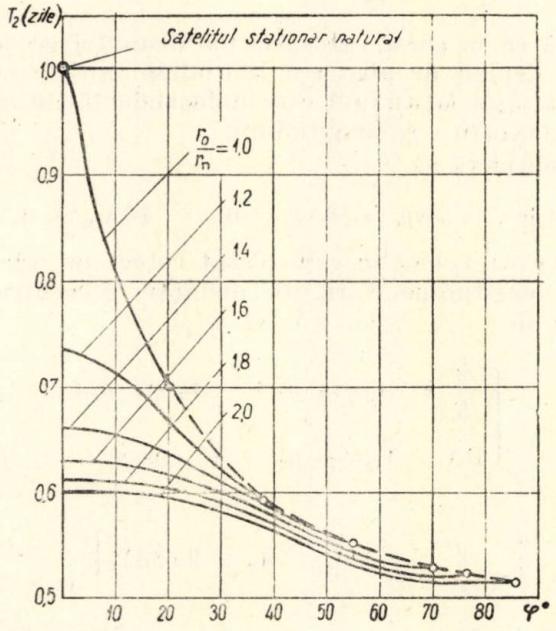


Fig. 4

În figurile 3, 4 și 5 sînt reprezentate valorile perioadelor T_1, T_2, T_3 în funcție de latitudinea φ_0 pentru diferite valori ale distanței geocentrice. Se observă că dacă vehiculul nu este situat în vecinătatea suprafeței

care delimitează poziţiile stabile, perioadele T_1 şi T_2 sînt de ordinul zilelor sau al fracţiunilor de zi, în timp ce perioada T_3 este de ordinul anilor sau al zecilor de ani (pentru $r_0 \geqslant r_n$).

Din ecuaţiile (23) se observă că pentru o abatere iniţială oarecare, faţă de valorile prescrise pentru poziţiile staţionare, fie a distanţei geocentrice, fie a latitudinii sau longitudinii, va corespunde variaţia tuturor coordonatelor relative ale vehiculului r, φ şi Λ.

În cazul cînd vehiculul este situat în planul ecuatorial ($\varphi_0 = 0$), la diferite distanţe geocentrice, din relaţiile (16) rezultă că

$$a_{32} = a_{42} = a_{51} = a_{56} = 0,$$

şi deci

$$k_{11} = k_{31} = k_{22} = k_{23} = 0,$$

astfel încît ecuaţiile (23) devin

$$\begin{cases} \delta r = \sum_2^3 k_{1i} C_i \sin (p_i t - \alpha_i), \\ \delta\varphi = C_1 \cos (p_1 t - \alpha_1), \\ \delta\Lambda = \sum_2^3 C_i \cos (p_i t - \alpha_i). \end{cases} \tag{26}$$

Se observă că în acest caz variaţiile distanţei geocentrice şi longitudinii nu mai depind de abaterea latitudinii iniţiale faţă de valoarea prescrisă, iar variaţia latitudinii este independentă de abaterile iniţiale ale distanţei geocentrice şi longitudinii.

Dacă se consideră că

$$(\delta r)_0 = (\delta \dot{r})_0 = (\delta\dot{\Lambda})_0 = 0, \qquad (\delta\Lambda)_0 \neq 0,$$

ceea ce înseamnă că vehiculul este plasat corect pe orbită, cu excepţia unei abateri în longitudine, variaţiile distanţei geocentrice şi a longitudinei vor fi date de

$$\begin{cases} \dfrac{\delta r}{R} = A_2 \sin p_2 t + A_3 \sin p_3 t, \\ \delta\Lambda = C_2 \cos p_2 t + C_3 \cos p_3 t, \end{cases} \tag{27}$$

unde

$$\begin{cases} A_2 = -\dfrac{4\varepsilon}{k}\sqrt{\dfrac{\rho^{1/3}}{(3\rho-2)^3}}(\delta\Lambda)_0, \quad A_3 = 2(\delta\Lambda)_0\sqrt{\dfrac{2\rho\varepsilon}{(\rho+2)(3\rho-2)}} \\ C_2 = -\dfrac{8\varepsilon}{k^2}\cdot\dfrac{\rho^{1/3}}{(3\rho-2)^2}(\delta\Lambda)_0, \quad C_3 = \left[1 + \dfrac{8\varepsilon}{k^2}\cdot\dfrac{\rho^{2/3}}{(3\rho-2)^2}\right](\delta\Lambda)_0. \end{cases} \tag{28}$$

În figurile 6 şi 7 sînt reprezentate amplitudinile A_2, A_3 şi respectiv C_2, C_3, iar în figura 8 sînt reprezentate perioadele T_2 şi T_3, pentru diferite valori ale distanţei geocentrice. Fiecare din ecuaţiile (27) reprezintă com-

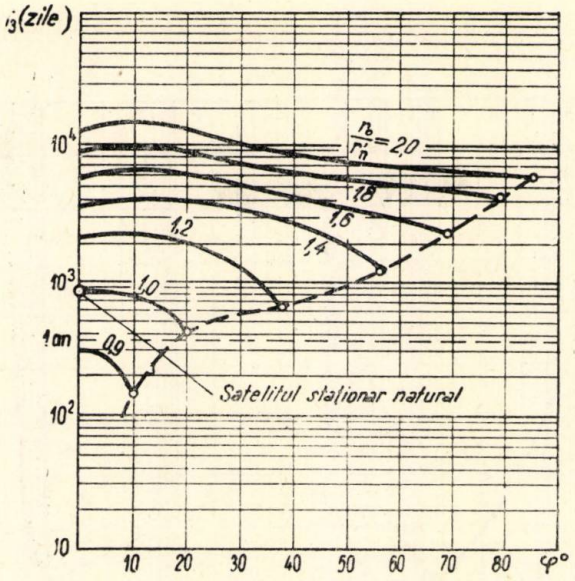

T_3(zile)
10^4
10^3
1 an
10^2
10
$\frac{r_0}{r_n}$ = 2,0
1,8
1,6
1,4
1,2
1,0
0,9
1
Satelitul staționar natural
10 20 30 40 50 60 70 80 φ°

Fig. 5

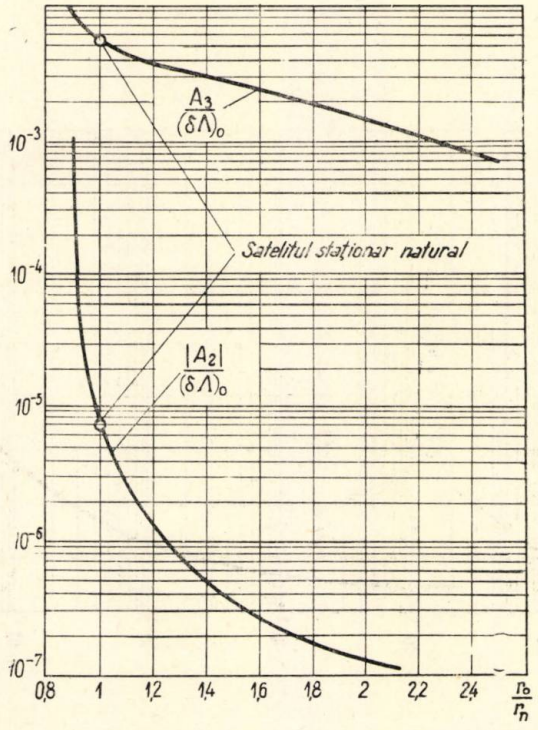

$\frac{A_3}{(\delta\Lambda)_0}$
Satelitul staționar natural
$\frac{|A_2|}{(\delta\Lambda)_0}$
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
0,8 1 1,2 1,4 1,6 1,8 2 2,2 2,4
$\frac{r_0}{r_n}$

Fig. 6

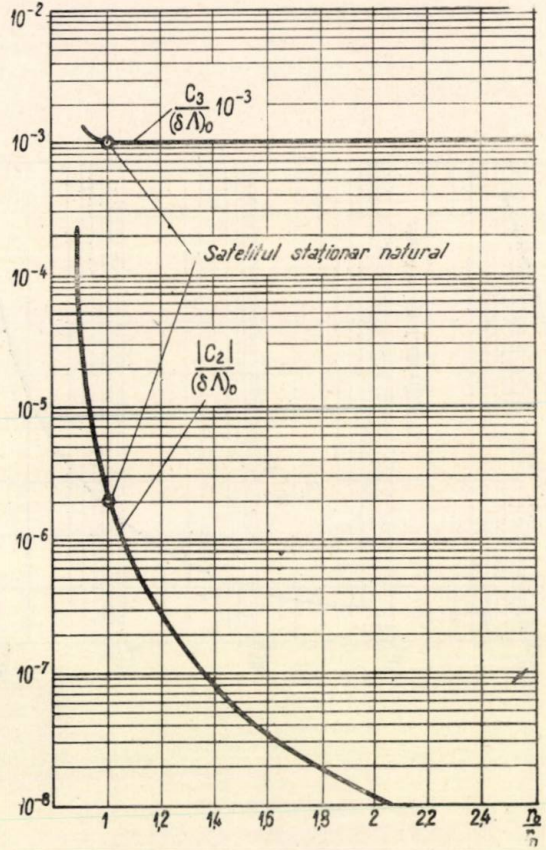

10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
10^{-7}
10^{-8}
$\frac{C_3}{(\delta\Lambda)_0}10^{-3}$
Satelitul staționar natural
$\frac{|C_2|}{(\delta\Lambda)_0}$
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
2,4
$\frac{r_0}{r_n}$

Fig. 7

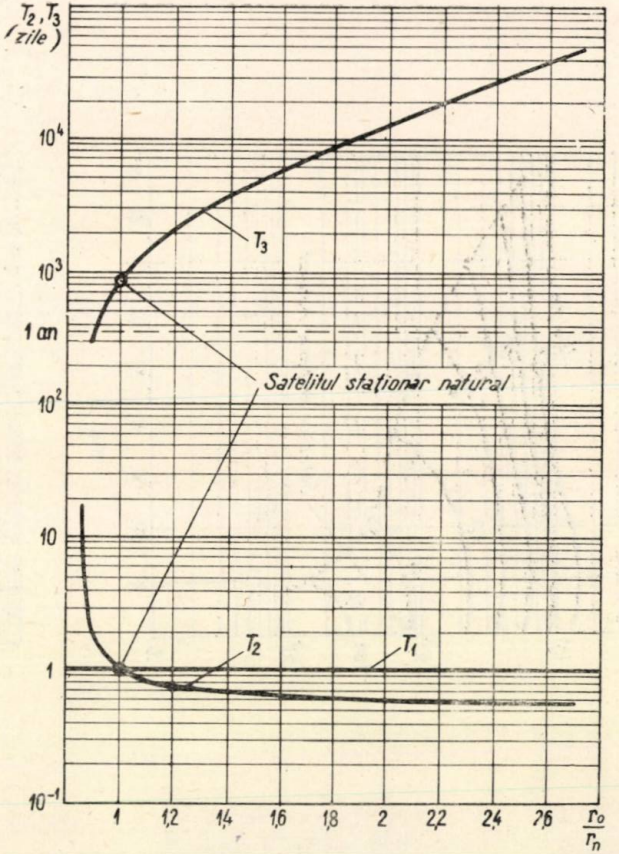

T_2, T_3 (zile)
10^4
10^3
1 an
10^2
10
1
10^{-1}
T_3
Satelitul staționar natural
T_2
T_1
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
2,4
2,6
$\frac{r_0}{r_n}$

Fig. 8

punerea a două oscilații armonice, prima avînd perioada de ordinul zilelor sau al fracțiunilor de zi, iar a doua avînd perioada de ordinul anilor sau al zecilor de ani.

Totodată se observă că amplitudinea oscilațiilor de mică perioadă este mult mai mică decît amplitudinea oscilației a cărei perioadă este de ordinul anilor, astfel încît pentru variațiile distanței geocentrice și a longitudinii pot fi considerate următoarele expresii aproximative

$$\begin{cases} \dfrac{\delta r}{R} \approx A_3 \sin p_3 t, \\ \delta\Lambda \approx C_3 \cos p_3 t, \end{cases}$$

de unde rezultă că neglijînd termenii diurni, traiectoria relativă a vehiculului staționar va fi o elipsă cu centrul în poziția staționară stabilă.

Dacă în relațiile (26), (27) și (28) se consideră cazul satelitului staționar natural ($\rho = 1$), se obțin rezultatele semnalate de alți autori [1], [2], [3].

BIBLIOGRAFIE

1. E. Cambi, *Stability of a geostationary satellite in the terrestrial field*, ELDO — Technical Review, **2**, *1*, (1967).
2. L. Blitzer, E. M. Boughton, G. Kang, R. M. Page, *Effect of ellipticity of the Equator on 24-hour nearly circular satellite orbits*, J. Geophys. Res., **67**, *1*, ianuarie (1962).
3. R. H. Frick, T. B. Garber, *Perturbations of a synchronous satellite due to triaxiality of the Earth*, J. of the Aerospace Sciences, **29**, *9*, septembrie (1962).
4. W. M. Kaula, *Analysis of satellite observation for longitudinal variations of the gravitational field*, Space Res. II Proceedings Second International Space Science Symposium North-Holland Publ. Co., Amsterdam 1961.
5. C. Marchal, *Perturbations et stabilisation artificielle d'un satellite équatorial de 24 heures*, La Recherche Aérospatiale, *96*, sept.-oct. (1963).
6. M. M. Niță, *Sur la possibilité de réalisation d'un vaisseau orbital stationnaire au-dessus d'un point non situé sur l'Equateur terrestre*, XIII-lea Congrès International d'Astronautique, Varna, 1962.
7. — *Généralisation du problème concernant la réalisation d'un vaisseau orbital stationnaire au-dessus de n'importe quel point du globe terrestre*, XIV-e Congrès International d'Astronautique, Paris, 1963.
8. L. A. Pars, *A tretease on analytical Dynamics*, Heinemann Educational Books Ltd., p. 454, London 1965.
9. R. S. H. Toms, B. E. Kalensher, *Control of a synchronous satellite by continous radial thrust* AIAA Journal, **2**, *7* (1964).

ECUAȚII CONSTITUTIVE PENTRU MATERIALE OMOGENE, IZOTROPE, SIMPLE CU MICRO-STRUCTURĂ ȘI MEMORIE

E. SOÓS
Institutul de Matematică, București

539.3

În această lucrare se extinde principiul determinismului pentru materiale termo-elastice cu micro-structură.
Prin utilizarea principiului obiectivității, a homogeneității și a izotropiei materialului se dă forma admisibilă a legilor constitutive, pentru materiale cu memorie, (Teorema 1).
În partea a doua a lucrării se consideră cazul memoriei netede, (Teorema 2) și cazul primei aproximații, (Teorema 3).
În ultima parte a lucrării se studiază consecințele inegalității entropiei, asupra legilor constitutive.
În lucrare se utilizează calculul poliadic.

În lucrarea [1] Noll a enunțat principiul determinismului pentru tensiuni ca un postulat pentru orice teorie legată de fenomene pur mecanice : Tensiunea într-un corp este determinată de istoria mișcării acelui corp. În această lucrare vom extinde acest principiu pentru materiale cu micro-structură.

Materialul cu micro-structură este un corp ale cărui proprietăți sînt determinate de deformațiile locale ale punctelor materiale conținute în orice element de volum al corpului. Teoria continuă a acestor materiale, care ține cont de aceste efecte locale, fără să utilizeze punctul de vedere molecular, a fost elaborată de Eringen și Suhubi [2,3], Eringen [4], Mindlin [5], Toupin [6] și Rivlin [7].

Modelul elaborat în lucrările [2—4] se bazează pe ideea că un macro-volum mic conține foarte multe micro-volume, care formează un ansamblu statistic ; în aceste lucrări se presupune că teoria continuă este valabilă în orice punct al macro-elementului și trebuie să considerăm anumite medii statistice pentru a obține o teorie continuă a materialelor cu micro-structură.

Modelul considerat în [5] este echivalent cu includerea, în fiecare punct al macro-mediului, a unei celule unitare a micro-mediului, care poate să se deformeze independent.

În aceste lucrări se presupune că micro-deformația este omogenă; aceasta înseamnă în fond, că fiecare axă a triedrului lui Cosserat poate să se deformeze și să se rotească independent una de alta și independent de macro-deformația.

Teoria fraților Cosserat a fost reluată fără considerarea legilor constitutive de Ericksen și Truesdell [8], [9]. Folosind directorii introduși în lucrarea [9] Toupin [6] a elaborat teoria materialelor hiper-elastice, postulînd un principiu al acțiunii euleriene.

Legătura dintre aceste teorii, dezvoltate în ultimii ani, a fost studiată de Eringen [10].

Teoria lui Rivlin [7] include modelele amintite mai înainte ca modele particulare. În teoria lui Rivlin corpul este format dintr-un sistem de particule, care la rîndul lor pot fi privite ca sisteme de puncte materiale, ca corpuri rigide sau ca corpuri deformabile.

Legătura dintre fluidele cu micro-structură și fluidele orientate ale lui Ericksen [12] a fost discutată de Eringen [13]. În lucrările [14] și [15] Erigen consideră teoria liniară a corpurilor elastice și a fluidelor simple cu micro-structură. În lucrarea [16] Eringen dezvoltă modelul materialelor vîsco-elastice, în cadrul teoriei liniare, presupunînd că în legile constitutive intră primele derivate în raport cu timpul ale macro și micro-deformațiilor și ale micro-rotațiilor.

I.

În prima parte a lucrării vom considera problema legilor constitutive pentru materiale termo-vîsco-elastice, omogene, izotrope cu micro-structură presupunînd că tensiunea, media micro-tensiunilor și primul moment superficial al tensiunilor la momentul t, sînt determinate de istoriile gradientului macro-deformației, a micro-deformației și a macro-gradientului micro-deformației, de valoarea temperaturii la momentul t și de gradientul său spațial.

În considerațiile care urmează vom utiliza proprietățile calculului poliadic [17, 18, 19].

Fie χ o configurație de referință. Locul centrului de greutate al unui macro-element P în χ vom nota cu :

$$\boldsymbol{X} = \chi(P).$$

Dacă X^K este un sistem de coordonate materiale vom scrie :

$$X = \chi(X^K).$$

Vectorii bazei naturale care corespund acestui sistem de coordonate îi vom nota cu $\mathfrak{I}_K$.

Locul unui micro-element π în χ vom nota cu :

$$\boldsymbol{X}' = \chi(\pi).$$

Vom introduce vectorul de poziție relativ $\boldsymbol{\Sigma}$ în χ prin relația :

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{\Sigma}.$$

Relația :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X},t) \tag{1.1}$$

definește o familie de macro-deformații de la configurația de referință χ. Parametrul real t este timpul.

Punctul $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, t)$ este locul ocupat de centrul de greutate al unui macro-element P la momentul t.

Reprezentarea acestei macro-deformații în coordonate este următoarea :

$$x^k = f^k(X^K, t).$$

Vectorii bazei naturale, care corespund acestui sistem de coordonate spațial îi vom nota cu $\mathfrak{d}_k$.

Dacă x' este poziția ocupată de micro-elementul π la momentul t, vom defini vectorul de poziție relativ ξ al micro-elementului prin relația :

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}.$$

Presupunem că ξ este o funcție de $\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Sigma}$ și t ; deci relația :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Sigma},t)$$

definește o familie de micro-deformații a macro-elementului P de la configurația de referință χ.

Vom presupune, ca în lucrările [2], [5], [10], că această micro-deformație este omogenă ; deci avem :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Sigma},t) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t)\cdot\boldsymbol{\Sigma}. \tag{1.2}$$

În această relație $\chi(\boldsymbol{X},t)$ este un cîmp vectorial dublu :

$$\boldsymbol{\chi} = \chi^k_K(\boldsymbol{X},t)\,\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{D}^K. \tag{1.3}$$

În (1.2) „$\cdot$” este produsul scalar, iar cu „$\circ$” am notat produsul diadic.

Fie $\boldsymbol{F}$ gradientul macro-deformației :

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial x^k(X^L,t)}{\partial X^K}\,\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{D}^K = x^k,_K \mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{D}^K. \tag{1.4}$$

Sînt bine cunoscute următoarele relații [20], [21], [22] :

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R},\quad \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{1},\quad \boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{R} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{U},\quad \boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{V},\\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{V}^2 = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^T,\quad \boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{F},\quad \boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^T.\end{gathered} \tag{1.5}$$

În aceste relații am utilizat următoarele notații :
$\boldsymbol{R}$-tensorul macro-rotațiilor ; $\boldsymbol{V}$-tensorul stîng al deformațiilor ; $\boldsymbol{U}$-tensorul drept al deformațiilor ; $\boldsymbol{B}$-tensorul lui Cauchy-Green la stînga ; $\boldsymbol{C}$-tensorul lui Cauchy-Green la dreapta.

Vom introduce, ca și în lucrările [2], [10], macro-gradientul micro-deformației :

$$\Psi(\boldsymbol{X},t) = \chi^k_{K;\,L}\,\mathfrak{d}_k \circ \mathfrak{D}^K \circ \mathfrak{D}^L. \tag{1.6}$$

Prin „;” am notat derivata covariantă totală.

În multe cazuri este convenabil să utilizăm configurația prezentă a corpului ca configurație de referință. În acest caz timpul variabil va fi notat cu τ și locul centrului de greutate al macro-elementului P la momentul t prin :

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}, \tau) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x},t), \tau] = \boldsymbol{f}_{(t)}(\boldsymbol{x}, \tau). \tag{1.7}$$

Gradientul spațial al lui $\boldsymbol{f}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau)$ vom numi gradientul macro-deformației relative :

$$\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau) = \frac{\partial f^k_{(t)}(\boldsymbol{x}, \tau)}{\partial x^l} \tilde{\mathfrak{d}}_k \circ \mathfrak{d}^l. \tag{1.8}$$

În această relație $\tilde{\mathfrak{d}}_k$ sînt vectorii bazei naturale în $\boldsymbol{y}$ ai sistemului de coordonate spațiale x^k.

Următoarele relații sînt bine cunoscute [22] :

$$\boldsymbol{F}_{(t)}(t) = \mathbf{1},\ \boldsymbol{F}_{(t)}(\tau) = \boldsymbol{R}_{(t)}(\tau) \cdot \boldsymbol{U}_{(t)}(\tau),\ \boldsymbol{R}_{(t)}(\tau) \cdot \boldsymbol{R}^T_{(t)}(\tau) = \mathbf{1},$$
$$\boldsymbol{R}^T_{(t)}(\tau) \cdot \boldsymbol{R}_{(t)}(\tau) = \mathbf{1},\ \boldsymbol{U}^T_{(t)}(\tau) = \boldsymbol{U}_{(t)}(\tau),\ \boldsymbol{R}_{(t)}(t) = \mathbf{1},\ \boldsymbol{U}_{(t)}(t) = \mathbf{1}, \tag{1.9}$$
$$\boldsymbol{F}(\tau) = \boldsymbol{F}_{(t)}(\tau) \cdot \boldsymbol{F}(t).$$

În mod analog vom introduce micro-deformația relativă $\boldsymbol{\chi}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau)$ prin următoarele relații :

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\Sigma},\tau) = \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},\tau) \cdot \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\chi}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau) \cdot \boldsymbol{\zeta} = [\boldsymbol{\chi}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau) \cdot \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{X},t)] \cdot \boldsymbol{\Sigma}. \tag{1.10}$$

Este evident că avem următoarele relații :

$$\boldsymbol{\chi}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau) = \chi^k_{(t)\,l}\, \tilde{\mathfrak{d}}_k \circ \mathfrak{d}^l, \boldsymbol{\chi}(\tau) = \boldsymbol{\chi}_{(t)}(\tau) \cdot \boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{\chi}_{(t)}(t) = \mathbf{1}, \tag{1.11}$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{X},\tau) = {}^T\{\boldsymbol{\chi}^T(\boldsymbol{X},t) \cdot {}^T[\boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X},t)]\} + \boldsymbol{\chi}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau) \cdot \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{X},t). \tag{1.12}$$

În această relație

$$\boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\boldsymbol{x},\tau) = \chi^k_{(t)\,l;\,m}\, \tilde{\mathfrak{d}}_k \circ \mathfrak{d}^l \circ \mathfrak{d}^m \tag{1.13}$$

este macro-gradientul spațial al micro-deformației relative.

În cazul unui tensor de ordinul trei vom utiliza următoarele notații [17] :

${}^T\mathcal{A}$ — tensotul $\mathcal{A}$ transpus la stînga ;

$\mathcal{A}^T$ — tensorul $\mathcal{A}$ transpus la dreapta ;

$\mathcal{A}^{TT}$ — tensotul $\mathcal{A}$ transpus de două ori la dreapta.

II.

Vom considera în cele ce urmează următoarele notații :

$\boldsymbol{T}(t) = t^i_j\, \mathfrak{d}_i \circ \mathfrak{d}_j$ — tensorul tensiunilor,

$\boldsymbol{S}(t) = s^i_j\, \mathfrak{d}_i \circ \mathfrak{d}^j$ — tensorul micro-tensiunilor medii,

$\boldsymbol{\Lambda}(t) = \lambda^i_{jk}\, \mathfrak{d}_i \circ \mathfrak{d}^j \circ \mathfrak{d}^k$ — tensorul primului moment superficial al tensiunilor,

$\boldsymbol{u}(t) = u_k\, \mathfrak{d}^k = \theta,\ {}_k\mathfrak{d}^k$ — gradientul spațial al temperaturii absolute $\theta(t)$.

Fie ψ o funcție de variabilă reală τ ale cărei valori sînt scalari, vectori sau tensori. Pentru fiecare t real vom defini o funcție $\psi^{(t)}$, care depinde de variabila ne-negativă s, prin relația :

$$\psi^{(t)}(s) = \psi(\tau) = \psi(t - s),\ s \geqslant 0.$$

Vom numi această funcție istoria mărimii ψ pînă la timpul t.

Pe baza principiului echiprezenței [22] presupunem că ecuațiile constitutive au forma următoare :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}\, [\boldsymbol{F}^{(t)}(s),\ \boldsymbol{\chi}^{(t)}(s),\ \boldsymbol{\Psi}^{(t)}(s)\,;\ \theta(t),\ \boldsymbol{u}(t)],\ \boldsymbol{T}^T \neq \boldsymbol{T},\\
\boldsymbol{S}(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}\, [\boldsymbol{F}^{(t)}(s),\ \boldsymbol{\chi}^{(t)}(s),\ \boldsymbol{\Psi}^{(t)}(s)\,;\ \theta(t).\ \boldsymbol{u}(t)],\ \boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{S},\\
\boldsymbol{\Lambda}(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}}\, [\boldsymbol{F}^{(t)}(s),\ \boldsymbol{\chi}^{(t)}(s),\ \boldsymbol{\Psi}^{(t)}(s)\,;\ \theta(t),\ \boldsymbol{u}(t)].
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Este evident că forma funcționalelor care apar în aceste relații depinde de alegerea configurației de referință $\boldsymbol{\chi}$, [1,22].

În relațiile (2.1) $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ și $\mathcal{U}$ sînt în general funcționale neliniare de istoria lui $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{\chi}$ și $\boldsymbol{\Psi}$; în aceste funcționale $\theta(t)$ și $\boldsymbol{u}(t)$ joacă rolul unor parametrii.

Pe baza relațiilor (1.9), (1.11) și (1.12) putem presupune că $\boldsymbol{T}(t)$, $\boldsymbol{S}(t)$ și $\boldsymbol{\Lambda}(t)$ sînt determinate de următoarele istorii și valori :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}\, [\boldsymbol{F}^{(t)}_{(t)}(s),\ \boldsymbol{\chi}^{(t)}_{(t)}(s),\ \boldsymbol{\Pi}^{(t)}_{(t)}(s)\,;\ \boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{u}(t)],\\
\boldsymbol{S}(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}\, [\boldsymbol{F}^{(t)}_{(t)}(s),\ \boldsymbol{\chi}^{(t)}_{(t)}(s),\ \boldsymbol{\Pi}^{(t)}_{(t)}(s)\,;\ \boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{u}(t)],\\
\boldsymbol{\Lambda}(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}}\, [\boldsymbol{F}^{(t)}_{(t)}(s),\ \boldsymbol{\chi}^{(t)}_{(t)}(s),\ \boldsymbol{\Pi}^{(t)}_{(t)}(s)\,;\ \boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{u}(t)].
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Din relațiile (2.1) se vede clar că noi presupunem că materialul este omogen fiindcă funcționalele de răspuns au aceeași formă pentru toate macro-particulele. Această legătură între omogeneitate materialului și forma legilor constitutive a fost pentru prima oară clar expusă de Noll în lucrarea [23].

Nu toate funcționalele $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ și $\mathcal{U}$ sînt admisibile, fiindcă orice lege constitutivă trebuie să satisfacă principiul obiectivității [1], [21], [22].

Matematic acest principiu se poate exprima în felul următor :

Dacă $\boldsymbol{Q}(\tau)$ este un tensor ortogonal, în general depinzînd de timp și dacă avem :

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(\tau) = \boldsymbol{Q}(\tau) \cdot \boldsymbol{x}(\tau),\ \tilde{\boldsymbol{\xi}}(\tau) = \boldsymbol{Q}(\tau) \cdot \boldsymbol{\xi}(\tau), \tag{2.3}$$

atunci funcţionalele $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$ şi $\mathcal{U}$ trebuie să satisfacă următoarele ecuaţii funcţionale :

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}\{\boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t),\quad \boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{\chi}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t),\quad {}^T[\boldsymbol{Q}(t)\cdot{}^T(\boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t))]\,;$$

$$\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t)\} =$$

$$= \boldsymbol{Q}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}\{\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau),\ \boldsymbol{\chi}_{(t)}(\tau),\ \boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\tau)\,;\ \boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{u}(t)\}\cdot\boldsymbol{Q}^T(t),$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}\{\boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t),\quad \boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{\chi}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t),\quad {}^T[\boldsymbol{Q}(t)\cdot{}^T(\boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t))]\,;$$

$$\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t)\} = \tag{2.4}$$

$$= \boldsymbol{Q}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}\{\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau),\ \boldsymbol{\chi}_{(t)}(\tau),\ \boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\tau)\,;\ \boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{u}(t)\}\cdot\boldsymbol{Q}^T(t),$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}}\{\boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t),\ \boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{\chi}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t),\ {}^T[\boldsymbol{Q}(t)\cdot{}^T(\boldsymbol{Q}(\tau)\cdot\boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{Q}^T(t))]\,;$$

$$\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t)\} =$$

$$= {}^T\{\boldsymbol{Q}(t)\cdot{}^T[\boldsymbol{Q}(t)\cdot\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}}\{\boldsymbol{F}_{(t)}(\tau),\ \boldsymbol{\chi}_{(t)}(\tau),\ \boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\tau)\,;\ \boldsymbol{F}(t),\ \boldsymbol{\chi}(t),\ \boldsymbol{\Psi}(t),\ \theta(t),\ \boldsymbol{u}(t)\}\cdot\boldsymbol{Q}^T(t)]\},$$

$$\tau = t - s.$$

Să alegem acum pentru $Q(\tau)$ următorul tensor ortogonal :

$$\boldsymbol{Q}(\tau) = [\boldsymbol{R}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R}(t)]^T = \boldsymbol{R}^T(t)\,\boldsymbol{R}^T_{(t)}(\tau). \tag{2.5}$$

Folosind relaţia

$$\boldsymbol{R}^T(t) = \boldsymbol{V}^{-1}(t)\cdot\boldsymbol{F}^T(t),$$

din relaţiile (2.4) şi (2.5) obţinem :

$$\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{R} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{T}}}\{\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{U}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}^T\boldsymbol{\Gamma}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R},\ {}^T[\boldsymbol{R}^T\cdot{}^T(\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{\Delta}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R})]\,;\ \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}^{-1},$$
$$\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{\chi},\ \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{\Psi},\ \theta,\ \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{u}\},$$

$$\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{R} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}\{\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{U}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R},\ \boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R},\ {}^T[\boldsymbol{R}^T\cdot{}^T(\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{\Delta}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R})]\,;$$
$$\boldsymbol{U},\ \boldsymbol{V}^{-1},\ \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{\chi},\ \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{\Psi},\ \theta,\ \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{u}\}, \tag{2.6}$$

$${}^T\{\boldsymbol{R}^T\cdot[\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{\Lambda}\cdot\boldsymbol{R}]\} = \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}}\{\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{U}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{\Gamma}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R},$$

$${}^T[\boldsymbol{R}^T\cdot{}^T(\boldsymbol{R}^T\cdot\boldsymbol{\Delta}_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{R})]\,;\ \boldsymbol{U},\boldsymbol{V}^{-1},\ \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{\chi},\boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{\Psi},\ \theta,\ \boldsymbol{F}^T\cdot\boldsymbol{u}\}.$$

În aceste relaţii am utilizat următoarele notaţii :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{(t)}(\tau) &= \boldsymbol{R}^T_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{\chi}_{(t)}(\tau) = \boldsymbol{R}_{(t)\,p}^{\ \ k}\,\boldsymbol{\chi}^{\ \ p}_{(t)\ \ l}\,\mathfrak{d}_k\circ\mathfrak{d}_l\,,\\ \boldsymbol{\Delta}_{(t)}(\tau) &= \boldsymbol{R}^T_{(t)}(\tau)\cdot\boldsymbol{\Pi}_{(t)}(\tau) = \boldsymbol{R}_{(t)\,p}^{\ \ k}\,\boldsymbol{\chi}^{\ \ p}_{(t)\ \ l\,;m}\,\mathfrak{d}_k\circ\mathfrak{d}^l\circ\mathfrak{d}^m.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Să presupunem acuma că materialul considerat este izotrop; în acest caz funcționalele de răspuns, care corespund la două configurații de referință diferite χ și $\tilde{\chi}$, legate prin relațiile:

$$\tilde{X} = \Omega \cdot X, \quad \tilde{\Sigma} = \Omega \cdot \Sigma,$$

unde Ω este un tensor ortogonal arbitrar, trebuie să coincidă [1,22,23].

Folosind proprietatea de mai înainte, relațiile:

$$\tilde{F} = F \cdot \Omega^T, \quad \tilde{R} = R \cdot \Omega^T, \quad \tilde{U} = \Omega \cdot U \cdot \Omega^T, \quad \tilde{\chi} = \chi \cdot \Omega^T, \quad \tilde{\Psi} = {}^T(\Omega \cdot {}^T\Psi \cdot \Omega^T)$$

și luînd

$$\Omega = R(t),$$

obținem teorema următoare:

Teorema 1: Legile constitutive generale, pentru un material termo-vîsco-elastic, omogen și izotrop, cu micro-structură și memorie pot fi scrise în forma următoare:

$$\begin{aligned}
T(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{C}}} [U_{(t)}^{(t)}(s), \Gamma_{(t)}^{(t)}(z), \Delta_{(t)}^{(t)}(s); V(t), \Gamma(t), \Delta(t), \theta(t), u(t)], \\
S(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}} [U_{(t)}^{(t)}(s), \Gamma_{(t)}^{(t)}(s), \Delta_{(t)}^{(t)}(s); V(t), \Gamma(t), \Delta(t), \theta(t), u(t)], \qquad (2.8) \\
\Lambda(t) &= \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}} [U_{(t)}^{(t)}(s), \Gamma_{(t)}^{(t)}(s), \Delta_{(t)}^{(t)}(s); V(t), \Gamma(t), \Delta(t), \theta(t), u(t)].
\end{aligned}$$

În relațiile (2.8) am utilizat următoarele notații:

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \chi \circ F^T = \Gamma^{ij}\, \partial_i \circ \partial_j = G^{IJ} \chi_I^i\, x^j, {}_j\partial_i \circ \partial_j, \\
\Lambda &= F \cdot {}^T\Psi \cdot F^T = \Lambda^{ijk}\, \partial_i \circ \partial_j \circ \partial_k = G^{IJ} G^{KL}\, x^i, {}_{IK}\chi^j{}_{J;K}\, x^k, {}_L\partial_i \circ \partial_j \circ \partial_k.
\end{aligned} \qquad (2.9)$$

Din prima relație (2.9) și din relația (6.16) a lucrării lui Eringen și Suhubi [2] se vede că avem relația următoare:

$$\Gamma = \psi^{-1}.$$

Toți tensorii din relațiile (2.8) sînt tensori obiectivi; deci dacă considerăm o schimbare de reper (2.3), acești tensori se transformă în felul următor:

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_{(t)}(\tau) &= Q(t) \cdot U_{(t)}(\tau) \cdot Q^T(t), \quad \tilde{\Gamma}_{(t)}(\tau) = Q(t) \cdot \Gamma_{(t)}(\tau) \cdot Q^T(t), \\
\tilde{\Delta}_{(t)}(\tau) &= {}^T[Q(t) \cdot {}^T(Q(t) \cdot \Delta_{(t)}(\tau) \cdot Q^T(t))], \\
\tilde{V}(t) &= Q(t) \cdot V(t) \cdot Q^T(t), \quad \tilde{\Gamma}(t) = Q(t) \cdot \Gamma(t) \cdot Q^T(t), \qquad (2.10) \\
\tilde{\Delta}(t) &= {}^T[Q(t) \cdot {}^T(Q(t) \cdot \Delta(t) \cdot Q^T(t))].
\end{aligned}$$

Pe baza principiului obiectivității și din relațiile (2.10) rezultă că funcționalele $\mathcal{C}$, $\mathcal{S}$ și $\mathcal{U}$ trebuie să satisfacă următoarele ecuații funcționale:

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{C}}}\,[\tilde{\boldsymbol{U}}_{(t)}(\tau), \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{(t)}(\tau), \tilde{\boldsymbol{\Delta}}_{(t)}(\tau); \tilde{\boldsymbol{V}}(t), \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(t), \tilde{\boldsymbol{\Delta}}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}(t)] =$$

$$= \boldsymbol{Q}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{C}}}\,[\boldsymbol{U}_{(t)}(\tau), \boldsymbol{\Gamma}_{(t)}(\tau), \boldsymbol{\Delta}_{(t)}(\tau); \boldsymbol{V}(t), \boldsymbol{\Gamma}(t), \boldsymbol{\Delta}(t), \theta(t), \boldsymbol{u}(t)] \cdot \boldsymbol{Q}^T(t),$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}\,[\tilde{\boldsymbol{U}}_{(t)}(\tau), \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{(t)}(\tau), \tilde{\boldsymbol{\Delta}}_{(t)}(\tau); \tilde{\boldsymbol{V}}(t), \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(t), \tilde{\boldsymbol{\Delta}}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}(t)] =$$

$$= \boldsymbol{Q}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{S}}}\,[\boldsymbol{U}_{(t)}(\tau), \boldsymbol{\Gamma}_{(t)}(\tau), \boldsymbol{\Delta}_{(t)}(\tau); \boldsymbol{V}(t), \boldsymbol{\Gamma}(t), \boldsymbol{\Delta}(t), \theta(t), \boldsymbol{u}(t)] \cdot \boldsymbol{Q}^T(t),$$

$$\overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}}\,[\tilde{\boldsymbol{U}}_{(t)}(\tau), \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{(t)}(\tau), \tilde{\boldsymbol{\Delta}}_{(t)}(\tau); \tilde{\boldsymbol{V}}(t), \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}(t), \tilde{\boldsymbol{\Delta}}(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}(t)] =$$

$$= {}^T\{\boldsymbol{Q}(t) \cdot {}^T(\boldsymbol{Q}(t) \cdot \overset{\infty}{\underset{s=0}{\mathcal{U}}}\,[\boldsymbol{U}_{(t)}(\tau), \boldsymbol{\Gamma}_{(t)}(\tau), \boldsymbol{\Delta}_{(t)}(\tau); \boldsymbol{V}(t), \boldsymbol{\Gamma}(t), \boldsymbol{\Delta}(t), \theta(t), \boldsymbol{u}(t)] \cdot \boldsymbol{Q}^T(t))\}.$$

III.

Vom presupune acum că materialul are o memorie netedă [24]. În acest caz influența istoriei funcțiilor $\boldsymbol{U}_{(t)}$, $\boldsymbol{\Gamma}_{(t)}$ și $\boldsymbol{\Delta}_{(t)}$ asupra tensiunilor poate fi exprimată cu ajutorul valorilor primelor n derivate în raport cu timpul, calculate în momentul t.

Avem următoarele relații:

$$\boldsymbol{U}_{(t)}(\tau) \approx 1 + \sum_{k=1}^{n} \underset{(k)}{\boldsymbol{D}}(t)\, \frac{(-s)^k}{k!}, \quad \boldsymbol{\Gamma}_{(t)}(\tau) \approx 1 + \sum_{k=1}^{n} \underset{(k)}{\boldsymbol{\Gamma}}(t)\, \frac{(-s)^k}{k!},$$
$$\boldsymbol{\Delta}_{(t)}(\tau) \approx \sum_{k=1}^{n} \underset{(k)}{\boldsymbol{\Delta}}(t)\, \frac{(-s)^k}{k!}, \tag{3.1}$$

unde am notat:

$$\underset{(k)}{\boldsymbol{D}}(t) = \overset{\langle k \rangle}{\boldsymbol{U}}_{(t)}(t), \quad \underset{(k)}{\boldsymbol{\Gamma}}(t) = \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{p!\,(k-p)!}\, \frac{\langle p \rangle}{\boldsymbol{R}^T_{(t)}(t)} \cdot \frac{\langle k-p \rangle}{\boldsymbol{\chi}_{(t)}(t)}, \quad k \geqslant 1,$$
$$\underset{(k)}{\boldsymbol{\Delta}}(t) = \sum_{p=0}^{k} \frac{k!}{p!\,(k-p)!}\, \frac{\langle p \rangle}{\boldsymbol{R}^T_{(t)}(t)} \cdot \left(\frac{\langle k-p \rangle}{\boldsymbol{\chi}_{(t)}(t)} \circ \nabla \right), \quad k \geqslant 1. \tag{3.2}$$

În aceste relații „$\langle p \rangle$” este derivata de ordinul p în raport cu timpul și avem:

$$\frac{\langle \circ \rangle}{\boldsymbol{R}^T_{(t)}(t)} = 1, \quad \frac{\langle \circ \rangle}{\boldsymbol{\chi}_{(t)}(t)} = 1, \quad \frac{\langle \circ \rangle}{\boldsymbol{\chi}_{(t)}(t)} \circ \nabla = 0.$$

În relațiile (3.1) și (3.2) ∇ este operatorul lui Hamilton.

Dacă folosim relația $\boldsymbol{U}^2_{(t)}(\tau) = \boldsymbol{C}_{(t)}(\tau)$ atunci în ecuațiile constitutive (2.9) putem utiliza tensorul lui Cauchy-Green la stînga și în cazul materialelor cu memorie netedă putem înlocui influența istoriei acestui tensor asupra tensiunilor prin valorile tensorilor lui Rivlin-Ericksen [25]:

$$\underset{(k)}{\boldsymbol{A}}(t) = \frac{\langle k \rangle}{\boldsymbol{C}_{(t)}(t)}.$$

Din relațiile (3.2) se vede că tensorii Rivlin-Ericksen generalizați $\underset{(k)}{\boldsymbol{\Gamma}}(t)$ și $\underset{(k)}{\boldsymbol{\Delta}}(t)$ sînt tensori obiectivi.

Pe baza rezultatelor obținute putem enunța teorema următoare:

TEOREMA 2: Legile constitutive generale, pentru un material termo-vîsco-elastic, omogen și izotrop, cu micro-structură și memorie netedă, (material de tip diferențial), pot fi scrise în forma următoare:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(t) &= \check{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \theta, \boldsymbol{u}, \underset{(1)}{\boldsymbol{D}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{D}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Delta}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Delta}}), \\
\boldsymbol{S}(t) &= \check{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \theta, \boldsymbol{u}, \underset{(1)}{\boldsymbol{D}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{D}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Delta}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Delta}}), \qquad (3.3) \\
\boldsymbol{\Lambda}(t) &= \check{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \theta, \boldsymbol{u}, \underset{(1)}{\boldsymbol{D}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{D}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Delta}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Delta}}).
\end{aligned}$$

Din principiul obiectivității rezultă că funcțiile $\check{\boldsymbol{t}}$, $\check{\boldsymbol{s}}$ și $\check{\boldsymbol{\lambda}}$ sînt funcții tensoriale izotrope, adică la o schimbare de reper (2.3) satisfac relațiile:

$$\begin{aligned}
\check{\boldsymbol{t}}(\tilde{\boldsymbol{V}}, \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}, \tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \tilde{\theta}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{D}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{D}}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}) &= \boldsymbol{Q} \cdot \check{\boldsymbol{t}}\, \boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \theta, \boldsymbol{u}, \underset{(1)}{\boldsymbol{D}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{D}}, \\
&\underset{(1)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Delta}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Delta}}) \cdot \boldsymbol{Q}^T, \\
\check{\boldsymbol{s}}(\tilde{\boldsymbol{V}}, \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}, \tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \tilde{\theta}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{D}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{D}}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}) &= \boldsymbol{Q} \cdot \check{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \theta, \boldsymbol{u}, \\
&\underset{(1)}{\boldsymbol{D}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{D}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Delta}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Delta}}) \cdot \boldsymbol{Q}^T, \\
\check{\boldsymbol{\lambda}}(\tilde{\boldsymbol{V}}, \tilde{\boldsymbol{\Gamma}}, \tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \tilde{\theta}, \tilde{\boldsymbol{u}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{D}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{D}}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}}, \underset{(1)}{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}, \ldots, \underset{(n)}{\tilde{\boldsymbol{\Delta}}}) &= {}^T\{\boldsymbol{Q} \cdot {}^T[\boldsymbol{Q} \cdot \check{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \\
&\theta, \boldsymbol{u}, \underset{(1)}{\boldsymbol{D}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{D}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Gamma}}, \underset{(1)}{\boldsymbol{\Delta}}, \ldots, \underset{(n)}{\boldsymbol{\Delta}}) \cdot \boldsymbol{Q}^T]\}.
\end{aligned}$$

Derivatele în raport cu timpul ale tensorului transpus al macro-rotațiilor relative $\dfrac{\langle k \rangle}{\boldsymbol{R}^T_{(t)}(t)}$ pot fi calculate cu ajutorul relației (1.9).

IV.

Vom considera acum prima aproximație.

Din relația (1.9) rezultă:

$$\dot{R}^k_{(t)l}(t) + \dot{R}_{(t)l}{}^k(t) = 0.$$

Deci vom avea pe baza relațiilor din [21], [22] următoarea formulă :

$$\overset{\circ}{R}_{(t)k}{}^{l}(t) = -\, w^{*}{}_{i}(t),$$

unde $W(t)$ este primul tensor spin al macro-rotațiilor.

Din relația (3.2) pentru prima aproximație obținem :

$$\underset{(1)}{\boldsymbol{D}}(t) = \boldsymbol{D}(t) = \frac{1}{2}\,[\boldsymbol{L}(t) + \boldsymbol{L}^{T}(t)] = \frac{1}{2}\,(v_{i;j} + v_{j;i})\,\mathfrak{d}^{i} \circ \mathfrak{d}^{j} = d_{ij}\,\mathfrak{d}^{i} \circ \mathfrak{d}^{j},$$

$$\underset{(1)}{\boldsymbol{\Gamma}}(t) = \boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{N}(t) - \boldsymbol{W}(t) = (\nu_{ij} - w_{ij})\,\mathfrak{d}^{i} \circ \mathfrak{d}^{j} = h_{ij}\,\mathfrak{d}^{i} \circ \mathfrak{d}^{j}, \tag{4.1}$$

$$\underset{(1)}{\boldsymbol{\Delta}}(t) = \boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{N}(t) \circ \boldsymbol{\nabla} = \nu^{i}{}_{j;\,k}\,\mathfrak{d}_{i} \circ \mathfrak{d}^{j} \circ \mathfrak{d}^{k} = a^{i}{}_{jk}\,\mathfrak{d}_{i} \circ \mathfrak{d}^{j} \circ \mathfrak{d}^{k},$$

unde :

$$\boldsymbol{L}(t) = \dot{\boldsymbol{F}}_{(t)}(t) = v^{i}{}_{,j}\,\mathfrak{d}_{i} \circ \mathfrak{d}^{j},$$

$$\boldsymbol{N}(t) = \dot{\boldsymbol{\chi}}_{(t)}(t) = \nu^{i}{}_{j}\,\mathfrak{d}_{i} \circ \mathfrak{d}^{j}.$$

Pe baza relațiilor (4.1) și a formulelor (2.25) din lucrarea [4] a lui Eringen se vede că avem următoarele relații :

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{d}, \quad (\boldsymbol{D} = \boldsymbol{d}) \text{ și } \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}. \tag{4.2}$$

Din cele spuse în această pate a lucrării rezultă teorema următoare :

Teorema 3 : Legile constitutive generale, pentru un material termo-vîsco-elastic, omogen și izotrop, cu micro-structură și memorie netedă în prima aproximație pot fi scrise în forma următoare :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(t) &= \check{\boldsymbol{t}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}, \theta), \\ \boldsymbol{S}(t) &= \check{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}, \theta), \\ \boldsymbol{\Lambda}(t) &= \check{\boldsymbol{\lambda}}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{\Gamma}, \boldsymbol{\Delta}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{u}, \theta). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Din legile constitutive (4.3) putem obține ca un caz particular legea constitutivă pentru fluide simple cu micro-structură.

Rezultatul obținut în teorema 3 arată clar că ecuațiile constitutive considerate de Eringen în lucrarea [4] sînt valabile numai în cazul materialelor izotrope ; un rezultat asemănător în cazul materialelor fără micro-structură a fost obținut de Noll [23,25].

V.

În ultima parte a lucrării vom studia consecințele inegalității entropiei, pentru cazul materialelor cu micro-structură și memorie netedă, în prima aproximație.

În aceste considerații vom utiliza metoda elaborată de Coleman, Noll și Misel în lucrările [26] și [27].

Eringen şi Suhubi au arătat că legea de conservare a energiei în cazul materialelor simple cu micro-structură poate fi scrisă în forma următoare :

$$\rho\dot{\varepsilon} = \boldsymbol{L}\circ\circ\boldsymbol{T} + \boldsymbol{N}\circ\circ(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{T}) + {}^{I}\boldsymbol{A}\circ\circ\circ\boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{q}\cdot\nabla + \rho h. \tag{5.1}$$

Forma locală a inegalităţii lui Clausius-Duhem este :

$$\rho\gamma = \rho\dot{\eta} + \frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}\cdot\nabla - \frac{1}{\rho}\frac{h}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u} \geqslant 0. \tag{5.2}$$

În aceste relaţii am folosit următoarele notaţii :

$\boldsymbol{q}$-fluxul caloric pe unitatea de suprafaţă a macro-elementului deformat, ρ-macro-densitatea, ε-energia internă specifică, η-entropia specifică, h-intensiteatea surselor calorice în corp, γ-producţia de entropie pe unitatea de masă a macro-elementului.

Din relaţiile (5.1) şi (5.2) obţinem :

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho\dot{\varepsilon} + \boldsymbol{L}\circ\circ\boldsymbol{T} + \boldsymbol{N}\circ\circ(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{T}) + {}^{T}\boldsymbol{A}\circ\circ\circ\boldsymbol{\Lambda} + \frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u} \geqslant 0. \tag{5.3}$$

În relaţiile (5.1) — (5.3) am notat cu „$\circ\circ$" şi cu „$\circ\circ\circ$" produsul scalar dublu, respectiv triplu [19].

Vom considera acuma următoarele variabile independente : $\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \dot{\boldsymbol{\Psi}}$ şi $\boldsymbol{u}$. În cele ce urmează admitem următorul postulat [26], [27] :

Ecuaţiile constitutive sînt admisibile dacă şi numai dacă producţia de entropie este ne-negativă pentru orice proces compatibil cu aceste ecuaţii constitutive.

Vom folosi deasemenea principiul echiprezenţei [20], [21], [22], care afirmă că o mărime prezentă ca variabilă independentă în una dintre ecuaţiile contitutive trebuie să fie prezentă în toate, fără, bine înţeles ca prezenţa ei să contrazică una dintre legile fizicii.

Pe baza celor spuse, presupunem deci că avem următoarele legi constitutive :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}(t) &= \check{\boldsymbol{t}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \dot{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{u}),\\
\boldsymbol{S}(t) &= \check{\boldsymbol{s}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \dot{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{u}),\\
\boldsymbol{\Lambda}(t) &= \check{\boldsymbol{\lambda}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \dot{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{u}),\\
\boldsymbol{q}(t) &= \check{\boldsymbol{q}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \dot{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{u}),\\
\varepsilon(t) &= \check{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \dot{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{u}),\\
\theta(t) &= \check{\theta}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}, \dot{\boldsymbol{F}}, \dot{\boldsymbol{\chi}}, \dot{\boldsymbol{\Psi}}, \boldsymbol{u}).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Din relațiile (5.3) și (5.4) rezultă :

$$\rho\theta\dot{\eta} - \rho\,[\dot{\eta}\overset{\vee}{\varepsilon}_{\eta} + \dot{\boldsymbol{u}}\cdot\overset{\vee}{\varepsilon}_{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\cdot\overset{\vee}{\varepsilon}^{T}_{\boldsymbol{F}} + \dot{\boldsymbol{\chi}}\cdot\cdot\overset{\vee}{\varepsilon}^{T}_{\boldsymbol{\chi}} + {}^{T}\dot{\boldsymbol{\Psi}}\cdots\overset{\vee}{\varepsilon}^{TT}_{\boldsymbol{\Psi}} +$$

$$+ \ddot{\boldsymbol{F}}\cdot\cdot\overset{\vee}{\varepsilon}^{T}_{\dot{\boldsymbol{F}}} + \ddot{\boldsymbol{\chi}}\cdot\cdot\overset{\vee}{\varepsilon}^{T}_{\dot{\boldsymbol{\chi}}} + {}^{T}\ddot{\boldsymbol{\Psi}}\cdots\overset{\vee}{\varepsilon}^{T}_{\dot{\boldsymbol{\Psi}}}] + \boldsymbol{L}\cdot\cdot\boldsymbol{T} + \boldsymbol{N}\cdot\cdot(\boldsymbol{S} - \boldsymbol{T}) + {}^{T}\boldsymbol{A}\cdots\boldsymbol{\Lambda} +$$

$$+ \frac{1}{\theta}\,\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u} \geqslant 0. \tag{5.5}$$

În relația (5.5) am introdus următoarele cîmpuri tensoriale duble :

$$\overset{\vee}{\varepsilon}_{\eta} = \frac{\partial\overset{\vee}{\varepsilon}}{\partial\eta}\,,\quad \overset{\vee}{\varepsilon}_{\boldsymbol{u}} = \frac{\partial\overset{\vee}{\varepsilon}}{\partial u_{k}}\,\mathfrak{d}_{k},\quad \overset{\vee}{\varepsilon}_{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial\overset{\vee}{\varepsilon}}{\partial x^{k}_{,k}}\,\mathfrak{d}^{k}\circ\mathfrak{D}_{K},\quad \overset{\vee}{\varepsilon}_{\boldsymbol{\chi}} = \frac{\partial\overset{\vee}{\varepsilon}}{\partial\chi^{k}_{,k}}\,\mathfrak{d}^{k}\circ\mathfrak{D}_{K},$$

$$\overset{\vee}{\varepsilon}_{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{\partial\overset{\vee}{\varepsilon}}{\partial\chi^{k}_{K;L}}\,\mathfrak{d}^{k}\circ\mathfrak{D}_{K}\circ\mathfrak{D}_{L},\quad \overset{\vee}{\varepsilon}_{\dot{\boldsymbol{F}}} = \frac{\partial\overset{\vee}{\varepsilon}}{\partial\dot{x}^{k}_{,k}}\,\mathfrak{d}^{k}\circ\mathfrak{D}_{K},\quad \overset{\vee}{\varepsilon}_{\dot{\boldsymbol{\chi}}} = \frac{\partial\overset{\vee}{\varepsilon}}{\partial\dot{\chi}^{k}_{,k}}\,\mathfrak{d}^{k}\circ\mathfrak{D}_{K}, \tag{5.6}$$

$$\overset{\vee}{\varepsilon}_{\dot{\Psi}} = \frac{\partial\overset{\vee}{\varepsilon}}{\partial\dot{\chi}^{k}_{K;L}}\,\mathfrak{d}^{k}\circ\mathfrak{D}_{K}\circ\mathfrak{D}_{L}.$$

Se poate verifica că într-un loc se poate găsi o macro-mișcare, o micro-mișcare, un $\boldsymbol{T}$, un $\boldsymbol{S}$, un $\boldsymbol{\Lambda}$, un $\boldsymbol{q}$, care satisfac ecuațiile de bilanț ale momentului [2] și ecuația de conservare a energiei, dacă fixăm arbitrar mărimile η, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\Psi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\boldsymbol{u}}$, $\dot{\boldsymbol{F}}$, $\dot{\boldsymbol{\chi}}$, $\dot{\boldsymbol{\Psi}}$, $\ddot{\boldsymbol{F}}$, $\ddot{\boldsymbol{\chi}}$ și $\ddot{\boldsymbol{\Psi}}$. Folosind acest rezultat, din inegalitatea (5.5), pe baza legilor constitutive (5.4) rezultă :

$$\overset{\vee}{\varepsilon}_{\boldsymbol{u}} = \overset{\vee}{\varepsilon}_{\dot{\boldsymbol{F}}} = \overset{\vee}{\varepsilon}_{\dot{\boldsymbol{\chi}}} = \overset{\vee}{\varepsilon}_{\dot{\boldsymbol{\Psi}}} = 0 \text{ și } \theta = \overset{\vee}{\varepsilon}_{\eta}. \tag{5.7}$$

Din aceste relații obținem ecuația calorică de stare și formula care ne dă temperatura absolută :

$$\varepsilon = \overset{\vee}{\varepsilon}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}),\quad \theta = \overset{\vee}{\varepsilon}_{\eta} = \overset{\vee}{\theta}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Psi}). \tag{5.8}$$

Vom nota cu ${}_{0}\boldsymbol{T}$, ${}_{0}\boldsymbol{S}$ și ${}_{0}\boldsymbol{\Lambda}$ tensiunea, media micro-tensiunilor și primul moment superficial al tensiunilor, care corespund echilibrului mecanic și termic :

$$\begin{aligned}
{}_{0}\boldsymbol{T} &= \overset{\vee}{\boldsymbol{t}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}) = {}_{0}\overset{\vee}{\boldsymbol{t}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Lambda}),\\
{}_{0}\boldsymbol{S} &= \overset{\vee}{\boldsymbol{s}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}) = {}_{0}\overset{\vee}{\boldsymbol{s}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Lambda}),\\
{}_{0}\boldsymbol{\Lambda} &= \overset{\vee}{\boldsymbol{\lambda}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Lambda}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}, \boldsymbol{O}) = {}_{0}\overset{\vee}{\boldsymbol{\lambda}}(\eta, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\Lambda}),
\end{aligned} \tag{5.9}$$

și descompunem funcțiile $\overset{\vee}{\boldsymbol{t}}$, $\overset{\vee}{\boldsymbol{s}}$ și $\overset{\vee}{\boldsymbol{\lambda}}$ în felul următor :

$$\overset{\vee}{\boldsymbol{t}} = {}_{0}\overset{\vee}{\boldsymbol{t}} + {}_{D}\overset{\vee}{\boldsymbol{t}},\ \overset{\vee}{\boldsymbol{s}} = {}_{0}\overset{\vee}{\boldsymbol{s}} + {}_{D}\overset{\vee}{\boldsymbol{s}},\ \overset{\vee}{\boldsymbol{\lambda}} = {}_{0}\overset{\vee}{\boldsymbol{\lambda}} + {}_{D}\overset{\vee}{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Utilizînd relațiile :

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{F},\ \dot{\boldsymbol{\chi}} = \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\chi},\ {}^{T}\dot{\boldsymbol{\Psi}} = {}^{T}\boldsymbol{\chi}\cdot{}^{T}[\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{F}] + {}^{T}[\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{\Psi}]$$

şi proprietăţile produselor scalare din (5.5) obţinem :

$$-\rho[\boldsymbol{L}\cdot\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\varepsilon_{\boldsymbol{F}}^{T})+\boldsymbol{N}\cdot\cdot(\boldsymbol{\chi}\cdot\varepsilon_{\chi}^{T})+{}^{T}\boldsymbol{A}\cdot\cdot\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\varepsilon_{\Psi}^{TT}\cdot\boldsymbol{\chi}^{T})+\boldsymbol{N}\cdot\cdot[\boldsymbol{\Psi}\cdot\cdot({}^{T}\varepsilon_{\Psi})^{TT}]]+$$

$$+\boldsymbol{L}\cdot\cdot\boldsymbol{T}+\boldsymbol{N}\cdot\cdot(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{T})+{}^{T}\boldsymbol{A}\cdot\cdot\boldsymbol{\Lambda}+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0. \tag{5.10}$$

Pe baza formulelor (5.9) din inegalitatea (5.10) obţinem ca în lucrarea [27] relaţiile lui Eringen şi Suhubi [2] pentru partea hiper-elastică a tensiunilor :

$$\begin{aligned}{}_{0}\boldsymbol{T}&=\rho\boldsymbol{F}\cdot\varepsilon_{\boldsymbol{F}}^{T},\\ {}_{0}\boldsymbol{S}&=\rho\boldsymbol{F}\cdot\varepsilon_{\boldsymbol{F}}^{T}+\rho\boldsymbol{\chi}\cdot\varepsilon_{\chi}^{T}+\rho\,\boldsymbol{\Psi}\cdot\cdot({}^{T}\varepsilon_{\Psi})^{TT},\\ {}_{0}\boldsymbol{\Lambda}&=\rho\boldsymbol{F}\cdot\varepsilon_{\Psi}^{TT}\cdot\boldsymbol{\chi}^{T}.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Părţile disipative ale tensiunilor satisfac următoarele inegalitate :

$$\boldsymbol{L}\cdot\cdot{}_{\mathrm{D}}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{N}\cdot\cdot({}_{\mathrm{D}}\boldsymbol{S}-{}_{\mathrm{D}}\boldsymbol{T})+{}^{T}\boldsymbol{A}\cdot\cdot\cdot{}_{\mathrm{D}}\boldsymbol{\Lambda}+\frac{1}{\theta}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{u}\geqslant 0. \tag{5.12}$$

Această relaţie arată clar că separarea efectelor mecanice şi termice, fără ipoteze suplimentare nu este posibilă ; totuşi relaţia (5.12) arată clar că părţile disipative ale tensiunilor şi momentelor se anulează împreună cu fluxul caloric, dacă derivatele deformaţiilor şi gradientul temperaturii absolute se anulează în acelaşi timp.

Rezultatele obţinute în această ultimă parte a lucrării pot fi utilizate pentru generalizarea teoriei lui Nowacki [28,28,30] legată de comportarea termo-elastică a materialelor cu cupluri de tensiuni.

BIBLIOGRAFIE

1. W. Noll, Arch. Rat. Mech. Anal., 2, (197), 1958–59.
2. A. C. Eringen, E. S. Suhubi, Int. J. Eng. Sci., 2, (189), 1964.
3. — Int. J. Eng. Sci., 3, (389), 1964.
4. — Int. J. Eng. Sci., 2, (205), 1946.
5. R. D. Mindlin, Arch. Rat. Mech. Anal., 16, (61), 1964.
6. R. A. Toupin, Arch. Rat. Mech. Anal., 17, (85), 1964.
7. R. S. Rivlin, IUTAM-Symposium, Freudenstadt-Stuttgart, 1967.
8. E. Cosserat, F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, Paris, 1909.
9. J. L. Ericksen, C. Truesdell, Arch. Rat. Mech. Anal., 17, (295), 1958.
10. A. C. Eringen, IUTAM-Symposium, Freudenstdt-Stuttgart, 1967.
11. J. L. Ericksen, Arch. Rat. Mech. Anal., 4, (231), 1959–60.
12. — Proc. Sympos. Structural Dynamics, Ohio, 1963.
13. A. C. Eringen, Y. Math. Mech., 15, (909), 1966.
14. — J. Math. Mech., 16, (1), 1967.
15. — Proc. of Eleventh Int. Congr. Appl. Mech., Springer, 1964.
16. — Int. J. Eng. Sci., 5, (191), 1967.
17. K. Pach, T. Frey, *Vector and Tensor Analysis*, Terra, Budapest, 1964.
18. В. И. Блох, *Теория упругости*, Изд. Харк. Унив., Харьков, 1964.
19. L. M. Milne-Thomson, *Antiplane Elastic Systems*, Springer-Verlag, 1962.
20. C. Truesdell, R. A. Toupin, *The Classical Field Theories*, Springer-Verlag, 1960.
21. A. C. Eringen, *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, 1962.

22. C. TRUESDELL, W. Noll, *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Spriger-Verlag, 1965.
23. W. NOLL, J. Rat. Mech. Anal., 4, (3), 1955.
24. A. C. ERINGEN, Arch. Rat. Mech. Anal., 2, (197), 1958—59.
25. R. S. RIVLIN, J. L. ERICKSEN, J. Rat. Mech. Anal., 4, (323), 1955.
26. B. D. COLEMAN, W. NOLL, Arch. Rat. Mech. Anal., 13, (167), 1963.
27. B. D. COLEMAN, V. J. MISEL, J. Chem. Phys., 10, (1116), 1964.
28. W. NOWACKI. Bull. Acad. Pol. Sci., S., IV., 14, (97), (203), (505), 1966.
29. — Proc. IUTAM-Symposium on Irreversible Aspects of Continuum Mechanics, Vienna, 1966.
30. W. NOWACKI, Bull. Acad. Pol. Sci. S., IV., 16, (284), 1967.

D - 35663

UNELE PROBLEME PRIVIND CALCULUL LA OBOSEALĂ

de GEORGE BĂRĂNESCU,
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
DINU TARAZA,
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

539.4

În lucrare se stabilesc noi expresii ale coeficientului de siguranță în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă; la calculul coeficienților de corecție se ține seama de variația acestora în raport cu coeficienții de asimetrie ai ciclurilor de încărcare.
În cazul solicitării simultane la tracțiune-compresiune și încovoiere, se prezintă formulele de calcul a coeficientului de siguranță stabilite în baza unei ipoteze privitoare la poziția ciclului limită cu care se compară ciclul rezultant ce acționează piesa.

1. INTRODUCERE

În calculele de oboseală, pentru obținerea unei valori cît mai exacte a coeficientului de siguranță, este necesar să se cunoască diagrama de oboseală referitoare la piesa verificată.

Dat fiind volumul mare de experimentări cerut de alcătuirea unei astfel de diagrame s-a recurs la schematizarea diagramelor de oboseală. Această practică permite obținerea unor rezultate suficient de precise plecînd de la un număr minim de date experimentale.

Cel mai frecvent se folosesc două schematizări ale diagramei de oboseală. Prima schematizare, numită „printr-o linie dreaptă" reclamă cunoașterea rezistenței la oboseală pentru ciclul alternant simetric limită și rezistența la rupere. A doua schematizare, numită „printr-o linie frîntă" reclamă — pe lîngă cele două rezistențe menționate mai sus — cunoașterea și a rezistenței la oboseală pentru ciclul pulsator limită.

Determinarea acestor rezistențe pentru fiecare piesă în parte nu este practic posibilă. Rezistențele la oboseală se stabilesc pe epruvete de formă și de dimensiuni standardizate, rezistențele la oboseală pentru piesa studiată fiind deduse prin corectarea valorilor obținute pentru epruvete cu ajutorul unor coeficienți. Prezența concentratorilor de ten-

siuni, diferențele de dimensiune și de prelucrarea superficială între piesă și epruveta standard sînt luate în considerare respectiv prin coeficienții β, ε, γ.

În literatura de specialitate [3], [5] se arată că valorile acestor coeficienți de corecție depind de coeficientul de asimetrie al ciclului de solicitare. În consecință, rezistența la oboseală a unei piese solicitate printr-un ciclu cu coeficientul de asimetrie R va fi : [1)] [2)]

$$\sigma_R^* = \frac{\sigma_R}{\frac{\beta_R}{\varepsilon_R \gamma_R}} = \frac{\sigma_R}{\lambda_R}. \tag{1}$$

Conform relației (1) coeficienții de corecție operează asupra valorii tensiunii maxime limită a ciclului de solicitare și nu asupra altor mărimi caracteristice ale ciclului respectiv.

În cazul schematizării printr-o linie dreaptă a diagramei de oboseală pentru piesă, (fig. 1) expresia coeficientului de siguranță, în ipoteza atingerii ciclului limită prin menținerea constantă a coeficientului de asimetrie, este dată de expresia [3)]

$$c^* = \frac{1}{\frac{\sigma_V^*}{\sigma_{-1}^*} + \frac{\sigma_m^*}{\sigma_r}}. \tag{2}$$

În relația de mai sus singurul element necunoscut este rezistența la oboseală a piesei pentru ciclul alternant simetric. Valoarea acestei

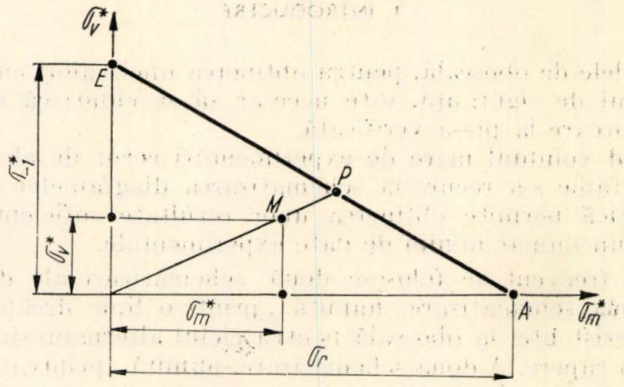


Fig. 1. — Schematizarea diagramei de oboseală printr-o linie dreaptă.

[1)] σ_R reprezintă rezistența la oboseală a epruvetei solicitate printr-un ciclu avînd coeficientul de asimetrie R.

[2)] Cu semnul * se notează în cuprinsul acestei lucrări mărimile referitoare la piesă.

[3)] În lucrare s-a presupus că ciclul limită și ciclul de încărcare au totdeauna același coeficient de asimetrie.

rezistenţe poate fi calculată însă cu ajutorul formulei (1) aplicată ciclului respectiv.

$$\sigma^*_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\lambda_{-1}}. \tag{3}$$

Din (2) şi (3) se obţine expresia cunoscută

$$c^* = \frac{1}{\lambda_{-1}\dfrac{\sigma^*_v}{\sigma_{-1}} + \dfrac{\sigma^*_m}{\sigma_r}}. \tag{4}$$

Această formulă permite tragerea următoarei concluzii : coeficientul de siguranţă pentru piesă este egal cu coeficientul de siguranţă pentru epruveta încărcată printr-un ciclu avînd tensiunea medie egală cu cea a ciclului care lucrează asupra piesei şi tensiunea variabilă $\lambda_{-1}\,\sigma^*_V$. Astfel, pentru schematizarea diagramei de oboseală printr-o linie dreaptă şi în cazul atingerii ciclului limită prin păstrarea constantă a coeficientului de asimetrie, ciclul de încărcare aplicat epruvetei, care conduce la aceeaşi valoare a coeficientului de siguranţă, se obţine aplicînd coeficienţii de corecţie β_{-1}, ε_{-1}, γ_{-1} numai asupra părţii variabile a ciclului care încarcă piesa.

Concluzia de mai sus nu este consecinţa unui fapt fizic şi prin urmare ea este valabilă numai în cazul pentru care a fost stabilită, adică pentru schematizarea diagramei de oboseală printr-o linie dreaptă. Aplicarea concluziei la alte schematizări nu poate duce la rezultatele adevărate.

De pildă, în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă (fig. 2) coeficientul de siguranţă pentru piesă are următoarea expresie cînd ciclul de încărcare este situat în regiunea *OGE*

$$c^* = \frac{1}{\dfrac{\sigma^*_V}{\sigma^*_{-1}} + \psi^*_\sigma \dfrac{\sigma^*_m}{\sigma^*_{-1}}}, \tag{5}$$

unde

$$\psi^*_\sigma = \frac{2\sigma^*_{-1} - \sigma^*_0}{\sigma^*_0}. \tag{6}$$

Fie σ^*_m şi σ_{Ve} tensiunile medie şi variabilă a unui ciclu care aplicat epruvetei conduce la valoarea c^* a coeficientului de siguranţă. Condiţia de echivalenţă se exprimă prin relaţia

$$\frac{1}{\dfrac{\sigma^*_V}{\sigma^*_{-1}} + \psi^*_\sigma \dfrac{\sigma^*_m}{\sigma^*_{-1}}} = \frac{1}{\dfrac{\sigma_{Ve}}{\sigma_{-1}} + \psi_\sigma \dfrac{\sigma^*_m}{\sigma_{-1}}}, \tag{7}$$

factorul ψ_σ avînd expresia

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \tag{7a}$$

Pentru simplificare, coeficienții de corecție sînt presupuși independenți de R. În acest caz, conform relației (1) se poate scrie

$$\sigma^*_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{\lambda} \quad \text{și} \quad \sigma^*_0 = \frac{\sigma_0}{\lambda}. \tag{7b}$$

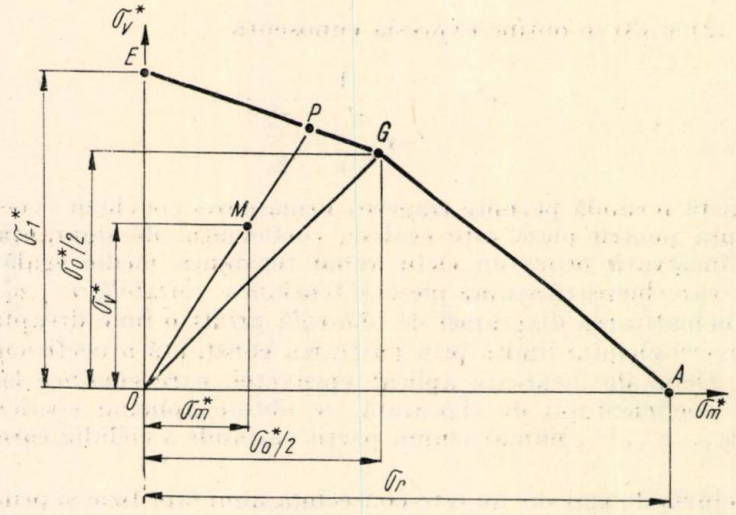


Fig. 2. — Schematizarea diagramei de oboseală printr-o linie frîntă.

Înlocuind în (6) se deduce $\psi^*_\sigma = \psi_\sigma$, iar din (7) se obține după transformări

$$\sigma_{V_e} = \lambda\, \sigma^*_v + \psi_\sigma\, \sigma^*_m\, (\lambda - 1). \tag{7c}$$

Această formulă arată că tensiunea variabilă a ciclului echivalent numai poate fi obținută ca în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie dreaptă.

Considerarea variației coeficienților de corecție în funcție de coeficientul de asimetrie al ciclului de încărcare nu schimbă rezultatul de mai sus.

În cele ce urmează se stabilesc expresiile coeficientului de siguranță pentru schematizarea diagramei de oboseală printr-o linie frîntă, ținînd seama și de variația coeficienților de corecție în funcție de coeficientul de asimetrie al ciclului de încărcare. Se analizează apoi unele aspecte ale calculului la oboseală în cazul solicitărilor normale produse prin tracțiune-compresiune și prin încovoiere.

2. STABILIREA EXPRESIILOR COEFICIENTULUI DE SIGURANȚĂ PENTRU SCHEMATIZAREA DIAGRAMEI DE OBOSEALĂ PRINTR-O LINIE FRÎNTĂ

Aplicînd formula (1) pentru ciclul limită pulsator se obține

$$\sigma^*_0 = \frac{\sigma_0}{\lambda_0}. \tag{8}$$

Înlocuind în (5) relațiile (3) și (8) rezultă formula coeficientului de siguranță pentru regiunea *OGE*

$$c^* = \frac{1}{\lambda_{-1}\left(\frac{\sigma_V^*}{\sigma_{-1}} + \psi_\sigma^* \frac{\sigma_m^*}{\sigma_{-1}}\right)}. \tag{9}$$

Expresia factorului ψ_σ^* se obține făcînd în (6) aceleași înlocuiri

$$\psi_\sigma^* = \frac{2\frac{\lambda_0}{\lambda_{-1}}\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \tag{10}$$

Pentru regiunea *OGA* coeficientul de siguranță este dat de relația

$$c^* = \frac{1}{\frac{\sigma_m^*}{\sigma_r} + \psi_\sigma'^* \frac{\sigma_V^*}{\sigma_r}}, \tag{11}$$

unde

$$\psi_\sigma'^* = \frac{2\sigma_r - \sigma_0^*}{\sigma_0^*}. \tag{12}$$

Folosind expresia (8) se deduce

$$\psi_\sigma'^* = \frac{2\lambda_0\sigma_r - \sigma_0}{\sigma_0}. \tag{13}$$

Aplicarea formulelor (9) și (10), respectiv (11) și (13) reclamă cunoașterea coeficienților de corecție pentru coeficienții de asimetrie $R = -1$ și $R = 0$. În lipsa acestor date se aproximează curba limită de oboseală a piesei prin arcul de parabolă

$$\sigma_V^* = \sigma_{-1}^* - \frac{\sigma_{-1}^*}{\sigma_r^2}\sigma_m^{*2}. \tag{14}$$

Ecuația conturului limită fiind astfel cunoscută se poate deduce rezistența la oboseală a ciclului pulsator limită

$$\sigma_0^* = \frac{\sigma_r^2}{\sigma_{-1}^*}\left(\sqrt{1 + 4\left(\frac{\sigma_{-1}^*}{\sigma_r}\right)^2} - 1\right). \tag{14a}$$

Folosind relația (1) se obține

$$\sigma_0^* = \lambda_{-1}\frac{\sigma_r^2}{\sigma_{-1}^*}\left(\sqrt{1 + 4\left(\frac{\sigma_{-1}^*}{\sigma_r}\right)^2} - 1\right). \tag{15}$$

Pentru calculul coeficientului de siguranță se determină mai întîi σ_0^* din (15). Apoi, cînd ciclul de încărcare este situat în regiunea *OGE*,

se aplică formula (9) în care factorul ψ_σ^* are următoarea expresie dedusă din relaţiile (3) şi (6) :

$$\psi_\sigma^* = \frac{2\sigma_{-1} - \lambda_{-1}\sigma_0^*}{\lambda_{-1}\sigma_0^*}. \qquad (15a)$$

Cînd ciclul de încărcare este situat în regiunea *OGA* se folosesc formulele (11) şi (12).

3. CALCULUL COEFICIENTULUI DE SIGURANŢĂ ÎN CAZUL SOLICITĂRILOR NORMALE PRODUSE PRIN TRACŢIUNE-COMPRESIUNE ŞI PRIN ÎNCOVOIERE

Experienţa arată că rezistenţa la oboseală a materialelor depinde de felul încărcării chiar cînd eforturile unitare au aceeaşi direcţie. Astfel, în cazul eforturilor unitare normale rezistenţa la oboseală pentru tracţiune-compresiune este mai mică decît rezistenţa la oboseală pentru încovoiere (fig. 3); de asemenea limita de curgere la tracţiune este mai mică decît limita de curgere la încovoiere.

Această împrejurare ridică problema stabilirii conturului pe care se situează ciclul limită ce trebuie comparat cu ciclul rezultat din suprapunerea ciclurilor de tracţiune-compresiune şi de încovoiere. Conturul limită va avea o poziţie intermediară faţă de conturul aferent solicitării de tracţiune-compresiune şi conturul aferent solicitării de încovoiere, fiind mai apropiat de cel corespunzător încărcării predominante.

În lipsa datelor experimentale luarea în considerare a faptului menţionat reclamă folosirea unei ipoteze cu privire la poziţia conturului limită intermediar. O astfel de ipoteză, formulată în lucrarea [7], presupune că eforturile unitare maxime ale ciclului limită intermediar şi ale

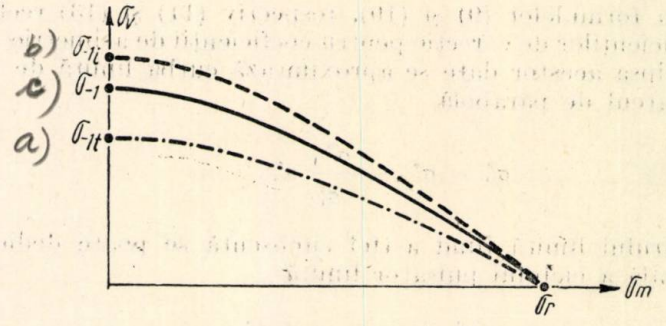


Fig. 3. — Curbele limită de oboseală pentru tracţiune-compresiune (*a*), pentru încovoiere (*b*) şi pentru o solicitare combinată (*c*).

ciclurilor limită extreme sînt legate prin următoarea relaţie de proporţionalitate

$$\sigma^*_{\max_{l_R}} = \sigma^*_{\max_{l_{R,t}}} + \frac{1}{1 + \frac{\sigma^*_{\max_{R,t}}}{\sigma^*_{\max_{R,i}}}} \left(\sigma^*_{\max_{l_{R,i}}} - \sigma^*_{\max_{l_{R,t}}}\right), \qquad (16)$$

în care s-a notat

$\sigma^*_{\max_{l_{R,t}}}$, rezistența de oboseală la tracțiune pentru coeficientul de asimetrie R;

$\sigma^*_{\max_{l_{R,i}}}$, rezistența de oboseală la încovoiere pentru coeficientul de asimetrie R;

$\sigma^*_{\max_{R,t}}$, $\sigma^*_{\max_{R,i}}$, tensiunile maxime ale ciclurilor de tracțiune-compresiune și de încovoiere, care au coeficientul de asimetrie R și sînt echivalente cu ciclurile respective care încarcă piesa, condiția de echivalență fiind egalitatea coeficientului de siguranță stabilit pe baza egalității coeficientului de asimetrie între ciclul de încărcare și ciclul de limită

★

În cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie dreaptă aplicarea formulei (16) la ciclul alternant simetric conduce la expresia

$$\sigma^*_{-1} = \sigma^*_{-1t} + \zeta^* (\sigma^*_{-1t} - \sigma^*_{-1t}), \tag{17}$$

unde factorul ζ^* este dat de formula

$$\zeta^* = \frac{1}{1 + \dfrac{\sigma^*_{V_t} + \rho^*_t \sigma^*_{m_t}}{\sigma^*_{V_i} + \rho^*_i \sigma^*_{m_i}}}, \tag{18}$$

factorii ρ^*_t și ρ^*_i fiind definiți de relațiile

$$\rho^*_t = \frac{\sigma^*_{-1t}}{\sigma_r} \quad \text{și} \quad \rho^*_i = \frac{\sigma^*_{-1i}}{\sigma_r}. \tag{18a}$$

În formula (18) $\sigma^*_{V_t}$, $\sigma^*_{m_t}$ reprezintă, respectiv, tensiunea variabilă și medie pentru ciclul de tracțiune compresiune care încarcă piesa, iar $\sigma^*_{V_i}$ și $\sigma^*_{m_i}$ sînt aceleași tensiuni pentru ciclul de încovoiere aplicat piesei.

Ținînd seama de relația (1) formula (17) devine

$$\sigma^*_{-1} = \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}} + \zeta^* \left(\frac{\sigma_{-1i}}{\lambda_{-1i}} - \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}} \right). \tag{19}$$

Factorul ζ^* rezultă din (18) folosind pentru ρ^*_t și ρ^*_i următoarele expresii

$$\rho^*_t = \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}\, \sigma_r} \quad \text{și} \quad \rho^*_i = \frac{\sigma_{-1i}}{\lambda_{-1i}\, \sigma_r}. \tag{19a}$$

Coeficientul de siguranță se calculează cu formula (2) în care σ^*_v și σ^*_m sînt tensiunile variabilă și medie ale ciclului rezultat din suprapunerea ciclurilor de tracțiune-compresiune și de încovoierea aplicate piesei; tensiunea σ^*_{-1} se deduce din relația (19).

Cînd deformaţiile plastice nu sînt admise diagrama de oboseală trebuie limitată la conturul EFC (fig. 4). În acest caz, dacă ciclul de încărcare rezultant se situează în regiunea OFC, ceea ce se întîmplă cînd coeficientul de asimetrie R al ciclului rezultant este mai mare decît coefi-

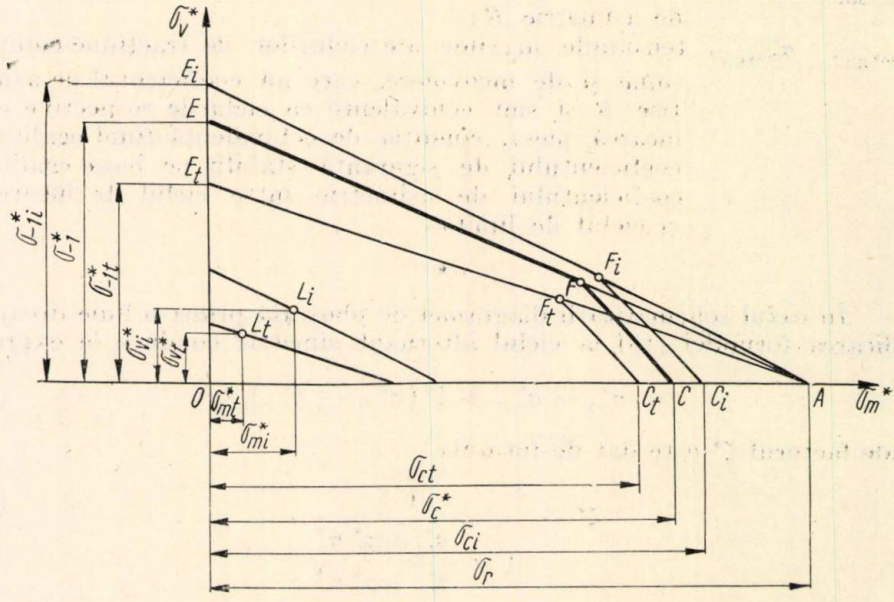


Fig. 4. — Conturul limită intermediar în cazul schematizării diagramei de oboseală pintr-o linie dreaptă.

cientul de asimetrie al ciclului F, trebuie calculat şi coeficientul de siguranţă la curgere

$$c_c^* = \frac{\sigma_c^*}{\sigma_{\max_R}^*}. \tag{20}$$

Limita de curgere σ_c^* se poate deduce din formula aproximativă

$$\sigma_c^* = \sigma_{ct} + \zeta^* (\sigma_{ci} - \sigma_{ct}). \tag{21}$$

Coeficientul de asimetrie al ciclului F se determină din relaţia

$$R_F = \frac{\sigma_r \sigma_c^* - 2\sigma_r \sigma_{-1}^* + \sigma_c^* \sigma_{-1}^*}{\sigma_c^* (\sigma_r - \sigma_{-1}^*)}. \tag{22}$$

★

În cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă se efectuează mai întîi reducerea ciclurilor care încarcă piesa la cicluri alternant simetrice, pulsatoare şi la încărcări statice echivalente. Înlocuind în formula (16) tensiunile maxime ale acestor cicluri echivalente se obţin expresiile rezistenţelor la oboseală caracteristice ale conturului limită intermediar (tab. 1).

Tabela 1

Rezistențele la oboseală caracteristice ale conturului limită intermediar în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă

a) Cazul	σ
$R_t < 0$	$\sigma^*_{-1} = \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}} + \frac{1}{1+\frac{\sigma^*_{V_t} + \psi^*_{\sigma t}\sigma^*_{m_t}}{\sigma^*_{V_i} + \psi^*_{\sigma i}\sigma^*_{m_i}}} \left(\frac{\sigma_{-1i}}{\lambda_{-1i}} - \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}}\right)$
$R_i < 0$	$\sigma^*_0 = \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}} + \frac{1}{1+\frac{\xi^*_t(\sigma^*_{V_t} + \psi^*_{\sigma t}\sigma^*_{m_t})}{\xi^*_i(\sigma^*_{V_i} + \psi^*_{\sigma i}\sigma^*_{m_i})}} \left(\frac{\sigma_{0i}}{\lambda_{0i}} - \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}}\right)$
	$\sigma^*_c = \sigma_{ct} + \frac{1}{1+\frac{\rho^*_i(\sigma^*_{V_t} + \psi^*_{\sigma t}\sigma^*_{m_t})}{\rho^*_t(\sigma^*_{V_i} + \psi^*_{\sigma i}\sigma^*_{m_i})}} (\sigma_{ci} - \sigma_{ct})$
$R_t > 0$	$\sigma^*_{-1} = \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}} + \frac{1}{1+\frac{\rho^*_t(\sigma^*_{m_t} + \psi'^*_{\sigma t}\sigma^*_{V_t})}{\rho^*_i(\sigma^*_{m_i} + \psi'^*_{\sigma i}\sigma^*_{V_i})}} \left(\frac{\sigma_{-1i}}{\lambda_{-1i}} - \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}}\right)$
$R_i > 0$	$\sigma^*_0 = \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}} + \frac{1}{1+\frac{\xi'^*_t(\sigma^*_{m_t} + \psi'^*_{\sigma t}\sigma^*_{V_t})}{\xi'^*_i(\sigma^*_{m_i} + \psi'^*_{\sigma i}\sigma^*_{V_i})}} \left(\frac{\sigma_{0i}}{\lambda_{0i}} - \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}}\right)$
	$\sigma^*_c = \sigma_{ct} + \frac{1}{1+\frac{\sigma^*_{m_t} + \psi'^*_{\sigma t}\sigma^*_{v_t}}{\sigma^*_{m_i} + \psi'^*_{\sigma i}\sigma^*_{v_i}}} (\sigma_{ci} - \sigma_{ct})$
$R_t < 0$	$\sigma^*_{-1} = \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}} + \frac{1}{1+\frac{\sigma^*_{V_t} + \psi^*_{\sigma t}\sigma^*_{m_t}}{\rho^*_i(\sigma^*_{m_i} + \psi'^*_{\sigma i}\sigma^*_{V_i})}} \left(\frac{\sigma_{-1i}}{\lambda_{-1i}} - \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}}\right)$
$R_i > 0$	$\sigma^*_0 = \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}} + \frac{1}{1+\frac{\xi'^*_t(\sigma^*_{V_t} + \psi^*_{\sigma t}\sigma^*_{m_t})}{\xi'^*_i(\sigma^*_{m_i} + \psi'^*_{\sigma i}\sigma^*_{V_i})}} \left(\frac{\sigma_{0i}}{\lambda_{0i}} - \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}}\right)$
	$\sigma^*_c = \sigma_{ct} + \frac{1}{1+\frac{\sigma^*_{V_t} + \psi^*_{\sigma t}\sigma^*_{m_t}}{\rho^*_t(\sigma^*_{m_i} + \psi'^*_{\sigma i}\sigma^*_{v})}} (\sigma_{ci} - \sigma_{ct})$

Cazul	σ
$R_t > 0$	$\sigma^*_{-1} = \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}} + \frac{1}{1+\frac{\rho^*_t(\sigma^*_{m_t}+\psi'^*_{\sigma t}\sigma^*_{V_t})}{\sigma^*_{V_i}+\psi^*_{\sigma_i}\sigma^*_{m_i}}}\left(\frac{\sigma_{-1i}}{\lambda_{-1i}} - \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}}\right)$
$R_t < 0$	$\sigma^*_0 = \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}} + \frac{1}{1+\frac{\xi'^*_i(\sigma^*_{m_t}+\psi'^*_{\sigma t}\sigma^*_{V_t})}{\xi^*_i(\sigma^*_{V_i}+\psi^*_{\sigma_i}\sigma^*_{m_i})}}\left(\frac{\sigma_{0i}}{\lambda_{0i}} - \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}}\right)$
	$\sigma^*_c = \sigma_{ct} + \frac{1}{1+\frac{\rho^*_i(\sigma^*_{m_t}+\psi'^*_{\sigma t}\sigma^*_{v_t})}{\sigma^*_{v_i}+\psi^*_{\sigma_i}\sigma^*_{m_i}}}(\sigma_{ci} - \sigma_{ct})$
$\psi^*_{\sigma t} = \frac{2\frac{\lambda_{0t}}{\lambda_{-1t}}\sigma_{-1t} - \sigma_{0t}}{\sigma_{0t}}$	$\psi^*_{\sigma i} = \frac{2\frac{\lambda_{0i}}{\lambda_{-1i}}\sigma_{-1i} - \sigma_{0i}}{\sigma_{0i}}$
$\psi'^*_{\sigma t} = \frac{2\lambda_{0t}\sigma_r - \sigma_{0t}}{\sigma_{0t}}$	$\psi'^*_{\sigma i} = \frac{2\lambda_{0i}\sigma_r - \sigma_{0i}}{\sigma_{0i}}$
$\xi^*_t = \frac{\lambda_{-1t}}{\lambda_{0t}} \cdot \frac{\sigma_{0t}}{\sigma_{-1t}}$	$\xi^*_i = \frac{\lambda_{-1i}}{\lambda_{0i}} \cdot \frac{\sigma_{0i}}{\sigma_{-1i}}$
$\xi'^*_t = \frac{\sigma_{0t}}{\lambda_{0t}\sigma_r}$	$\xi'^*_i = \frac{\sigma_{0i}}{\lambda_{0i}\sigma_r}$
$\rho^*_t = \frac{\sigma_{-1t}}{\lambda_{-1t}\sigma_r}$	$\rho^*_i = \frac{\sigma_{-1i}}{\lambda_{-1i}\sigma_r}$

La calculul coeficienților de siguranță se deosebesc două situații caracteristice.

Dacă $\sigma^*_c > \sigma^*_0$, conturul limită intermediar se prezintă ca în figura 5. În acest caz, pentru $R < 0$ calculul coeficientului de siguranță se efectuează cu formulele (5) și (6) în care se folosesc expresiile corespunzătoare din tabela 1; pentru $0 < R < R_F$ se folosesc formulele (11) și (12), iar cînd $R > R_F$ se verifică cu coeficientul de siguranță la curgere determinat cu relația (20). Coeficientul de asimetrie R_F are expresia

$$R_F = \frac{\sigma_r(\sigma^*_c - \sigma^*_0)}{\sigma^*_c(\sigma_r - \sigma^*_0)}. \qquad (23)$$

Dacă $\sigma^*_c < \sigma^*_0$, conturul limită intermediar se prezintă ca în figura 6. Pentru $R < R_H$ se folosesc tot formulele (5) și (6), iar pentru $R > R_H$ se verifică și coeficientul de siguranță la curgere cu relația (20).

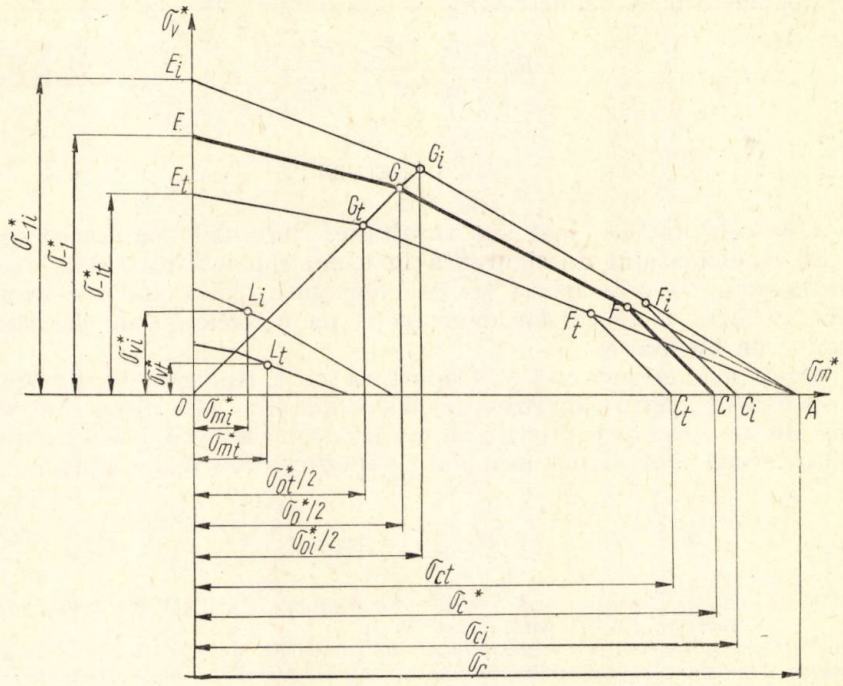


Fig. 5. — Conturul limită intermediar în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă, cînd $\sigma_c^* > \sigma_0^*$.

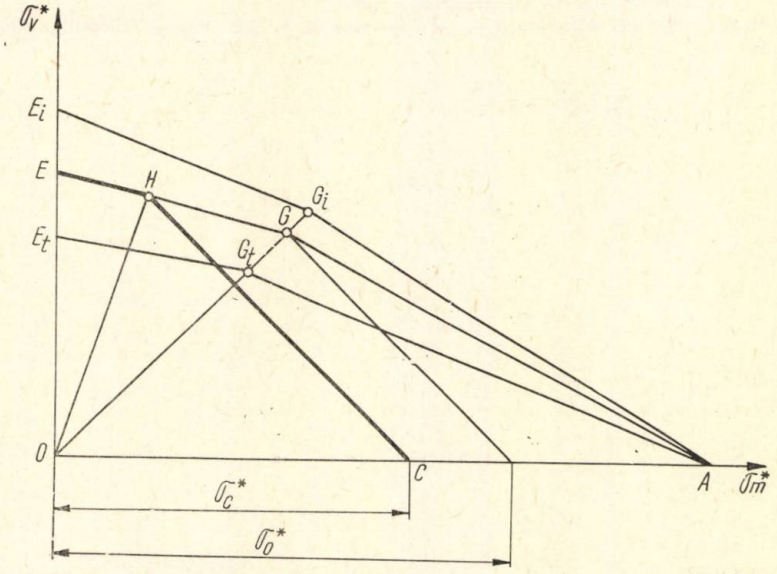


Fig. 6. — Conturul limită intermediar în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă, cînd $\sigma_c^* < \sigma_0^*$.

Coeficientul de asimetrie R_H se determină prin expresia

$$R_H = \frac{\sigma^*_{-1}(\sigma^*_0 - \sigma^*_c)}{\sigma^*_c(\sigma^*_{-1} - \sigma^*_0)}. \quad (24)$$

4. CONCLUZII

Din cele arătate mai sus rezultă că formulele cunoscute pentru calculul coeficientului de siguranță în cazul schematizării diagramei de oboseală printr-o linie frîntă trebuie corectate chiar cînd nu se are în vedere variația coeficienților de corecție cu coeficienții de asimetrie ai ciclurilor de încărcare.

Dacă piesa considerată este solicitată atît la tracțiune-compresiune cît și la încovoiere, pentru mărirea preciziei calculului este necesar să se țină seama de comportarea diferită a materialelor la aceste două feluri de solicitări, ceea ce reclamă însă date experimentale mai ample.

BIBLIOGRAFIE

1. G. Bărănescu, *Un problème relatif au calcul à la fatigue*, Buletinul Institutului politehnic București, **XXI**, fascicula 1, 1959.
2. Gh. Buzdugan, *Calculul de rezistență la solicitări variabile*, Edit. tehnică, București, 1955.
3. Richard Häuchen, *Neue Festigkeitsberechnung für den Maschinenbau*, Carl Hausen Verlag, München, 1956.
4. St. Nădășan, *Rezistența materialelor* vol. III, Edit. didactică și pedagogică, 1963.
5. S. D. Ponomarev și colab., *Calculul modern de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, Traducere din limba rusă. Edit. tehnică, 1964.
6. László Sors, *Berechnung der Dauerfestigkeit von Maschienenteilen*, Verlag der Ungarischen Akademie der Wissenschaften, 1967.
7. F. Kuhrt și colab., *Grundlagen der Fördertechnik*, V.E.B. Verlag Technik, Berlin, 1965.

CALCULUL ITERATIV AL FRECVENȚELOR PROPRII DE VIBRAȚIE LA SISTEME ELASTICE AVÎND MASE CONCENTRATE DISPUSE „ÎN LANȚ"

ERNEST BEIU-PALADI
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

539.4

Se prezintă o metodă de calcul iterativ al tuturor frecvențelor proprii, la sistemele liniar-elastice, avînd masele concentrate dispuse „în lanț", precum și la alte sisteme mecanice, caracterizate dinamic printr-o matrice tridiagonală. Metoda propusă constă dintr-o adaptare și sistematizare a unui procedeu cunoscut anterior, însă neutilizat în practică, datorită unui volum de calcule, considerabil de mare. Sistematizarea indicată pentru cazul matricelor tridiagonale este dată sub forma unui algoritm simplu, comportînd calcule puține.
Avantajele metodei sînt exemplificate prin aplicații numerice.

1. SISTEME ELASTICE DISPUSE ÎN LANȚ

În studiul dinamic al structurilor de rezistență, se întîlnesc des scheme de calcul alcătuite din mase concentrate, între care se exercită forțe liniar-elastice. O astfel de schemă de calcul formează un sistem dispus „în lanț", dacă forțele elastice interioare se exercită numai între perechi de mase (m_i, m_{i+1}), avînd indici succesivi, forțele elastice exterioare putînd fi aplicate oricărei mase.

Se știe că un astfel de sistem execută oscilații armonice în jurul poziției de echilibru stabil. Sistemul de ecuații algebrice în raport cu amplitudinile acestor oscilații, poate fi scris întotdeauna sub forma

$$(A - \lambda I)\, x = 0, \tag{1}$$

unde matricea A are forma tridiagonală simetrică:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & b_{n-1} & a_n \end{bmatrix}, \tag{2}$$

n, fiind numărul gradelor de libertate ale sistemului, λ pătratul frecvenței circulare proprii, iar

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

vectorul-coloană al amplitudinilor (multiplicate fiecare cu cîte o constantă).

Elementele matricei A depind de constantele elastice și dinamice ale sistemului de mase concentrate.

Printre structurile de rezistență care admit o schemă de calcul constituită dintr-un lanț de puncte materiale, se citează : arbori de mașini cu volanți, efectuînd oscilații de torsiune ; structurile de construcții în cadre multietajate, dacă se consideră că rigiditatea la încovoiere a fiecărui etaj este infinit de mare etc.

Trebuie remarcat că o serie de structuri care conduc la scheme de calcul mai complexe pot fi calculate printr-o metodă proprie matricelor tridiagonale, dacă matricea A a acestor sisteme se aduce la forma tridiagonală, prin anumite transformări algebrice de similitudine.

2. CALCULUL ITERATIV AL FRECVENȚELOR PROPRII

Printre metodele iterative de calcul al frecvențelor proprii, cea mai cunoscută este metoda Stodola-Vianello, care deși foarte simplă, prezintă totuși neajunsul că pentru frecvențe superioare, calculele devin din ce în ce mai complicate și instabile față de erorile de calcul provenite din rotunjirea rezultatelor parțiale.

O altă metodă, foarte utilizată în practică, este metoda Holzer, care nu este însă o metodă propriu-zis iterativă, ci o sistematizare a rezolvării prin încercări succesive a ecuației caracteristice a matricei A.

În practică există numeroase cazuri în care este necesar să se calculeze nu numai prima valoare proprie a matricei A, ci un număr mai mare de valori proprii sau chiar întreg spectrul de frecvențe proprii al structurii. În acest caz, este necesar să se treacă la rezolvarea „problemei complete de valori proprii" ale matricei respective.

Metodele iterative de rezolvare a problemei complete de valori proprii ale matricelor, conduc la stabilirea unor șiruri numerice, ale căror limite sînt valorile proprii ale matricei considerate, fără a se calcula în prealabil coeficienții polinomului caracteristic. Unele dintre cele mai eficiente metode, se sprijină pe stabilirea unor algoritme de factorizare

pentru puterile succesive ale matricei date. Se obţin două categorii de factori succesivi : o categorie este formată din matrice triunghiulare, iar altă categorie din matrice unitare, sau matrice triunghiulare de tip opus celor din prima categorie. Aceste algoritme sînt astfel construite, încît elementele diagonalei principale ale unuia din şirurile de matrice triunghiulare-factori, tind către valorile proprii ale matricei date.

Metodele menţionate necesită în general un volum de operaţii aritmetice, considerabil de mare, astfel încît, calculele respective, în cazul matricelor de un ordin mai mare, comportă neapărat folosirea calculatoarelor electronice.

Volumul de calcule se reduce însă simţitor în cazul matricelor tridiagonale, cu condiţia ca algoritmul utilizat să păstreze invariantă forma iniţială tridiagonală a matricei date.

Dintre toate algoritmele cunoscute pînă în prezent, care sînt destinate rezolvării problemei complete de valori proprii, singurul care satisface condiţiei de a păstra invariantă forma iniţială tridiagonală a unei matrice, este aşa-numitul „algoritm LR", publicat în 1955 de Rutishauser [1]. Acest algoritm constă din următorul şir de operaţii, unde s-a notat cu A_1, matricea iniţială

$$\begin{aligned} A_1 &= S_1 T_1, \\ T_1 S_1 &= A_2 = S_2 T_2, \\ T_2 S_2 &= A_3 = S_3 T_3, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ T_{k-1} S_{k-1} &= A_k = S_k T_k, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{3}$$

S_1, S_2,... fiind matrice triunghiulare inferioare, cu elementele diagonalei principale egale cu unitatea, iar T_1, T_2,... — matrice triunghiulare superioare.

Se demonstrează [1] — [4] că elementele diagonalei principale ale matricelor A_k şi T_k, tind către valorile proprii ale matricei A_1, dispuse în ordine descrescătoare, iar elementele matricelor S_k, situate în afara diagonalei principale, tind către zero.

Viteza de convergenţă a metodei depinde de dispersarea valorilor proprii. Astfel notînd cu

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$$

valorile proprii ale matricei A_1, elementele matricelor S_k şi T_k au următoarele expresii asimptotice [3] :

$$s_{ij}^{(k)} = 0\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k, \; i > j, \; k \to \infty, \tag{4}$$

$$t_{ii}^{(k)} = \lambda_i M_i \left[1 + \left(\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}\right)^k + \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\right)^k\right], \; k \to \infty, \tag{5}$$

unde M_i este un factor care nu depinde de ordinul treptei de iterație. Convergența procesului de iterație se observă în cursul efectuării calculelor, pe elementele matricei S_k, mai ușor decît pe elementele diagonalei principale ale matricei T_k. Dacă micșorarea succesivă a valorilor elementelor s_{ij} prezintă o oarecare regularitate, se poate afirma că procesul de iterație decurge satisfăcător.

Algoritmul (3) este convergent, dacă matricea inițială A_1 poate fi descompusă în factori triunghiulari, prin urmare dacă toți minorii principali respectivi sînt diferiți de zero.

O condiție ca procesul de calcul să decurgă satisfăcător, este ca minorii principali ai matricei modale să fie de-asemenea diferiți de zero [4]. Bineînțeles, vectorii proprii ai matricei A_1 nefiind cunoscuți anterior, această condiție nu poate fi verificată. Nesatisfacerea acestei condiții conduce la o instabilitate pronunțată a calculelor sau la o întrerupere a acestora prin anularea unora din termenii t_{ii}.

Imposibilitatea previzibilității unei instabilități pronunțate a calculelor, constituie o deficiență importantă a algoritmului (3), în cazul unei matrice oarecare A_1. În diferite publicații [1] — [4] s-au indicat unele procedee în vederea eliminării acestei deficiențe. Aceste procedee, mai mult sau mai puțin satisfăcătoare în general și atrăgînd bineînțeles un surplus de calcule, nu pot fi utilizate în cazul matricelor tridiagonale, deoarece conduc la pierderea imediată a formei inițiale tridiagonale și deci la sporirea însemnată a volumului de operații aritmetice pe fiecare treaptă de iterație.

O situație favorabilă din acest punct de vedere o posedă matricele simetrice, pozitiv definite, deoarece la acestea se poate utiliza factorizarea simetrică a lui Cholesky :

$$\begin{aligned} A_1 &= C_1 = R_1 R_1', \\ R_1' R_1 &= C_2 = R_2 R_2', \\ &\cdots\cdots\cdots, \\ R_{k-1}' R_{k-1} &= C_k = R_k R_k', \\ &\cdots\cdots\cdots, \end{aligned} \tag{6}$$

unde matricele R_k sînt triunghiulare inferioare, iar prin R_k' se înțelege matricea transpusă matricei R_k.

Acest algoritm are la fel ca și algoritmul (3), proprietatea de a păstra forma inițială tridiagonală a matricei A_1, iar Wilkinson [4] arată că folosirea procedeului lui Cholesky asigură fără excepții, stabilitatea calculelor la matricele simetrice și pozitiv definite.

În cazul de față, proprietățile menționate ale algoritmului (6) pot fi folosite întotdeauna, deoarece matricea A din ecuația (1) este pozitiv definită.

★

Așa cum s-a arătat mai înainte, algoritmul (3) este rar utilizat în practică, atît datorită volumului mare de calcule implicate, cît și defi-

cienților de stabilitate în unele cazuri. Obiectul acestei lucrări constă tocmai în „reconsiderarea" acestei metode care, împreună cu proprietățile semnalate ale metodei Cholesky, poate conduce în cazul matricelor tridiagonale provenite din studiul dinamic al sistemelor elastice, la o metodă iterativă simplă, stabilă și necesitînd un volum redus de calcule.

3. STABILIREA ALGORITMULUI DE CALCUL AL FRECVENȚELOR PROPRII LA SISTEMELE AVÎND MASE CONCENTRATE DISPUSE ÎN LANȚ

Se știe că algoritmul lui Cholesky necesită extragerea de rădăcini pătrate pentru calculul elementelor de pe diagonala principală. Acest lucru poate fi evitat în cazul matricelor tridiagonale, dacă cele două șiruri de matrice triunghiulare se pun sub forma

$$S_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ s_2^{(k)} & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_3^{(k)} & 1 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & s_{n-1}^{(k)} & 1 & 0 \\ . & . & . & . & 0 & s_n^{(k)} & 1 \end{bmatrix}, \quad T_k = \begin{bmatrix} t_1^{(k)} & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_2^{(k)} & 1 & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t_3^{(k)} & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & t_{n-1}^{(k)} & 1 \\ . & . & . & . & 0 & 0 & t_n^{(k)} \end{bmatrix} \tag{7}$$

păstrîndu-se notațiile și succesiunea iterațiilor din formulele (3). Astfel identificînd elementele matricelor din (3) și ținînd seama de (2), rezultă următoarele relații între elementele matricelor S_k și T_k în treptele succesive de calcul:

$$\text{Treapta (1): } S_1 T_1 = A_1 \begin{cases} & t_1^{(1)} = a_1, \\ t_1^{(1)} s_2^{(1)} = b_1^2, & s_2^{(1)} + t_2^{(1)} = a_2, \\ t_2^{(1)} s_3^{(1)} = b_2^2, & s_3^{(1)} + t_3^{(1)} = a_3, \\ t_3^{(1)} s_4^{(1)} = b_3^2, & s_4^{(1)} + t_4^{(1)} = a_4, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases} \tag{8a}$$

$$\text{Treapta (2): } S_2 T_2 = T_1 S_1 \begin{cases} & t_1^{(2)} = s_2^{(1)} + t_1^{(1)}, \\ s_2^{(2)} t_1^{(2)} = s_2^{(1)} t_2^{(1)}, & s_2^{(2)} + t_2^{(2)} = s_3^{(1)} + t_2^{(1)}, \\ s_3^{(2)} t_2^{(2)} = s_3^{(1)} t_3^{(1)}, & s_3^{(2)} + t_3^{(2)} = s_4^{(1)} + t_3^{(1)}, \\ s_4^{(2)} t_3^{(2)} = s_4^{(1)} t_4^{(1)}, & s_4^{(2)} + t_4^{(2)} = s_5^{(1)} + t_4^{(1)}. \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{cases} \tag{8b}$$

Iterația se sistează în momentul cînd elementele matricei S_k din treapta (k) de iterație, devin suficient de mici, față de precizia impusă

a calculelor. Din relațiile precedente se vede că dacă de exemplu $s_i^{(k)} = 0$, atunci $s_i^{(l)} = 0$, pentru orice $l > k$. O posibilitate de schematizare a calculelor este indicată în tabloul din figura 1. În această schemă de calcule, s-au pus în evidență două cicluri de operații aritmetice care trebuiesc efectuate.

Unul din cicluri constă dintr-o adunare și o scădere, de exemplu:

$$s_3^{(1)} + t_2^{(1)} - s_2^{(2)} = t_2^{(2)},$$
$$s_3^{(3)} + t_2^{(3)} - s_2^{(4)} = t_2^{(4)}.$$

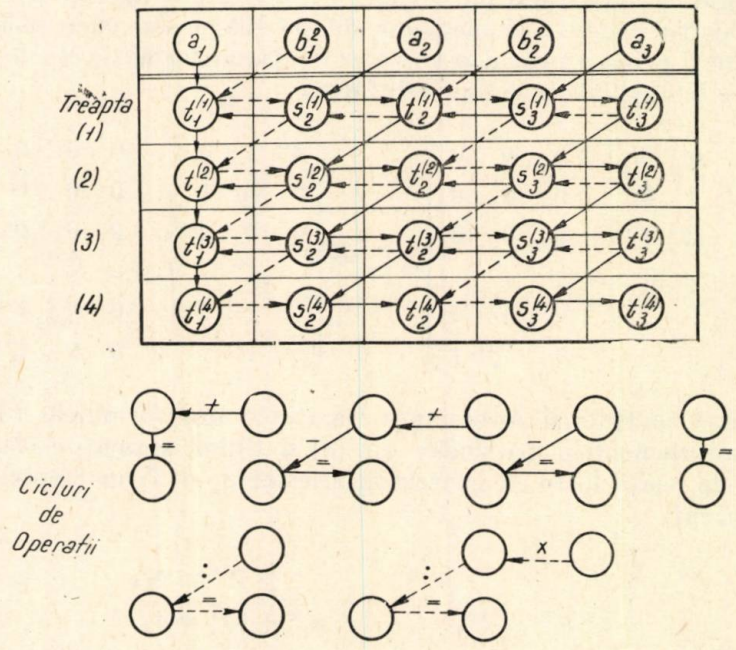


Fig. 1

Alt ciclu constă dintr-o înmulțire și o împărțire, de exemplu:

$$(t_2^{(1)} \cdot s_2^{(1)}) : t_1^{(2)} = s_2^{(2)},$$
$$(t_3^{(2)} \cdot s_3^{(2)}) : t_2^{(3)} = s_3^{(3)}.$$

Excepție fac următoarele cicluri prescurtate:

— primul ciclu din treapta (1), care constă dintr-o simplă egalitate, neimplicînd deci nici o operație aritmetică;

— celelalte cicluri din treapta (1), precum și ultimul ciclu din fiecare treaptă, afară de treapta (1), la care rămîne numai ultima din cele două operații;

— primul ciclu din fiecare treaptă, afară de treapta (1), la care se efectuează numai prima operație aritmetică.

În vederea înlesnirii organizării calculelor, este necesar să se observe că:

— toţi termenii „s" se calculează cu ciclul înmulţire — împărţire;

— toţi termenii „t" se calculează cu ciclul adunare — scădere.

Numărul de operaţii aritmetice necesare pentru k trepte de iteraţie este:

— adunări, scăderi . .$(2k-1).(n-1)$,

— înmulţiri, împărţiri . . . $2k(n-1)$, unde s-a notat cu n, ordinul matricei iniţiale.

★

Vom arăta că în cazul matricelor tridiagonale, proprietăţile iteraţiei (6), unde R_k are forma

$$R_k = \begin{bmatrix} r_1^{(k)} & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ \rho_1^{(k)} & r_2^{(k)} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2^{(k)} & r_3^{(k)} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & r_{n-1}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & \rho_{n-1}^{(k)} & r_n^{(k)} \end{bmatrix} \tag{9}$$

sînt identice cu acelea ale iteraţiei (3).

Într-adevăr, matricele $A_1, A_2, \ldots$ sînt asemenea între ele şi sînt în acelaşi timp asemenea cu $A_1 = C_1, C_2, \ldots$ Prin urmare C_k poate fi obţinută din A_k printr-o transformare de asemănare cu o matrice D_k care este o matrice diagonală, ţinînd seama că A_k şi C_k îşi păstrează forma tridiagonală pentru $k = 1,2, \ldots$ Adică

$$C_k = D_k A_k D_k^{-1}, \tag{10}$$

unde

$$C_k = \begin{bmatrix} c_1^{(k)} & d_1^{(k)} & 0 & . & 0 & 0 \\ d_1^{(k)} & c_2^{(k)} & d_2^{(k)} & . & 0 & 0 \\ 0 & d_2^{(k)} & c_3^{(k)} & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & c_{n-1}^{(k)} & d_{n-1}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & . & d_{n-1}^{(k)} & c_n^{(k)} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Relaţia (10) conduce la următoarele relaţii între elementele matricelor C_k şi A_k:

$$\begin{aligned} c_i^{(k)} &= a_i^{(k)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \\ d_i^{(k)2} &= b_i^{(k)2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{12}$$

Prin urmare elementele diagonalei principale şi produsele între elementele opuse de pe cele două diagonale secundare sînt respectiv egale în A_k şi C_k. Din treptele succesive de iteraţie cu matricele S_k şi T_k, for-

mulele (8) arată însă că se stabilesc aceleaşi tipuri de egalităţi (între elementele diagonalelor principale şi între produsele elementelor opuse de pe cele două diagonale secundare) pentru A_1 cu A_2, A_2 cu A_3, etc. Rezultă deci că în cazul matricelor tridiagonale, utilizarea algoritmului (3) asigură stabilitatea calculelor, dacă matricea dată A_1 este pozitiv definită şi simetrică.

Exemplu de calcul

Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

avînd valorile proprii : $\lambda_1 = 4{,}46$; $\lambda_2 = 2{,}26$; $\lambda_3 = 0{,}30$.

Calculele sînt efectuate pe tabloul din figura 2.

4	1	2	1	1			
①	4	0,25	1,75	0,571	0,425		
	②	4,25	0,103	2,22	0,111	0,318	
		③	4,35	0,053	2,28	0,016	0,303
			④	4,41	0,027	2,26	0,002	0,301

Fig. 2

Se observă că deja după treapta a doua de iteraţie, rezultatele obţinute sînt destul de bune şi anume, pentru λ_1, cu o eroare de -5%, pentru λ_2 cu o eroare de -5%, iar pentru λ_3 cu o eroare de $+6{,}6\%$.

Continuînd încă două trepte de iteraţie, valorile pentru λ_1 şi λ_2 s-au obţinut practic exacte (la precizia riglei de calcul), iar pentru λ_3 a rămas o eroare de $-1{,}1\%$.

4. CONSIDERAŢII ASUPRA RAPIDITĂŢII CONVERGENŢEI CALCULELOR ŞI METODE PENTRU ÎMBUNĂTĂŢIREA ACESTORA

S-a arătat în legătură cu formulele (4), (5) că rapiditatea convergenţei depinde de dispersarea valorilor proprii ale matricei date. Această convergenţă nu intră însă în funcţiune întotdeauna încă din prima treaptă de iteraţie. Ţinînd seama că valorile proprii se „aşează" pe diagonala principală în ordinea descrescătoare a valorilor lor şi că elementele diagonalei principale ale matricei A_1 se transformă treptat apropiindu-se asimptotic de valorile proprii ale matricei A_1 care apar şi pe diagonala principală a matricelor T_k, este evident că ordinea elementelor diagonalei

principale ale matricei A_1 este cea mai favorabilă pentru succesiunea calculelor, dacă aceste elemente sînt dispuse de asemenea în ordine descrescătoare. Numai în acest caz favorabil, convergența indicată de formulele (4), (5) poate intra în funcție. Acest caz favorabil a fost ilustrat prin exemplul anterior de calcul.

În cazurile în care elementele diagonalei principale ale matricei date nu sînt dispuse în ordinea valorii lor descrescătoare, convergența intră în funcțiune numai după restabilirea ordinei valorilor elementelor $t_i^{(k)}$.

Dacă ordinea „normală" a termenilor a_i este tulburată numai de unul singur dintre aceștia, de exemplu de termenul a_j, se observă pe schema din figura 1, că sînt necesare $(j + 1)$ trepte prealabile de iterație, pentru a se restabili complet o ordine „normală" a valorilor termenilor t_k.

La matrice oarecare, este posibilă întotdeauna o rearanjare a ecuațiilor sistemului de ecuații (1), în vederea obținerii unei ordini descrescătoare a valorilor elementelor a_{ii}, însă la matricele tridiagonale, această operație nu se poate efectua fără pierderea formei inițiale tridiagonale.

BIBLIOGRAFIE

1. H. Rutishauser, *Une méthode pour la détermination des valeurs propres d'une matrice*, C. r. Acad. sci. **240**, *1* (1955).
2. V. V. Voevodin, *Cislenie metodi alghebri*, Moscova, 1966.
3. D. K. Fadeev, V. N. Fadeeva, *Vicislitelnie metodi lineinoi alghebri*, Moscova, 1960.
4. J. H. Wilkinson, *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford, 1965.

FLAMBAJUL LATERAL AL GRINZILOR PENDULARE ȚINÎND SEAMA ȘI DE SOLICITAREA DE RĂSUCIRE A ACESTORA

de A. PETRE și V. DROBOTĂ
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

539.4

Se studiază flambajul lateral al grinzilor pendulare susținute pe două reazeme și încărcate cu o sarcină concentrată pe mijlocul deschiderii, stabilindu-se relația care dă sarcina critică.
La stabilirea acestei relații s-a luat în considerație și răsucirea ce se produce după pierderea stabilității elastice.

Se consideră o grindă de rigiditate transversală mică suspendată la capete și încărcată cu o sarcină concentrată la mijloc. Reazemele se presupun că permit rotiri în toate sensurile precum și deplasări în lungul barei.

Se presupune că reazemele se găsesc la distanța e de axa grinzii, iar forța de la mijlocul ei se găsește la distanța $h-e$ de aceeași linie. Distanțele menționate se măsoară pe verticală pentru grinda considerată nedeformată. Se presupune de asemenea că punctele de aplicație ale tuturor forțelor exterioare se găsesc pe una din direcțiile principale de inerție a secțiunii transversale, direcție presupusă inițial cuprinsă în plan vertical.

Pentru valori mici ale forței P grinda rămîne în planul vertical, singurele deformații care se produc fiind cele datorită încovoierii în acest plan. Crescînd forța P, se ajunge la o valoare critică P_{cr} pentru care poziția grinzii în plan vertical devine labilă și grinda poate lua și rămîne într-o nouă poziție rotită în jurul liniei ce conține cele două reazeme, încovoiată lateral și răsucită, ca în figura 1.

Dacă se depășește cu puțin valoarea forței critice deformațiile devin mari și sistemul redevine stabil sub această nouă formă mult deformată.

Pentru calculul forței critice se consideră o secțiune situată la mijlocul grinzii deformată ca în figura 2. Neglijînd efectele greutății proprii în raport cu forța aplicată, momentele încovoietoare față de direcțiile

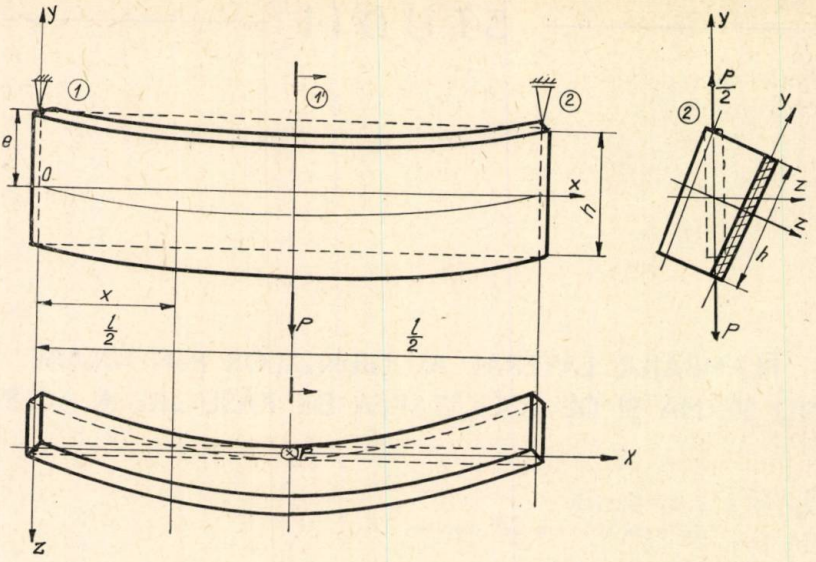

y
①
①
②
②
e
0
x
f
x
l/2
P
l/2
X
z
y
P/2
y
z
z
h
P

Fig. 1

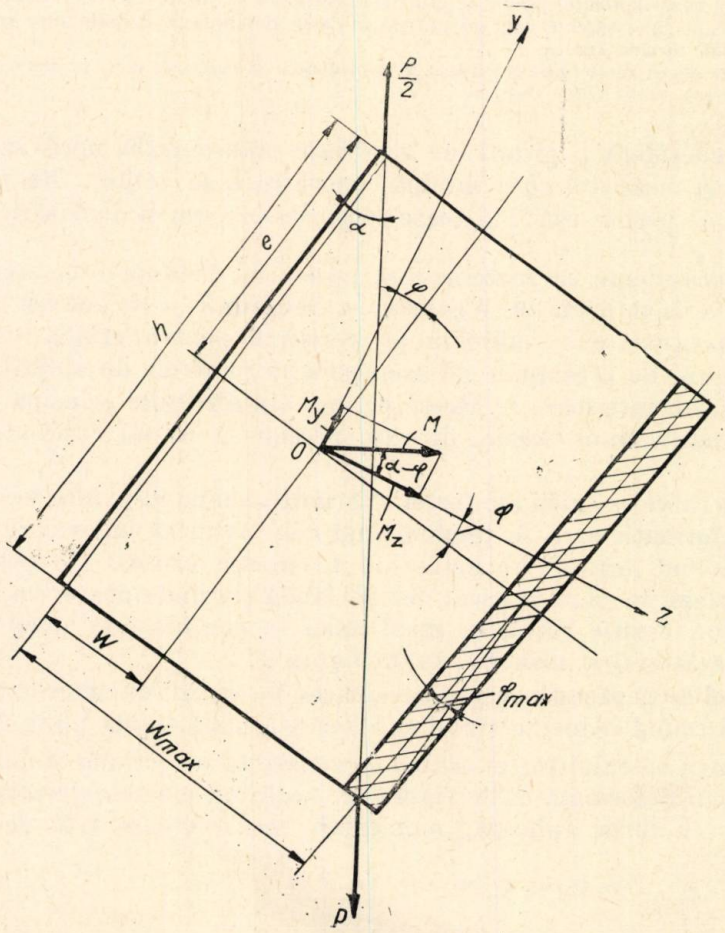

y
P/2
e
α
h
φ
My
M
0
α-φ
φ
Mz
z
w
φmax
wmax
p

Fig. 2

principale de inerție ale secțiunii transversale precum și cel de răsucire vor avea expresiile

$$M_y = M \sin(\alpha - \varphi) = \frac{P}{2} x \sin(\alpha - \varphi),$$

$$M_z = M \cos(\alpha - \varphi) = \frac{P}{2} x \cos(\alpha - \varphi), \tag{1}$$

$$M_x = \frac{P}{2}\left(e \sin\alpha - w \cos\alpha + x \frac{dw}{dx} \cos\alpha\right).$$

S-a notat cu w deformația grinzii produsă prin încovoiere laterală, pentru o secțiune situată la distanța x de reazemul *1* considerat origină, la nivelul fibrei medii deformate a grinzii, măsurată pe axa Oz, considerînd drept origină axa Oy a secțiunii din dreptul reazemului *1*. S-a notat cu α, unghiul pe care îl face cu verticala axa Oy a secțiunii din dreptul reazemului *1*, care reprezintă unghiul cu care această axă s-a rotit, după deformarea grinzii față de poziția sa inițială (grinda nedeformată). S-a notat cu φ unghiul variabil în lungul grinzii cu care se rotește, datorită răsucirii axa Oy a unei secțiuni oarecare față de aceeași axă situată în planul secțiunii din dreptul reazemului *1*.

Deoarece se presupune că rigiditatea EI_z este mult mai mare decît rigiditatea EI_y, se vor neglija deformațiile produse pe direcția axei Oy.

Ecuațiile de deformație, respectiv, de încovoiere laterală și răsucire vor fi

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{2} x \sin(\alpha - \varphi), \tag{2}$$

$$GI_d \frac{d\varphi}{dx} = \frac{P}{2}\left(e \sin\alpha - w \cos\alpha + x \frac{dw}{dx} \cos\alpha\right).$$

Considerînd cazul micilor deformații, cele două ecuații de mai sus se vor scrie

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{2} x(\alpha - \varphi), \tag{3}$$

$$GI_d \frac{d\varphi}{dx} = \frac{P}{2}\left(e\alpha - w + x \frac{dw}{dx}\right). \tag{4}$$

Se observă că derivînd ecuația de răsucire, între cele două ecuații se poate elimina deformația w. Se obține astfel

$$GI_d \frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{P}{2} x \frac{d^2w}{dx^2}, \tag{5}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{P^2}{4GI_d EI_y} x^2(\alpha - \varphi). \tag{6}$$

Notînd

$$\frac{P^2 l^4}{4GI_d EI_y} = a^2 \tag{7}$$

şi efectuînd schimbarea de variabilă

$$s = \frac{x}{l}, \tag{8}$$

ecuaţia (6) se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}s^2} - a^2 s^2 \varphi = - a^2 s^2 \alpha. \tag{9}$$

Soluţia acestei ecuaţii va fi

$$\varphi = AU_1(as, 2) + BU_2(as, 2) + \alpha, \tag{10}$$

unde U_1 şi U_2 reprezintă funcţiile lui Airy. Expresiile acestor funcţii dezvoltate în serie sînt

$$\begin{aligned} U_1(as, 2) &= 1 + \frac{a^2 s^4}{1\,!\,4.3} + \frac{a^4 s^8}{2\,!\,4^2.3.7} + \frac{a^6 s^{12}}{3\,!\,4^3.3.7.11} + \ldots, \\ U_2(as, 2) &= as\left[1 + \frac{a^2 s^4}{1\,!\,4.5} + \frac{a^4 s^8}{2\,!\,4^2.5.9} + \frac{a^6 s^{12}}{3\,!\,4^3.5.9.13} + \ldots\right]. \end{aligned} \tag{11}$$

Funcţiile Airy pot de asemenea fi exprimate prin funcţii Bessel astfel

$$\begin{aligned} U_1(z, 2) &= 4^{-\frac{1}{4}}\,\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\sqrt{z}\,J_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right), \\ U_2(z, 2) &= 4^{\frac{1}{4}}\,\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt{z}\,J_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2}z^2\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Determinarea celor două constante de integrare A şi B se va face utilizînd condiţii la limită. Considerînd originea în unul din reazeme, condiţiile de deformaţie ce se pot scrie vor fi de forma

$$\begin{aligned} s &= 0, \\ \varphi(0) &= AU_1(0, 2) + BU_2(0,2) + \alpha = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

de unde, ţinînd seama de (11), rezultă

$$A = - \alpha \tag{14}$$

i respectiv

$$\begin{aligned} s &= 0, \\ GI_d \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} &= \frac{P}{2} e\alpha. \end{aligned} \tag{15}$$

Din această ultimă condiție, ținînd seama de (10) și (11), se obține

$$GI_d \frac{d\varphi}{dx} = \frac{P}{2} e\alpha,$$

de unde, utilizînd notația (7), rezultă

$$B = \frac{e}{l} \sqrt{\frac{EI_y}{GI_d}} \alpha, \tag{16}$$

astfel încît unghiul de răsucire va avea expresia

$$\varphi = \alpha \left[- U_1(as, 2) + \frac{e}{l} \sqrt{\frac{EI_y}{GI_d}} U_2(as, 2) + 1 \right]. \tag{17}$$

Deoarece variabila aleasă s variază între 0 și $\frac{1}{2}$ din dezvoltările funcțiilor Airy se poate păstra fără erori prea mari numai primul termen. Expresia unghiului de răsucire va fi

$$\varphi = \frac{e}{l} \sqrt{\frac{EI_y}{GI_d}} as\alpha. \tag{18}$$

Introducînd această expresie în ecuația (3) rezultă

$$EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{P}{2} x\alpha \left[1 - \frac{Pe}{2GI_d} x \right]. \tag{19}$$

Integrînd de două ori această ecuație se obține

$$\begin{aligned} EI_y \frac{dw}{dx} &= -\frac{P}{4} x^2\alpha \left[1 - \frac{Pe}{3GI_d} x \right] + C_1, \\ EI_y w &= -\frac{P}{12} x^3\alpha \left[1 - \frac{Pe}{4GI_d} x \right] + C_1 x + C_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Pentru determinarea celor două constante de integrare C_1 și C_2 se pun condițiile că în origine deplasarea w este nulă, iar la mijlocul grinzii tangenta unghiului de rotire produs de încovoiere este nul. Din prima condiție se găsește

$$\begin{aligned} x &= 0, \\ w &= 0, \end{aligned} \qquad C_2 = 0, \tag{21}$$

iar din a doua rezultă

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2}, \\ \frac{dw}{dx} &= 0, \end{aligned} \qquad C_1 = \frac{Pl^2}{16EI_y} \alpha \left[1 - \frac{Pel}{6GI_d} \right]. \tag{22}$$

Expresia săgeții va fi deci de forma

$$w = -\frac{P}{12EI_y} x^3\alpha \left[1 - \frac{Pe}{4GI_d} x \right] + \frac{Pl^2}{16EI_y} x\alpha \left[1 - \frac{Pel}{6GI_d} \right], \tag{23}$$

avînd drept valoare maximă pentru $x = \frac{l}{2}$ valoarea

$$w_{max} = \frac{Pl^3\alpha}{48EI_y}\left[1 - \frac{3}{16}\frac{Pel}{GI_d}\right]. \tag{24}$$

Din figura 2 se observă că cele trei mărimi care intervin respectiv α, φ_{max} și w_{max} nu sînt independente. Între aceste mărimi există relația evidentă

$$w_{max} = h\,\mathrm{tg}\alpha + \varphi_{max}(h - e) \approx h\alpha + \varphi_{max}(h - e). \tag{25}$$

Ținînd seama de (18) și (24) această relație devine

$$\frac{Pl^3\alpha}{48\,EI_y}\left[1 - \frac{3}{16}\frac{Pel}{GI_d}\right] = h\alpha + \frac{Pel}{4GI_d}\alpha(h - e). \tag{26}$$

Este de remarcat că această condiție are loc în cazul unghiurilor α mici, grinda suspendată în această poziție găsindu-se la limita de stabilitate.

Forța corespunzătoare acestei situații, respectiv forța critică de flambaj lateral cu rotire rigidă în lungul liniei reazemelor, se obține din (26), care se poate scrie sub forma

$$P^2 - P\left[\frac{16}{3}\frac{GI_d}{el} - \frac{16\times 4}{l^3}EI_y(h - e)\right] + \frac{16\times 48}{3}\frac{GI_d\,EI_y}{el^4}h = 0. \tag{27}$$

Dacă se notează

$$\frac{16}{3}\frac{GI_d}{el} - \frac{16\times 4}{l^3}EI_y(h - e) = 2b \quad \text{și} \quad \frac{16\times 48}{3}\frac{GI_d\,EI_y}{el}h = c.$$

soluțiile ecuației (27) sînt

$$P_f = b \pm \sqrt{b^2 - c} = b\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{c}{b^2}}\right]. \tag{28}$$

Sarcina critică se obține luînd soluția cu semnul minus.

Dezvoltînd în serie radicalul se obține

$$P = b\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{b^2} + \frac{1}{8}\frac{c^2}{b^4} + \frac{1}{16}\frac{c^2}{b^6} + \cdots\right].$$

Termenii acestei dezvoltări în serie conțin pe $\frac{c}{b^2}$ care, ținînd seama de notațiile făcute, este

$$\frac{c}{b^2} = \frac{1}{1 - 12\dfrac{EI_y}{GI_d}\dfrac{e(h-e)}{l^2}}\;\frac{3}{\dfrac{1}{12}\dfrac{GI_d}{EI_y}\dfrac{l^2}{h^2} - \dfrac{h-e}{h}} =$$

$$= \frac{1}{1 - 12\xi(1 - \xi)\dfrac{EI_y}{GI_d}\dfrac{h^2}{l^2}}\;\frac{3}{\dfrac{1}{12}\dfrac{GI_d}{EI_y}\dfrac{l^2}{h^2} - (1 - \xi)h},$$

unde $e = \xi h$.

Deoarece raportul $\frac{l}{h}$ este foarte mare $\frac{c}{b^2} \ll 1$.

Păstrînd numai primii doi termeni ai dezvoltării în serie se obține

$$P_f = b\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\,\frac{c}{b^2}\right] = \frac{1}{2}\,\frac{c}{b}. \tag{29}$$

Înlocuind în această relație pe b și c cu expresiile lor se obține pentru sarcina critică

$$P_f = \frac{48\,EI_y\,h}{l^3}\,\frac{1}{1 - 12\,\xi\,(1-\xi)\,\dfrac{EI_y}{GI_a}\,\dfrac{h^2}{l^2}}. \tag{30}$$

Dacă se păstrează din dezvoltarea în serie a radicalului din relația (28) primii trei termeni, atunci sarcina critică se obține din relația

$$P_f = \left[1 - \sqrt{1 - \frac{c}{b^2}}\right] = b\left[1 - 1 + \frac{1}{2}\,\frac{c}{b^2} + \frac{1}{8}\,\frac{c^2}{b^4}\right] = \frac{c}{2b}\left[1 + \frac{c}{4b^2}\right]$$

sau înlocuind pe b și c se obține

$$P_f = \frac{48\,EI_y h}{l^3}\,\frac{1}{1 - 12\xi\,(1-\xi)\,\dfrac{EI_y}{GI_a}\,\dfrac{h^2}{l^2}}\left[1 + \frac{9\xi\,\dfrac{EI_y}{GI_a}\,\dfrac{h^2}{l^2}}{\left[1 + 12\,\xi(1-\xi)\,\dfrac{EI_y}{GI_a}\,\dfrac{h^2}{l^2}\right]^2}\right]. \tag{31}$$

Din relațiile (30) și (31) se observă că dacă termenul

$$12\,\frac{EI_y}{GI_a}\,\frac{e(h-e)}{l^2} \ll 1$$

rezultatul obținut coincide cu cel găsit în lucrarea [1], unde s-a neglijat efectul deformațiilor de răsucire.

DOMENIUL DE VALABILITATE AL RELAȚIILOR CE DAU SARCINA CRITICĂ

Relațiile (30) și (31) sînt valabile în domeniul elastic pentru care se poate scrie că

$$\sigma = \frac{P_f\,l}{4W_z} \leqslant \sigma_c. \tag{32}$$

Înlocuind pe P_f din relația (30) și punînd $W_z = \dfrac{I_z}{\zeta h}$ se obține

$$\sigma = \frac{12\,E\zeta}{\eta^2\left[1 - 12\,\dfrac{E}{G}\,\dfrac{I_z}{I_a}\,\xi\,(1-\xi)\,\dfrac{1}{\eta^2}\right]} = \frac{A}{\lambda^2}, \tag{33}$$

unde

$$A = 12\,E\zeta\,;\ \lambda^2 = \eta^2\left[1 - 12\,\frac{E}{G}\,\frac{I_z}{I_a}\,\xi\,(1-\xi)\,\frac{1}{\eta^2}\right] \text{ și } \frac{I_y}{I_z}\,\frac{h^2}{l^2} = \frac{1}{\eta^2}.$$

Relația (33) reprezintă o hiperbolă de gradul al treilea.

Relația (33) este valabilă pentru valori ale lui $\sigma \leqslant \sigma_c$, respectiv pentru valori ale lui $\lambda \geqslant \lambda_0$, unde $\lambda_0 = \sqrt{\frac{A}{\sigma_c}}$.

Folosind pentru sarcina critică P_f relația (31), păstrînd celelalte notații de mai sus, se obține pentru σ relația

$$\sigma = \frac{A}{\lambda^2} \text{ unde } A = 12\,E\zeta \text{ și}$$

$$\lambda^2 = \eta^2\left[1 - 12\,\frac{E}{G}\,\frac{I_z}{I_a}\,\xi\,(1-\xi)\,\frac{1}{\eta^2}\right]\frac{1}{1 + \dfrac{9\,\xi\,\dfrac{1}{\eta^2}\,\dfrac{EI_z}{GI_a}}{1 + 12\,\xi\,(1-\xi)\,\dfrac{1}{\eta^2}\,\dfrac{EI_z}{GI_a}}}. \tag{34}$$

De asemenea relația (34) este valabilă pentru valori ale lui $\sigma \leqslant \sigma_c$ respectiv pentru $\lambda \geqslant \lambda_0$, unde λ_0 se determină din relația

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{A}{\sigma_c}}.$$

BIBLIOGRAFIE

1. A. Petre, V. Drobotă, *Flambajul lateral al grinzilor continue pendulare*, St. cerc. mec. apl., Edit. Academiei, **16**, *4* (1964).

CALCULUL PLASTIC AL PLANŞEELOR CASETATE DE BETON ARMAT[1])

de VALERIU PETCU
Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti

539.4

În lucrare se studiază comportarea în domeniul plastic a planşeelor casetate de beton armat de formă dreptunghiulară, cu grinzi ortogonale, avînd casetele egale între ele. Prin utilizarea criteriului redistribuţiei minime a momentelor se stabilesc valorile momentelor plastice şi ale forţelor tăietoare plastice pentru toate variantele de planşee casetate alcătuite din 2×2 pînă la 10×7 casete. Pe baza rezultatelor obţinute se prezină reguli simple pentru calculul plastic al acestor structuri, ţinîndu-se seama de condiţia privind comportarea elastică a armăturii sub acţiunea sarcinilor de exploatare.

I. INTRODUCERE

În prezent, calculul static al planşeelor casetate de beton armat, cu grinzi ortogonale, se face în domeniul elastic, recurgîndu-se, de regulă, la următoarele ipoteze simplificatoare :

— se neglijează conlucrarea dintre grinzile şi plăcile planşeelor, calculul acestor elemente de construcţie făcîndu-se separat ;

— grinzile pe de cele două direcţii ale planşeelor alcătuiesc reţele, care sînt solicitate în noduri de forţe perpendiculare pe planul lor. Aceste forţe provin din concentrarea la noduri a sarcinilor permanente şi temporare aferente fiecărui nod ;

— plăcile planşeelor se consideră continue pe toată suprafaţa acestora, grinzile constituind reazeme rigide pentru plăci.

Din examinarea rezultatelor furnizate de calculul static în domeniul elastic, efectuat pe baza ipotezelor de mai sus, se deduc următoarele concluzii :

— la planşeele cu cel mult trei casete pe fiecare direcţie se obţin capacităţi portante mai mici decît cele date de calculul static în domeniul plastic ;

[1]) Publicată şi în „Rev. roum. sci. techn. — Mécanique Appliquée" *5* (1968) (în limba engleză).

— pe direcțiile pe care planșeele au mai mult decît patru grinzi, se obțin mari diferențe între momentele încovoietoare maxime ale grinzilor centrale și cele ale grinzilor marginale. Aceasta face ca în unele cazuri să fie necesară utilizarea unei armături constructive suplimentare în grinzile marginale, pentru realizarea unei armări raționale a planșeelor.

Inconvenientele cuprinse în aceste două concluzii pot fi eliminate prin utilizarea calculului static în domeniul plastic, deoarece acesta pune în valoare posibilitățile reale ale planșeelor casetate de a rezista la acțiunea sarcinilor ce le revin și permite utilizarea unui sistem simplu de armare, în care armătura fiecărei grinzi este luată în considerație cu întreaga ei capacitate de rezistență.

Ținînd seama de cele de mai sus, în cele ce urmează se studiază comportarea în domeniul plastic a planșeelor casetate de formă dreptunghiulară, cu grinzi ortogonale, avînd casetele egale între ele, în vederea stabilirii elementelor necesare pentru proiectarea acestor structuri, ținînd seama de redistribuția plastică a momentelor care precede ruperea lor. În acest scop sînt luate în considerație toate variantele de planșee alcătuite din 2×2 pînă la 10×7 casete.

La stabilirea schemelor geometrice ale acestor planșee s-a avut în vedere ca atît raportul dintre latura mare și latura mică ale planșeelor, cît și raportul dintre latura mare și latura mică ale casetelor, să nu depășească valoarea 1,5, latura mare a casetelor fiind întotdeauna paralelă cu latura mare a planșeelor [4].

Aceste limitări apar datorită faptului că, în domeniul elastic, pentru valori mai mari decît 1,5 ale rapoartelor menționate mai sus, sarcinile sînt preluate în cea mai mare parte de grinzile de pe direcția laturii mici a planșeelor, iar comportarea plăcii fiecărei casete se apropie de cea a plăcii armate numai pe direcția laturii mici.

Studiul are la bază principiile metodei de calcul la stări limită [9]

II. IPOTEZE DE CALCUL

Comportarea în domeniul plastic a planșeelor casetate de beton armat se studiază în următoarele ipoteze :

1. Planșeele se consideră simplu rezemate pe tot conturul, colțurile lor fiind împiedicate să se ridice de pe reazeme.

2. Planșeele sînt solicitate de sarcini permanente și temporare, distribuite uniform pe toată suprafața lor. Sarcina permanentă a fiecărui planșeu se consideră constantă și egală cu valoarea ei de calcul. Sarcina temporară a fiecărui planșeu, aplicată static, poate varia de la valoarea ei normată la valoarea ei de calcul.

3. Ruperea planșeelor se produce prin transformarea lor în mecanisme sub acțiunea sarcinilor permanente și temporare luate cu valorile lor de calcul, ca urmare a formării unui număr suficient de articulații plastice în grinzile planșeelor și a unui număr suficient de linii de rupere pe suprafețele plăcilor casetelor.

4. Articulațiile plastice se formează pe grinzi numai în dreptul nodurilor rețelelor.

5. Grinzile de pe fiecare direcție au capacitatea de a suporta același moment plastic.

6. Pe fiecare direcţie, momentul plastic al grinzilor este proporţional cu momentul elastic maxim al grinzii centrale, produs de sarcinile permanente şi temporare luate cu valorile lor de calcul.

7. La stabilirea capacităţii portante a planşeelor se neglijează influenţa momentelor de torsiune care solicită grinzile.

8. La planşeele formate din 2×2, 3×2 şi 3×3 casete, forţele tăietoare plastice se obţin din ecuaţiile de echilibru plastic al grinzilor, la care se adaugă condiţia de proporţionalitate dintre momentele plastice şi momentele elastice maxime ale grinzilor centrale, produse de sarcinile permanente şi temporare luate cu valorile lor de calcul, factorul de proporţionalitate fiind acelaşi pe ambele direcţii.

În cele de mai sus, prin forţă tăietoare plastică se înţelege forţa tăietoare la marginea unui reazem, corespunzătoare transformării grinzii respective în mecanism.

9. La planşeele formate din mai mult de 3×3 casete, forţele tăietoare plastice se determină în ipoteza comportării elastice a reţelelor de grinzi sub acţiunea sarcinilor care produc prima articulaţie plastică în aceste reţele.

10. În stadiul de mecanism al planşeelor, grinzile de pe fiecare direcţie au aceeaşi diagramă de momente încovoietoare şi aceeaşi diagramă de forţe tăietoare.

11. Capacitatea portantă a plăcii fiecărei casete nu se epuiează înainte de transformarea întregului planşeu în mecanism.

12. Momentul plastic pozitiv, pe unitatea de lăţime, se presupune constant pe toată suprafaţa plăcilor casetelor şi avînd aceeaşi valoare pe ambele direcţii ale plăcilor.

De asemenea, momentul plastic negativ, pe unitatea de lungimei se presupune constant pe toată lungimea reazemelor plăcilor casetelor şi egal, în valoare absolută, cu momentul plastic pozitiv al plăcilor.

13. Se neglijează influenţa favorabilă a momentelor încovoietoare pozitive care acţionează pe lungimea liniilor de rupere pozitive formate în unele zone de contact dintre plăci şi grinzi.

La baza adoptării ipotezelor enumerate mai sus stau următoarele consideraţii :

1. Rezemarea planşeelor casetate se face întotdeauna prin intermediul unei centuri. Rigiditatea la torsiune a grinzilor acestei centuri este practic neînsemnată, astfel încît nu se poate conta pe o încastrare elastică a grinzilor planşeelor la extremităţile lor. În acelaşi timp însă, centura împiedică ridicarea colţurilor de pe reazeme, sub acţiunea sarcinilor.

2. În mod obişnuit, planşeele casetate sînt solicitate de sarcini uniform distribuite sau de sarcini care pot fi echivalate cu sarcini uniform distribuite. De aceea, ipoteza de încărcare cea mai defavorabilă se realizează în cazul în care sarcinile acţionează pe toată suprafaţa planşeelor.

3. Toate grinzile au secţiunea în formă de T, cu talpa în zona comprimată. Datorită acestui fapt, articulaţiile lor plastice au o capacitate de rotire suficient de mare pentru a asigura transformarea planşeelor în mecanisme înainte de strivirea zonei comprimate a betonului în vreuna din secţiunile critice, pentru procente de armare cel mult egale cu 2%.

În cele de mai sus, prin secţiune critică se înţelege secţiunea unei grinzi în care se formează o articulaţie plastică în stadiul care precede ruperea.

Proprietatea reţelelor de grinzi ale planşeelor casetate de a se rupe prin transformarea lor în mecanisme a fost pusă în evidenţă de studiile experimentale efectuate în cadrul Institutului politehnic Timişoara [1], [2].

4. La reţelele de grinzi de tipul celor care intră în alcătuirea planşeelor casetate, articulaţiile plastice se formează întotdeauna în punctele de intersecţie ale grinzilor [1], [2].

5. Adoptarea unui moment plastic unic pentru toate grinzile de pe aceeaşi direcţie are următoarele consecinţe favorabile :

— conduce la o armare identică a grinzilor de pe fiecare direcţie, aceasta prezentînd avantajul unei alcătuiri constructive simple şi uniforme ;

— rezultă o simplificare substanţială a calculului secţiunilor.

De asemenea, trebuie menţionat faptul că armarea identică a grinzilor de pe fiecare direcţie nu afectează, în general, latura economică a problemei, întrucît calculul static în domeniul plastic pune în valoare întreaga capacitate de rezistenţă a fiecărei grinzi.

6. La structurile de beton armat dimensionate pe baza momentelor încovoietoare date de calculul static în domeniul plastic, cele mai favorabile condiţii de rupere şi de exploatare se obţin în cazul în care calculul static este astfel efectuat, încît redistribuţia plastică de momente, necesară pentru transformarea structurilor în mecanisme, este minimă [5]. Criteriul corespunzător unui astfel de calcul se numeşte criteriul redistribuţiei minime a momentelor.

În cazul planşeelor casetate, redistribuţia minimă a momentelor are loc atunci cînd limita de curgere de calcul este atinsă simultan în armătura din secţiunile critice ale grinzilor centrale de pe fiecare direcţie. Din această condiţie rezultă proporţionalitatea dintre momentele plastice şi momentele elastice maxime ale grinzilor centrale, factorul de proporţionalitate fiind acelaşi pe ambele direcţii.

7. Momentele de torsiune care apar în grinzile planşeelor casetate sporesc capacitatea de rezistenţă a acestor structuri [8]. Deoarece acest spor este de numai 1—3%, apare justificată neglijarea efectului favorabil al momentelor de torsiune, aceasta avînd drept consecinţă simplificarea substanţială a calculului static în domeniul plastic.

8. La planşeele formate din 2×2, 3×2 şi 3×3 casete, toate articulaţiile plastice apar simultan. De aceea, forţele tăietoare ating valorile lor maxime în stadiul de mecanism al planşeelor.

9. La planşeele formate din mai mult de 3×3 casete, forţele tăietoare plastice rezultă din calculul static în domeniul elastic, efectuat în ipoteza solicitării planşeelor de sarcina permanentă de calcul şi de sarcina temporară care produce formarea primei articulaţii plastice, deoarece :

— la planşeele cu mai mult de 3×3 casete, ipoteza concentrării la noduri a sarcinilor permanente şi temporare conduce la valori ale forţelor tăietoare suficient de apropiate de cele reale ;

— după formarea primei articulaţii plastice, grinda respectivă nu mai este capabilă să preia sarcini suplimentare.

10. La rupere, grinzile de pe fiecare direcţie se consideră că au aceeaşi diagramă de momente încovoietoare şi aceeaşi diagramă de forţe tăietoare,

întrucît aceste grinzi au același moment plastic și același mecanism de rupere.

11. Placa fiecărei casete trebuie să aibă capacitatea de a suporta sarcinile de calcul care acționează pe suprafața ei. Această condiție rezultă din necesitatea evitării ruperii locale (transformării plăcii unei casete în mecanism) înainte de transformarea în mecanism a întregului planșeu.

12. În mod obișnuit, latura mare a unei casete nu depășește 2 m, iar grosimea minimă a plăcii ei este de 7 cm. Din această cauză, în marea majoritate a cazurilor armarea plăcilor casetelor rezultă pe considerente de natură constructivă. În aceste condiții, armarea identică pe ambele direcții, atît în cîmpuri cît și pe reazeme, a tuturor plăcilor casetelor, este avantajoasă prin simplitatea ei.

Deoarece la dimensionarea plăcilor se adoptă, de regulă, un braț unic de pîrghie al cuplului interior, rezultă că sistemului de armare de mai sus îi corespunde un moment plastic unic atît în cîmpurile, cît și pe reazemele plăcilor.

13. Neglijarea influenței favorabile a momentelor încovoietoare care acționează pe lungimea liniilor de rupere pozitive formate în unele zone de contact dintre plăci și grinzi este justificată de ridicarea unei părți a armăturii dîn cîmp pe reazeme, precum și de eventuala ancorare insuficientă a armăturii din cîmp pe reazeme.

III. NOTAȚII

În cadrul acestui studiu se folosesc următoarele notații :

g — sarcina permanentă de calcul, pe unitatea de suprafață ;

l_1, l_2 — laturile fiecărei casete, delimitate de axele grinzilor, l_1 fiind întotdeauna latura mare ;

l'_1, l'_2 — deschiderile de calcul ale fiecărei casete, egale cu distanța dintre fețele laterale ale grinzilor, l'_1 fiind întotdeauna deschiderea cea mai mare ;

M_{c1}, M_{c2} — momentele de calcul ale grinzilor, pe direcția laturii mari, respectiv pe direcția laturii mici a planșeului, în cazul $m > m_n$;

M_{e1}, M_{e2} — momentele elastice maxime ale grinzilor centrale, pe direcția laturii mari, respectiv pe direcția laturii mici a planșeului, produse de sarcina de densitate q_u ;

M_{n1}, M_{n2} — momentele elastice maxime ale grinzilor centrale pe direcția laturii mari, respectiv pe direcția laturii mici a planșeului, produse de sarcina de densitate q_n ;

M_{p1}, M_{p2} — momentele plastice ale grinzilor, pe direcția laturii mari, respectiv pe direcția laturii mici a planșeului ;

$\overline{M}_p$ — momentul plastic pe unitatea de lățime, în cîmpurile și pe reazemele plăcilor casetelor ;

$\overline{M}_c$ — momentul de calcul pe unitatea de lățime, în cîmpurile și pe reazemele plăcilor casetelor ;

m — coeficientul de redistribuţie al momentelor din secţiunile critice ale grinzilor centrale de pe cele două direcţii;

m_n — valoarea limită a coeficientului de redistribuţie m, pînă la care este asigurată comportarea elastică a armăturii grinzilor în stadiul de exploatare;

n_1, n_2 — numărul de casete ale planşeelor pe direcţiile laturilor l_1 şi l_2;

p_n, p_u — valorile normată şi de calcul ale sarcinii temporare, pe unitatea de suprafaţă;

p_1 — sarcina temporară pe unitatea de suprafaţă, corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul simultan în armăturile secţiunilor critice ale grinzilor centrale;

q_n — suma dintre sarcina permanentă de calcul şi sarcina temporară normată, pe unitatea de suprafaţă;

q_u — suma dintre sarcina permanentă de calcul şi sarcina temporară de calcul, pe unitatea de suprafaţă;

q_1 — suma dintre sarcina permanentă de calcul, pe unitatea de suprafaţă, şi sarcina temporară pe unitatea de suprafaţă corespunzătoare atingerii limitei de curgere de calcul simultan în armăturile secţiunilor critice ale grinzilor centrale de pe cele două direcţii;

T_{c1}, — forţă tăietoare de calcul la marginea fiecăruia dintre reazemele grinzilor de pe direcţia laturii mari a planşeului, în cazul $m > m_n$;

T_{c2} — forţa tăietoare de calcul la marginea fiecăruia dintre reazemele grinzilor de pe direcţia laturii mici a planşeului, în cazul $m > m_n$;

T_{p1} — forţa tăietoare plastică la marginea fiecăruia dintre reazemele grinzilor de pe direcţia laturii mari a planşeului;

T_{p2} — forţa tăietoare plastică la marginea fiecăruia dintre reazemele grinzilor de pe direcţia laturii mici a planşeului;

X_{c1}, Y_{c1}, Z_{c1}, ... — valorile de calcul ale fracţiunilor din sarcinile concentrate la noduri, care revin grinzilor de pe direcţia laturii mari a planşeului, în cazul $m > m_n$;

X_{c2}, Y_{c2}, Z_{c2}, ... — valorile de calcul ale fracţiunilor din sarcinile concentrate la noduri, care revin grinzilor de pe direcţia laturii mici a planşeului, în cazul $m > m_n$;

X_{p1}, Y_{p1}, Z_{p1}, ... — fracţiunile din sarcinile concentrate la noduri, care revin grinzii centrale de pe direcţia laturii mari a planşeului, determinate în ipoteza comportării elastice a reţelei de grinzi sub acţiunea sarcinii de densitate q_1;

X_{p2}, Y_{p2}, Z_{p2}, ... — fracţiunile din sarcinile concentrate la noduri care revin grinzii centrale de pe direcţia laturii mici a planşeului, determinate în ipoteza comportării elastice a reţelei de grinzi sub acţiunea sarcinii de densitate q_1;

X_p — forța de legătură dintre grinzi, în fiecare din nodurile rețelei planșeelor I, II și III, în stadiul de mecanism al acestora;

α_1, α_2 — coeficienți de influență ai momentelor M_{e1} și M_{e2};

$$q_n = g + p_n\,; \quad q_1 = g + p_1\,; \quad q_u = g + p_u\,;$$

$$\lambda = \frac{l_1}{l_2} \quad ; \quad \lambda' = \frac{l_1'}{l_2'}.$$

IV. COMPORTAREA PLASTICĂ A UNUI PLANȘEU CASETAT

Pentru exemplificare, în cele ce urmează, se stabilesc valorile momentelor plastice și ale forțelor tăietoare plastice, precum și valoarea coeficientului de redistribuție a momentelor, în cazul planșeului alcătuit din 6×4 casete (fig. 1).

Din condițiile

$$\frac{6l_1}{4l_2} \leqslant 1{,}5 \quad \text{și} \quad \frac{l_1}{l_2} \leqslant 1{,}5$$

rezultă $l_1 = l_2$.

Fie l valoarea comună a laturilor l_1 și l_2.

Calculul static al rețelei de grinzi, efectuat în domeniul elastic pe

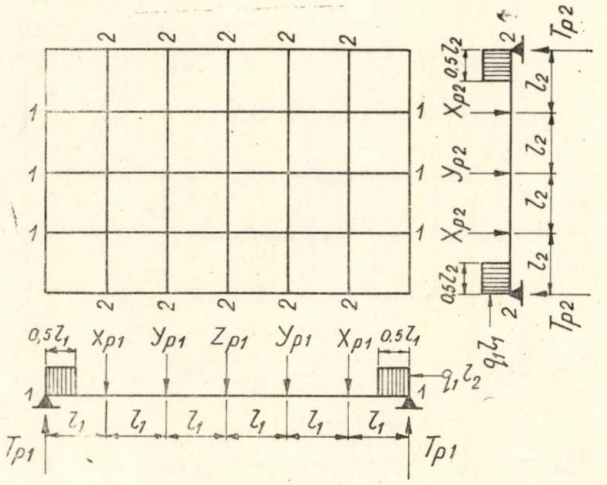


Fig. 1. — Schema de calcul a planșeului cu 6×4 casete.

baza ipotezelor expuse în capitolul introductiv, conduce la următoarele valori ale momentelor elastice maxime care solicită grinzile centrale [4]:

$$M_{e1} = 0{,}768\, q_u\, l^3 \quad ; \quad M_{e2} = 2{,}028\, q_u\, l^3. \tag{1}$$

Conform criteriului redistribuției minime a momentelor, momentele plastice ale grinzilor sînt date de relațiile

$$M_{p1} = 0{,}768\, q_1\, l^3 \quad ; \quad M_{p2} = 2{,}028\, q_1\, l^3. \tag{2}$$

Sarcina q_1, de care depind valorile momentelor plastice, se obţine din ecuaţia de echilibru plastic a planşeului. Această ecuaţie exprimă egalitatea dintre lucrul mecanic virtual produs de sarcinile de calcul şi lucrul mecanic virtual al momentelor plastice care acţionează în articula-

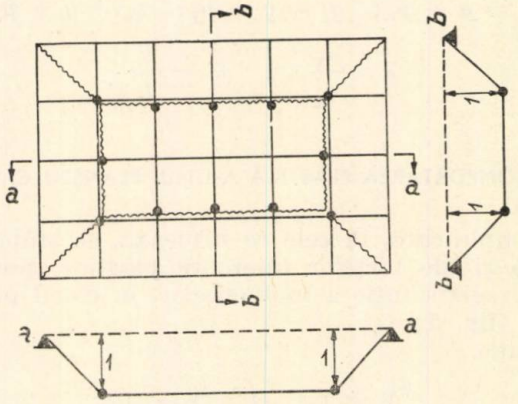


Fig. 2. — Mecanismul elementar *A*.

ţiile plastice ale grinzilor şi de-a lungul liniilor de rupere ale plăcilor casetelor, în stadiul de mecanism al planşeului.

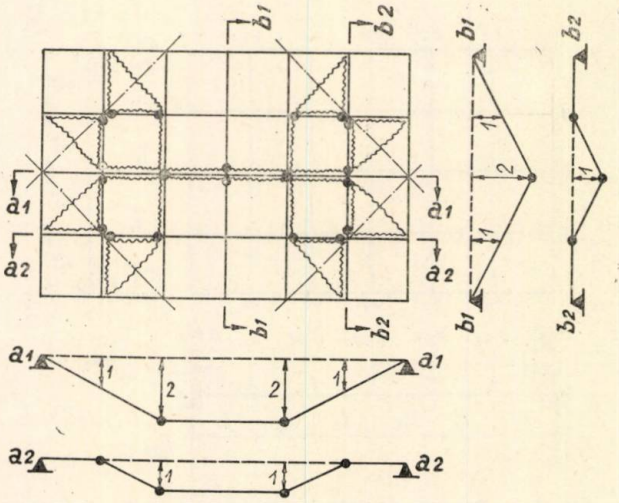


Fig. 3. — Mecanismul elementar *B*.

Teoria plastică simplă arată că dintre toate mecanismele posibile de rupere ale unei structuri solicitate de sarcini de calcul date, mecanismul real este cel pentru care momentele plastice au valori maxime [3].

Pentru stabilirea mecanismului real de rupere al planşeului considerat, s-a utilizat metoda combinării mecanismelor [3]. În acest scop s-au construit cele patru mecanisme elementare de rupere ale planşeului, notate cu *A*, *B*, *C* şi *D*, ale căror scheme sînt reprezentate în figurile 2—5.

S-au stabilit apoi caracteristicile mecanismelor de rupere rezultate din toate combinațiile posibile ale mecanismelor elementare. După aceea s-au determinat valorile momentelor plastice corespunzătoare fiecăruia dintre mecanismele elementare și combinate de rupere.

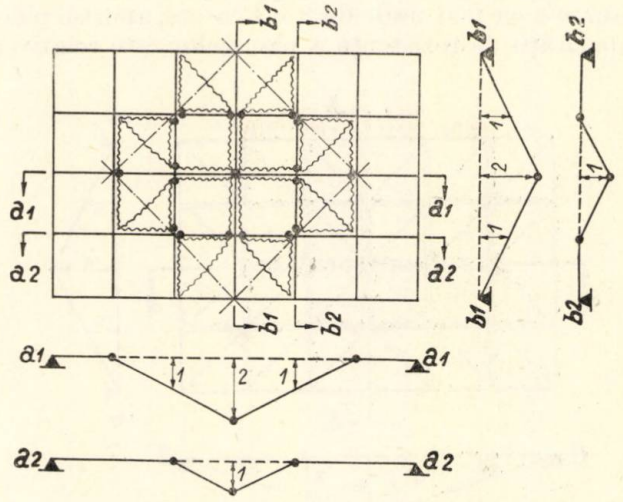


Fig. 4. — Mecanismul elementar *C*.

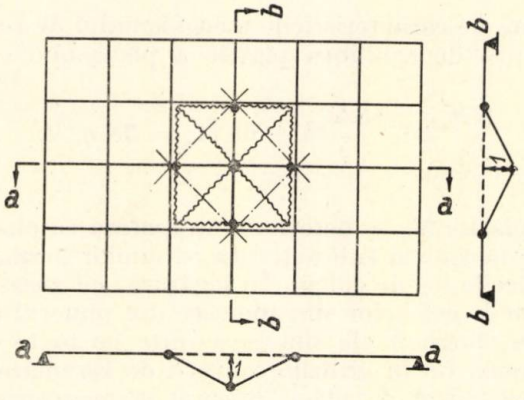


Fig. 5. — Mecanismul elementar *D*.

Rezultatele obținute au arătat că mecanismul real de rupere, căruia îi corespund valorile maxime ale momentelor plastice, este cel obținut din combinarea tuturor celor patru mecanisme elementare.

Schema acestui mecanism este dată în figura 6.

Referitor la modul de determinare a mecanismului de rupere expus mai sus, se face observația că pînă în prezent nu s-au efectuat studii experimentale pentru stabilirea modului de comportare a planșeelor casetate de beton armat în domeniul plastic. Cu toate acestea, se consideră

că rezultatele ce se obțin prin aplicarea teoriei plastice simple la determinarea capacității de rezistență a planșeelor casetate sînt corecte, deoarece :

— teoria plastică simplă este aplicabilă rețelelor de grinzi de beton armat, fapt dovedit experimental [1], [2];

— la planșeele cu mai mult de 3×3 casete, aportul plăcilor casetelor la sporirea capacității de rezistență a planșeelor este relativ mic.

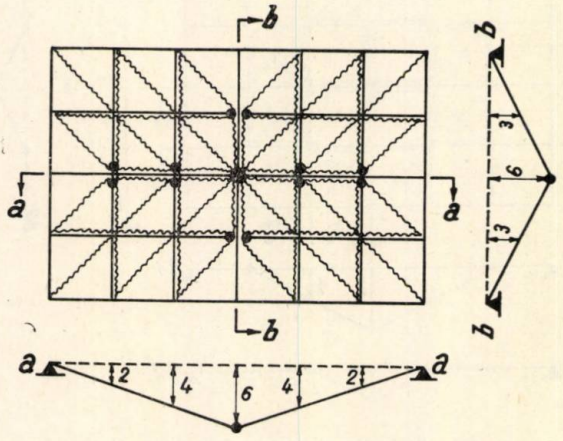


Fig. 6. — Mecanismul de rupere al planșeului.

Ținînd seama de caracteristicile mecanismului de rupere reprezentat în figura 6, ecuația de echilibru plastic a planșeului este

$$\frac{8M_{p1}}{l} + \frac{18M_{p2}}{l} + 68\,\overline{M}_p = 38\,q_u\,l^2. \tag{3}$$

Momentul plastic $\overline{M}_p$ se determină în ipoteza că placa fiecărei casete se transformă în mecanism sub acțiunea sarcinilor permanente și temporare, luate cu valorile lor de calcul. În legătură cu aceasta se face observația că toate plăcile casetelor sînt identice din punctul de vedere al modului de rezemare, întrucît ele sînt încastrate pe toate cele patru laturi fie în grinzile rețelei, fie în grinzile centurii de rezemare.

Schema unei astfel de plăci, precum și mecanismul de rupere al acesteia, sînt reprezentate în figura 7.

La stabilirea mecanismului de rupere s-a făcut aproximația că liniile de rupere care pătrund în colțuri fac unghiuri la 45° în raport cu laturile plăcii. Această aproximație este justificată de faptul că eroarea pe care o antrenează la determinarea valorii momentului $\overline{M}_p$ nu depășește 2,5% [6].

Ecuația de echilibru plastic a plăcii este

$$8\,(\lambda' + 1)\,\overline{M}_p = \frac{1}{6}\,(3\lambda' - 1)\,q_u\,l_2'^2, \tag{4}$$

de unde se deduce

$$\overline{M}_p = \frac{3\lambda' - 1}{48(\lambda' + 1)} q_u l_2'^2. \tag{5}$$

În cazul particular $l_1' = l_2' = l'$, rezultă $\lambda' = 1$ și relația (5) devine

$$\overline{M}_p = \frac{1}{48} q_u l'^2. \tag{6}$$

Făcînd în ecuația (3) înlocuirile indicate de relațiile (2) și (6), și admițînd $l' = l$, se obține

$$q_1 = 0{,}858\, q_u. \tag{7}$$

Ținînd seama de relația (7), expresiile (2) ale momentelor plastice devin

$$M_{p1} = 0{,}659\, q_u l^3 \quad ; \quad M_{p2} = 1{,}740\, q_u l^3. \tag{8}$$

Prin definiție, coeficientul de redistribuție a momentelor unei structuri de beton armat dimensionate în domeniul plastic este egal cu raportul dintre momentul elastic maxim (în valoare absolută) produs de sarcinile de calcul și momentul plastic corespunzător, ambele aparținînd secțiunii critice în care se formează prima articulație plastică.

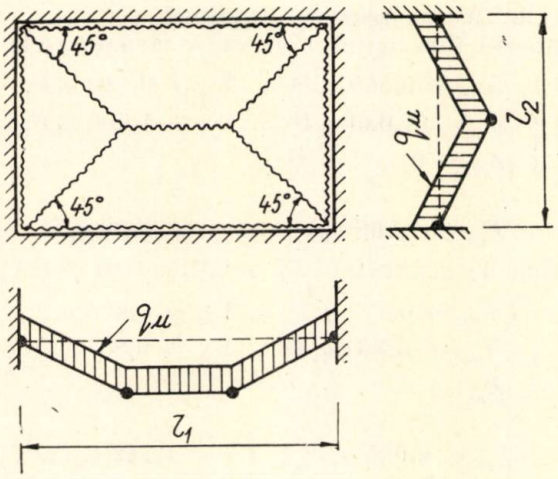


Fig. 7. — Mecanismul de rupere al plăcii unei casete.

În cazul planșeelor casetate, coeficientul de redistribuție al momentelor are valoarea

$$m = \frac{M_{e1}}{M_{p1}} = \frac{M_{e2}}{M_{p2}} = \frac{q_u}{q_1}. \tag{9}$$

În cazul planșeului studiat, valoarea acestui coeficient este $m = 1{,}17$.

Forţele tăietoare plastice se determină în ipoteza comportării elastice a reţelei de grinzi, după cum urmează :

1. Se consideră că planşeul este solicitat de sarcina de densitate q_1 ;

2. Se concentrează sarcina în punctele de intersecţie a grinzilor, obţinîndu-se în acest mod o reţea de grinzi solicitată numai de forţe egale aplicate în noduri ;

3. În cazul planşeului studiat se notează cu X_{p1}, Y_{p1} şi Z_{p1} fracţiunile din sarcinile concentrate la noduri care revin grinzii centrale de pe direcţia laturii mari a planşeului, şi cu X_{p2} şi Y_{p2} fracţiunile din aceleaşi sarcini care revin grinzii centrale de pe direcţia laturii mici a planşeului (fig. 1).

Prin efectuarea calculului static al reţelei se obţin valorile forţelor X_{p1}, Y_{p1} şi Z_{p1}, respectiv X_{p2} şi Y_{p2}.

4. Pentru determinarea diagramei forţelor tăietoare plastice, schema de încărcare a grinzii cuprinde, pe fiecare direcţie, următoarele (fig. 1) :

— forţele rezultate din calculul static al reţelei ;

— o sarcină distribuită uniform pe o lungime egală cu jumătate din lungimea laturii unei casete, măsurată de la marginea fiecărui reazem.

În cazul general, mărimea întregii sarcini distribuite uniform este egală cu $\frac{1}{2} q_1 l_1 l_2$, iar în cazul particular al planşeului studiat este egală cu $\frac{1}{2} q_1 l^2$. Această sarcină reprezintă forţa care, în calculul static al reţelei, se concentrează la fiecare reazem al grinzii.

Pentru planşeul din figura 1 se obţin următoarele rezultate :

$$\begin{cases} X_{p1} = 0{,}550\ q_1 l^2 \ ; \ X_{p2} = 0{,}110\ q_1 l^2, \\ Y_{p1} = 1{,}030\ q_1 l^2 \ ; \ Y_{p2} = 1{,}000\ q_1 l^2, \\ Z_{p1} = 0, \end{cases} \tag{10}$$

respectiv

$$T_{p1} = 1{,}160\ q_1 l^2 \ ; \ T_{p2} = 2{,}030\ q_1 l^2. \tag{11}$$

Ţinînd seama de egalitatea (7), relaţiile (10) şi (11) devin

$$\begin{cases} X_{p1} = 0{,}472\ q_u l^2 \ ; \ X_{p2} = 0{,}094\ q_u l^2, \\ Y_{p1} = 0{,}884\ q_u l^2 \ ; \ Y_{p2} = 0{,}858\ q_u l^2, \\ Z_{p1} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

respectiv

$$T_{p1} = 0{,}995\ q_u l^2 \ ; \ T_{p2} = 1{,}742\ q_u l^2. \tag{13}$$

V. EXPRESIILE GENERALE ALE MOMENTELOR PLASTICE ŞI ALE FORŢELOR TĂIETOARE PLASTICE

Exemplul prezentat în capitolul precedent arată că momentele plastice şi forţele tăietoare plastice ale grinzilor pot fi exprimate în următoarea formă generală :

$$M_{p1} = \frac{\alpha_1}{m} q_u l_2^3 \ ; \ M_{p2} = \frac{\alpha^2}{m} q_u l_2^3, \tag{14}$$

respectiv

$$T_{p1} = \frac{t_1}{m} q_u l_2^2 \; ; \; T_{p2} = \frac{t_2}{m} q_u l_2^2. \tag{15}$$

În expresiile de mai sus, α_1, α_2, t_1 și t_2 sînt coeficienții de influență adimensionali.

Expresia generală a momentului plastic al plăcilor casetelor este dată de relația (5).

VI. PLANȘEE CASETATE DE DIFERITE ALCĂTUIRI

În cele ce urmează se prezintă valorile coeficienților de redistribuție, precum și valorile coeficienților de influență ai momentelor plastice, forțelor tăietoare plastice și sarcinilor concentrate care acționează asupra grinzilor în stadiul de mecanism, pentru cele 20 variante de planșee casetate date în tabela 1.

Tabela 1

Variante de planșee casetate

Planșeul	$n_1 \times n_2$	Planșeul	$n_1 \times n_2$
I	2×2	XI	7×5
II	3×2	XII	8×5
III	3×3	XIII	6×6
IV	4×3	XIV	7×6
V	5×3	XV	8×6
VI	4×4	XVI	9×6
VII	5×4	XVII	7×7
VIII	6×4	XVIII	8×7
IX	5×5	XIX	9×7
X	6×5	XX	10×7

Aceste planșee diferă între ele prin numărul casetelor de pe cele două direcții.

Valorile coeficienților de influență α_1 și α_2, precum și cele ale coeficientului de redistribuție m, sînt date în tabelele 2—5.

Din aceste tabele rezultă că la planșeele I, II și III, coeficientul de redistribuție este subunitar. Acest rezultat contravine modului real de comportare a acestor planșee, întrucît ruperea lor este precedată întotdeauna de intrarea în curgere a armăturii din secțiunile critice ale grinzilor centrale. Sursa acestui rezultat paradoxal rezidă în caracterul inadecuat al ipotezelor care stau la baza calculului elastic. Aceste ipoteze simplificatoare introduc erori care sînt cu atît mai mari, cu cît planșeul are mai puține casete.

Tabela 2

Planşeele I – V. Coeficienţii α_1, α_2 şi m

Planşeul	$\frac{l_1}{l_2}$	α_1	α_2	m
I	1,0	0,250	0,250	0,86
	1,1	0,260	0,315	
	1,2	0,264	0,379	
	1,3	0,263	0,447	
	1,4	0,263	0,512	
	1,5	0,255	0,579	
II	1,0	0,166	0,416	0,92
III	1,0	0,501	0,501	0,96
	1,1	0,518	0,627	
	1,2	0,533	0,756	
	1,3	0,527	0,893	
	1,4	0,525	1,025	
	1,5	0,513	1,157	
IV	1,0	0,441	0,909	1,09
	1,1	0,406	1,059	
V	1,0	0,315	1,020	1,10

Tabela 3

Planşeele VI – X. Coeficienţii α_1, α_2 şi m

Planşeul	$\frac{l_1}{l_2}$	α_1	α_2	m
VI	1,0	1,168	1,168	1,14
	1,1	1,197	1,483	
	1,2	1,210	1,800	
	1,3	1,206	2,116	
	1,4	1,154	2,447	
	1,5	1,122	2,760	
VII	1,0	1,000	1,640	1,13
	1,1	0,955	1,945	
	1,2	0,893	2,242	
VIII	1,0	0,768	2,028	1,17
IX	1,0	1,720	1,720	1,09
	1,1	1,766	2,167	
	1,2	1,788	2,640	
	1,3	1,775	3,094	
	1,4	1,722	3,570	
	1,5	1,688	4,020	
X	1,0	1,595	2,490	1,17
	1,1	1,546	2,970	
	1,2	1,470	3,444	

Tabela 4

Planşeele XI–XV. Coeficienţii α_1, α_2 şi m

Planşeul	$\frac{l_1}{l_2}$	α_1	α_2	m
XI	1,0	1,330	2,860	1,17
	1,1	1,238	3,322	
XII	1,0	1,080	3,190	1,19
XIII	1,0	2,718	2,718	1,20
	1,1	2,792	3,432	
	1,2	2,837	4,192	
	1,3	2,800	4,906	
	1,4	2,780	5,670	
	1,5	2,601	6,417	
XIV	1,0	2,502	3,492	1,18
	1,1	2,449	4,231	
	1,2	2,318	4,961	
	1,3	2,301	5,632	
XV	1,0	2,160	4,240	1,20
	1,1	2,073	4,910	
	1,2	1,958	5,594	

Tabela 5

Planşeele XVI–XX. Coeficienţii α_1, α_2 şi m

Planşeul	$\frac{l_1}{l_2}$	α_1	α_2	m
XVI	1,0	1,938	4,422	1,18
XVII	1,0	3,563	3,563	1,18
	1,1	3,665	4,497	
	1,2	3,704	5,468	
	1,3	3,630	6,470	
	1,4	3,567	7,389	
	1,5	3,465	8,337	
XVIII	1,0	3,402	4,669	1,20
	1,1	3,342	5,675	
	1,2	3,251	6,637	
	1,3	3,085	7,617	
XIX	1,0	3,038	5,362	1,19
	1,1	2,880	6,322	
	1,2	2,722	7,199	
XX	1,0	2,597	5,999	1,20

La planşeele I, II şi III, momentele plastice şi forţele tăietoare plastice se determină pe baza schemelor de încărare reprezentate în figurile 8, 9 şi 10. În aceste scheme, forţa X_p are expresia

$$X_p = \frac{x}{m} q_u l_2^2, \tag{16}$$

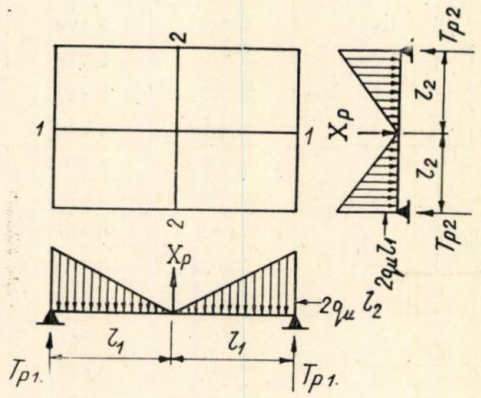


Fig. 8. — Schemele de calcul ale grinzilor planşeului I.

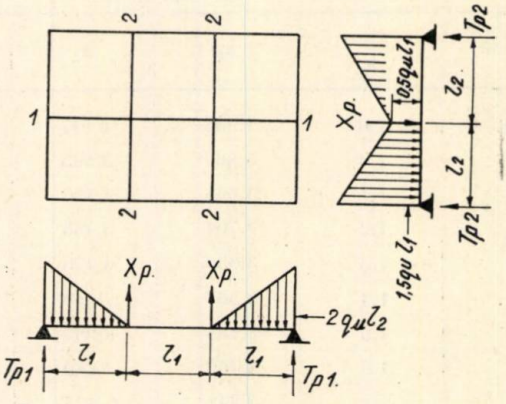


Fig. 9. — Schemele de calcul ale grinzilor planşeului II.

unde x este un coeficient de influenţă adimensional.

Pentru aceste planşee, valorile coeficienţilor t_1, t_2 şi x sînt date în tabela 6.

Pentru planșeele IV—XX, fracțiunile din forțele concentrate la noduri, necesare pentru construirea diagramelor momentelor încovoie-

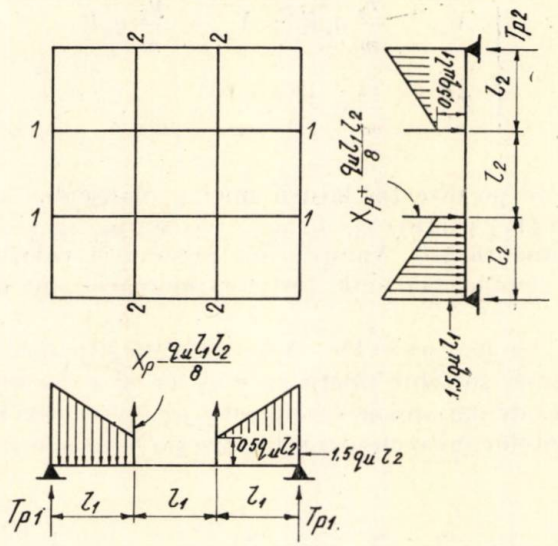


Fig. 10.— Schemele de calcul ale grinzilor planșeului III.

Tabela 6

Planșeele I—III. Coeficienții t_1, t_2 și x

Planșeul	$\frac{l_1}{l_2}$	t_1	t_2	x
I	1,0	0,900	0,900	0,000
	1,1	0,948	1,038	0,090
	1,2	0,989	1,169	0,181
	1,3	1,094	1,308	0,278
	1,4	1,077	1,446	0,369
	1,5	1,207	1,586	0,468
II	1,0	0,848	0,993	0,096
III	1,0	1,097	1,097	0,000
	1,1	1,126	1,283	0,081
	1,2	1,154	1,478	0,162
	1,3	1,169	1,675	0,253
	1,4	1,195	1,870	0,338
	1,5	1,220	2,065	0,422

toare plastice și a forțelor tăietoare plastice, au expresiile (fig. 11):

$$\begin{cases} X_{p1} = \dfrac{x_1}{m} q_u l_2^2 \ ; \ Y_{p1} = \dfrac{y_1}{m} q_u l_2^2, \\ Z_{p1} = \dfrac{z_1}{m} q_u l_2^2, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{cases} \tag{17}$$

pentru grinzile de pe direcția laturii mari, respectiv

$$\begin{cases} X_{p2} = \dfrac{x_2}{m} q_u l_2^2 \ ; \ Y_{p2} = \dfrac{y_2}{m} q_u l_2^2, \\ Z_{p2} = \dfrac{z_2}{m} q_u l_2^2, \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \end{cases} \tag{18}$$

pentru grinzile de pe direcția laturii mici a planșeului.

În relațiile (17) și (18), x_1, y_1, z_1, ... și x_2, y_2, z_2, ... sînt coeficienți de influență adimensionali. Valorile lor, precum și valorile coeficienților t_1 și t_2, de care depind mărimile forțelor tăietoare, sînt date în tabelele 7—10.

Observație. La planșeele IV—XX, datorită utilizării calculului elastic la determinarea forțelor tăietoare plastice și a forțelor care solicită grinzile în stadiul de mecanism, este posibil ca ordonatele maxime ale diagramelor momentelor încovoietoare, trasate pe baza acestor forțe, să aibă

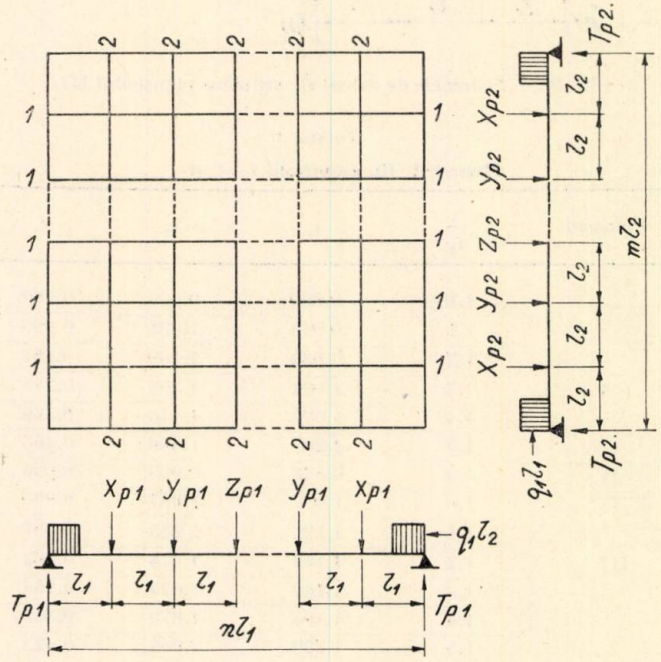


Fig. 11. — Schemele de calcul ale grinzilor planșeelor IV—XX.

valori diferite de cele ale momentelor plastice date de relațiile (14). Fie M'_{p1} și M'_{p2} valorile ordonatelor maxime ale diagramelor de momente de pe direcția laturii mari, respective de pe direcția laturii mici a planșeului. În aceste cazuri, diagramele reale de momente se obțin prin înmul-

ţirea tuturor ordonatelor diagramelor trasate pe baza sarcinilor date de relaţiile (17) şi (18) cu raportul $\frac{M_{p1}}{M'_{p1}}$ pentru grinzile de pe direcţia laturii mari, respectiv cu raportul $\frac{M_{p2}}{M'_{p2}}$ pentru grinzile de pe direcţia laturii mici a planşeului.

Tabela 7

Planşeele IV – VIII. Coeficienţii t_1, t_2, x_1, y_1, z_1, x_2, şi y_2

Planşeul	$\frac{l_1}{l_2}$	t_1	t_2	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2
IV	1,0	0,892	1,408	0,346	0,092	—	0,908	—
	1,1	0,900	1,610	0,330	0,040	—	1,060	—
V	1,0	0,815	1,521	0,336	−0,021	—	0,021	—
VI	1,0	1,420	1,420	0,670	0,500	—	0,670	0,500
	1,1	1,425	1,700	0,660	0,429	—	0,814	0,671
	1,2	1,434	1,978	0,660	0,348	—	0,948	0,852
	1,3	1,424	2,269	0,624	0,299	—	1,118	1,001
	1,4	1,421	2,555	0,616	0,210	—	1,260	1,190
	1,5	1,425	2,835	0,600	0,150	—	1,410	1,350
VII	1,0	1,260	1,760	0,520	0,240	—	0,880	0,760
	1,1	1,265	2,024	0,561	0,154	—	1,001	0,946
	1,2	1,278	2,292	0,552	0,096	—	1,140	1,104
VIII	1,0	0,983	1,719	0,466	0,093	0,000	0,872	0,847

Tabela 8

Planşeele IX – XII. Coeficienţii t_1, t_2, x_1, y_1, z_1, u_1, x_2 şi y_2

Planşeul	$\frac{l_1}{l_2}$	t_1	t_2	x_1	y_1	z_1	u_1	x_2	y_2
IX	1,0	1,720	1,720	0,720	0,500	—	—	0,720	0,500
	1,1	1,716	2,057	0,726	0,440	—	—	0,847	0,660
	1,2	1,716	2,412	0,744	0,372	—	—	0,984	0,828
	1,3	1,703	2,756	0,741	0,312	—	—	1,118	0,988
	1,4	1,680	3,122	0,728	0,252	—	—	1,274	1,148
	1,5	1,680	3,465	0,735	0,195	—	—	1,410	1,305
X	1,0	1,575	2,160	0,640	0,350	0,170	—	0,830	0,830
	1,1	1,551	2,552	0,660	0,275	0,132	—	1,034	0,968
	1,2	1,536	2,916	0,684	0,216	0,072	—	1,188	1,128
XI	1,0	1,450	2,410	0,620	0,280	0,050	—	0,960	0,950
	1,1	1,430	2,750	0,638	0,240	−0,022	—	1,078	1,122
XII	1,0	1,345	2,600	0,630	0,240	0,020	−0,090	1,010	1,090

Tabela 9

Planşeele XIII–XVI. Coeficienţii t_1, t_2, x_1, y_1, z_1, u_1, x_2, y_2 şi z_2

Planşeul	$\frac{l_1}{l_2}$	t_1	t_2	x_1	y_1	z_1	u_1	x_2	y_2	z_2
XIII	1,0	2,120	2,120	0,770	0,600	0,500	—	0,770	0,600	0,500
	1,1	2,112	2,541	0,792	0,561	0,418	—	0,891	0,759	0,682
	1,2	2,124	2,964	0,840	0,528	0,312	—	0,984	0,936	0,888
	1,3	2,070	3,452	0,858	0,416	0,299	—	1,196	1,105	1,001
	1,4	2,086	3,920	0,882	0,406	0,196	—	1,372	1,246	1,204
	1,5	2,018	4,343	0,855	0,360	0,105	—	1,470	1,425	1,395
XIV	1,0	1,960	2,515	0,730	0,420	0,310	—	0,880	0,790	0,690
	1,1	1,958	2,943	0,803	0,396	0,209	—	1,001	0,946	0,891
	1,2	1,896	3,378	0,744	0,468	0,084	—	1,152	1,068	1,116
	1,3	1,911	3,803	0,845	0,325	0,091	—	1,274	1,274	1,200
XV	1,0	1,810	2,880	0,720	0,370	0,180	0,080	0,980	0,940	0,920
	1,1	1,799	3,284	0,737	0,396	0,110	0,011	1,100	1,089	1,089
	1,2	1,788	3,720	0,780	0,372	0,048	−0,024	1,260	1,248	1,224
XVI	1,0	1,740	2,960	0,700	0,400	0,120	0,020	0,990	0,980	0,980

Tabela 10

Planşeele XVII–XX. Coeficienţii t_1, t_2, x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, x_2, y_2 şi z_2

Planşeul	$\frac{l_1}{l_2}$	t_1	t_2	x_1	y_1	z_1	u_1	v_1	x_2	y_2	z_2
XVII	1,0	2,420	2,420	0,780	0,640	0,500	—	—	0,780	0,640	0,500
	1,1	2,420	2,937	0,836	0,605	0,429	—	—	0,946	0,770	0,671
	1,2	2,400	3,456	0,876	0,564	0,360	—	—	1,080	0,936	0,840
	1,3	2,366	3,978	0,910	0,533	0,273	—	—	1,209	1,092	1,027
	1,4	2,338	4,466	0,938	0,490	0,210	—	—	1,330	1,246	1,190
	1,5	2,325	4,965	0,975	0,465	0,135	—	—	1,455	1,395	1,365
XVIII	1,0	2,275	2,920	0,760	0,540	0,340	0,270	—	0,900	0,790	0,730
	1,1	2,239	3,443	0,803	0,517	0,275	0,187	—	1,023	0,957	0,913
	1,2	2,208	3,960	0,840	0,492	0,216	0,120	—	1,164	1,116	1,080
	1,3	2,191	4,472	0,897	0,468	0,156	0,039	—	1,287	1,274	1,261
XIX	1,0	2,130	3,220	0,740	0,500	0,260	0,130	—	0,950	0,900	0,870
	1,1	2,101	3,729	0,803	0,485	0,209	0,055	—	1,078	1,056	1,045
	1,2	2,076	4,200	0,840	0,480	0,156	0,000	—	1,200	1,200	1,200
XX	1,0	2,000	3,500	0,740	0,480	0,220	0,060	0,000	1,000	1,000	1,000

VII. VALORI DE CALCUL

Momentele plastice, forţele tăietoare plastice de la marginile reazemelor, precum şi fracţiunile din forţele concentrate la noduri date de relaţiile (14—18), sînt elemente pe baza cărora se face dimensionarea planşeelor casetate de beton armat la starea limită de rezistenţă, numai în cazurile în care coeficientul de redistribuţie a momentelor îndeplineşte

condiția $m \leqslant m_n$, prin care se asigură comportarea elastică a armăturii grinzilor sub acțiunea sarcinilor de exploatare [7]. În fraza precedentă, prin sarcini de exploatare se înțeleg sarcina permanentă de calcul și sarcina temporară normată.

Coeficientul de redistribuție limită m_n are expresia

$$m_n = \frac{M_{c1}}{M_{n1}} = \frac{M_{c2}}{M_{n2}} = \frac{q_u}{q_1}. \tag{19}$$

Dacă $m > m_n$, din condiția privind comportarea elastică a armăturii în stadiul de exploatare rezultă următoarele valori de calcul ale elementelor necesare la dimensionarea planșeelor casetate :

$$M_{c1} = \alpha_1 q_n l_2^3 \; ; \; M_{c2} = \alpha_2 q_n l_2^3, \tag{20}$$

$$T_{c1} = t_1 q_n l_2^2 \; ; \; T_{c2} = t_2 q_n l_2^2, \tag{21}$$

$$X_c = x q_n l_2^2, \tag{22}$$

$$\begin{cases} X_{c1} = x_1 q_n l_2^2 \; ; \; Y_{c1} = y_1 q_n l_2^2, \\ Z_{c1} = z_1 q_n l_2^2 \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases} \tag{23}$$

$$\begin{cases} X_{c2} = x_2 q_n l_2^2 \; ; \; Y_{c2} = y_2 q_n l_2^2, \\ Z_{c2} = z_2 q_n l_2^2 \; , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \end{cases} \tag{24}$$

În acest caz, sarcina totală $\frac{1}{2} q_1 l_1 l_2$, care apare în schemele de încărcare pe baza cărora se trasează diagramele forțelor tăietoare și ale momentelor încovoietoare se înlocuiește cu sarcina $\frac{1}{2} q_n l_1 l_2$.

La toate planșeele, momentul de calcul al plăcilor casetelor se calculează cu relația

$$\overline{M}_c = \frac{3\lambda' - 1}{42(\lambda' + 1)} q_u l_2'^2. \tag{25}$$

Momentul de calcul astfel determinat este cu 14% mai mare decît momentul plastic dat de relația (5). Prin acest spor se ține seama de micșorarea cantității totale de armătură din cîmp, ca urmare a ridicării pe reazeme a 50% din această armătură.

BIBLIOGRAFIE

1. C. N. Avram, I. Filimon, R. Friedrich, *Calculul rețelelor de grinzi din beton armat în stadiul plastic*, Buletinul științific al Institutului politehnic Timișoara, 8 (22), 1, (1963).
2. C. N. Avram, I. Filimon, R. Friedrich, *Studiul rețelelor de grinzi din beton armat în stadiul plastic*, Buletinul științific al Institutului politehnic Timișoara, 9 (23), 1, (1964).
3. J. F. Baker, M. R. Horne, H. Heyman, *The steel skeleton, Vol. 2 : Plastic behaviour and design*, Cambridge University Press, Cambridge, 1956.
4. P. Cireșeanu, *Calculul rețelelor de grinzi în casete*, Edit. tehnică, București, 1960.
5. V. Petcu, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic*, St. cerc. mec. apl., **12**, 5 (1961).

6. V. Petcu, *Mecanisme de rupere exacte și aproximative în calculul plastic al plăcilor dreptunghiulare de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **22**, *3* (1966).
7. V. Petcu, *Limitări în calculul plastic al grinzilor static nedeterminate de beton armat*, Buletinul INCERC-ISCAS, *4* (1962).
8. Al. Pop, *Rețele de grinzi de beton armat în domeniul plastic. Influența torsiunii*, Revista construcțiilor și a materialelor de construcții, **15**, *8* (1963).
9. * * * *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stări limită, Vol. I, Partea I: Bazele metodei de calcul la stări limită* (P. 6—62). Edit. tehnică, București, 1963.

UTILIZAREA CALCULATOARELOR ELECTRONICE PENTRU STABILIREA DIRECTĂ A ORDINII DE FORMARE A ARTICULAȚIILOR PLASTICE LA CADRE ÎNCĂRCATE PROPORȚIONAL

de ALEX. GHEORGHIU, C. PACOSTE,
CR. IONESCU și M. IORDĂNESCU
Institutul de construcții, București

539.4 : 518.5.

Se prezintă modul de programare la un calculator electronic cifric a unei metode publicate anterior [1], care permite determinarea directă a succesiunii articulațiilor plastice și a factorilor de încărcare corespunzători, fără a mai fi necesar un calcul „biografic" complet. Este discutat și domeniul de aplicare al metodei, inclusiv posibilitatea de a o folosi la dimensionarea cadrelor pe baza cedării plastice, cînd se impune condiția ca pentru sarcini de exploatare structura să aibă integral comportare elastică.

1. METODICA DE DETERMINARE A SUCCESIUNII ARTICULAȚIILOR PLASTICE

În lucrarea [1] a fost prezentată o metodă de stabilire directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice, precum și a mărimii factorilor de încărcare corespunzători, la cadre încărcate cu sarcini proporționale. Prin această metodă se elimină necesitatea efectuării unui calcul „biografic" propriu-zis, ajungînd la aceleași rezultate pe o cale mult mai simplă, în care nu mai este necesar să se determine starea de eforturi a structurii în fiecare dintre etape. Aceasta corespunde de altfel cerințelor proiectării, deoarece cunoscînd pozițiile și ordinea în care apar articulațiile plastice, precum și treptele de variație a mărimii sarcinilor, se pot face aprecieri concludente asupra comportării structurii. Totodată, după aflarea ordinii articulațiilor plastice, metoda permite să se găsească direct starea de eforturi pentru un anumit stadiu intermediar, ales după voință.

Metoda are la bază o teoremă a calculului în domeniul elastico-plastic, stabilită în lucrarea menționată, care furnizează criteriul de

identificare a articulației plastice ce se formează într-un anumit stadiu intermediar :

„Dacă pentru o structură încărcată cu sarcini proporționale, ajunsă la stadiul de formare a articulației plastice j, se consideră sistemul de bază rezultat prin introducerea de articulații obișnuite în secțiunile corespunzătoare primelor j articulații plastice și se calculează mărimile factorilor de încărcare admițînd succesiv că rotirile relative din aceste articulații ar fi egale cu zero, *articulația plastică j este aceia pentru care rezultă cea mai mare valoare a factorului de încărcare*".

Pentru aplicarea criteriului, sînt necesare expresiile rotirilor relative din articulațiile plastice ce s-au format anterior articulației j. Pe baza ipotezelor simplificatoare uzuale, aceste rotiri relative sînt date de relații liniare de forma

$$\varphi_i = \varphi_{i1} M_1 + \ldots + \varphi_{ih} M_h + \ldots + \varphi_{ij} M_j + c\varphi_{is}, \quad (i = 1, 2, \ldots j), \quad (1)$$

unde un coeficient φ_{ih} reprezintă rotirea relativă din articulația i a sistemului de bază, cînd acesta este încărcat cu un moment $M_h = 1$; φ_{is} reprezintă rotirea relativă din aceeași articulație sub acțiunea sarcinilor, iar c este factorul de încărcare. Coeficienții și termenii liberi trebuie calculați pe sistemul de bază considerat, care este de $(n-j)$ ori static nedeterminat.

Cînd s-a ajuns la formarea articulației plastice j, în toate secțiunile $1, 2, \ldots j$ momentul încovoietor a atins valoarea $M = M_p$ a secțiunii respective, iar factorul de încărcare este c_j. Nu știm inițial care dintre primele j articulații plastice se formează ultima, astfel că vom considera succesiv ca atare pe fiecare dintre ele, egalînd cu zero rotirea relativă corespunzătoare. Se obține

$$\varphi_i = \sum_1^j \varphi_{ih} M_p^{(h)} + c_j^{(i)} \varphi_{is} = 0, \quad \text{sau} \quad c_j^{(i)} = -\sum_1^j \varphi_{ih} M_p^{(h)} / \varphi_{is}, \quad (2)$$

care dă mărimea factorului de încărcare respectiv. Pe baza teoremei, valoarea cea mai mare identifică articulația plastică j și reprezintă factorul de încărcare ce-i corespunde.

Operația trebuie făcută pentru fiecare dintre intervalele cuprinse între formarea a două articulații plastice succesive ; este deci esențial să se procedeze astfel ca în fiecare etapă să poată fi folosite elemente cunoscute din etapele precedente. Specificul metodei constă în faptul că stabilirea ordinei se face pornind *de la ultima articulație plastică spre prima.* Pentru aceasta este necesar să se cunoască în prealabil *pozițiile tuturor articulațiilor plastice.* Aceasta se realizează utilizînd una dintre metodele obișnuite pentru determinarea stadiului de cedare plastică : se identifică mecanismul de cedare, se calculează factorul de încărcare și se construiește diagrama M corespunzătoare. În continuare, trebuie stabilită *ultima articulație plastică* ce se formează, folosind procedeul sistematizat propus în lucrarea [2]. Se cunoaște astfel situația structurii în momentul cînd cedarea plastică devine iminentă : toate articulațiile plastice s-au format pe parcurs și în ele s-au produs rotiri relative, în afară de ultima unde valoarea M_p este atinsă, dar continuitatea subzistă încă. Mai departe, problema se reduce la a stabili ordinea în care s-au format primele n

articulații plastice și factorii de încărcare corespunzători. Acesta este de fapt obiectul metodei.

Se pornește de la stadiul cînd se formează articulația plastică n (penultima), căreia îi corespunde un sistem de bază *static determinat*, pentru care rotirile relative din articulațiile plastice sînt

$$\varphi_i = \varphi_{i1} M_1 + \ldots + \varphi_{ih} M_h + \ldots + \varphi_{in} M_n + c\,\varphi_{is} \quad (i = 1, 2, \ldots n). \tag{3}$$

Coeficienții φ_{ih} și termenii liberi φ_{is} se calculează cu ajutorul diagramelor unitare m_{xh} și al diagramei M_{xs}, obținute aplicînd succesiv pe sistemul de bază momentele $M_h = 1$ și respectiv sarcinile date [1]). Expresiilor (3) li se aplică criteriul de triere indicat de relația (2), calculînd valorile $c_n^{(i)}$ corespunzătoare, din compararea cărora se află care este articulația plastică n și mărimea factorului de încărcare c_n.

Trebuie acum trecut la identificarea articulației plastice $(n-1)$ și pentru aceasta este necesar să se scrie expresiile rotirilor relative din articulațiile plastice 1, 2, ... $(n-1)$ folosind un sistem de bază o dată static nedeterminat (continuitate în secțiunea corespunzătoare articulației plastice n). S-a arătat în lucrarea [1] că aceasta se realizează eliminînd din expresiile (3) momentul M_n cu ajutorul condiției $\varphi_n = 0$, sub forma

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i + \alpha_{ni} \cdot \varphi_n, \qquad \text{unde} \qquad \alpha_{ni} = -\varphi_{ni}/\varphi_{nn}, \tag{4}$$

întîlnită uzual la aplicarea algoritmului lui Gauss. Se poate deci trece cu ușurință de la expresiile (3) la expresiile (4). În aceste din urmă expresii se aplică din nou criteriul dat de teoremă, găsind articulația plastică $(n-1)$ și factorul de încărcare c_{n-1}, după care se trece la formarea expresiilor rotirilor relative pentru sistemul de bază de două ori static nedeterminat, eliminînd din expresiile (4) momentul M_{n-1} prin condiția $\varphi_{n-1} = 0$.

Se efectuează în același mod operațiile pentru etapele următoare. De fiecare dată numărul rotirilor scade cu o unitate, astfel că la urmă se ajunge la o singură ecuație de forma

$$\varphi_1^{(n)} = \varphi_{11}^{(n)} M_1 + c_1 \varphi_{1s}^{(n)} = 0,$$

care corespunde unui sistem de bază de n ori static nedeterminat și din care se obține factorul de încărcare la apariția primei articulații plastice.

Din cele expuse rezultă că metoda de determinare directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice pornește de la expresiile (3) și constă din *efectuarea alternată a două operații* : o operație de *triere* pe baza relației de forma (2), prin care se găsește articulația plastică ce se formează în stadiul considerat, precum și o operație de *eliminare*, prin care se trece de la expresiile rotirilor relative scrise pentru sistemul de bază cu $n-j$ nedeterminări, la expresiile rotirilor relative pentru sistemul de bază cu $n-j+1$ nedeterminări. Tocmai acest specific al metodei se dovedește

[1]) Este ușor de văzut că, egalînd cu zero expresiile (3), se obține tocmai sistemul ecuațiilor de condiție pentru rezolvarea cadrului considerat prin *metoda eforturilor*, folosind sistemul de bază ce rezultă prin introducerea de articulații obișnuite în secțiunile corespunzătoare primelor n articulații plastice.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

avantajos pentru programare, în vederea recurgerii la un calculator electronic cînd cadrul dat este mai complicat.

Programarea se poate extinde și la formarea expresiilor inițiale ale rotirilor relative (pentru sistemul de bază static determinat).

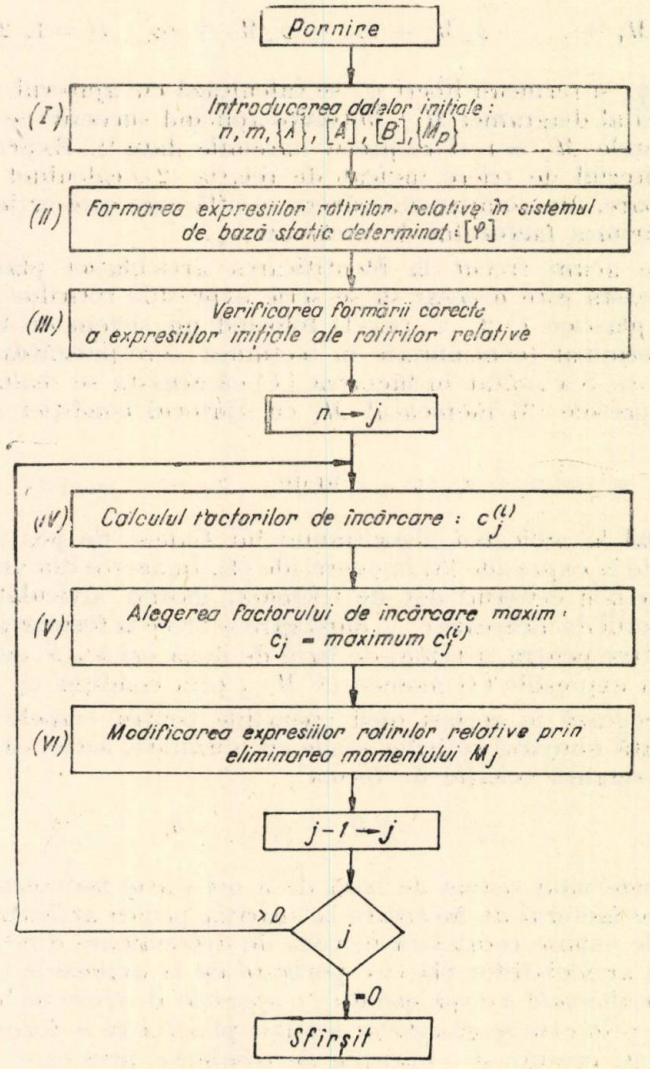


Fig. 1

Schema logică de principiu a operațiilor pentru determinarea directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice este dată în figura 1 și cuprinde două etape distincte:

— formarea și verificarea automată a expresiilor (3) ale rotirilor relative (blocurile de calcul I, II și III);

— determinarea automată a succesiunii articulațiilor plastice și a factorilor de încărcare corespunzători (blocurile de calcul IV, V și VI).

În cele ce urmează se vor detalia cele două etape de programare, corespunzător folosirii calculatorului electronic CIFA 102, de care s-a putut dispune în timpul elaborării lucrării.

2. FORMAREA EXPRESIILOR (3) ALE ROTIRILOR RELATIVE

Se începe cu stabilirea datelor inițiale ce sînt necesare pentru aplicarea metodei. Această operație trebuie făcută direct de către inginerul proiectant și cuprinde următoarele elemente :

— aflarea mecanismului de cedare plastică ce corespunde sarcinilor date, precum și a factorului de încărcare, utilizînd metodele cunoscute din literatura de specialitate, de exemplu lucrarea [3]. În cele ce urmează vom presupune că se formează *un mecanism total de cedare* ;

— identificarea ultimei articulații plastice ;

— trasarea diagramelor unitare $m_{x1}, \ldots m_{xn}$, precum și a diagramei M_{xs}, produse de încărcarea succesivă cu momentele $M_1 = 1, \ldots M_n = 1$ și respectiv cu sarcinile date a sistemului de bază obținut prin introducerea de articulații obișnuite în secțiunile corespunzătoare primelor n articulații plastice (n reprezintă gradul de nedeterminare statică al structurii) ;

— trasarea independentă a diagramei m_{xt}, produsă pe același sistem de bază de încărcarea *concomitentă* cu $M_1 = 1, \ldots M_n = 1$; această diagramă va servi la verificarea expresiilor (3).

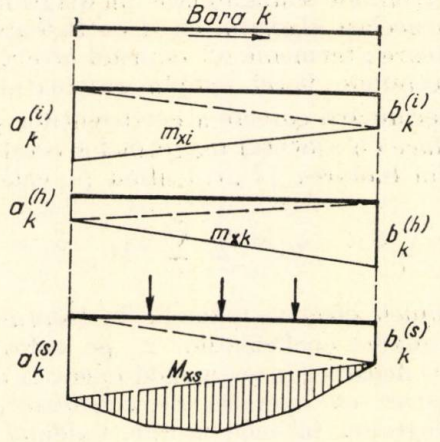


Fig. 2

Calculul coeficienților φ_{ih} și al termenilor liberi φ_{is} din expresiile (3), se face în același mod ca la formarea ecuațiilor de condiție din metoda eforturilor, folosind sistematizarea dată în cap. I. F din lucrarea [4]. Cu notațiile din fig. 2

pentru bara curentă k a structurii (structura are m bare, numerotate $1, \ldots k, \ldots m$), se pot scrie expresiile [1])

$$\varphi_{ih} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k [2a_k^{(i)} a_k^{(h)} + 2b_k^{(i)} b_k^{(h)} + a_k^{(i)} b_k^{(h)} + b_k^{(i)} a_k^{(h)}] \tag{5}$$

și

$$\varphi_{is} = \varphi_{is}^{\mathrm{I}} + \varphi_{is}^{\mathrm{II}},$$

unde

$$\varphi_{is}^{\mathrm{I}} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k [2a_k^{(i)} a_k^{(s)} + 2b_k^{(i)} b_k^{(s)} + a_k^{(i)} b_k^{(s)} + b_k^{(i)} a_k^{(s)}], \tag{6}$$

$$\varphi_{is}^{\mathrm{II}} = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k [a_k^{(i)} m_k^{st} + b_k^{(i)} m_k^{dr}], \tag{7}$$

în care notația a se referă la ordonatele diagramelor în capătul din *stînga* al barei curente k, iar notația b se referă la ordonatele în capătul din *dreapta*, în raport cu sensurile de parcurgere stabilite inițial pentru bare. Toate ordonatele se introduc su semnele ce corespund acestor sensuri de parcurgere. S-au folosit de asemenea notațiile :

— λ_k pentru lungimea transformată a barei k ($\lambda_k = l_k . I_c / I$) ;

— m_k^{st} și m_k^{dr} pentru caracteristicile de încărcare ale barei k, corespunzătoare sarcinilor aplicate pe aceasta ; caracteristicile de încărcare sînt pozitive cînd diagrama de momente încovoietoare a barei, considerată simplu rezemată, rezultă pozitivă pentru sensul de parcurgere stabilit.

În expresiile (6) și (7), termenul liber φ_{is} a fost separat în două părți, conform cerințelor de sistematizare în operațiile ulterioare : termenii $\varphi_{is}^{\mathrm{I}}$ cuprind efectul porțiunilor triunghiulare din diagrama M_{xs}, și de aceea se pot determina cu același algoritm ca și coeficienții φ_{ih}, expresiile (5) și (6) fiind asemănătoare ; termenii $\varphi_{is}^{\mathrm{II}}$ cuprind efectul restului diagramei M_{xs} (partea ce corespunde barei simplu rezemate).

Verificarea determinării corecte a coeficienților și a termenilor liberi din expresiile (3) se face cu ajutorul diagramelor totale m_{xt}, în modul arătat în cap. IV. A din lucrarea [4], calculînd pe cale directă termenii

$$\varphi_{th} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ih}, \quad \varphi_{tt} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{ih}, \quad \varphi_{ts} = \sum_{i=1}^{n} \varphi_{is} \tag{8}$$

și comparîndu-i cu sumele efective indicate în dreptul fiecăruia. La prima sumă s-a preferat sumarea coeficienților φ_{ih} pe coloană (și nu pe linie cum se face de obicei) deoarece în acest mod operația de verificare a coeficienților devine identică cu operația de verificare a termenilor liberi, putîndu-se astfel programa în mod unitar. Calculul termenilor φ_{th}, φ_{tt}, și φ_{ts} se face tot cu ajutorul expresiilor (5)—(7), în care diagrama m_{xt} intervine prin ordonatele $a_k^{(t)}$ și $b_k^{(t)}$ din extremitățile barei curente k.

[1]) Toate expresiile sînt multiplicate cu constanta $6EI_c$, unde I_c este un moment de inerție ales arbitrar.

Pentru formarea și verificarea expresiilor (3) ale rotirilor relative, folosind relațiile de calcul (5)—(7) și respectiv (8), datele inițiale se introduc în memoria mașinii (blocul de calcul I) sub forma a două matrice dreptunghiulare [A] și [B], de ordin $m \times (n+3)$, care conțin ordonatele diagramelor unitare $m_{x1}, \ldots m_{xn}$ și a diagramei M_{xs}, precum și caracteristicile de încărcare. În matricea [A] se introduc elementele ce corespund capetelor din *stînga* ale fiecărei bare, iar în matricea [B] elementele ce corespund capetelor din *dreapta*. Aceste matrice au forma

$$[A] = \begin{bmatrix} A_1^{(1)} \ldots A_1^{(i)} \ldots A_1^{(n+3)} \\ \vdots \\ A_k^{(1)} \ldots A_k^{(i)} \ldots A_k^{(n+3)} \\ \vdots \\ A_m^{(1)} \ldots A_m^{(i)} \ldots A_m^{(n+3)} \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} B_1^{(1)} \ldots B_1^{(i)} \ldots B_1^{(n+3)} \\ \vdots \\ B_k^{(1)} \ldots B_k^{(i)} \ldots B_k^{(n+3)} \\ \vdots \\ B_m^{(1)} \ldots B_m^{(i)} \ldots B_m^{(n+3)} \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Fiecăreia dintre cele k bare ale cadrului îi corespunde cîte o linie în matricele $[A]$ sau $[B]$. Pe coloane, datele inițiale se introduc în matrice astfel

$$A_k^{(1)} = a_k^{(1)}, \ldots A_k^{(n)} = a_k^{(n)}, A_k^{(n+1)} = a_k^{(t)}, A_k^{(n+2)} = a_k^{(s)}, A_k^{(n+3)} = m_k^{st},$$

$$B_k^{(1)} = b_k^{(1)}, \ldots B_k^{(n)} = b_k^{(n)}, B_k^{(n+1)} = b_k^{(t)}, B_k^{(n+2)} = b_k^{(s)}, B_k^{(n+3)} = m_k^{dr}.$$

În schemele logice care urmează, elementele din două coloane oarecare ale matricei $[A]$ se vor nota cu $A_k^{(i)}$ și $A_k^{(h)}$, iar elementele din două coloane oarecare ale matricei $[B]$ cu $B_k^{(i)}$ și $B_k^{(h)}$.

În scopul utilizării judicioase a părții din memoria mașinii de calcul rezervată datelor inițiale, adresele la care se introduc în memorie elementele matricelor $[A]$ și $[B]$ se determină astfel: adresa corespunzătoare elementului din colțul din stînga sus al matricei $[A]$ este fixă; se continuă apoi numerotarea adreselor pe linii pentru restul elementelor matricei pînă în colțul din dreapta jos, după care urmează numerotarea în aceeași ordine a elementelor matricei $[B]$. Înseamnă că adresele la care se depun în memorie datele inițiale sînt funcție de parametrii n și m.

În memoria mașinii se mai introduc și lungimile transformate λ_k ale barelor structurii, sub forma unei matrice-coloană $\{\lambda\}$ de ordinul $m \times 1$.

Mărimile coeficienților (5) și a termenilor liberi (6)—(7), care se calculează treptat de către mașina electronică (blocul de calcul II), se depun într-o matrice $[\varphi]$ de forma

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_{11} \cdots \varphi_{1h} \cdots \varphi_{1n} & \varphi_{1t} & \varphi_{1s}^{I} & \varphi_{1s}^{II} \\ \vdots \\ \varphi_{i1} \cdots \varphi_{ih} \cdots \varphi_{in} & \varphi_{it} & \varphi_{is}^{I} & \varphi_{is}^{II} \\ \vdots \\ \varphi_{n1} \cdots \varphi_{nh} \cdots \varphi_{nn} & \varphi_{nt} & \varphi_{ns}^{I} & \varphi_{ns}^{II} \\ \varphi_{t1} \cdots \varphi_{th} \cdots \varphi_{tn} & \varphi_{tt} & \varphi_{ts}^{I} & \varphi_{ts}^{II} \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Prin introducerea diagramei totale m_{xt} drept cea de a $(n+1)$ diagramă unitară, în ultima linie a matricei $[\varphi]$ vor apare automat și elementele necesare verificării pe baza condițiilor (8) a formării corecte a expresiilor (3). Adresele corespunzătoare elementelor matricei $[\varphi]$ se formează automat de către mașina electronică, numerotarea făcîndu-se pe linii începînd de la elementul φ_{11}, a cărui adresă se alege în continuarea ultimei adrese din matricela $[B]$.

Modul de calcul al coeficienților și termenilor liberi la mașina electronică este detaliat în schema logică din figura 3, unde — pentru uniformitate — un element oarecare al matricei $[\varphi]$ a fost notat generic cu φ_{ih} (unde $i = 1 \div n+1$, $j = 1 \div n+3$), indiferent dacă notația se referă la un coeficient sau la un termen liber (astfel $\varphi_{it} = \varphi_{i,n+1}$, $\varphi^{\mathrm{I}}_{is} = \varphi_{i,n+2}$, $\varphi^{\mathrm{II}}_{is} = \varphi_{i,n+3}$).

Conform expresiei (5), calculul coeficienților φ_{ii} și φ_{ih} se realizează astfel :

— inițial se determină, numai pentru coeficienții principali φ_{ii} și pentru coeficienții secundari așezați *deasupra* diagonalei principale $(i \leqslant h)$, termenii $\sum \lambda_k a_k^{(i)} a_k^{(h)} + \sum \lambda_k b_k^{(i)} b_k^{(h)}$ (partea de la începutul schemei logice din figura 3, pînă la operația notată δ) ;

— valorile calculate pentru coeficienții secundari φ_{ih} de deasupra diagonalei principale se depun și la adresele corespunzătoare coeficienților secundari φ_{hi} așezați dedesubtul diagonalei principale (operația notată δ în fig. 3) ;

— în continuare, se determină termenii $\sum \lambda_k a_k^{(i)} b_k^{(h)}$ pentru toți coeficienții (operațiile α pînă la δ inclusiv în fig. 3) ; în felul acesta la adresa coeficientului φ_{ih} se depune termenul $\sum \lambda_k a_k^{(i)} b_k^{(h)}$, iar la adresa coeficientului simetric termenul $\sum \lambda_k a_k^{(h)} b_k^{(i)}$;

— în încheiere, se adună[1]) valorile depuse pînă acum la adresele, coeficienților φ_{ih} cu valorile depuse la adresele coeficienților simetrici φ_{hi}, iar mărimile obținute se depun atît la adresele coeficienților φ_{ih}, cît și la adresele coeficienților φ_{hi} (operația γ_2 din fig. 3), rezultînd valorile finale.

Prin acest mod de calcul se evită repetarea determinării anumitor mărimi, realizîndu-se un program cu număr redus de instrucțiuni. În ceea ce privește coeficienții φ_{ih}, necesari operațiilor de verificare, aceștia se determină împreună cu coeficienții φ_{ih}, folosind același algoritm, datorită introducerii diagramei totale m_{xt} drept cea de a $(n+1)$ diagramă unitară în matricele $[A]$ și $[B]$.

Pentru termenii liberi, partea notată cu $\varphi^{\mathrm{I}}_{is}$ se determină odată cu coeficienții φ_{ih} datorită asemănării dintre expresiile (5) și (6). În acest scop, coloana $(n+2)$ din matricile $\lceil A \rceil$ și $\lceil B \rceil$ trebuie privită la fel ca primele $(n+1)$ coloane care conțin ordonate ale diagramelor unitare. Procedînd în acest mod, mașina electronică va forma în matricea $[\varphi]$ și linia $(n+2)$, care însă nu mai apare în calculele ulterioare. Partea notată cu

---

[1]) Prin această adunare se realizează dublarea termenilor $\sum \lambda_k a_k^{(i)} a_k^{(h)} + \sum \lambda_k b_k^{(i)} b_k^{(h)}$ (existenți atît la φ_{ih}, cît și la φ_{hi}), precum și sumarea dintre termenul $\sum \lambda_k a_k^{(i)} b_k^{(h)}$ (existent la φ_{ih}), și termenul $\sum \lambda_k a_k^{(h)} b_k^{(i)}$ (existent la φ_{hi}).

BLOCUL II

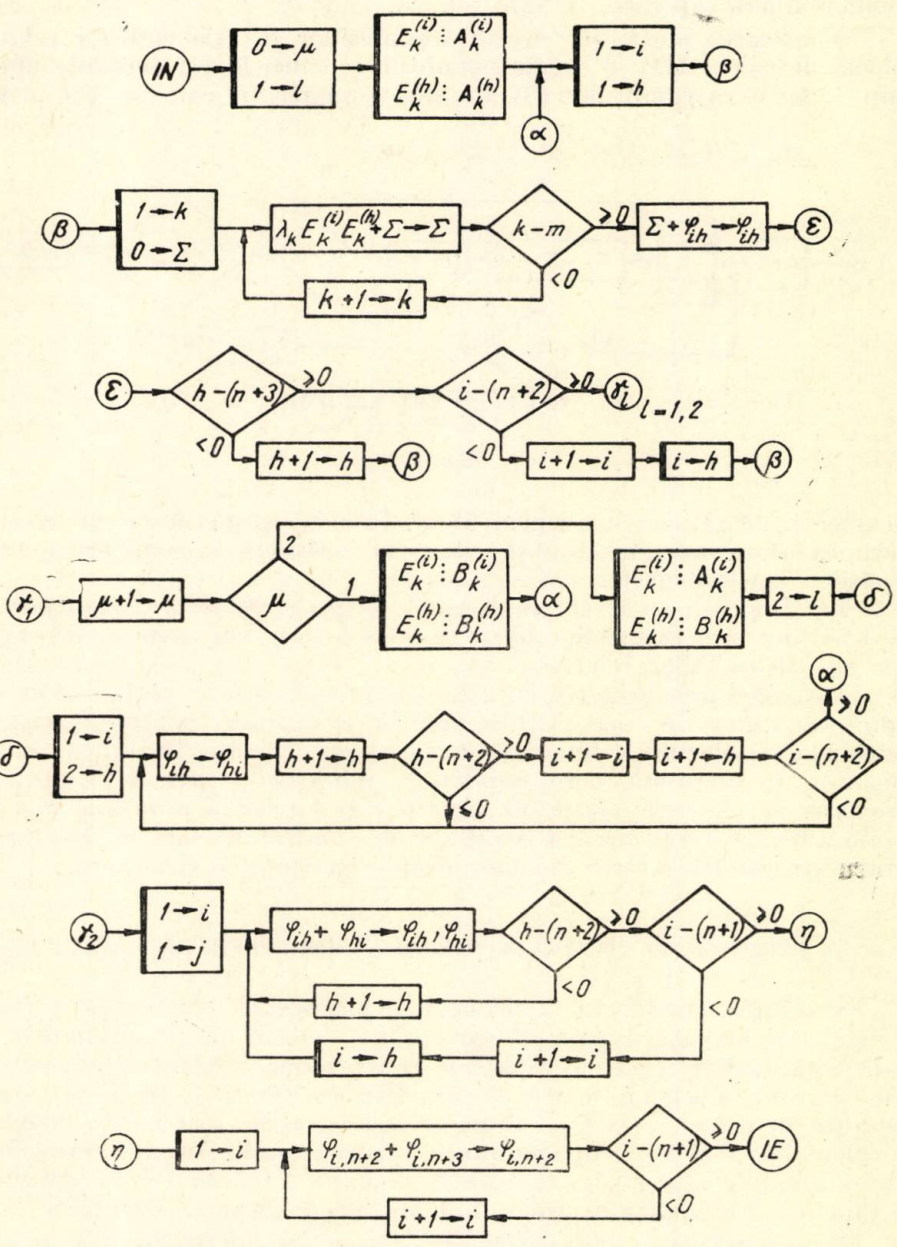


Fig. 3

φ_{is}^{II} se calculează cu ajutorul expresiei (7), folosind datele cuprinse în coloanele $(n+3)$ ale matricilor $[A]$ și $[B]$. În final, coloanele $(n+2)$ și $(n+3)$ din matricea $[\varphi]$ se adună, rezultînd mărimile $\varphi_{is} = \varphi_{is}^{I} + \varphi_{is}^{II}$ ale termenilor liberi (operația η din fig. 3).

Verificarea alcătuirii corecte a expresiilor (3) ale rotirilor relative (blocul de calcul III) se execută conform schemei logice detaliate din figura 4, pe baza condițiilor (8), folosind sumarea pe coloane atît pentru

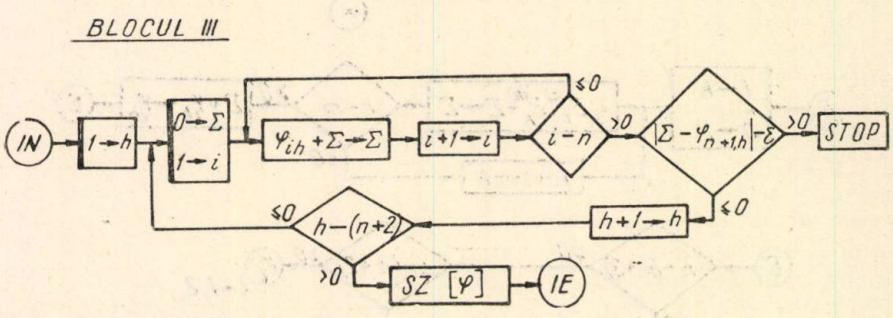


Fig. 4

coeficienți, cît și pentru termeni liberi. În schema logică s-a notat cu ε mărimea erorii maxime admise; dacă la verificare această eroare este depășită, mașina electronică se oprește.

La sfîrșitul acestei etape de lucru, în program se prevede tipărirea coeficienților și a termenilor liberi (matricea $[\varphi]$), care alcătuiesc expresiile (3) ale rotirilor relative.

Deoarece prin egalarea cu zero a expresiilor (3) se obține chiar sistemul ecuațiilor de condiție din metoda eforturilor, pentru rezolvarea cadrului dat folosind sistemul de bază ce rezultă introducînd articulații obișnuite în secțiunile corespunzătoare primelor n articulații plastice, înseamnă că schemele logice din figurile 3 și 4 rezolvă problema mai generală a formării automate a ecuațiilor de condiție din metoda eforturilor pentru structuri alcătuite din bare drepte cu secțiune constantă.

3. DETERMINAREA ORDINEI DE FORMARE A ARTICULAȚIILOR PLASTICE

Stabilirea succesiunii articulațiilor plastice se efectuează pornind de la ultima articulație plastică spre prima, trecînd printr-un număr de etape intermediare egal cu gradul de nedeterminare statică al structurii, cum se arată în schema logică de principiu din figura 1. În fiecare etapă operațiile de calcul se execută după același algoritm, rezumat în blocurile de calcul IV, V și VI. După terminarea unei anumite etape intermediare j, programul de calcul asigură trecerea la etapa următoare $j-1$; cînd cele n etape au fost epuizate, programul prevede încheierea calculului.

Pe măsură ce se avansează către prima articulație plastică, în matricea $[\varphi]$ — a coeficienților și termenilor liberi din expresiile rotirilor relative ce apar în secțiunile 1, 2, ... n — se anulează, după fiecare etapă intermediară, cîte o linie și o coloană, iar restul coeficienților și termenilor

liberi se modifică în consecință. În această matrice va exista deci, într-o etapă intermediară j, un număr de $n-j$ linii cu toate elementele nule. Pentru unitatea programului, operațiile de triere a factorului de încărcare maxim c_j și de eliminare a momentului M_j se vor executa nu numai asupra expresiilor rotirilor relative care sînt diferite de zero, ci și asupra acelora care sînt nule datorită menținerii continuității în secțiunile respective. În acest mod, în toate etapele intermediare operațiile de calcul se vor aplica mereu unui număr de n linii ale matricei $[\varphi]$.

Blocurile de calcul IV, V și VI sînt detaliate în schemele logice din figurile 5, 6 și 7. În această parte a programului de calcul intervin, pe lîngă datele inițiale arătate anterior, și valorile momentelor plastice $M_p^{(h)}$ din secțiunile 1, ... h, ... n, mărimi care se introduc în calculatorul electronic sub forma matricei — coloană $\{M_p\}$ de ordin $n \times 1$.

În blocul de calcul IV (fig. 5) se realizează calculul factorilor de încărcare $c_j^{(i)}$ pe baza relației (2). În expresia fiecărei rotiri relative φ_i se efectuează mai întîi suma produselor dintre fiecare coeficient și momentul plastic al secțiunii corespunzătoare, iar apoi prin împărțire la termenul liber (cu semn schimbat) rezultă factorul de încărcare căutat. În cele $n-j$ expresii în care coeficienții și termenii liberi sînt nuli, se ocolește calculul factorului de încărcare $c_j^{(i)}$ corespunzător, deoarece s-ar ajunge la o nedeterminare de forma 0/0. În acest scop, înainte de a se trece pentru o anumită expresie φ_i la efectuarea raportului (2), se verifică dacă termenul liber din expresia respectivă este nul sau nu [1]), iar în situația în care este nul se depune mărimea zero la adresa factorului de încărcare respectiv.

În blocul de calcul V (fig. 6) se alege valoarea maximă dintre factorii de încărcare $c_j^{(i)}$, mărime notată c_j. În paralel, este identificat indicele j al secțiunii în care se formează articulația plastică corespunzătoare etapei intermediare respective și este reținut coeficientul principal φ_{jj}, care va fi folosit în operația de eliminare ce urmează; se tipăresc apoi factorul de încărcare c_j și indicele j.

În vederea trecerii la etapa intermediară următoare, blocul de calcul VI realizează modificarea coeficienților și termenilor liberi din matricea $[\varphi]$, corespunzător eliminării momentului M_j. Mărimile modificate se depun în locul celor inițiale în aceeași matrice $[\varphi]$, iar în urma operației de eliminare a momentului M_j elementele din linia și coloana j se anulează.

Schema logică detaliată a blocului de calcul VI se poate urmări în figura 7; pentru început elementele $\varphi_{jh}^{(j)}$ ale liniei j din matricea $[\varphi]$, pe baza cărora se realizează operația de modificare, se transferă într-o nouă linie $n+2$ în partea inferioară a acestei matrice, în scopul conservării lor pe parcursul operațiilor ulterioare. Pentru elementele fiecărei linii i se efectuează trecerea la expresiile corespunzătoare etapei $j-1$ următoare, pe baza unei transformări asemănătoare cu cea indicată de relațiile (2), anume

$$\varphi_{ih}^{(j-1)} = \varphi_{ih}^{(j)} - \varphi_{ji}^{(j)} \cdot \varphi_{jh}^{(j)} / \varphi_{jj}^{(j)}. \qquad (11)$$

[1]) În mod practic, trebuie, ținut seamă de faptul că mașina electronică funcționează cu o anumită eroare inerentă, în așa fel încît în matrice elementele liniilor și coloanelor corespunzătoare momentelor eliminate nu rezultă perfect nule; de aceea, pe schema logică din figura 6 se verifică dacă termenul liber este mai mic în valoare absolută decît eroarea admisibilă.

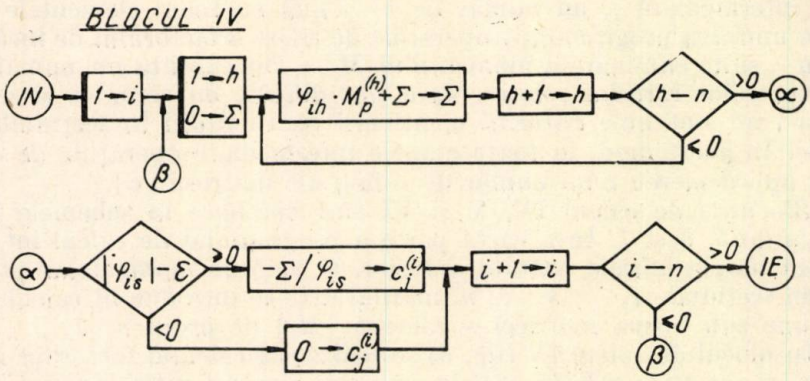


Fig. 5

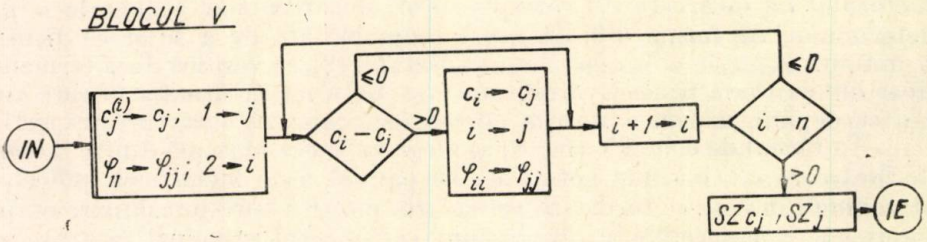


Fig. 6

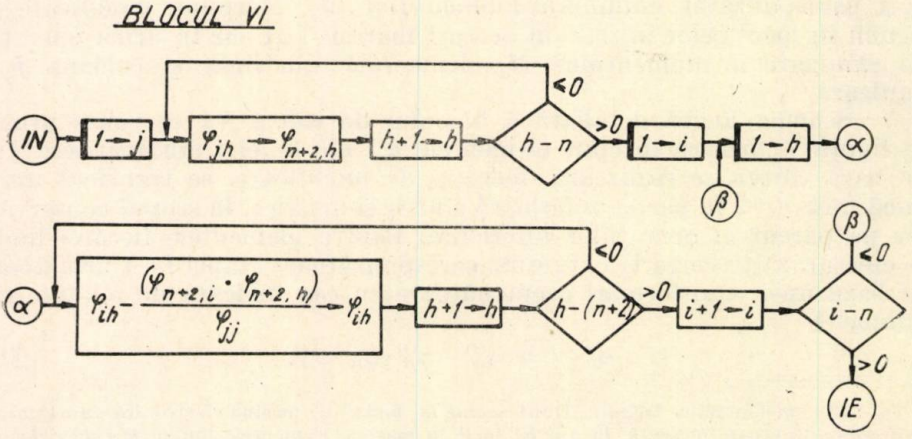


Fig. 7

Coeficientul principal $\varphi_{jj}^{(j)}$ a fost reținut la o adresă separată încă în blocul anterior V, iar elementele $\varphi_{ji}^{(j)}$, $\varphi_{jh}^{(j)}$ se iau din linia $n+2$ a matricei $[\varphi]$, sub forma $\varphi_{n+2,i}^{(j)}$, $\varphi_{n+2,h}^{(j)}$. În programarea expresiei (11) s-a prevăzut efectuarea mai întîi a produsului $(\varphi_{n+2,i} \cdot \varphi_{n+2,h})$ și numai după aceea împărțirea la φ_{jj}, pentru a se evita depășirea unității.

★

Pe baza schemelor logice discutate mai sus, a fost întocmit un program de calcul pentru mașina electronică CIFA 102. Acest program este reprodus, împreună cu detaliile necesare aplicării sale efective, în lucrarea „Instrucțiuni pentru determinarea directă a ordinei de formare a articulațiilor plastice la cadre încărcate proporțional, folosind calculatorul electronic CIFA 102", care poate fi consultată la sediul Catedrei de mecanica construcțiilor I din Institutul de construcții București.

Mașina electronică cifrică de calcul CIFA 102 are o memorie de 4096 adrese; pentru introducerea datelor inițiale a rămas disponibilă o parte a memoriei care permite analiza elasto-plastică a unor structuri avînd gradul de nedeterminare statică de pînă la cca. 40, ceea ce acoperă majoritatea necesităților curente.

4. EXEMPLU DE CALCUL

La cadrul din figura 8*a*, încărcat cu sarcini care cresc proporțional, s-a aplicat metoda propusă pentru stabilirea directă a ordinei de formare a articulațiilor plastice cu ajutorul unui calculator electronic. Barele structurii, de secțiune constantă, sînt alcătuite din profile metalice I avînd momentele de inerție indicate pe figura 8*a*; stîlpii și riglele scurte au momente plastice [1]) $M_p = 20$ tm, iar riglele lungi au momente plastice de mărime $2M_p = 40$ tm (fig. 8 b). Structura este de nouă ori static nedeterminată ($n = 9$).

Folosind procedeul combinării mecanismelor elementare, s-a identificat prin încercări mecanismul de cedare plastică care conduce la factorul de încărcare minim, verificîndu-l prin îndeplinirea condiției de plasticitate [3]. În cazul de față, structura cedează după mecanismul total reprezentat în figura 8*b*, care cuprinde un număr de $n+1=10$ articulații plastice; în stadiul cedării plastice factorul de încărcare are mărimea $c = 1{,}669$, iar diagrama de momente încovoietoare corespunzătoare este arătată pe figura 8*c*. În continuare, utilizînd procedeul sistematizat propus în lucrarea [2], s-a identificat ultima articulație plastică : este cea care se formează la baza celui de-al doilea stîlp.

O dată aceste operații preliminare efectuate, se trece la pregătirea datelor inițiale care urmează să fie indicate calculatorului electronic. Sistemul de bază static determinat pe care se vor exprima rotirile relative inițiale se obține prin introducerea de articulații obișnuite în secțiunile unde se formează primele n articulații plastice; momentele încovoietoare necunoscute $M_1 - M_9$ din aceste secțiuni sînt numerotate în ordinea

[1]) Conform celor arătate în lucrarea [5], raportul k_2 dintre momentul de inerție al riglelor lungi și momentul de inerție al celorlalte bare depinde de raportul k_1 între momentul plastic al riglelor lungi și momentul plastic al celorlalte bare prin relația aproximativă $k_2 = (k_1)^{4/3}$.

indicată pe figura 9*b*. Pe acest sistem de bază se construiesc diagramele unitare $m_{x1}-m_{x9}$ (în figura 9*c* se dă ca exemplu diagrama m_{x7}), diagrama unitară totală m_{xt} (fig. 9*d*) și diagrama de momente încovoietoare produsă de sarcinile de exploatare M_{xs} (fig. 9*e*). O primă verificare, referitoare la

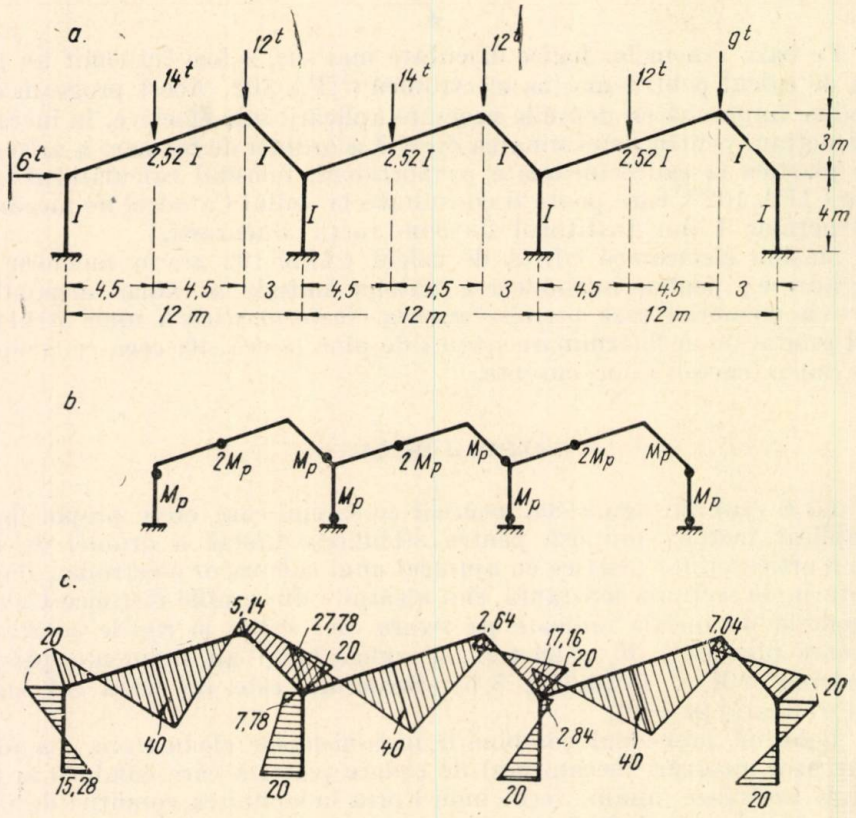


Fig. 8

corectitudinea trasării diagramelor unitare, se efectuează de către inginerul proiectant prin controlul ca fiecare ordonată a diagramei totale m_{xt} să rezulte drept suma ordonatelor corespunzătoare din cele nouă diagrame unitare $m_{x1}-m_{x9}$.

Structura cuprinde zece bare ($m = 10$), la care admitem sensurile de parcurgere indicate pe figura 9*a*. Lungimile transformate ale barelor (determinate pentru mărimea arbitrară $I_c = I$ a momentului de inerție de referință) se introduc sub forma matricei-coloană

$$\{\lambda\} = \{4\,;\ 3{,}76\,;\ 4{,}24\,;\ 4\,;\ 3{,}76\,;\ 4{,}24\,;\ 4\,;\ 3{,}76\,;\ 4{,}24\,;\ 4\}.$$

Elementele din diagramele $m_{x1}-m_{x9}$, m_{xt} și M_{xs}, corespunzătoare capetelor din stînga, respectiv din dreapta ale barelor, se introduc în calculatorul

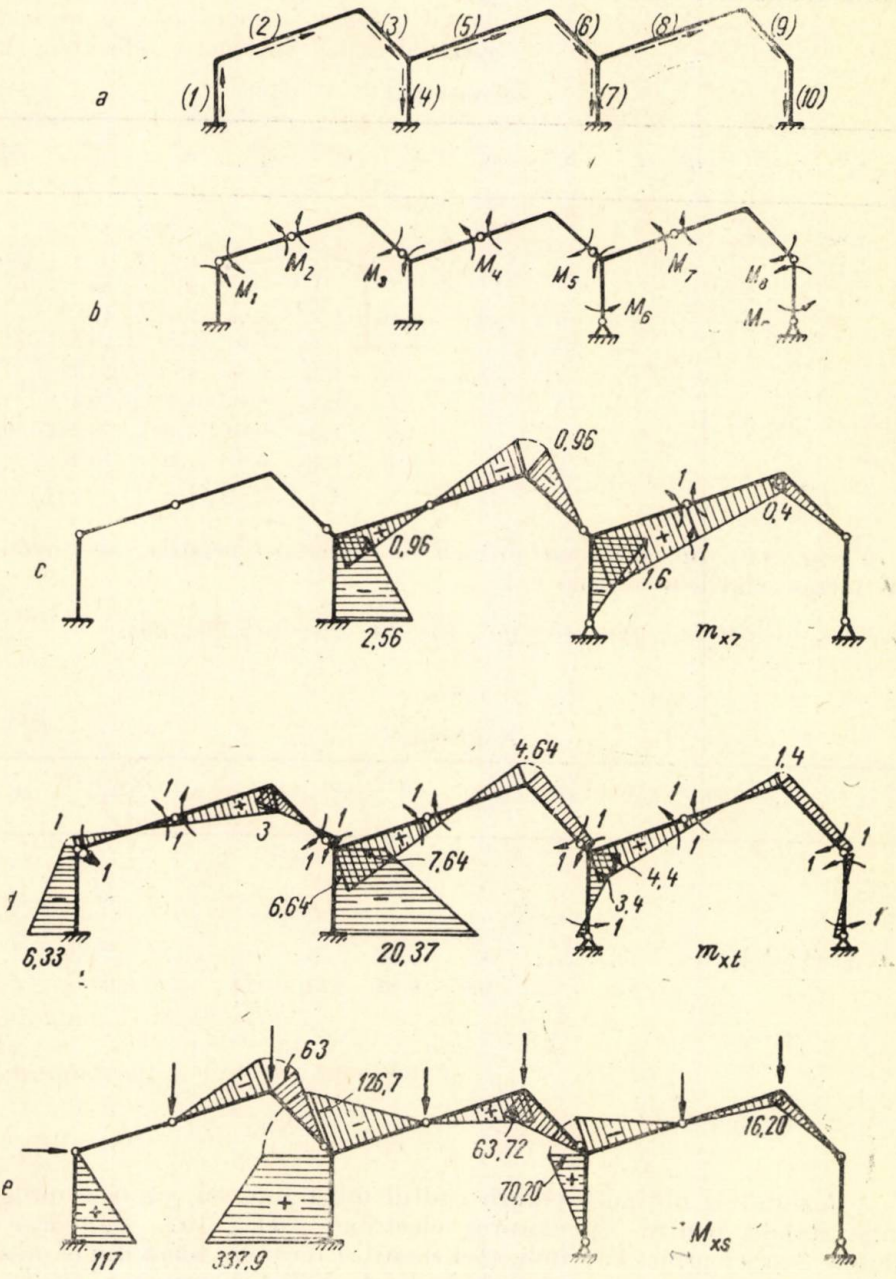

a
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)
(9)
(10)
b
M1
M2
M3
M4
M5
M6
M7
M8
c
0,96
0,96
2,56
1
1
1,6
0,4
mx7
6,33
6,64
7,64
20,37
4,64
4,4
3,4
1,4
mxt
e
63
126,7
63,72
70,20
16,20
117
337,9
Mxs

Fig. 9

electronic sub forma matricelor [A] şi [B], reproduse în tabelele 1 şi 2. Valorile momentelor plastice corespunzătoare celor nouă secţiuni 1, 2, ...

Tabela 1

Matricea [A]

Bara	$a_k^{(1)}$	$a_k^{(2)}$	$a_k^{(3)}$	$a_k^{(4)}$	$a_k^{(5)}$	$a_k^{(6)}$	$a_k^{(7)}$	$a_k^{(8)}$	$a_k^{(9)}$	$a_k^{(t)}$	$a_k^{(s)}$	m_k^{st}
1	−2,667	−2,667	−1							−6,333	+117	
2	−1									−1		+47,25
3	+1	+2								+3	−63	
4			−1	−1,6	−1,2	−0,6	−0,96	−1,32	−0,96	−7,64	+126,7	
5				+1,6	+1,2	+0,6	+0,96	+1,32	+0,96	+6,64	−126,7	+47,25
6				−0,4	−1,2	−0,6	−0,96	−1,32	−0,96	−4,64	+63,72	
7					−1		−1,6	−1,20	−0,60	+3,40	+70,20	
8							+1,6	+1,20	+0,60	+3,40	−70,20	−40,50
9							+0,4	−1,20	−0,60	−1,40	+16,20	
10								−1		−1		

... 9 (fig. 9 *h*), în care apar primele n articulaţii plastice, se introduc sub forma matricei-coloană

$$\{M_p\} = \{20;\ 40;\ 20;\ 40;\ 20;\ 20;\ 40;\ 20;\ 20\}.$$

Tabela 2

Matricea [B]

Bara	$b_k^{(1)}$	$b_k^{(2)}$	$b_k^{(3)}$	$b_k^{(4)}$	$b_k^{(5)}$	$b_k^{(6)}$	$b_k^{(7)}$	$b_k^{(8)}$	$b_k^{(9)}$	$b_k^{(t)}$	$b_k^{(s)}$	m_k^{dr}
1	−1									−1		
2	+1	+2								+3	−63	+47,25
3			−1							−1		
4	−1,667	−2,667	−2	−1,6	−2,2	−1,6	−2,56	−3,52	−2,56	−20,37	+337,9	
5				+0,4	−1,2	−0,6	−0,96	−1,32	−0,96	−4,64	+63,72	+47,25
6					−1					−1		
7						+1				+1		
8							+0,4	−1,2	−0,6	−1,4	+16,20	+40,50
9								−1		−1		
10									+1	+1		

Rezultatele obţinute pentru cadrul din figura 8*a*, pe baza programului stabilit pentru calculatorul electronic CIFA 102, sînt date în tabelele 3 şi 4; prima cuprinde coeficienţii şi termenii liberi din expresiile rotirilor relative pentru sistemul de bază static determinat (matricea $[\varphi]$), iar în a doua tabelă se poate urmări succesiunea articulaţiilor plastice (de la penultima articulaţie spre prima), precum şi mărimea factorilor de încărcare corespunzători.

Tabela 3

Matricea $[\varphi]$

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(t)	(s)
φ_1	124,44	127,61	54,40	32,00	37,34	25,34	40,53	55,74	40,53	538,00	— 908,78
φ_2	127,6	117,85	66,17	51,20	59,74	40,53	64,85	89,18	64,85	742,04	—1272,03
φ_3	54,40	66,17	72,45	57,58	63,18	41,58	66,55	91,50	66,55	580,12	— 945,50
φ_4	32,00	51,20	57,58	88,08	64,89	42,89	68,63	94,37	68,63	568,47	— 949,12
φ_5	37,34	59,74	63,18	64,89	121,03	56,92	110,29	143,67	102,29	759,57	—1224,27
φ_6	25,34	40,53	41,58	42,89	56,92	44,77	52,45	76,14	56,45	437,25	— 702,99
φ_7	40,53	64,85	66,55	68,63	110,29	52,45	141,31	144,50	102,52	791,89	—1304,09
φ_8	55,74	89,18	91,50	94,38	143,67	76,14	144,50	239,31	145,33	1080,00	—1738,13
φ_9	40,53	64,85	66,55	68,63	102,29	56,45	102,52	145,33	110,81	758,21	—1231,18
φ_t	538,00	742,04	580,12	568,47	759,57	437,25	791,89	1080,00	758,21	6255,80	—10275,7

Tabela 4

Articulaţia	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I
Secţiunea	4	7	2	6	3	1	5	8	9
Factor c_j	1,636	1,636	1,620	1,597	1,576	1,559	1,474	1,471	1,076

De remarcat că, pentru încărcarea considerată, articulațiile plastice VIII și IX se formează practic concomitent. Se observă totodată că prima articulație plastică se formează repede, la o creștere redusă a sarcinilor date (7,6%), în timp ce pentru a se ajunge la articulația plastică următoare este necesară o creștere a sarcinilor pînă la 47%, după care celelalte articulații apar într-o succesiune strînsă.

Timpul efectiv de lucru a mașinii electronice a fost de 27′, dintre care 16′ au fost necesare pentru formarea și tipărirea elementelor matricei [φ], iar restul de 11′ pentru operațiile de triere și eliminare în vederea identificării ordinei de apariție a articulațiilor plastice.

Este interesant să se aprecieze asupra preciziei numerice cu care se obțin rezultatele prin metoda propusă. Deoarece succesiunea articulațiilor plastice se determină pornind de la ultima articulație spre prima, trebuie văzut ce influență are faptul că se începe calculul tocmai din zona intervalelor restrînse și a valorilor foarte apropiate ale factorilor de încărcare.

Pentru aceasta, s-a determinat prima articulație plastică și pe calea uzuală, pornind de la stadiul elastic, anume rezolvînd sistemul ecuațiilor de condiție din tabela 3, care corespunde aplicării metodei eforturilor cadrului dat. S-a obținut pentru aceeași articulație plastică factorul de încărcare 1,071, față de 1,076 cît a rezultat în tabela 4, valori practic egale (diferența de ordinul 0,5%).

5. DOMENIUL DE APLICARE

Determinarea directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice și a factorilor de încărcare corespunzători, pe o cale simplă și care evită rezolvarea oricărui sistem de ecuații, este evident utilă. Se creiază posibilitatea de introducere în practica curentă de proiectare a cercetării comportării structurilor în domeniul elastico-plastic, nu numai în ce privește cunoașterea stadiului de cedare plastică, ci și referitor la anumite stadii intermediare apreciate ca interesante. În lucrarea [1] s-a arătat că starea de eforturi pentru un asemenea stadiu intermediar poate fi determinată direct.

În această formă, metoda apare de fapt ca un procedeu de verificare a comportării pentru o structură dată. Ea poate fi însă folosită și la dimensionarea structurii, pe baza criteriului cedării plastice, cînd se prescriu anumite condiții privind stadiile intermediare.

Astfel, se întîlnește deseori [6] recomandarea ca — pentru sarcinile de exploatare — să se asigure comportarea perfect elastică a întregii structuri, atît în vederea evitării unor plastificări în acest stadiu, cît și pentru limitarea deformabilității structurii. Înseamnă că, alături de diagrama de momente încovoietoare la cedarea plastică, ar deveni necesară și cunoașterea diagramei de momente încovoietoare în domeniul elastic. Metoda propusă are avantajul de a elimina necesitatea determinării acestei ultime diagrame.

Pentru dimensionare, se pornește de la evaluarea sarcinilor pe care trebuie să le suporte structura (sarcini de exploatare) și se alege valoarea factorului de încărcare $c_{n+1} = c^*$ pentru care trebuie asigurată capacitatea portantă. Se face totodată o predimensionare, stabilind rapoartele dintre

momentele plastice M_p ale diferitelor bare. Cu aceste elemente, se identifică mecanismul de cedare plastică și din condiția de mecanism rezultă valorile M_p, pe baza cărora se dimensionează structura.

În continuare, se aplică metoda propusă determinînd ordinea de formare a articulațiilor plastice și mărimile factorilor de încărcare corespunzători, începînd de la c_n pînă la c_1. Această ultimă valoare se compară cu coeficientul de formă $\nu = M_p/M_c = W_{p1}/W_{c1}$ al secțiunilor structurii:

— cînd $c_1 \geqslant \nu$, structura se comportă perfect elastic pentru sarcini de exploatare;

— cînd $c_1 < \nu$, condiția nu este îndeplinită și deci structura trebuie întărită.

O posibilitate de întărire constă în sporirea proporțională a tuturor valorilor M_p la $M_p \cdot \nu/c_1$. Prin aceasta, structura devine mai rigidă, mecanismul de cedare rămîne același și toți factorii de încărcare $c_1 \ldots c_{n+1}$ cresc în același raport ν/c_1. O asemenea soluție apare indicată cînd trebuie micșorată deformabilitatea structurii.

Cealaltă posibilitate este de a prevedea întăriri *locale* de secțiuni în zona acelor articulații plastice pentru care s-a obținut $c < \nu$, anume sporind acolo valorile $M_p^{(1)}$, $M_p^{(2)}$, ... la $M_p^{(1)} \cdot \nu/c_1$, $M_p^{(2)} \cdot \nu/c_2$, ..., în ideia de a ridica limita inferioară a domeniului elastico-plastic astfel ca $c_1' \simeq c_2' \simeq \ldots \simeq \nu$. Desigur, acest mod de corectare are un caracter aproximativ, deoarece întăririle efectuate pot aduce anumite modificări în comportarea structurii, dar nu importante pentru că întăririle locale afectează în genere puțin rigiditatea barelor. În orice caz, este cert că pe această cale se obține o micșorare a intervalului dintre formarea primei și a ultimei articulații plastice. Factorul de încărcare c_{n+1} va crește desigur mai puțin, dar va crește totuși, așa cum indică criteriul factorului de încărcare minim.

Se ajunge astfel, fără a cunoaște diagrama de momente încovoietoare corespunzătoare domeniului elastic, la controlarea aproximativă a condiției că, pentru sarcini de exploatare, întreaga structură se comportă elastic.

BIBLIOGRAFIE

1. Alex. Gheorghiu, C. Pacoste, *Etablissement direct de la succession des rotules plastiques pour des structures soumises à des charges proportionnelles*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., *4* (1966);
   Stabilirea directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice la cadre încărcate cu sarcini proporționale, St.cerc. mec. apl., *4* (1966).
2. Alex. Gheorghiu, *Les systèmes conjugués, moyen d'exprimer la condition de compatibilité dans la théorie des constructions*, Rev. Roum. Sci.Techn.- Méc. Appl., *2* (1961).
3. B. G. Neal, *The plastic methods of structural analysis*, Chapman and Hall, London, 1956.
4. Alex. Gheorghiu, *Statica construcțiilor*, vol. II. Edit. tehnică, București, 1965.
5. Alex. Gheorghiu și colab., *Asupra calculului cadrelor în domeniul elastico-plastic prin etape succesive*, Buletinul Institutului de Construcții București, *8* (1961).
6. H. A. Sawyer, *An elastic criterion for plastic design*, Proceedings ASCE, J. Struct. Div., martie 1958.

STABILITATEA STATICĂ A BARELOR CU PEREȚI SUBȚIRI AVÎND PROFILUL ÎNCHIS

de TOMA PANĂ
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

539.4

În lucrare se stabilesc ecuațiile diferențiale de deformație pentru bara de secțiune constantă încărcată cu un sistem arbitrar de sarcini și aflată în cea de-a doua formă de echilibru. Apoi se calculează valorile sarcinilor critice care produc flambajul de încovoiere și de răsucire pentru cazurile în care bara, presupusă simplu rezemată la capete, este solicitată la compresiune centrică, la încovoiere pură și la răsucire.

Pierderea stabilității este însoțită de modificarea direcțiilor eforturilor unitare normale și tangențiale în raport cu sistemul de referință la care este raportată bara. Ca urmare, eforturile unitare vor avea proiecții pe toate cele trei axe ale sistemului. Luarea în calcul a tuturor acestor proiecții complică deducerea ecuațiilor diferențiale de deformație. Majoritatea lucrărilor publicate pînă în prezent simplifică deducerea ecuațiilor diferențiale de deformație pe seama neglijării proiecției efortului unitar tangențial, pe direcția axei longitudinale a barei.

În lucrarea de față simplificarea se realizează prin utilizarea a două sisteme de referință : unul fix — la care este raportată bara presupusă în stare naturală — și altul mobil — solidar cu secțiunea transversală a barei aflată în proces de deformare. Deducerea ecuațiilor diferențiale se face în raport cu sistemul de referință mobil, trecerea de la acesta la sistemul fix efectuîndu-se prin exprimarea eforturilor din secțiunea transversală a barei deformate în funcție de eforturile din secțiunea barei nedeformate. Astfel rezultă un sistem de ecuații diferențiale de deformație mai general decît cele existente în literatură.

★

Se consideră o bară cu pereți subțiri avînd profilul închis, rezemată în mod arbitrar, asupra căreia se fac următoarele ipoteze :

1. bara este executată dintr-un material omogen și izotrop care ascultă de legea lui Hooke ;

2. lungimea barei este mare în comparaţie cu dimensiunile secţiunii transversale;

3. secţiunea transversală are o formă oarecare şi este constantă în lungul barei;

4. suprafaţa laterală fiind liberă de sarcini, eforturile unitare tangenţiale din secţiunea transversală sînt tangente la contur;

5. prin deformare, suprafaţa secţiunii transversale se poate deplana fără a se modifica forma conturului;

6. se neglijează variaţia de direcţie şi de modul a eforturilor unitare normale şi tangenţiale pe grosimea peretelui, care este presupusă mică în comparaţie cu celelalte dimensiuni ale secţiunii;

7. se iau în consideraţie efectele deformaţiilor produse de eforturile unitare tangenţiale asupra repartiţiei eforturilor unitare normale.

8. se admite ipoteza lui Umanski, adică se consideră că, deplanarea în cazul răsucirii împiedicate este proporţională cu deplanarea din cazul răsucirii libere.

Bara, presupusă în stare nedeformată, se raportează la un triedru stîng avînd axa Ox dirijată în direcţia lungimi, iar ca axe Oy şi Oz — axele principale centrale ale secţiunii transversale de la extremitatea din stînga a barei. Pentru studiul local se va utiliza şi o coordonată suplimentară s, care determină poziţia unui punct de pe linia mediană a secţiunii transversale [2], [3].

O secţiune transversală oarecare are axele principale centrale de inerţie (2) şi (3), iar ca normală la plan în centrul său de greutate, axa (1). Evident că axele (2) şi (3) sînt paralele respectiv cu axele Oy şi Oz iar axele Ox şi (1) sînt confundate (fig. 1*a*).

Încărcînd bara cu un sistem arbitrar de sarcini şi considerînd că triedrul format din axele (1), (2) şi (3) este solidar cu secţiunea transversală, după deformarea barei acest triedru se va afla translatat şi rotit faţă de sistemul de referinţă $Oxyz$ care este presupus fix (fig. 1 *b*).

În procesul de deformare secţiunea transversală efectuează simultan trei translaţii, trei rotiri şi o deplanare. Primele şase mărimi sînt funcţii numai de poziţia secţiunii în lungul axei Ox şi se notează cu

$\xi(x)$, $\eta(x)$, $\zeta(x)$ — deplasările secţiunii transversale în direcţiile axelor Ox, Oy, şi Oz;

$\theta_y(x)$, $\theta_z(x)$ — unghiurile de rotire ale secţiunii în jurul axelor ei principale (2) şi (3);

$\varphi(x)$ — unghiul de rotire al secţiunii, în planul său, în jurul centrului de încovoiere $A(y_0, z_0)$.

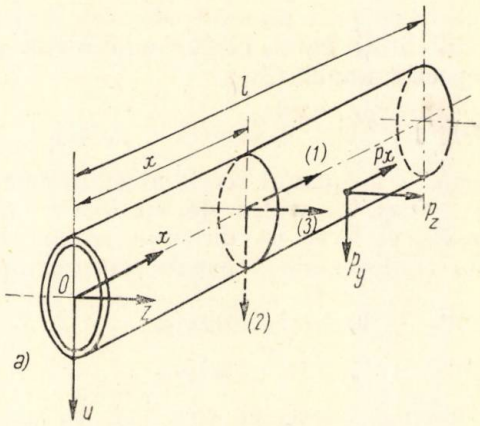
Datorită deformării barei, un punct oarecare $M(y, z)$ de pe linia mediană a secţiunii transversale se deplasează în direcţia axei Ox şi în direcţia tangentei la linia mediană. Eforturile unitare corespunzătoare acestor deplasări sînt respectiv

$$\sigma = E[\xi' - \theta_y' z + \theta_z' y - \beta'\hat{\omega}) \tag{1}$$

şi

$$\tau = G[\varphi' r - \beta\hat{\omega}' + (\eta' + \theta_z)\, y' + (\zeta' - \theta_y) z']. \tag{2}$$

În relațiile (1) și (2) s-a notat cu $\beta(x)$ funcția de proporționalitate între deplanarea locală și deplanarea unitară $\hat{\omega}(s)$, calculată în ipoteza răsucirii libere [2]. În aceste relații, accentul simbolizează derivata în raport cu arcul s pentru funcțiile $\hat{\omega}(s)$, $y(s)$ și $z(s)$ și, respectiv, derivata



Valorile cosinusurilor directoare

	x	y	z
(1)	1	$-\theta_z$	θ_y
(2)	θ_z	1	φ
(3)	$-\theta_y$	φ	1

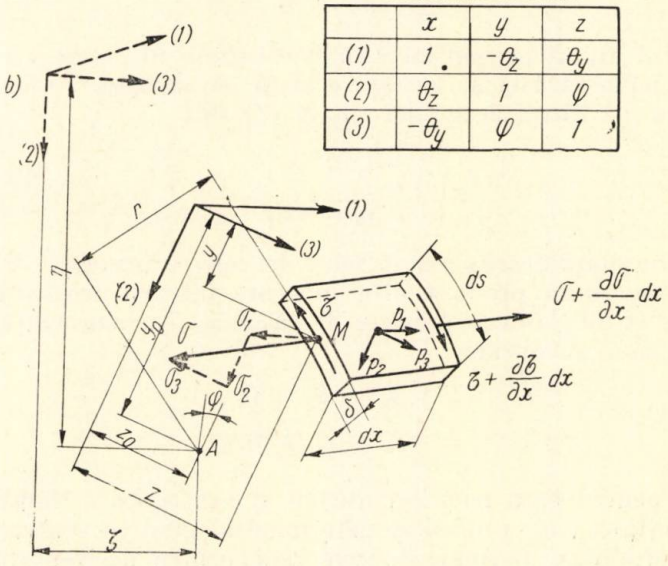


Fig. 1 a și b

în raport cu x pentru celelalte funcții. Se precizează că $y'(s)$ și $z'(s)$ reprezintă respectiv cosinusul și sinusul unghiului format de tangenta dusă la linia mediană, în punctul $M(y, z)$, cu axa (2), iar r distanța dintre centrul de încovoiere al secțiunii și această tangentă.

Trecerea barei de la starea naturală nedeformată la prima formă de echilibru este însoțită de deformații extrem de mici. În consecință,

în calculul efoturilor din secţiunea transversală se poate neglija efectul produs de deformaţii asupra direcţiilor eforturilor unitare normale şi tangenţiale. Cînd prima formă de echilibru devine nestabilă şi bara trece în cea de-a doua formă de echilibru se produc deplasări suplimentare care modifică direcţiile unitare în raport cu sistemul de axe fixe $Oxyz$.

Fibra longitudinală ce trece prin punctul $M(y, z)$, iniţial paralelă cu axa Ox, după pierderea stabilităţii barei, va face cu direcţia acestei axe, în planele xOy şi xOz, respectiv unghiurile :

$$[\eta' + (z - z_0)\varphi'] \qquad \text{şi} \qquad [\zeta' - (y - y_0)\varphi'].$$

Dacă se ţine seama că normala la planul secţiunii transversale face cu direcţia axei Ox unghiurile $-\theta_z$ şi θ_y, atunci efortul unitar σ, care este tangent la fibra longitudinală, va avea pe direcţiile axelor (2) şi (3) — mobile o dată cu secţiunea transversală — următoarele componente :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma[\eta' + \theta_z + (z - z_0)\varphi'], \\ \sigma_3 &= \sigma[\zeta' - \theta_y - (y - y_0)\varphi']. \end{aligned} \tag{3}$$

Valoarea efortului unitar normal paralel cu axa (1), se calculează cu relaţia

$$\sigma_1 \cong \sigma. \tag{4}$$

Efortul unitar tangenţial τ fiind conţinut în planul secţiunii transversale se deplasează şi se roteşte o dată cu aceasta. Proiecţiile acestui efort unitar pe direcţiile axelor (2) şi (3) sînt

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \tau y', \\ \tau_3 &= \tau z'. \end{aligned} \tag{5}$$

Pentru simplificarea rezultatelor, în cele ce urmează, se vor neglija deplasările secţiunii produse prin lunecare întrucît acestea sînt mici în comparaţie cu deplasările produse de răsucire. În consecinţă, în relaţiile (2) şi (3), se va considera

$$\begin{aligned} \eta' + \theta_z &= 0, \\ \zeta' - \theta_y &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Atît pentru bara nedeformată cît şi pentru bara flambată, eforturile din secţiune transversală se determină alegînd ca centru de reducere al eforturilor unitare normale şi tangenţiale, centrul de greutate al secţiunii. Astfel, calculul eforturilor din secţiunea transversală a barei aflată în cea de-a doua formă de echilibru şi raportată la sistemul de axe mobil, provenite din reducerea eforturilor unitare σ_1, conduce la ecuaţiile

$$\begin{aligned} EA\xi'' - N_1 &= 0, \\ EI_y\zeta'' - M_2 &= 0, \\ EI_z\eta'' + M_3 &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Considerînd un element infinitesimal, de înveliș decupat din bară după pierderea stabilității, și scriind ecuația de echilibru pe direcția axei (1), aceasta poate fi adusă la forma [1]

$$\frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu}\varphi^{IV} - GI_t\varphi'' - m_0 - \int_s \frac{\partial p_1}{\partial x}\hat{\omega}\,ds + \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu GI_f}m_f'' = 0. \tag{8}$$

Simbolurile folosite în relațiile (7) și (8) corespund următoarelor mărimi :

A — aria secțiunii transversale ;

I_y și I_z — momentele de inerție ale secțiunii transversale în raport cu axele (2) și (3) din planul său ;

I_t — momentul de inerție polar convențional ;

I_f — momentul de inerție dirijat raportat la centrul de forfecare pură ;

$I_{\hat{\omega}}$ — momentul de inerție sectorial generalizat ;

ν — coeficientul de deformație al secțiunii ;

E și G — modulul de elasticitate longitudinal și transversal al materialului din care este confecționată bara ;

N_1 — forța axială din secțiune dirijată după axa (1) ;

M_2 și M_3 — momentele încovoietoare calculate în raport cu axele (2) și (3) ;

m_0 — momentul de răsucire distribuit după linia centrelor de încovoiere, provenit din eforturile unitare tangențiale ;

m_f — momentul de răsucire distribuit după linia centrelor de forfecare pură, provenit din eforturile unitare tangențiale ;

$p_1(s, x)$ — sarcina distribuită pe unitatea de suprafață mediană, dirijată în direcția axei (1).

În scrierea ecuației de echilibru local (8) s-a ținut seama de faptul că eforturile unitare σ_2 și σ_3 fiind în planul secțiunii nu participă la echilibrul pe direcția axei (1). De asemenea, pentru secțiunea infinit vecină, s-a neglijat efectul produs asupra direcțiilor eforturilor unitare σ_1 și τ de către creșterile deplasărilor acestei secțiuni în raport cu deplasările din secțiunea anterioară.

Dacă se notează cu $B_{\hat{\omega}}$ — bimomentul de încovoiere-răsucire, cu M_1 — momentul de răsucire față de axa(1) și cu T_2 și T_3 forțele tăietoare din secțiunea transversală a barei aflată în cea de-a doua formă de echilibru, rezultă pentru m_0 și m_f următoarele expresii :

$$m_0 = [\varphi'(N_1h^2 - 2b_z M_2 + 2b_y M_3 + kB_{\hat{\omega}})]' - [M_1 - T_2z_0 + T_3y_0]', \tag{9}$$

$$m_f = [\varphi'(N_1h_f^2 - 2\bar{b}_z M_2 + 2\bar{b}_y M_3 + kB_{\hat{\omega}})]' - [M_1 - T_2(z_0 + z_f) + T_3(y_0 + y_f)]'. \tag{10}$$

În aceste relații au fost utilizate notațiile :

$$
\begin{aligned}
h^2 &= \frac{I_y + I_z}{A} + y_0^2 + z_0^2, \\
b_y &= \frac{1}{2I_z}\int_c y\,(y^2 + z^2)\,\mathrm{d}A - y_0, \\
b_z &= \frac{1}{2I_y}\int_c z\,(y^2 + z^2)\,\mathrm{d}A - z_0, \\
k &= \frac{1}{I_{\hat{\omega}}}\int_c \hat{\omega}\,(y^2 + z^2)\,\mathrm{d}A, \\
h_f^2 &= h^2 + y_0 y_f + z_0 z_f, \\
\overline{b}_y &= b_y - \frac{1}{2}\,y_f, \\
\overline{b}_z &= b_z - \frac{1}{2}\,z_f,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

unde y_f și z_f reprezintă coordonatele relative ale centrului de forfecare pură măsurate în raport cu centrul de încovoiere al secțiunii.

Ținînd seama de definiția bimomentului și de relația (4) rezultă că, spre deosebire de celelalte eforturi din secțiunea transversală, $B_{\hat{\omega}}$ nu este afectat de modificarea direcțiilor eforturilor unitare ce se produce ca urmare a pierderii stabilității barei.

Eforturile N_1, T_2 și T_3 din secțiunea transversală a barei deformate se exprimă în funcție de eforturile corespunzătoare din secțiunea barei nedeformate cu ajutorul relațiilor

$$
\begin{aligned}
N_1 &= N_x + T_y\eta' + T_z\zeta', \\
T_2 &= T_y - T_z\varphi - N_x\eta', \\
T_3 &= T_z + T_y\varphi - N_x\zeta',
\end{aligned}
\tag{12}
$$

care se obțin prin proiectarea vectorilor N_x, T_y și T_z pe direcțiile axelor (1), (2) și (3).

Calculul momentelor M_1, M_2 și M_3 este mai dificil deoarece trebuie proiectați nu numai vectorii M_x, M_y și M_z dar trebuie ținut seama și de faptul că centrul de greutate al secțiunii deplasîndu-se în raport cu sistemul de axe fix, forțele N_x, T_y și T_z dau momente față de axele (1), (2) și (3). Dacă se neglijează termenii care conțin produse de deplasări și cei obținuți prin înmulțirea forțelor tăietoare cu deplasările date de compresiune, rezultă relațiile

$$
\begin{aligned}
M_1 &= M_x + M_y\eta' + M_z\zeta' - T_y(\zeta + y_0\varphi) + T_z(\eta - z_0\varphi) \\
M_2 &= M_y - M_z\varphi - M_x\eta' + N_x(\zeta + y_0\varphi). \\
M_3 &= M_z + M_y\varphi - M_x\zeta' - N_x(\eta - z_0\varphi).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Înlocuind relațiile (12) și (13) în relațiile (9) și (10) și renunțînd la termenii care conțin produse de deplasări rezultă

$$\begin{aligned} m_0 = {} & [\varphi'(N_x h^2 - 2b_z M_y + 2b_y M_z + kB\hat{\omega})]' - [M_x - T_y z_0 + \\ & + T_z y_0 + M_y \eta' + M_z \zeta' - T_y \zeta + T_z \eta + z_0 N_x \eta' - y_0 N_x \zeta']', \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} m_f = {} & [\varphi'(N_x h_f^2 - 2\overline{b}_z M_y + 2\overline{b}_y M_z + kB\hat{\omega})]' - [M_x - T_y(z_0 + z_f) + \\ & + T_z(y_0 + y_f) + M_y \eta' + M_z \zeta' - T_y \zeta + T_z \eta + \varphi(z_f T_z + \\ & + y_f T_y) + (z_0 + z_f) N_x \eta' - (y_0 + y_f) N_x \zeta']'. \end{aligned} \tag{15}$$

Cu ajutorul primei relații (12) și a ultimelor două relații (13), sistemul format din ecuațiile (7) și (8) se scrie

$$\begin{aligned} & EA\xi'' - [N_x + T_y \eta' + T_z \zeta']' = 0, \\ & EI_y \zeta^{IV} - [M_y - M_z \varphi - M_x \eta' + N_x(\zeta + y_0 \varphi)]'' = 0, \\ & EI_z \eta^{IV} + [M_z + M_y \varphi - M_x \zeta' - N_x(\eta - z_0 \varphi)]'' = 0, \\ & \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu} \varphi^{IV} - GI_t \varphi'' - m_0 - \int_c \frac{\partial}{\partial x}(p_x + p_y \eta' + p_z \zeta')\hat{\omega}\, ds + \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu GI_f} m_f'' = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

În ultima relație (16) a fost exprimată sarcina distribuită p_1 în funcție de sarcinile distribuite p_x, p_y și p_z aplicate pe suprafața mediană a barei înainte de pierderea stabilității.

Se observă că sistemul (16), care este format din ecuații diferențiale de deformație, ia în considerație atît sarcinile care conduc la apariția primei forme de echilibru cît și pe cele care produc trecerea barei de la prima formă de echilibru la cea de-a doua formă de echilibru. În cazul în care interesează numai deformațiile produse prin pierderea stabilității barei se vor neglija în relațiile (14), (15) și (16) termenii care nu conțin deplasări.

Sistemul (16) este mai general decît cele existente în literatură [3] deoarece el ține seama și de efectul pe care îl produce momentul de răsucire asupra ecuațiilor diferențiale de deformație de încovoiere.

În cele ce urmează se vor prezenta cîteva particularizări ale sistemului de ecuații diferențiale (16).

1. *Stabilitatea barelor cu pereți subțiri comprimate centric.* Presupunînd că bara cu pereți subțiri este încărcată numai cu două forțe concentrate P aplicate în secțiunile extreme astfel încît produc compresiune axială, atunci toate eforturile din sistemul (16) sînt nule cu excepția forței axiale care este constantă și are valoarea $N_x = -P$. În acest caz sistemul (16) devine

$$\begin{aligned} & EA\,\xi'' = 0, \\ & EI_y \zeta^{IV} + P(\zeta'' + y_0 \varphi'') = 0, \\ & EI_z \eta^{IV} + P(\eta'' - z_0 \varphi'') = 0, \\ & \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu} \varphi^{IV} - GI_t \varphi'' + Ph^2 \varphi'' - z_0 P \eta'' + \\ & + y_0 P \zeta'' - \frac{EI_{\hat{\omega}}}{\nu GI_f}[\varphi^{IV} Ph_f^2 - (z_0 + z_f) P \eta^{IV} + (y_0 + y_f) P \zeta^{IV}] = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Prima ecuație fiind identică cu cea de la barele obișnuite și independentă de celelalte trei se lasă de o parte.

Dacă bara, avînd lungimea l, se consideră simplu rezemată la capete, soluția sistemului (17) este de forma

$$\eta = \eta_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

$$\zeta = \zeta_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{18}$$

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{\pi x}{l},$$

în care η_0, ζ_0 și φ_0 sînt constante.

Înlocuind în sistemul (17) și scriind condiția de compatibilitate a sistemului algebric astfel obținut, rezultă ecuația

$$\begin{vmatrix} 0 & EI_y \frac{\pi^2}{l^2} - P & -y_0 P \\ EI_z \frac{\pi^2}{l^2} - P & 0 & z_0 P \\ \left[\frac{EI_{\overset{\wedge}{\omega}}}{\nu GI_t} \frac{\pi^2}{l^2}(z_0 + z_f) + z_0\right] P & -\left[\frac{EI_{\overset{\wedge}{\omega}}}{\nu GI_t} \frac{\pi^2}{l^2}(y_0 + y_f) + y_0\right] P & \frac{EI_{\overset{\wedge}{\omega}}}{\nu} \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \left(1 - \frac{Ph_f^2}{GI_t}\right) + GI_t - Ph^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{19}$$

În cazul particular al barei cu secțiunea transversală biaxial simetrică, la care centrul de forfecare pură, centrul de încovoiere și centrul de greutate se confundă ($y_0 = y_f = z_0 = z_f = 0$), soluțiile ecuației (19) sînt

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI_y}{l^2},$$

$$P_2 = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2},$$

$$P_3 = \frac{\frac{EI_{\overset{\wedge}{\omega}}}{\nu} \frac{\pi^2}{l^2} + GI_t}{\frac{I_y + I_z}{A}\left[1 + \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EI_{\overset{\wedge}{\omega}}}{\nu GI_t}\right]} \tag{20}$$

Primele două relații (20) dau valorile sarcinilor critice pentru flambajul de încovoiere iar ultima pentru flambajul de răsucire. Aceste relații sînt identice cu cele obținute în lucrarea [2].

2. *Stabilitatea barelor cu pereți subțiri solicitate la încovoiere pură.* Dacă bara de la paragraful precedent se consideră încărcată la capete cu momentele încovoietoare $M_z = M = \text{const.}$, sistemul (16) devine

$$\begin{aligned} &EA\xi'' = 0, \\ &EI_z\eta^{IV} = 0, \\ &EI_y\zeta^{IV} + M\varphi'' = 0, \\ &\frac{EI_\omega^\wedge}{\nu}\varphi^{IV} - (GI_t + 2b_y M)\varphi'' + M\zeta'' + \frac{EI_\omega^\wedge}{\nu GI_f}[2\overline{b}_y M\varphi^{IV} - M\zeta^{IV}] = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Ultimele două ecuații alcătuiesc un sistem a cărui soluție este (18). Înlocuind soluția (18) în acest sistem și scriind condiția de compatibilitate a sistemului algebric rezultat se obține ecuația

$$\begin{vmatrix} \frac{\pi^2}{l^2}EI_y & -M \\ -M\left(1 + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{EI_\omega^\wedge}{\nu GI_f}\right) & \frac{\pi^2}{l^2}\frac{EI_\omega^\wedge}{\nu} + GI_t + M\left(2b_y + 2\overline{b}_y\frac{\pi^2}{l^2}\frac{EI_\omega^\wedge}{\nu GI_f}\right) \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

Prin rezolvarea acestei ecuații se determină valoarea sarcinei critice pentru care se produce flambajul lateral de încovoiere.

Dacă secțiunea este simetrică în raport cu axa Oy, atunci

$$b_y = \overline{b}_y = 0 \tag{23}$$

și ecuația (22) are soluția

$$M = \frac{\pi^2}{l^2}\sqrt{EI_y GI_t}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{EI_\omega^\wedge}{\nu GI_t}}{1 + \frac{\pi^2}{l^2}\frac{EI_\omega^\wedge}{\nu GI_f}}}. \tag{24}$$

Se observă că pentru $I_\omega^\wedge = 0$ relația (24) devine identică cu cea obținută la flambajul lateral de încovoiere al barelor de secțiune plină.

3. *Stabilitatea barelor cu pereți subțiri solicitate la răsucire.* Se consideră aceeași bară cu pereți subțiri simplu rezemată la capete din punctul de vedere al încovoierii și încărcată cu momentele de răsucire $M_x = M_t = \text{constant}$.

În absența altor sarcini exterioare, sistemul (16) devine:

$$\begin{aligned} &EA\xi'' = 0, \\ &EI_y\zeta^{IV} + M_t\eta''' = 0, \\ &EI_z\eta^{IV} - M_t\zeta''' = 0, \\ &\frac{EI_\omega^\wedge}{\nu}\varphi^{IV} - GI_t\varphi'' = 0. \end{aligned} \tag{25}$$

În sistemul (25) prima şi ultima ecuaţie sînt independente de celelalte două.

Soluţionînd sistemul format din a doua şi a treia ecuaţie rezultă următoarea valoare pentru sarcina critică :

$$M_t = \frac{\pi}{l} E\sqrt{I_y I_z}. \qquad 26)$$

Deci, solicitarea la răsucire poate duce la apariţia flambajului de încovoiere dacă momentul de răsucire are o valoare mai mare decît valoarea critică dată de relaţia (26).

Acest ultim exemplu ilustrează modul în care se introduce în calculul la stabilitate, efectul produs de momentul de răsucire asupra deformaţiilor de încovoiere.

BIBLIOGRAFIE

1. T. PANĂ, *Calculul pulsaţiilor proprii ale vibraţiilor de încovoiere-răsucire la barele cu pereţi subţiri avînd profilul închis*, St. cerc. mec. apl., **18**, 2 (1965).
2. A. PETRE, M. ATANASIU, *Bare cu pereţi subţiri*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1960.
3. В. З. ВЛАЗОВ, *Тонкостенные упругие стержни*, *Государственное издательство физико-математической литературы*, Москва, 1959.

TEORIA GENERALĂ A APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE ÎN STUDIUL MECANISMELOR ȘI MAȘINILOR PRIN NOUA METODĂ MATRICEALĂ-TENSORIALĂ ELABORATĂ ÎN VEDEREA FOLOSIRII MAȘINILOR ELECTRONICE DE CALCUL. STUDIUL CINEMATIC AL MECANISMELOR SPAȚIALE CARE CONȚIN CONTURURI ÎNCHISE NEDEFORMABILE PRIN METODA MATRICEALĂ-TENSORIALĂ

de D. MANGERON [1],
Institutul politehnic, Iași
C. DRĂGAN,
Institutul politehnic Iași.
M. N. OGUZTÖRELI,
Department of Mathematics. University of Alberta
R. CHALÉAT,
Institut Polytechnique et Université de Besançon

621.01: 531.1

Luînd ca punct de plecare lucrările proprii relative la o nouă metodă matriceală-tensorială de studiu a mecanismelor și mașinilor, în lucrare se expune, în vederea programării la mașini electronice de calcul, o nouă parte din teoria generală a aproximațiilor succesive privitoare la metoda elaborată, cu privire specială asupra mecanismelor spațiale care conțin conture închise nedeformabile.

INTRODUCERE

Într-un șir de lucrări anterioare proprii consacrate elaborării unei noi metode matriceale-tensoriale de studiu a mecanismelor și mașinilor, cristalizat în lucrările [1]—[4] și folosit apoi de alți cercetători și oameni de știință din țară și de peste hotare, s-au studiat variate clase de mecanisme spațiale cu cuple cinematice inferioare, constituite dintr-un singur

[1]) „Visiting professor" la University din Alberta, Edmonton, Alberta, Canada, și la Pennsylvania State University, S.U.A.

The first of the authors wishers to express his sincere thanks to the University, of Alberta for the invaluable conditions offered to him to develop his work in the Department of Mathematics.

lanţ cinematic. Cu acest prilej metoda matriceală-tensorială elaborată s-a aplicat pentru prima oară în literatura de specialitate din lume la cazul cuplelor sferice şi sferice cu deget, iar materialele elaborate au servit apoi, în cadrul teoriei generale a aproximaţiilor succesive, la elaborări de programe de calcul la maşini electronice digitale, rezultatele obţinute fiind traduse apoi, de exemplu în lucrările [5]—[7], în limbile matematice artificiale de largă circulaţie şi anume ALGOL 60 şi FORTRAN 2. În cadrul cercetărilor proprii se înscrie în această ordine de idei şi un număr de studii de analiză şi de sinteză a mecanismelor spaţiale cu mai multe grade de libertate şi cu cuple cinematice superioare, ca, de exemplu, sinteza unor came spaţiale, aplicabile în proiectarea maşinilor mecanice de calcul ş.a. [8], [9].

La recentele congrese şi conferinţe de Mecanică şi de Teoria mecanismelor şi a maşinilor cu caracter internaţional, s-a observat tendinţa vădită de a umple golul existent în domeniul studiului mecanismelor spaţiale, lucrările autorilor consacrate metodei matriceale-tensoriale, precum şi altor metode de studiu a mecanismelor şi a maşinilor (ca, de exemplu, metoda acceleraţiilor reduse de ordin şi specie oarecare [10], metoda tangenţială [11], metoda corpurilor numerice complexe, duale şi hipercomplexe [12]) fiind citate şi folosite substanţial de alţi cercetători [13]—[15]. Cu această ocazie şi cu prilejul convorbirilor avute de primul dintre autori cu diferiţi specialişti în Mecanica tehnică cu ocazia şirului de conferinţe ţinute recent, ca urmare a invitaţiilor primite, în Republica Federală a Germaniei (universităţile din Hamburg, Colonia, Stuttgart şi Bonn şi institutele politehnice din Hanovra, Aachen, Darmstadt, Braunschweig şi München) şi în Republica Austria (Universitatea din Innsbruck şi Şcoala politehnică din Viena), s-a putut constata, cu deosebită satisfacţie, preţuirea de care se bucură Şcoala de Teoria mecanismelor şi a maşinilor, astăzi înfloritoare şi unită în jurul secţiei de TMM de pe lîngă Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România.

În această lucrare, a doua din serie ce se încadrează în titlul general premergător punctului II, se face studiul cinematic al mecanismelor spaţiale care conţin conture închise nedeformabile, folosind metoda proprie, numită metoda matriceală-tensorială. Se subliniază că notaţiile, definiţiile de bază şi rezultatele esenţiale, ca de exemplu, *tensor de poziţie*, *tensor viteză*, *tensor acceleraţie*, *tensor acceleraţie de ordin superior*, *ecuaţia de închidere a unui lanţ cinematic*, ş.a. se găsesc în lucrările proprii anterioare, ca de exemplu [1]—[4].

Se constată totodată că în intervalul de timp scurs între prezentarea la sesiunea ştiinţifică a cadrelor didactice a Institutului politehnic Iaşi (1955) a principiilor de bază ale metodei matriceale-tensoriale, urmată de apariţia corespunzătoare a articolelor noastre în paginile Buletinului Institutului politehnic din Iaşi (1957) şi expunerile noastre mai recente referitoare la teoria generală a aproximaţiilor succesive în studiul mecanismelor şi maşinilor prin noua metodă matriceală-tensorială, elaborată în vederea folosirii maşinilor electronice de calcul, au apărut numeroase studii, cristalizate apoi în parte în monografii voluminoase, consacrate aplicării sistematice a calculului matriceal în diferite domenii ale ştiinţei şi tehnicii, ca de ex. Mecanica vibraţiilor [16]. În

această ordine de idei s-a bucurat de succes seria de lucrări inițiată de primul dintre autori [17] referitoare la *traducerea matriceală a seriilor Fourier*.

PROBLEMA DETERMINĂRII POZIȚIILOR

Determinarea pozițiilor elementelor mecanismului dintr-o vastă categorie de mecanisme are în cele ce urmează drept punct de plecare schema cinematică reprezentată în figura 1. Mecanismele din această categorie

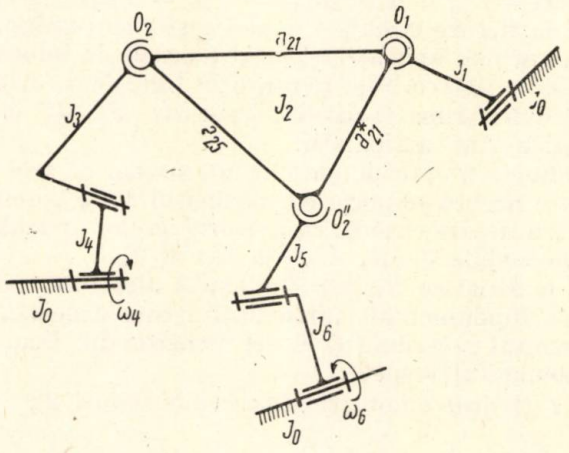


Fig. 1

constă dintr-un lanț cinematic complex, elementul $\dot{J}_0$ fiind batiul mecanismului, și aparțin familiei zero deoarece axele cuplelor cinematice sînt drepte situate oarecum în spațiu; deci nu există legături comune pentru toate elementele mobile. Gradul de mobilitate este *doi*, deoarece elementele $\dot{J}_4$ și $\dot{J}_6$ sînt cele două elemente conducătoare și ele au mișcări de rotație în jurul axelor articulațiilor care le asociază la batiul $\dot{J}_0$. Pentru formarea mecanismului s-a plecat prin urmare de la două mecanisme de clasa Ia (respectiv $\dot{J}_4$ și $\dot{J}_0$; $\dot{J}_6$ și $\dot{J}_0$) la care s-a asociat grupa formată din elementul central $\dot{J}_2$ și cei trei antrenori $\dot{J}_1$, $\dot{J}_3$ și $\dot{J}_5$. Cuplele cinematice interioare grupei, adică acelea care asociază elementele grupei între ele sînt articulațiile sferice din O_1, O_2 și O_2'', iar cuplele cinematice exterioare grupei, adică acelea care asociază antrenorii $\dot{J}_1$, $\dot{J}_3$ și $\dot{J}_5$ la cele două elemente conducătoare sau la batiu sînt articulații. Grupa conține deci un contur închis nedeformabil, în acest caz triunghiul $O_1O_2O_2''$.

Aplicînd formula structurală a grupelor din familia zero, se verifică faptul că lanțul cinematic complex pe care îl constituie grupa are gradul de mobilitate zero, adică

$$N = 6n - 5p_5 - 3p_3 = 6.4 - 5.3 - 3.3 = 24 - 15 - 9 = 0.$$

Trei circuite simple închise cuprind toate elementele mecanismului şi toate cuplele cinematice care asociază aceste elemente între ele, astfel :

Circuitul I — J_0, J_1, J_2 (latura O_1O_2 a triunghiului), J_3, J_4, J_0,

Circutiul II — J_0, J_1, J_2 (latura O_1O_2'' a triunghiului), J_5, J_6, J_0,

Circuitul III— J_0, J_6, J_5, J_2 (latura $O_2''O_2$ a triunghiului), J_3, J_4, J_0.

Faptul ca lanţul cinematic care constituie grupa este complex, se datoreşte existenţei elementului J_2 care este asociat, prin cuple cinematice, la alte trei elemente şi a fost reprezentat schematic prin triunghiul articulat.

Se poate evalua şi gradul de mobilitate al fiecărui circuit, adică :

Circuitul I—$N_1=6(n-1)-5p_5-3p_3=6.4-5.3-3.2=24-15-6=3$,

Circuitul II — $N_2 = 6\ (n-1) - 5\ p_5 - 3\ p_3=6.4-5.3-3.2=3$,

Circuitul III — $N_3 = 6\ (n-1) - 5\ p_5 - 3\ p_3=6.5-5.4-3.2=4$.

Existenţa în fiecare circuit a cuplelor sferice conduce, după metoda noastră pe care am mai aplicat-o şi în alte ocazii, la înlocuirea circuitelor reale prin circuitele fictive, reprezentate în figurile 2, 3, 4 şi care conţin cîte un element de lungime variabilă, respectiv J_2', J_2'' şi J_2''', iar toate cuplele cinematice sînt articulaţii.

Fiecărui circuit îi corespunde cîte un sistem de trei axe de coordonate rectangulare drepte solidare cu elementul fix J_0, definite, aşa cum se va arăta pentru fiecare circuit, cu ajutorul axelor articulaţiilor care asociază elementele mobile J_1, J_4 şi J_6 la batiul J_0.

Lanţurile cinematice fictive sînt astfel alcătuite încît axele a două cuple cinematice fundamentale (articulaţii), care asociază un element al lanţului la elementul precedent şi la cel următor din lanţ, nu-şi schimbă orientarea în elementul respectiv.

Circuitul I (lanţul cinematic fictiv din figura 2).

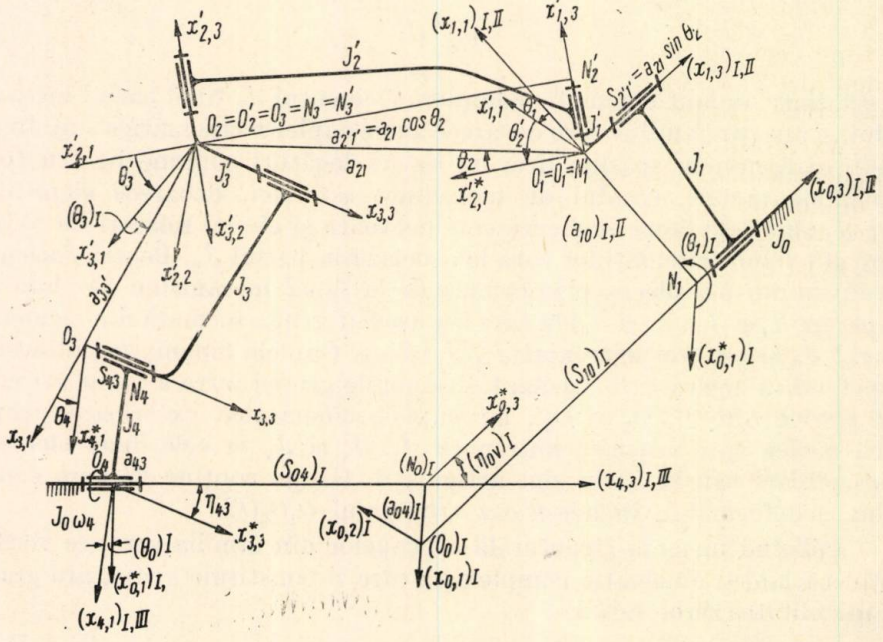


Fig. 2

Axele solidare cu elementul J_1 sînt : $O_1(x_{1.3})_{I.II}$ paralelă cu axa $(O_0)_I$ $(x_{0.3})_{I.II}$ a articulației care asociază elementul J_1 la batiul J_0; $O_1(x_{1.1})_{I.II}$ după perpendiculara comună între axele $(O_0)_I$ $(x_{0.3})_{I.II}$ și $O_1(x_{1.3})_{I.II}$ dusă prin punctul O_1 (centrul articulației sferice care asociază elementele J_1 și J_2); $O_1(x_{1.2})_{I.II}$ perpendiculară pe primele două axe de coordonate și luată astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru drept (nu a fost reprezentată în figură pentru a nu o complica).

Rezultă

$$(a_{10})_{I.II} \neq 0\,;\ (s_{10})_I \neq 0\,;\ (\eta_{10})_{I.II} = 0.$$

Axele solidare cu elementul J_1' sînt : $O_1'\,x_{1,3}'$ perpendiculară pe axele $O_1(x_{1.3})_{I.II}$ și $O_3x_{3.3}$, adică perpendiculară pe un plan care conține una din ele și o paralelă la cealaltă dusă printr-un punct al primei axe. Axa $O_3x_{3.3}$ este axa articulației care asociază antrenorul J_3 al grupei la elementul conducător J_4. Axa $O_1'x_{1,1}'$ este perpendiculară pe axele $O_1\,(x_{1.3})_{I.II}$ și $O_1'x_{1,3}'$, adică perpendiculară pe planul definit de ele. Axa $O_1'\,x_{1,2}'$ este perpendiculară pe celelalte două și formează împreună cu ele un triedru drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$O_1 = O_1' = N_1'\,;\ a_{1'1} = 0\,;\ s_{1'1} = 0\,;\ \eta_{1'1} = 90°.$$

Axele solidare cu elementul J_2' sînt : $O_2'x_{2,3}'$ paralelă cu axa $O_1'x_{1,3}'$; $O_2'x_{2,1}'$ după perpendiculara comună $N_2'O_2'$ la axele $O_1'x_{1,3}'$ și $O_2'x_{2,3}'$; $O_2'x_{2,2}'$ luată astfel încît împreună cu primele două axe să formeze un triedru cartezian drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$O_2 = O_2' = O_3' = N_3 = N_3'\,;\ a_{2'1'} = a_{21}\cos\theta_2\,;\ s_{2'1'} = a_{21}\sin\theta_2\,;\ \eta_{2'1'} = 0,$$

O_2 fiind centrul articulației sferice care asociază elementul J_2 și elementul J_3. Distanța a_{21} este măsurată între centrele O_2 și O_1 ale celor două articulații sferice.

Axele solidare cu elementul J_3' sînt : $O_3'x_{3,3}'$ paralelă cu axa $O_3x_{3.3}$; $O_3'x_{3,1}'$ perpendiculară pe $O_2'x_{2,3}'$ și $O_3'x_{3,3}'$; $O_3x_{3.2}$ perpendiculară pe primele două axe de coordonate și orientată astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru cartezian drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$a_{3'2'} = 0\,;\ s_{3'2'} = 0\,;\ \eta_{3'2'} = 90°.$$

Axele solidare cu elementul J_3 sînt : $O_3x_{3.3}$; $O_3x_{3.1}$ după perpendiculara dusă din punctul O_2 pe $O_2'x_{3,3}'$ și $O_3x_{3.3}$; $O_3x_{3.2}$ perpendiculară pe primele două axe și aleasă astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$a_{33'} \neq 0\,;\ s_{33'} = 0\,;\ \eta_{33'} = 0.$$

Axele solidare cu elementul J_4 sînt : $O_4(x_{4.3})_{I.III}$; $O_4(x_{4.1})_{I.III}$ perpendiculară comună pe axele $O_3x_{3.3}$ și $O_4(x_{4.3})_{I.III}$; $O_3(x_{4.2})_{I.III}$ perpendiculară pe primele două axe și astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$a_{43} \neq 0\,;\ s_{43} \neq 0\,;\ \eta_{43} \neq 0.$$

Axele solidare cu batiul J_0, caracteristice acestui circuit, sînt: $(O_0)_I\,(x_{0,1})_I$ după axa articulației care asociază antrenorul J_1 al grupei la batiul J_0; $(O_0)_I\,(x_{0,1})_I$ după perpendiculara comună la axele $O_4\,(x_{4,3})_{I,III}$ și $(O_0)_I\,(x_{0,3})_{I,III}$; $(O_0)_I\,(x_{0,2})_I$ perpendiculară pe primele două axe și astfel încît să formeze cu acestea din urmă un triedru drept.

Rezultă

$$(a_{04})_I \neq 0\,;\ (s_{04})_I \neq 0\,;\ (\eta_{04})_I \neq 0.$$

Circuitul II (lanțul cinematic fictiv din figura 3).

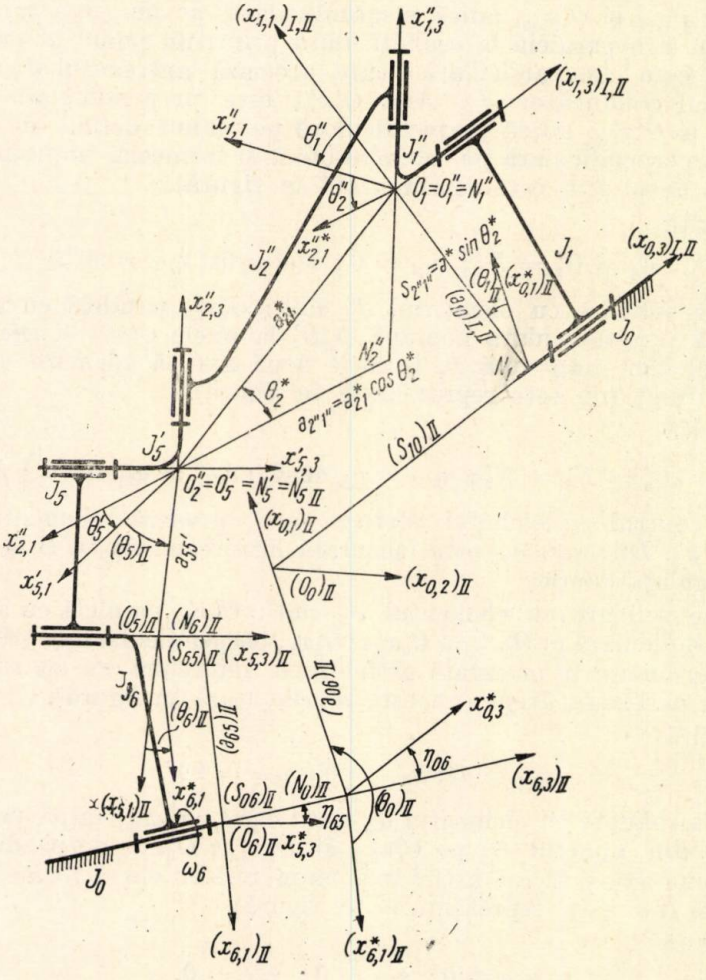


Fig. 3

Axele solidare cu elementul J_1 sînt aceleași ca și pentru primul circuit, la fel $(a_{10})_{I,II}$, $(\eta_{10})_{I,II}$, însă $(s_{10})_{II}$ este diferit de $(s_{10})_I$, căci $(O_0)_{II}$ diferă în general de $(O_0)_I$ și $(\theta_1)_{II}$ este diferit de $(\theta_1)_I$.

Axele solidare cu elementul J_1'' sînt : $O_1''x_{1,3}''$ perpendiculară pe axele $(O_0)_{II}$ $(x_{0.3})_{I.II}$ și $(O_5)_{II}$ $(x_{5.3})_{II}$, adică perpendiculară pe un plan care conține una din ele și o paralelă la cealaltă dusă printr-un punct al primei axe ; $O_1''x_{1,1}''$ perpendiculară pe planul determinat de O_1 $(x_{1.3})_{I.II}$ și $O_1''x_{1,3}''$; $O_1''x_{1,2}''$ perpendiculară pe primele două axe și orientată astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$O_1 = O_1'' = N_1'' ; \; a_{1''1} = 0 ; \; s_{1''1} = 0 ; \; \eta_{1''1} = 90°.$$

Axele solidare cu elementul J_2'' sînt : $O_2''x_{2,3}''$ paralelă cu $O_1''x_{1,3}''$; $O_2''x_{2,1}''$ după perpendiculara comună $N_2''O_2''$ pe axele $O_1''x_{1,3}''$ și $O_2''x_{2,3}''$ și în sensul de la N_2'' la O_2'' ; $O_2''x_{2,2}''$ perpendiculară pe primele două axe și astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru drept. O_2'' este centrul articulației sferice care asociază între ele elementele J_2 și J_5.

Rezultă

$$O_2'' = O_5' = N_5' = (N_5)_{II} ; \; a_{2''1''} = a_{21}^* \cos \theta_2^*, \; s_{2''1''} = a_{21}^* \sin \theta_2^* ; \; \eta_{2''1''} = 0,$$

distanța a_{21}^* fiind măsurată între centrele O_2'' și O_1 ale celor două articulații sferice.

Axele solidare cu elementul J_5' sînt : $O_5'x_{5,3}'$ paralela cu $(O_5)_{II}$ $(x_{5.3})_{II}$; $O_5'x_{5,1}'$ perpendiculară pe planul definit de $O_2''x_{2,3}''$ și $O_5'x_{5,3}'$; $O_5'x_{5,2}'$ perpendiculară pe primele două și orientată astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$O_2'' = O_5' = N_5' = (N_5)_{II} ; \; a_{5'2''} = 0 ; \; s_{5'2''} = 0 ; \; \eta_{5'2''} = 90°.$$

Axele solidare cu elementul J_5 și specifice acestui circuit sînt : $(O_5)_{II}(x_{5.3})_{II}$; $(O_5)_{II}(x_{5.1})_{II}$ perpendiculară comună pe $O_2''x_{5,3}'$ și $(O_5)_{II}(x_{5.3})_{I.}$ dusă din O_2' ; $(O_5)_{II}(x_{5.2})_{II}$ luată astfel încît împreună cu celelalte două axe să formeze un triedru drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$a_{55'} \neq 0 ; \; s_{55'} = 0 ; \; \eta_{55'} = 0.$$

Axele solidare cu elementul J_6 și specifice acestui circuit sînt : $(O_6)_{II}(x_{6.3})_{II}$; $(O_6)_{II}(x_{6.1})_{II}$ perpendiculară comună pe $(O_6)_{II}(x_{6.3})_{II}$ și $(O_6)_{II}$ $(x_{6.3})_{II}$: $(O_6)_{II}(x_{6.2})_{II}$ luată astfel încît împreună cu primele două să formeze un triedru drept.

Rezultă

$$(a_{65})_{II} \neq 0 ; \; (s_{65})_{II} \neq 0 ; \; \eta_{65} \neq 0.$$

Axele solidare cu batiul J_0, caracteristice acestui circuit, sînt : $(O_0)_{II}(x_{0.3})_{I.II}$; $(O_0)_{II}(x_{0.1})_{II}$ după perpendiculara comună pe $(O_6)_{II}(x_{6.3})_{II}$ și $(O_0)_{II}(x_{0.3})_{I.II}$; $(O_0)_{II}(x_{0.2})_{II}$ luată astfel încît împreună cu primele două să formeze un triedru drept.

Rezultă :

$$(a_{06})_{II} \neq 0 ; \; (s_{06})_{II} \neq 0 ; \; \eta_{06} \neq 0.$$

Circuitul III (Lanțul cinematic fictiv din figura 4).

Axele solidare cu elementul J_6, pentru acest circuit, sînt : $(O_6)_{III}$ $(x_{6.3})_{III}$ care este îndreptată după direcția axei articulației care asociază elementele J_6 și J_5 și care în circuitul II era notată prin $(O_5)_{II}$ $(x_{5.3})_{II}$.

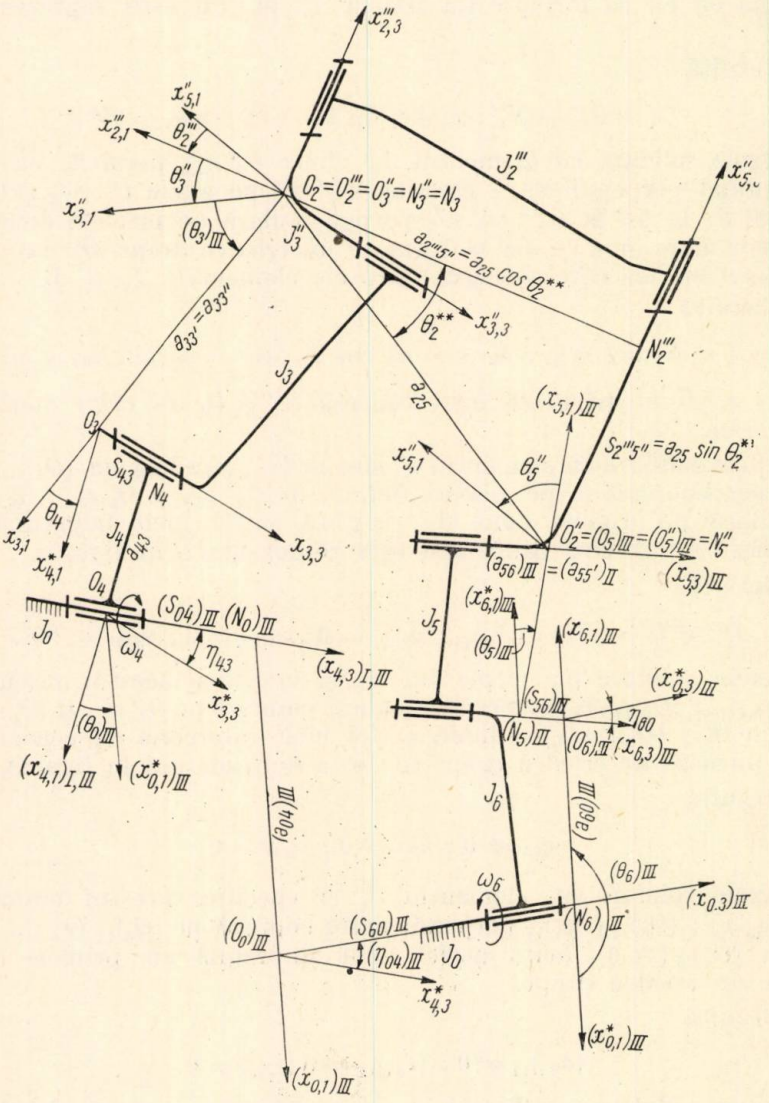


Fig. 4

Schimbarea de notație a axei pentru una și aceeași articulație și deci schimbarea rolului ei (solidară cu unul sau altul dintre elemente) este impusă de sensul circuitului. Punctul $(O_6)_{III}$ diferă de $(O_6)_{II}$, la fel $(N_6)_{III}$ și $(N_6)_{II}$.

Axa $(O_6)_{III}\,(x_{6.1})_{III}$ este perpendiculară comună între axele care asociază elementele J_6, J_0 și J_5, J_6, adică este după aceeași dreaptă ca și axa $(O_6)_{II}\,(x_{6.1})_{II}$, însă de sens contrar acesteia din urmă.

Axa $(O_6)_{III}\,(x_{6.2})_{III}$ este perpendiculară pe primele două axe solidare cu elementul J_6, în acest circuit, și luată în sensul convenabil astfel încît să formeze cu celelalte două axe un triedru drept.

Rezultă

$$(a_{60})_{III} = (a_{65})_{II}\,;\ (s_{60})_{III} \neq (s_{06})_{II}\,;\ \eta_{60} \neq \eta_{06}.$$

Axele solidare cu elementul J_5, pentru acest circuit, sînt : $(O_5)_{III}\,(x_{5.3})_{III}$, care este paralelă cu $(O_6)_{III}\,(x_{6.3})_{III}$, adică coincide cu axa $O_2''\,x'_{5.2}$ din cel de-al doilea circuit ; axa $(O_5)_{III}\,(x_{5.1})_{III}$ este perpendiculara comună pe axele $(O_5)_{III}\,(x_{5.3})_{III}$ și $(O_6)_{III}\,(x_{6.3})_{III}$, deci coincide cu axa $(O_5)_{II}\,(x_{5.1})_{II}$, însă este de sens contrar și de altă origine ; axa $(O_5)_{III}\,(x_{5.2})_{III}$ este perpendiculară pe primele două axe și luată astfel încît împreună cu primele două axe de coordonate să formeze un triedru drept.

Rezultă

$$O_2'' = (O_5)_{III} = (O_5'')_{III} = N_5''\,;\ (a_{56})_{III} = (a_{55'})_{II}\,;\ (s_{56})_{III} = (s_{65})_{II}\,;$$

$$(\eta_{56})_{III} = (\eta_{55'})_{II} = 0\,;\ (N_5)_{III} = (O_5)_{II}\,;\ (O_6)_{III} = (N_6)_{II}\,;\ (\theta_5)_{III} = (\theta_6)_{II}.$$

Axele solidare cu elementul J_5'' sînt : axa $(O_5'')_{III}\,x''_{5.3}$ paralelă cu axa $O_2'''\,x'''_{2.3}$ și ambele perpendiculare pe planul definit de axa $(O_5)_{III}\,(x_{5.3})_{III}$ și o paralelă la axa $O_3\,x_{3.3}$ dusă printr-un punct oarecare al axei $(O_5)_{III}\,(x_{5.3})_{III}$; $(O_5'')_{III}\ x''_{5.1}$ perpendiculară pe axele $(O_5'')_{III}\,x''_{5.3}$ și $(O_5)_{III}\,(x_{5.3})_{III}$; cea de a treia axă de coordonate fiind luată astfel încît împreună cu primele două să formeze un triedru drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$a_{5''5} = 0,\ s_{5''5} = 0\,;\ \eta_{5''5} = 90°.$$

Axele solidare cu elementul J_2''' sînt : $O_2'''\,x'''_{2.3}$; $O_2'''\,x'''_{2.1}$ după perpendiculara comună dusă prin $O_2''' = O_2$ la axele paralele $O_2'''\,x'''_{2.3}$ și $(O_5'')_{III}\,x''_{5.3}$; $O_2'''\,x'''_{2.2}$ perpendiculară pe primele două axe și luată astfel încît să formeze cu primele două un triedru drept.

Rezultă

$$O_2 = O_2''' = O_2'' = N_3'' = N_3\,;\ a_{2'''5''} = a_{25}\cos\theta_2^{**}\,;$$

$$s_{2'''5''} = a_{25}\sin\theta_2^{**}\,;\ \eta_{2'''5''} = 0.$$

Axele solidare cu elementul J_3'' sînt : axa $O_3''\,x''_{3.3}$ paralelă cu $O_3x_{3.3}$, deci coincide cu axa $(O_3'\,x'_{3.3})_I$; axa $O_3''\,x''_{3.1}$ perpendiculară pe axele $O_3''\,x''_{3.3}$ și $O_2'''\,x'''_{2.3}$; axa $O_3''\,x''_{3.2}$ perpendiculară pe primele două și astfel încît să formeze cu acestea un triedru drept (nu este reprezentată în figură).

Rezultă

$$a_{3''2'''} = 0\,;\ s_{3''2'''} = 0\,;\ \eta_{3''2'''} = 90°.$$

Axele solidare cu elementul J_3 sînt : $O_3x_{3.3}$; $O_3x_{3.1}$ după perpendiculara dusă din O_2 pe $O_3''\,x_{3,3}''$ și $O_3\,x_{3.3.}$; $O_3\,x_{3.2}$. Axele sînt aceleași ca și în circuitul I.

Rezultă

$$a_{33''} = a_{33'} \neq 0,\ s_{33''} = 0\ ;\ \eta_{33''} = 0\ ;\ (\theta_3)_{III} \neq (\theta_3)_I.$$

Axele solidare cu elementul J_4 sînt : $O_4\,x_{4.3}$; $O_4\,x_{4.1}$ și $O_4\,x_{4.2}$, adică același ca și în cazul circuitului *I*.

Axele solidare cu elementul J_0, corespunzătoare circuitului al III-lea, considerat acum, sînt : $(O_0)_{III}\,(x_{0.3})_{III}$; $(O_0)_{III}\,(x_{0.1})_{III}$ după perpendiculara comună pe axele $O_4\,x_{4.3}$ și $(O_0)_{III}\,(x_{0.3})_{III}$; $(O_0)_{III}\,(x_{0.2})_{III}$ perpendiculara pe primele două și astfel încît împreună cu ele să formeze un triedru drept.

Rezultă

$$(a_{04})_{III} \neq (a_{04})_I \neq 0\ ;\ (s_{04})_{III} \neq (s_{04})_I \neq 0\ ;\ (\eta_{04})_{III} \neq (\eta_{04})_I \neq 0\ ;$$
$$(\theta_0)_{III} \neq (\theta_0)_I.$$

MATRICELE TENSORILOR DE POZIȚIE

Matricele tensorilor de poziție ale elementelor lanțului cinematic închis J_0, J_1, J_1', J_2', J_3', J_3, J_4, J_0 sînt :

$$T^{(1,0)} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{10})_{I\cdot II}\cos(\theta_1)_I & \cos(\theta_1)_I & -\cos(\eta_{10})_{I\cdot II}\sin(\theta_1)_I & -\sin(\eta_{10})_{I\cdot II}\sin(\theta_1)_I \\ (a_{10})_{I\cdot II}\sin(\theta_1)_I & \sin(\theta_1)_I & \cos(\eta_{10})_{I\cdot II}\cos(\theta_1)_I & \sin(\eta_{10})_{I\cdot II}\cos(\theta_1)_I \\ (s_{10})_I & 0 & -\sin(\eta_{10})_{I\cdot II} & \cos(\eta_{10})_{I\cdot II} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{10})_{I\cdot II}\cos(\theta_1)_I & \cos(\theta_1)_I & -\sin(\theta_1)_I & 0 \\ (a_{10})_{I\cdot II}\sin(\theta_1)_I & \sin(\theta_1)_I & \cos(\theta_1)_I & 0 \\ (s_{10})_I & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$T^{(1',1)} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1' & 0 & -\sin\theta_1' \\ 0 & \sin\theta_1' & 0 & \cos\theta_1' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$T^{(2',1')} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}\cos\theta_2\cos\theta_2' & \cos\theta_2' & -\sin\theta_2' & 0 \\ a_{21}\cos\theta_2\sin\theta_2' & \sin\theta_2' & \cos\theta_2' & 0 \\ a_{21}\sin\theta_2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

$$T^{(3',2')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3' & 0 & -\sin\theta_3' \\ 0 & \sin\theta_3' & 0 & \cos\theta_3' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3,3')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{33'}\cos(\theta_3)_{\mathrm{I}} & \cos(\theta_3)_{\mathrm{I}} & -\sin(\theta_3)_{\mathrm{I}} & 0 \\ a_{33'}\sin(\theta_3)_{\mathrm{I}} & \sin(\theta_3)_{\mathrm{I}} & \cos(\theta_3)_{\mathrm{I}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(4,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{43}\cos\theta_4 & \cos\theta_4 & -\cos\eta_{43}\sin\theta_4 & -\sin\eta_{43}\sin\theta_4 \\ a_{43}\sin\theta_4 & \sin\theta_4 & \cos\eta_{43}\cos\theta_4 & \sin\eta_{43}\cos\theta_4 \\ s_{43} & 0 & -\sin\eta_{43} & \cos\eta_{43} \end{Vmatrix},$$

$$T^{(0,4)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{04})_{\mathrm{I}}\cos(\theta_0)_{\mathrm{I}} & \cos(\theta_0)_{\mathrm{I}} & -\cos(\eta_{04})_{\mathrm{I}}\sin(\theta_0)_{\mathrm{I}} & -\sin(\eta_{04})_{\mathrm{I}}\sin(\theta_0)_{\mathrm{I}} \\ (a_{04})_{\mathrm{I}}\sin(\theta_0)_{\mathrm{I}} & \sin(\theta_0)_{\mathrm{I}} & \cos(\eta_{04})_{\mathrm{I}}\cos(\theta_0)_{\mathrm{I}} & \sin(\eta_{04})_{\mathrm{I}}\cos(\eta_0)_{\mathrm{I}} \\ (s_{04})_{\mathrm{I}} & 0 & -\sin(\eta_{04})_{\mathrm{I}} & \cos(\eta_{04})_{\mathrm{I}} \end{Vmatrix}.$$

Aşa cum sînt alese axele de coordonate solidare cu elementele, pentru acest circuit, legea de mişcare cunoscută pentru elementul conducător J_4 este de forma

$$(\theta_0)_{\mathrm{I}} = f_1(t) \text{ şi } \omega_4 = (\theta_0)_{\mathrm{I}}.$$

Ecuaţia matriceal-tensorială de închidere a circuitului este

$$T^{(1,0)} \cdot T^{(1',1)} \cdot T^{(2',1')} \cdot T^{(3',2')} \cdot T^{(3,3')} \cdot T^{(4,3)} \cdot T^{(0,4)} = E.$$

Matricele tensorilor de poziţie ale elementelor lanţului cinematic închis J_0, J_1, J_1'', J_2'', J_5', J_5, J_6, J_0 sînt :

$$T^{(1,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{10})_{\mathrm{I\cdot II}}\cos(\theta_1)_{\mathrm{II}} & \cos(\theta_1)_{\mathrm{II}} & -\sin(\theta_1)_{\mathrm{II}} & 0 \\ (a_{10})_{\mathrm{I\cdot II}}\sin(\theta_1)_{\mathrm{II}} & \sin(\theta_1)_{\mathrm{II}} & \cos(\theta_1)_{\mathrm{II}} & 0 \\ (s_{10})_{\mathrm{II}} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(1'',1)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1'' & 0 & -\sin\theta_1'' \\ 0 & \sin\theta_1'' & 0 & \cos\theta_1'' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(2'',1'')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^{*} \cos\theta_2^{*} \cos\theta_2'' & \cos\theta_2'' & -\sin\theta_2'' & 0 \\ a_{21}^{*} \cos\theta_2^{*} \sin\theta_2'' & \sin\theta_2'' & \cos\theta_2'' & 0 \\ a_{21}^{*} \sin\theta_2^{*} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(5',2'')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_5' & 0 & -\sin\theta_5' \\ 0 & \sin\theta_5' & 0 & \cos\theta_5' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(5,5')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{55'} \cos(\theta_5)_{II} & \cos(\theta_5)_{II} & -\sin(\theta_5)_{II} & 0 \\ a_{55'} \sin(\theta_5)_{II} & \sin(\theta_5)_{II} & \cos(\theta_5)_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(6,5)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{65})_{II} \cos(\theta_6)_{II} & \cos(\theta_6)_{II} & -\cos\eta_{65} \sin(\theta_6)_{II} & -\sin\eta_{65} \sin(\theta_6)_{II} \\ (a_{65})_{II} \sin(\theta_6)_{II} & \sin(\theta_6)_{II} & \cos\eta_{65} \cos(\theta_6)_{II} & \sin\eta_{65} \cos(\theta_0)_{II} \\ (s_{65})_{II} & 0 & -\sin\eta_{65} & \cos\eta_{65} \end{Vmatrix},$$

$$T^{(0,6)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{06})_{II} \cos(\theta_0)_{II} & \cos(\theta_0)_{II} & -\cos\eta_{06} \sin(\theta_0)_{II} & -\sin\eta_{06} \sin(\theta_0)_{II} \\ (a_{06})_{II} \sin(\theta_0)_{II} & \sin(\theta_0)_{II} & \cos\eta_{06} \cos(\theta_0)_{II} & \sin\eta_{06} \cos(\theta_0)_{II} \\ (s_{06})_{II} & 0 & -\sin\eta_{06} & \cos\eta_{06} \end{Vmatrix}.$$

Matricele tensorilor de poziție ale elementelor lanțului cinematic închis J_0, J_6, J_5, J_5'', J_2''', J_3'', J_3, J_4, J_0 sînt :

$$T^{(6,0)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{60})_{III} \cos(\theta_6)_{III} & \cos(\theta_6)_{III} & -\cos\eta_{60} \sin(\theta_6)_{III} & -\sin\eta_{60} \sin(\theta_6)_{III} \\ (a_{60})_{III} \sin(\theta_6)_{III} & \sin(\theta_6)_{III} & \cos\eta_{60} \cos(\theta_6)_{III} & \sin\eta_{60} \cos(\theta_0)_{III} \\ (s_{60})_{III} & 0 & -\sin\eta_{60} & \cos\eta_{60} \end{Vmatrix},$$

$$T^{(5,6)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{56})_{III} \cos(\theta_5)_{III} & \cos(\theta_5)_{III} & -\sin(\theta_5)_{III} & 0 \\ (a_{56})_{III} \sin(\theta_5)_{III} & \sin(\theta_5)_{III} & \cos(\theta_5)_{III} & 0 \\ (s_{56})_{III} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(5'',5)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_5'' & 0 & -\sin\theta_5'' \\ 0 & \sin\theta_5'' & 0 & \cos\theta_5'' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(2''',5'')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{25}\cos\theta_2^{**}\cos\theta_2''' & \cos\theta_2''' & -\sin\theta_2''' & 0 \\ a_{25}\cos\theta_2^{**}\sin\theta_2''' & \sin\theta_2''' & \cos\theta_2''' & 0 \\ a_{25}\sin\theta_2^{**} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3'',2''')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_3'' & 0 & -\sin\theta_3'' \\ 0 & \sin\theta_3'' & 0 & \cos\theta_3'' \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(3,3'')} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{33''}\cos(\theta_3)_{III} & \cos(\theta_3)_{III} & -\sin(\theta_3)_{III} & 0 \\ a_{33''}\sin(\theta_3)_{III} & \sin(\theta_3)_{III} & \cos(\theta_3)_{III} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$T^{(4,3)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{43}\cos\theta_4 & \cos\theta_4 & -\cos\eta_{43}\sin\theta_4 & -\sin\eta_{43}\sin\theta_4 \\ a_{43}\sin\theta_4 & \sin\theta_4 & \cos\eta_{43}\cos\theta_4 & \sin\eta_{43}\cos\theta_4 \\ s_{43} & 0 & -\sin\eta_{43} & \cos\eta_{43} \end{Vmatrix},$$

$$T^{(0,4)} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (a_{04})_{III}\cos(\theta_0)_{III} & \cos(\theta_0)_{III} & -\cos(\eta_{04})_{III}\sin(\theta_0)_{III} & -\sin(\eta_{04})_{III}\sin(\theta_0)_{III} \\ (a_{04})_{III}\sin(\theta_0)_{III} & \sin(\theta_0)_{III} & \cos(\eta_{04})_{III}\cos(\theta_0)_{III} & \sin(\eta_{04})_{III}\cos(\theta_0)_{III} \\ (s_{04})_{III} & 0 & -\sin(\eta_{04})_{III} & \cos(\eta_{04})_{III} \end{Vmatrix}.$$

Așa cum sînt alese axele de coordonate solidare cu elementele, pentru acest circuit, legea de mișcare cunoscută pentru elementul conducător J_4 este de forma

$$(\theta_0)_{III} = f_2(t),\ \omega_4 = (\theta_0')_{III},$$

iar pentru elementul conducător J_6 este de forma

$$(\theta_6)_{III} = f_3(t), \quad \omega_6 = (\theta_6')_{III}.$$

Unghiul $(\theta_0)_{III}$ este situat în planul ce trece prin O_4 şi este perpendicular cu axa $O_4(x_{4,3})_{III}$ a articulaţiei care asociază elementul conducător J_4 la batiul J_0. Poziţia acestei axe fiind fixă în spaţiu, la fel poziţia punctului O_4. Axa $(x^*_{0,1})_{III}$ care trece prin O_4 este paralelă cu $(N_0)_{III}$ $(O_0)_{III}$ $[(O_0)_{II}(x_{0,1})_{III}]$ şi deci este şi ea situată în acelaşi plan perpendicular pe axa $O_4(x_{4,3})_{I,III}$ şi este imobilă în spaţiu. În acelaşi plan şi de asemenea imobilă în spaţiu este situată şi axa $(O_4 x^*_{0,1})_I$ paralelă cu $(N_0)_I$ $(O_0)_I$ $[(O_0)_I(x_{0,1})_I]$.

Rezultă că $(\theta_0)_{III} = (\theta_0)_I + \theta_c$, în care θ_c este un unghi constant situat în planul perpendicular pe $O_4(x_{4,3})_{I,III}$ şi care determină împreună cu unghiurile $(\eta_{0,4})_I$, η_{06} şi $(\eta_{04})_{III}$ poziţiile relative (faţă de batiul J_6) ale axelor articulaţiilor care asociază elementele J_1, J_4, J_6 la batiul J_0. Prin urmare θ_c este o constantă a mecanismului.

Unghiul $(\theta_0)_{III}$ se măsoară de la axa $O_4(x^*_{0,1})_{III}$, iar unghiul $(\theta_0)_I$ de la axa $(O_4 x^*_{0,1})_I$.

Un raţionament complet analog conduce la concluzia că,

$$(\theta_0)_{II} = (\theta_6)_{III} + \theta^*_c.$$

Deosebirea de notaţie dintre $(\theta_0)_{II}$ şi $(\theta_6)_{III}$ se datoreşte faptului că în circuitul III se trece de la elementul J_0 la elementul J_6, pe cînd în circuitul II se trece de la elementul J_6 la elementul J_0.

Într-una din lucrările următoare se va expune metoda aproximaţiilor succesive relative la determinarea parametrilor din ecuaţiile tensoriale respective.

În această ordine de idei se va începe prin a se considera ecuaţiile care decurg din ecuaţiile tensoriale de închidere, ca de exemplu acea dată mai sus pentru circuitul I. Vom transcrie aici şi le vom utiliza apoi cu alte serii de ecuaţii ce se vor scrie explicit, următoarele şase ecuaţii relative la circuitul I (ele, firește, nu reprezintă încă totalitatea ecuaţiilor referitoare la acest circuit) în vederea folosirii maşinilor electronice de calcul :

$$(a_{10})_{I,II}\cos(\theta_1)_I + a_{21}\cos\theta_2\cos\theta_2'\cos[(\theta_1)_I + \theta_1'] - a_{21}\sin\theta_2\sin[(\theta_1)_I + \theta_1'] + a_{33'}\cos(\theta_3)_I\cos(\theta_2' + \theta_3')\cos[(\theta_1)_I + \theta_1'] + a_{33'}\sin(\theta_3)_I\sin[(\theta_1)_I + \theta_1'] + a_{43}\cos[\theta_4 + (\theta_3)_I]\cos(\theta_2' + \theta_3')\cos[(\theta_1)_I + \theta_1'] + a_{43}\sin[\theta_4 + (\theta_3)_I]\sin[(\theta_1)_I + \theta_1'] - s_{43}\sin(\theta_2' + \theta_3')\cos[(\theta_1)_I + \theta_1'] + (a_{04})_I\cos(\theta_0)_I\cos[\theta_4 + (\theta_3)_I]\cos(\theta_2' + \theta_3')\cos[(\theta_1)_I + \theta_1'] + (a_{04})_I\cos(\theta_0)_I\sin[\theta_4 + (\theta_3)_I]\sin[(\theta_1)_I + \theta_1'] - (a_{04})_I\sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\sin[\theta_4 + (\theta_3)_I]\cos(\theta_2' + \theta_3'\cos[(\theta_1)_I + \theta_1'] + (a_{04})_I\sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\cos[\theta_4 + (\theta_3)_I]\sin[(\theta_1)_I + \theta_1'] + (a_{04})_I\sin(\theta_0)_I\sin(\theta_2' + \theta_3')\cos[(\theta_1)_I + \theta_1'] - (S_{04})_I\sin\eta_{43}\sin[\theta_4 + (\theta_3)_I]\cos(\theta_2' + \theta_3')\cos[(\theta_1)_I + \theta_1'] + (s_{04})_I\sin\eta_{43}\cos[\theta_4 + (\theta_3)_I]\sin[(\theta_1)_I + \theta_1'] - (s_{04})_I\cos\eta_{43}\sin(\theta_2' + \theta_3')\cos[(\theta_1)_I + \theta_1')] = 0,$$

$$(s_{10})_I - a_{21}\cos\theta_2 \sin\theta_2' - a_{33'}\sin(\theta_2'+\theta_3') - a_{43}\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\sin(\theta_2'+$$
$$+\theta_3') - s_{43}\cos(\theta_2'+\theta_3') - (a_{04})_I\cos(\theta_0)_I\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] +$$
$$+(a_{04})_I\sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\sin(\theta_2'+\theta_3')+(a_{04})_I\sin(\theta_0)_I\sin\eta_{43}\cos(\theta_2'+$$
$$+\theta_3')+(s_{04})_I\sin\eta_{43}\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\sin(\theta_2'+\theta_3')-(s_{04})_I\cos\eta_{43}\cos(\theta_2'+\theta_3'=0,$$
$$(a_{10})_{I\cdot II}\sin(\theta_1)_I + a_{21}\cos\theta_2\cos\theta_2'\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] + a_{21}\sin\theta_2\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] +$$
$$+ a_{33'}\cos(\theta_3)_I\cos(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] - a_{33'}\sin(\theta_3)_I\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] +$$
$$+ a_{43}\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] - a_{43}\sin[\theta_4+$$
$$+(\theta_3)_I]\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] - s_{43}\sin(\theta_2'-\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] +$$
$$+(a_{04})_I\cos(\theta_0)_I\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] -$$
$$-(a_{04})_I\cos(\theta_0)_I\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] -$$
$$-(a_{04})_I\sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] -$$
$$-(a_{04})_I\sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] +$$
$$+(a_{04})_I\sin(\theta_0)_I\sin\eta_{43}\sin(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] -$$
$$-(s_{04})_I\sin\eta_{43}\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] - (s_{04})_I\sin\eta_{43}\times$$
$$\times\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos([\theta_1)_I+\theta_1'] - [s_{04})_I\cos\eta_{43}\sin(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] = 0,$$
$$\cos(\theta_0)_I\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos(\theta_2'+\theta_3')\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] + \cos(\theta_0)_I\times$$
$$\times\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] - \sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\times$$
$$\times\cos(\theta_2'+\theta_3')\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] + \sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] +$$
$$+\sin(\theta_0)_I\sin\eta_{43}\sin(\theta_2'+\theta_3')\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] = 1;$$
$$\cos(\theta_0)_I\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] -$$
$$-\cos(\theta_0)_I\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] - \sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\times$$
$$\times\cos(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] - \sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\cos[(\theta_1)_I+\theta_1'] +$$
$$+\sin(\theta_0)_I\sin(\theta_2'+\theta_3')\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] = 0;$$
$$-\cos(\theta_0)_I\cos[\theta_4+(\theta_3)_I]\sin[(\theta_1)_I+\theta_1'] + \sin(\theta_0)_I\cos\eta_{43}\times$$
$$\times\sin[\theta_4+(\theta_3)_I]\sin(\theta_2'+\theta_3') + \sin(\theta_0)_I\sin\eta_{43}\cos(\theta_2'+\theta_3') = 0.$$

Autorii constată cu plăcere faptul că, în ultima vreme, numeroşi autori, ca, de exemplu C. W. Radcliffe şi C. H. Suh [18] au introdus pentru studiul mecanismelor plane 3×3 matrice, propunîndu-şi să folosească matricele 4×4 într-un studiu ulterior la sinteza şi analiza mecanismelor spaţiale. Lucrările autorilor publicate mai de demult [1]—[4], precum şi şiruri de lucrări mai recente [19] referitoare la calculul mecanismelor cu ajutorul MEC folosesc sitematic matricele 4×4. Strîngerea legăturilor

ştiinţifice între specialişti în domeniu, justificată prin fidelitatea nemărginită la vocaţia noastră ştiinţifică, va contribui din plin la progresul TMM 2) şi prin aceasta la automatizarea din ce în ce mai rapidă a diferitelor procese de producţie.

Primită la redacţie la 25 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. MANGERON, C. DRĂGAN, *Asupra unei noi metode tensoriale de studiu a mecanismelor*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, s. n., 1957, **3(7)**, *1—2*, 151—164.
2. D. MANGERON, A. J. JASIULJONIS, *New matrix methods for studying mechanisms and machines. I. Matrix transcriptions of Fourier series*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc. Appl., **9**, *4*, 969—984 (1964).
3. D. MANGERON, *Neue Methoden zum Studium der Getriebe und Antriebe*, III. Wiss. Tagung „Getriebe und Antriebe". Zusammenfassungen. Miskolc, sept. 1963.
4. D. MANGERON, R. CHALÉAT, M. N. OGUZTÖRELI, *Neue getriebesynthetische-und getriebeanalytische Verfahren*, VIII. Kongress für Mechanik. Juni, Split, 1966. Zusammenfassungen.
5. JOHN J. UICKER, JR., *Velocity and Acceleration Analysis of Special Mechanisms using 4×4 Matrices*, Northwestern University, Technological Institute, Evanston, Ill., Sept. 1963.
6. TCHANG TSY-SIANG, *Kinematics Analysis of lower Paar Mechanisms using 4×4 Matrices* (în l. chineză), Aviation Institute. Pekin, Teza de doctorat. 1962.
7. J. S. Beggs, *The screw Matrix*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, **6 (10)**, *3—4*, 315—322 (1960).
8. D. MANGERON, M. N. OGUZTÖRELI, *New Methods in the Machine Dynamics*, Proc. XIth Congress on Theoretical and Applied Mechanics, New Delhi, Dec. 1967. Abstracts of Papers.
9. D. MANGERON, M. N. OGUZTÖRELI, C. DRĂGAN, R. CHALÉAT, *Die Methode der sukzessiven Näherungen beim Studium der Getriebe und Maschinen*, VII. Österreichischer Mathematiker Kongress. Zusammenfassungen. Linz, Sept. 1968.
10. Д. МАНЖЕРОН (D. MANGERON), *Графо-аналитическим методам кинематики материальных систем*, дан СССР 1955, **102**, *4*, 705—706; **102**, *5*, 897—898, 1957, **112**, *1*, 27—28; 1963, **148**, *1*, 54—56.
11. D. MANGERON, *Tangentialgeometrische Methode beim Studium der Getriebe und Maschinen*, III. Allpolnische Konferenz für Getriebelehre. Rogow b. Warschau, 1961, Juni, Zusammenfassungen.
12. D. MANGERON, GH. TUDOR, O. MUNTEANU, *Folosirea corpurilor numerice în studiul mecanismelor şi maşinilor*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, **8 (12)**, *1—2*, 265—270 (1962).
13. П. А. ЛЕБЕДЕВ, *Аналитические методы исследования пространственных механизмов*, Гиттл, М., Л., 1967.
14. W. MEYER ZUR CAPELLEN, *Neue Forschungen in der Getriebelehre*, Rhein—Westf. Technische Anzeiger, 1965, 189—194.
15. B. I. TCHESCHANKOV, Annuaire Inst. méc. électrotechn. Sofia, 29—40 (1964).
16. PRENTIS J. M. and F. A. LECKIE, *Mechanical Vibrations. An Introduction to Matrix Methods*, London. Longmans, Green et Co., Ltd., 1963.
17. D. MANGERON, *Fourier Series Matrix Analysis*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, *3—4*, 237—240, (1964).
18. C. H. SUH, C. W. RADCLIFFE, *Synthesis of Plane Lincages with use of the Displacement Matrix*, ASME Paper No. 66—Mech-19, 1—9.
19. D. MANGERON, R. CHALÉAT, C. DRĂGAN, *Allgemeine Theorie der sukzessiven Näherungen beim Getriebe- und Maschinenstudium auf Grund der neuen Matrizen-Tensormethode im Hinblick auf die Anwendung von Rechenautomaten*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Méc.-Appl., **10**, *5*, 1187—1233 (1965).
20. D. MANGERON, RADU, C. BOGDAN, *Studii, cercetări şi perspective de dezvoltare a teoriei mecanismelor şi a maşinilor în Republica Populară Română*, Bul. Inst. politehn. Iaşi, **4 (8)**, *1—2*, 471—478 (1958).

---

[2]) A se vedea în această ordine de idei recenta serie de teze de doctorat în domeniul teoriei mecanismelor şi a maşinilor susţinute în Iaşi (C. Drăgan) şi Bucureşti (R. Bogdan, C. Pelecudi, M. Atanasiu, F. Dudita,...).

MULTIPOLI CINEMATICI CU ELEMENTE RIGIDE

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

621.01 : 531.1

În sensul prezentei lucrări, prin multipoli cinematici se înțeleg lanțurile cinematice interpretate ca linii de transmitere a informațiilor de mișcare, viteze, accelerații, fără a se considera perturbările datorită solicitărilor dinamice.
Acești multipoli primesc mișcarea prin polii de intrare, care în cazul grupelor structurale sînt cuplele potențiale exterioare, și transmit mișcarea prin polii de ieșire arbitrari, corespunzători multipolului următor de legătură.
Lucrarea prezintă caracteristicile acestor multipoli și redă calculul matricelor de transfer în diverse conexiuni : secționarea intrărilor și ieșirilor, legarea în serie și așezarea în paralel, legarea mixtă, legarea inversă etc.

Lanțurile cinematice, definite ca o reuniune de element legate prin cuple, sînt întrebuințate pentru transmiterea mișcărilor de la elementele conducătoare la elementele conduse. Mai general se poate vorbi de puncte sau elemente de intrarea mișcării și puncte sau elemente de ieșirea mișcării, lanțurile cinematice fiind deci interpretate ca niște linii de transmiterea informațiilor de mișcare, respectiv de transmiterea vitezelor, accelerațiilor etc. Lanțurile cinematice complexe formează deci multipoli de transmisie cinematică, care primesc mișcarea prin polii de intrare și o redau, într-un anumit fel ce depinde de constituția internă a lor, prin polii de ieșire.

Două feluri de lanțuri cinematice sînt mai importante :

a) grupele structurale care, legate la o bară fixă, au gradul de mobilitate nul și b) mecanismele care, cuprinzînd o bază fixă, au un singur sau mai multe grade de mobilitate.

Mecanismele formează multipoli *activi*, deoarece sursa de mișcare se află în interiorul lor — elementele conducătoare — pe cînd grupele structurale, întrebuințate la formarea mecanismelor complexe, constituie multipoli *pasivi*. Numărul multipolilor [1], [2] este teoretic infinit, dar practic sînt suficienți cei cu număr redus de elemente.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 5, 1968, P. 1061–1077

Ansamblul X al lanțurilor cinematice de diverse grade de mobilitate M este deci infinit. Se constituie o partiție a acestui ansamblu prin familia de ansambluri distincte $L_0, L_1, L_2, \ldots \subset X$, în care indicele arată gradul de mobilitate, deoarece

$$L_M \neq \Phi, \quad M = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$L_{M_1} \cap L_{M_2} = \Phi \quad \text{pentru } M_1 \neq M_2,$$

$$\bigcup_M L_M = X.$$

Două lanțuri cinematice $\bar{l}_M$ și $\bar{\bar{l}}_M$ din același ansamblu L_M sînt echivalente, avînd același grad de mobilitate M. Ansamblul L_M este deci o clasă de echivalență relativă la lanțul l_M;

$$L_M = \{l / l \in X,\ l \equiv l_M\}$$

care de altfel definește partiția.

Prin această partiție de subansambluri distincte, gradul de mobilitate, determinat în raport cu numărul n de elemente și cu numărul c de cuple prin formula $M = 3n - 2c$ este o funcție aditivă de mulțime. Reuniunea a două lanțuri distincte l_i și l_j, cu elemente și cuple distincte, ne conduce la suma gradelor de mobilitate:

$$l_i \cup l_j = l_r, \quad M_i + M_j = M_r.$$

Pentru ca printr-o astfel de transformare a lanțurilor cinematice (reuniune) gradul de mobilitate să rămînă invariant trebuie ca $M_j = 0$, adică lanțul cinematic adăugat să fie din ansamblul L_0, ceea ce marchează importanța grupelor structurale la formarea mecanismelor.

Subansamblele L_M se pot prelungi și pentru gradele de staticitate ($M < 0$), iar în fiecare subansamblu lanțurile cinematice se pot împărți după numărul conturelor independente, după numărul elementelor sau după numărul cuplelor cinematice. Întabelarea schemelor grafice ale diverselor lanțuri cinematice este importantă atît prin indicarea posibilităților de construcție structurale cît și prin punerea în evidență în mod direct a diferitelor grupe ale sistemelor cinematice [1] — [3]. Într-adevăr, în structura lanțurilor cinematice se pot cuprinde părți supraconstrînse compensate cu părți de mobilitate superioară sau grupe formate numai cu cuple de translație, ceea ce modifică gradul de mobilitate.

Referindu-ne numai la subansamblul L_0, acesta cuprinde o construcție rigidă cu un contur, o construcție cu două conture, trei construcții cu trei conture, ș.a.m.d. (fig. 1) din care se deduc grupele cinematice diada de diverse aspecte, triada și tetrada (fig. 2) etc.

Schematic, indiferent de structura sa internă, multipolul cinematic se poate reprezenta printr-un dreptunghi precedat de polii de intrare și urmat de polii de ieșire (fig. 3). La grupa structurală, polii de intrare sînt cuplele cinematice exterioare, iar din diversele sale elemente se pot extrage polii de ieșire, prin care mișcarea se transmite mai departe la multi-

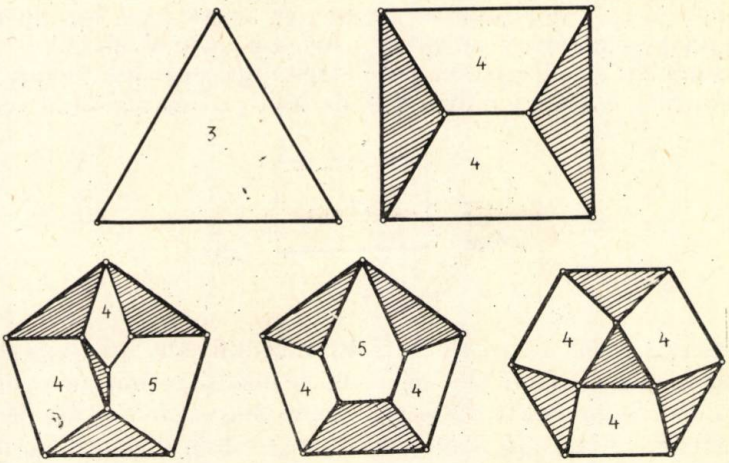


Fig. 1

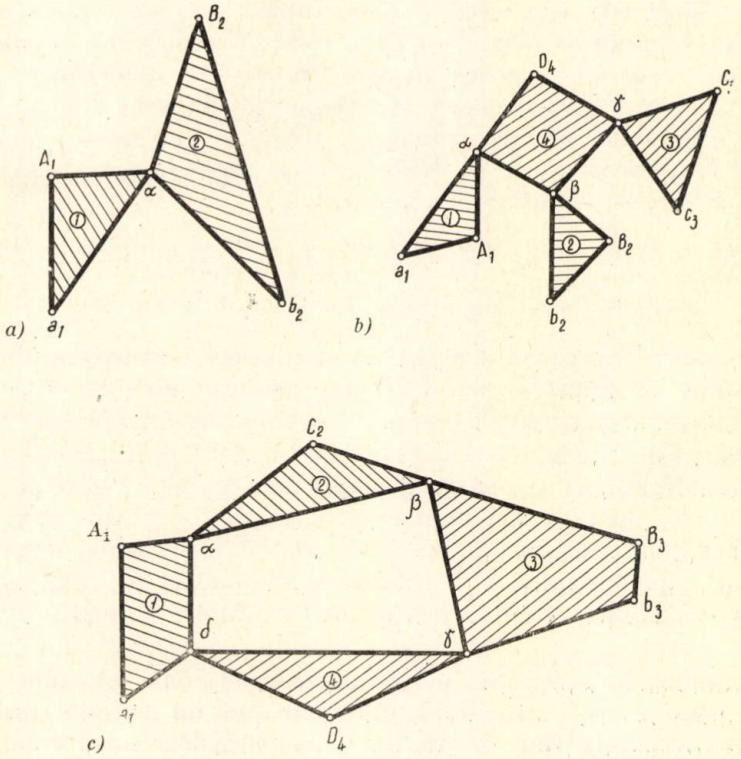


Fig. 2 *a*, *b*, *c*

polul următor sau este utilizată în conformitate cu necesităţile funcţionale (fig. 2). S-au notat polii de intrare cu litere mici sau cu indicele i şi eventualii poli de ieşire cu litere mari sau cu indicele e.

Ca semnale de mişcare se pot întrebuinţa poziţiile mobile, vitezele sau acceleraţiile, legătura dintre cele de ieşire şi intrare fiind redate prin

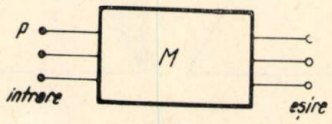


Fig. 3

funcţiile de transmisie (2, 3, 4). Datorită faptului că pentru viteze funcţiile sînt liniare aceste semnale sînt cele mai utilizate permiţînd rezolvarea în forme simple a celor mai variate probleme. Matricele de transfer asociate transformărilor liniare din re viteze se pot s rie în două feluri, după cum se întrebuinţează ecuaţiile de poziţie sub formă carteziană sau polară respectiv metodele elementelor sau conturelor [2].

Metoda elementelor [2]. Această metodă utilizează ca necunoscute coordonatele carteziene ale punctelor de legătură dintre elemente. Pentru lanţurile formate numai cu cuple de rotaţie, ecuaţiile de poziţii se obţin exprimînd lungimea constantă dintre cuplele aceluiaşi element. Dacă notăm prin c numărul total de cuple, avem $2c$, variabile. Deoarece un element de clasa i se poate desface în $i - 3$ triunghiuri, se pot scrie $i + i - 3 = 2i - 3$ ecuaţii care exprimă distanţa constantă între toate vîrfurile sale. Pentru numărul total de elemente mobile ale grupei structurale $m = n - 1$, fără baza de clasa c_e egală cu numărul cuplelor exterioare-potenţiale, se obţin,

$$\sum (2i - 3)\, n_i - (2c_e - 3) = 2 \sum i\, n_i - 3 \sum n_i - 2c_e + 3 =$$

$$= 4c - 3n - 2c_e + 3 = 2c + 2c_i - 3m = 2c_i,$$

$2c_i$ (cuple interioare) ecuaţii şi tot atîtea necunoscute, deoarece $3m - 2c = 0$. Rezultă că numărul de variabile arbitrar este $2c - 2c_i = 2c_e$, ceea ce corespunde faptului că numărul polilor de intrare este c_e.

În lanţurile cinematice care cuprind şi cuple de translaţie, se aleg în elementele legate printr-o astfel de cuplă două puncte P şi Q pe dreapta translaţiei, care nu mai sînt comune ca în cupla de rotaţie, ceea ce face să intervină două variabile în plus, dar în schimb apar şi două ecuaţii prin care se exprimă valoarea constantă a unghiurilor făcute de elemente cu dreapta translaţiei. Astfel situaţia între variabile şi ecuaţii nu se modifică [2].

De asemenea, pentru un pol de ieşire apar două variabile compensate prin două ecuaţii care îl poziţionează faţă de celelalte puncte ale elementului respectiv (fig. 2). În final deci numărul de necunoscute şi de ecuaţii este $2c_i + 2r$ (r poli de ieşire).

Se obţin, prin această metodă, funcţiile implicite de transmisie ale poziţiilor

$$f_i(x_1\, y_1\, x_2\, y_2 \dots x_p\, y_p\, \overline{X}_1\, \overline{Y}_1\, X_2\, \overline{Y}_2 \dots \overline{X}_{c_i}\, \overline{Y}_{c_i}\, X_1\, Y_1 \dots X_r\, Y_r) = 0,$$

$$g_i(x_1\, y_1\, x_2\, y_2 \dots x_p\, y_p\, \overline{X}_1\, \overline{Y}_1\, \overline{X}_2\, \overline{Y}_2 \dots \overline{X}_{c_i}\, \overline{Y}_{c_i}\, X_1\, Y_1 \dots X_r\, Y_r) = 0,$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, r \tag{1}$$

din care se pot determina ecuaţiile de viteze şi de acceleraţii prin derivare directă şi repetată în raport cu timpul.

Metoda contururilor [2]. Dacă se întrebuinţează coordonatele polare, ecuaţiile de poziţii se scriu ca ecuaţii vectoriale de închidere ale contururilor deformabile independente, deschise sau închise. Cele N contururi ale lanţului, determină prin proiecţie $2N$ ecuaţii scalare care pot rezolva în cazurile nesingulare $2N$ necunoscute. În grupele structurale, deoarece $m = 2N$, revine cîte o necunoscută pentru fiecare element care poate fi, sau deplasarea relativă r dintre piatra de culisă şi ghidajul său în cazul cuplei de translaţie, sau unghiul φ dintre dreapta cuplelor de rotaţie a unui element şi o dreaptă de referinţă fixă.

Contururile deformabile proprii grupei structurale sînt completate cu acelea care apar prin poziţionarea polilor de intrare prin vectorii complexi faţă de originea fixă. Procedînd în acelaşi fel pentru polii de ieşire (fig. 2) pentru fiecare pol apare un nou contur poligonal ce poate rezolva două necunoscute scalare ale vectorului respectiv de poziţionare. Numărul final de necunoscute şi ecuaţii este $m + 2r$. În general acest număr este mai mic decît cel din metoda anterioară. Calculele se pot reduce mai mult dacă se lucrează cu parametri relativi dintre diverşi poli de intrare sau ieşire.

Prin această metodă funcţiile implicite de poziţii, apar sub formele

$$f_i(r_1\, \varphi_1\, r_2\, \varphi_2 \dots \overline{R}_1\, \overline{\Phi}_1\, \overline{R}_2\, \overline{\Phi}_2 \dots \overline{R}_m\, \overline{\Phi}_m\, R_1\, \Phi_1\, R_2\, \Phi_2 \dots R_i\, \Phi_r) = 0,$$

$$g_i(r_1\, \varphi_1\, r_2\, \varphi_2 \dots \overline{R}_1\, \overline{\Phi}_1\, \overline{R}_2\, \overline{\Phi}_2 \dots \overline{R}_m\, \overline{\Phi}_m\, R_1\, \Phi_1\, R_2\, \Phi_2 \dots R_r\, \Phi_r) = 0.$$

$$i = 1, 2, 3, \dots r \tag{2}$$

Ca şi anterior s-au utilizat două sisteme de funcţii f_i şi g_i în legătură cu cei doi parametri scalari de poziţionare, deşi în mod practic ele nu apar diferenţiate.

Calculele se realizează în două etape. Se rezolvă mai întîi funcţiile care cuprind parametrii interiori ai multipolului (notaţi spre diferenţiere prin litere mari barate) şi numai după aceea se adaugă funcţiile care poziţionează polii de ieşire. Ambele etape au însă aceeaşi desfăşurare a calculelor, astfel că mai departe acestea se vor reda numai pentru o singură etapă.

Matricea de transmitere a vitezelor. Derivînd ecuaţiile de poziţii (1) (sau 2) se deduc transformările liniare de viteze, adică

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}v_{x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial y_k}v_{y_k}\right]+\sum_{m=1}^{r}\left[\frac{\partial f_i}{\partial X_m}V_{X_m}+\frac{\partial f_i}{\partial Y_m}V_{Y_m}\right]=0$$

$$\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_k}v_{x_k}+\frac{\partial g_i}{\partial y_k}v_{y_k}\right]+\sum_{m=1}^{r}\left[\frac{\partial g_i}{\partial X_m}V_{X_m}+\frac{\partial g_i}{\partial Y_m}V_{Y_m}\right]=0 \qquad (3)$$

$$i=1,2,3,\ldots,r.$$

Notînd matricele coloane:

$$|V_X|=\begin{vmatrix}V_{X_1}\\V_{X_2}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\V_{X_r}\end{vmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}X_1\\X_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\X_r\end{vmatrix};\quad |V_Y|=\begin{vmatrix}V_{Y_1}\\V_{Y_2}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\V_{Y_r}\end{vmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}Y_1\\Y_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\Y_r\end{vmatrix}, \qquad (4)$$

$$|v_x|=\begin{vmatrix}v_{x_1}\\v_{x_2}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\v_{x_p}\end{vmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\x_p\end{vmatrix};\quad |v_y|=\begin{vmatrix}v_{y_1}\\v_{y_2}\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\v_{y_p}\end{vmatrix}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix}y_1\\y_2\\\cdot\\\cdot\\\cdot\\y_p\end{vmatrix}, \qquad (5)$$

matricele dreptunghiulare:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}&\frac{\partial f_1}{\partial x_2}&\ldots&\frac{\partial f_1}{\partial x_p}\\\frac{\partial f_2}{\partial x_1}&\frac{\partial f_2}{\partial x_2}&\ldots&\frac{\partial f_2}{\partial x_p}\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\frac{\partial f_r}{\partial x_1}&\frac{\partial f_r}{\partial x_2}&\ldots&\frac{\partial f_r}{\partial x_p}\end{vmatrix};\quad \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\left\|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right\|,\quad \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|=\left\|\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\right\|,\quad \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|=\left\|\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\right\|, \qquad (6)$$

$$i=1,2,3,\ldots r;\qquad k=1,2,3,\ldots p$$

şi matricele pătrate

$$\left|\frac{\partial f}{\partial X}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial X_r} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial X_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial X_1} & \frac{\partial f_r}{\partial X_2} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial X_r} \end{vmatrix}; \quad \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right| = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial Y_m} \right\|, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial X}\right| = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial X_m} \right\|, \quad \left|\frac{\partial g}{\partial Y}\right| = \left\| \frac{\partial g_i}{\partial Y_m} \right\|, \tag{7}$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, r; \quad m = 1, 2, 3, \dots, r,$$

transformările anterioare (3) se pot scrie matriceal astfel:

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |v_x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| |v_y| + \left|\frac{\partial f}{\partial X}\right| |V_X| + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\right| |V_Y| = 0,$$

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| |v_x| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| |v_y| + \left|\frac{\partial g}{\partial X}\right| |V_X| + \left|\frac{\partial g}{\partial Y}\right| |V_Y| = 0 \tag{8}$$

sau, întrebuinţînd matricele compuse,

$$|V| = \left|\begin{matrix} V_X \\ \hline V_Y \end{matrix}\right|; \quad |v| = \left|\begin{matrix} v_x \\ \hline v_y \end{matrix}\right| \tag{9}$$

$$|J| = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{matrix}\right|; \quad |j| = \left|\begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \hline \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{matrix}\right|, \tag{10}$$

avem:

$$|j|\ |v| + |J|\ |V| = 0. \tag{11}$$

Excluzînd punctele singulare, se poate înmulţi la stînga cu matricea pătrată inversă $|J|^{-1}$ şi obţinem

$$|V| = |M|\ |v| \quad \text{cu} \quad |M| = -|J|^{-1} \cdot |j|. \tag{12}$$

Matricea M reprezintă matricea de transmisie a vitezelor.

Continuînd derivarea ecuațiilor de viteze (3) se găsesc transformările acceleraților, prin

$$\sum_{k,h}^{p}\left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial x_h}\,v_{x_k}\,v_{x_h}+2\,\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k\,\partial y_h}\,v_{x_k}\,v_{y_h}+\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_k\,\partial y_h}\,v_{y_k}\,v_{y_h}\right]+$$

$$+\sum_{m,n}^{r}\left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_m\,\partial X_n}\,V_{X_m}\,V_{X_n}+2\,\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_m\,\partial Y_n}\,V_{X_m}\,V_{Y_n}+\frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_m\,\partial Y_n}\,V_{Y_m}\,V_{Y_n}\right]+$$

$$+\sum_{k}^{p}\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\,a_{x_k}+\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\,a_{y_k}\right]+\sum_{m}^{r}\left[\frac{\partial f_i}{\partial X_m}\,A_{X_m}+\frac{\partial f_i}{\partial Y_m}\,A_{Y_m}\right]=0$$

$$\sum_{k\,p}^{p}\left[\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k\,\partial x_h}\,v_{x_k}\,v_{x_h}+2\,\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k\,\partial y_h}+\frac{\partial^2 g_i}{\partial y_k\,\partial y_h}\cdot v_{y_k}\,v_{y_h}\right]=$$

$$=\sum_{m,n}^{r}\left[\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_m\,\partial X_n}\,V_{X_m}\,V_{X_n}+2\,\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_m\,\partial Y_n}\,V_{X_m}\,V_{Y_n}+\frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_m\,\partial Y_n}\,V_{Y_m}\,V_{Y_n}\right]+$$

$$+\sum_{k}^{p}\left[\frac{\partial g_i}{\partial x_k}\,a_{x_k}+\frac{\partial g_i}{\partial y_k}\,a_{y_k}\right]+\sum_{m}^{r}\left[\frac{\partial g_i}{\partial X_m}\,A_{X_m}+\frac{\partial g_i}{\partial Y_m}\,A_{Y_m}\right]=0. \qquad (13)$$

Se notează $|q|$ și $|Q|$ matricele compuse cu o singură linie formate cu derivatele parțiale ale matricelor $|j|$ și $|J|$, adică

$$|q|=\left|\frac{\partial|j|}{\partial x_1},\ \frac{\partial|j|}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial|j|}{\partial x_p};\ \frac{\partial|j|}{\partial y_1},\ \frac{\partial|j|}{\partial y_2}\cdots\frac{\partial|j|}{\partial y_p}\right|, \qquad (14)$$

$$|Q|=\left|\frac{\partial|J|}{\partial X_1},\ \frac{\partial|J|}{\partial X_2}\cdots\frac{\partial|J|}{\partial X_r};\ \frac{\partial|J|}{\partial Y_1},\ \frac{\partial(|J|)}{\partial Y_2}\cdots\frac{\partial|J|}{\partial Y_r}\right| \qquad (15)$$

sau

$$|q|=\left|\begin{array}{cc|cc|c}
\left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1\,\partial x_k}\right\|, & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1\,\partial y_k}\right\| & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2\,\partial x_k}\right\|, & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2\,\partial y_k}\right\| & \cdots\cdots\cdots \\
\left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_1\,\partial x_k}\right\|, & \left\|\frac{\partial g_i}{\partial x_1\,\partial y_k}\right\| & \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_2\,\partial x_k}\right\|, & \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_2\,\partial y_k}\right\| & \cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc|cc}
\cdots & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_1\,\partial x_k}\right\|, & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_1\,\partial y_k}\right\| & \cdots \\
\cdots & \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial y_1\,\partial x_k}\right\|, & \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial y_1\,\partial y_k}\right\| & \cdots
\end{array}\right.\quad\begin{array}{cc}
\left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_p\,\partial x_k}\right\|, & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_p\,\partial y_k}\right\| \\
\left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial y_p\,\partial x_k}\right\|, & \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial y_p\,\partial y_k}\right\|
\end{array}\Bigg|, \qquad (16)$$

$$|Q|=\begin{vmatrix} \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_1 \partial X_m}\right\|, \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_1 \partial Y_m}\right\| & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_2 \partial X_m}\right\| \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_2 \partial Y_m}\right\| & \cdots\cdots \\ \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_1 \partial X_m}\right\|, \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_1 \partial Y_m}\right\| & \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_2 \partial X_m}\right\| \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_2 \partial Y_m}\right\| & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cdots & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_1 \partial X_m}\right\|; \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_1 \partial Y_m}\right\| & \cdots & \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_r \partial X_m}\right\| \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_r \partial Y_m}\right\| \\ \cdots & \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_1 \partial X_m}\right\|, \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_1 \partial Y_m}\right\| & \cdots & \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_r \partial X_m}\right\| \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_r \partial Y_m}\right\| \end{vmatrix} \cdot \quad (17)$$

Se consideră matricele $|v|^*$ și $|V|^*$ ca matrice diagonale, adică

$$\|v\|^* = \begin{vmatrix} \|v_{x_1}\|^* & 0 \\ 0 & \|v_{x_1}\|^* \\ \hline \|v_{x_2}\|^* & 0 \\ 0 & \|V_{x_2}\|^* \\ \hline \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \hline \|v_{y_1}\|^* & 0 \\ 0 & \|v_{y_1}\|^* \\ \hline \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \hline \|v_{y_p}\| & 0 \\ 0 & \|v_{y_p}\|^* \end{vmatrix} \qquad |V|^* = \begin{vmatrix} \|V_{X_1}\|^* & 0 \\ 0 & \|V_{X_2}\|^* \\ \hline \|V_{X_2}\|^* & 0 \\ 0 & \|V_{X_2}\|^* \\ \hline \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \hline \|V_{Y_1}\|^* & 0 \\ 0 & \|V_{Y_1}\|^* \\ \hline \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \hline \|V_{Y_p}\| & 0 \\ 0 & \|V_{Y_p}\| \end{vmatrix} \quad (18)$$

în care matricele $\|v_{x_k}\|^*$; $\|v_{y_k}\|^*$ și $\|V_{X_m}\|^*$ $\|V_{Y_m}\|^*$ sînt matrice pătrate diagonale (p și r):

$$\|v_{x_k}\|^* = \begin{vmatrix} v_{x_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & v_{x_k} & \cdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & v_{x_k} \end{vmatrix} \qquad \|V_{X_m}\|^* = \begin{vmatrix} V_{X_m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_{X_m} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_{X_m} \end{vmatrix}$$

$$\|v_{y_k}\|^* = \begin{vmatrix} v_{y_k} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & v_{y_k} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & v_{y_k} \end{vmatrix} \qquad \|V_{Y_m}\|^* = \begin{vmatrix} V_{Y_m} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_{Y_m} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_{Y_m} \end{vmatrix} \quad (19)$$

Se obţine

$$|q\|v|^* = \frac{\left|\sum_h \left[\left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_h \partial x_k}\right\| \|v_{x_h}\|^* + \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_h \partial x_k}\right\| \|v_{y_h}\|^*\right]\right|}{\left|\sum_h \left[\left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_h \partial x_k}\right\| \|v_{x_h}\|^* + \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial y_h \partial x_k}\right\| \|v_{y_h}\|^*\right]\right|}$$

$$\frac{\left|\Sigma\left[\left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_h \partial y_k}\right\| \|v_{x_h}\|^* + \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial y_h \partial y_k}\right\| \|v_{y_h}\|^*\right]\right|}{\left|\Sigma\left[\left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_h \partial y_k}\right\| \|v_{x_h}\|^* + \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial y_h \partial y_k}\right\| \|v_{y_h}\|^*\right]\right|} \tag{20}$$

$$|Q|\,|V|^* = \frac{\left|\sum_h \left[\left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_n \partial X_m}\right\| \|V_{X_n}\|^* + \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_n \partial X_m}\right\| \|V_{Y_n}\|^*\right]\right|}{\left|\sum_h \left[\left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_n \partial X_m}\right\| \|V_{X_n}\|^* + \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_n \partial X_m}\right\| \|V_{Y_n}\|^*\right]\right|}$$

$$\frac{\left|\sum_n \left[\left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_n \partial Y_m}\right\| \|V_{X_n}\|^* + \left\|\frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_n \partial Y_m}\right\| \|V_{Y_n}\|^*\right]\right|}{\left|\sum_n \left[\left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_n \partial Y_m}\right\| \|V_{X_n}\|^* + \left\|\frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_n \partial Y_m}\right\| \|V_{Y_n}\|^*\right]\right|} \tag{21}$$

şi

$$|q|\,|v|^*\,|v| = \frac{\left|\sum_{k\,h}\left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_h} v_{x_k} v_{x_h} + 2\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial y_h} v_{x_k} v_{y_h} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_k \partial y_h} v_{y_k} v_{y_h}\right]\right|}{\left|\sum_{k\,h}\left[\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial x_h} v_{x_k} v_{x_h} + 2\frac{\partial^2 g_i}{\partial x_k \partial y_h} v_{x_k} v_{y_h} + \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_k \partial y_h} v_{y_k} v_{y_h}\right]\right|} \tag{22}$$

$$|Q||V|^*|V| = \begin{vmatrix} \sum_{m\,n}\left[\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_m \partial X_n} V_{X_m} V_{X_n} + 2\frac{\partial^2 f_i}{\partial X_m \partial Y_n} V_{X_m} V_{Y_n} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_m \partial Y_n} V_{Y_m} V_{Y_n}\right] \\ \sum_{m\,n}\left[\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_m \partial X_n} V_{X_m} V_{X_n} + 2\frac{\partial^2 g_i}{\partial X_m \partial Y_n} V_{X_m} V_{Y_n} + \frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_m \partial Y_n} V_{Y_m} V_{Y_n}\right] \end{vmatrix} \tag{23}$$

Același rezultat se obține dacă se face mai întîi produsul $|v^*|v|$ care conduce la matricea compusă coloană:

$$|v|^*|v| = \begin{vmatrix} \|v_{x_1}\|^* \cdot \|v_x\| \\ \|v_{x_1}\|^* \cdot \|v_y\| \\ \|v_{x_2}\|^* \cdot \|v_x\| \\ \|v_{x_2}\|^* \cdot \|v_y\| \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ \|v_{y_p}\|^* \cdot \|v_y\| \end{vmatrix} \tag{24}$$

cu

$$\|v_{x_k}\|^* \cdot \|v_x\| = \begin{vmatrix} v_{x_k}\ v_{x_1} \\ v_{x_k}\ v_{x_2} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ v_{x_k}\ v_{x_p} \end{vmatrix} \quad \text{și} \quad \begin{aligned} \|v_{x_k}\|^*\ \|v_y\| &= \|v_{x_k}\ v_{y_h}\| \\ \|v_{y_k}\|^*\ \|v_x\| &= \|v_{y_h}\ v_{x_h}\| \\ \|v_{y_k}\|^*\ \|v_y\| &= \|v_{y_h}\ v_{y_h}\| \end{aligned} \tag{25}$$

și apoi $|q|\ |v|^*\ |v|$ sau asemănător $|Q|\ |V|^*\ |V|$.

Totodată prin derivarea ecuației matriceale de viteze (11,12) avem:

$$\frac{\mathrm{d}\,|j|}{\mathrm{d}t}|v| + |j|\frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}|J|}{\mathrm{d}t}|V| + |J|\frac{\mathrm{d}|V|}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{26}$$

şi ţinînd seama că

$$\frac{\mathrm{d}|j|}{\mathrm{d}t} = \sum_h \left[\frac{\mathrm{d}|j|}{\partial x_h} v_{x_h} + \frac{\partial |j|}{\partial y_h} v_{y_h} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_h \left[\left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_h \partial x_k} \right\| v_{x_h} + \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_h \partial x_k} \right\| v_{y_h} \right] & \sum_h \left[\left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_h \partial y_k} \right\| v_{x_h} + \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_h \partial y_k} \right\| v_{y_h} \right] \\ \sum_h \left[\left\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_h \partial x_k} \right\| v_{x_h} + \left\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_h \partial x_k} \right\| v_{y_h} \right] & \sum_h \left[\left\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial x_h \partial y_k} \right\| v_{x_h} + \left\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial y_h \partial y_k} \right\| v_{y_h} \right] \end{vmatrix} =$$

$$= |q| \cdot |v|^* \tag{27}$$

şi

$$\frac{\mathrm{d}|J|}{\mathrm{d}t} = \sum_n \left[\frac{\partial |J|}{\partial X_n} V_{X_n} + \frac{\partial |J|}{\partial Y_n} V_{Y_n} \right] =$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_n \left[\left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial X_n \partial X_m} \right\| V_{X_n} + \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_n \partial X_m} \right\| V_{Y_n} \right] & \sum_n \left[\left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial X_n \partial Y_m} \right\| V_{X_n} + \left\| \frac{\partial^2 f_i}{\partial Y_n \partial Y_m} \right\| V_{Y_n} \right] \\ \sum_n \left[\left\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial X_n \partial X_m} \right\| V_{X_n} + \left\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_n \partial X_m} \right\| V_{Y_n} \right] & \sum_n \left[\left\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial X_n \partial Y_m} \right\| V_{X_n} + \left\| \frac{\partial^2 g_i}{\partial Y_n \partial Y_m} \right\| V_{Y_n} \right] \end{vmatrix} =$$

$$= |Q| \ |V|^*, \tag{28}$$

împreună cu

$$|a| = \left| \frac{a_2}{a_y} \right| = \frac{\mathrm{d}|v|}{\mathrm{d}t}; \quad |A| = \left| \frac{A_X}{A_Y} \right| = \frac{\mathrm{d}|V|}{\mathrm{d}t}, \tag{29}$$

se găseşte

$$|q| \ |v|^* \ |v| + |j| \ |a| + |Q| \ |V|^* \ |V| + |J| \ |A| = 0 \tag{30}$$

sau, înmulţind la stînga cu $|J|^{-1}$, avem

$$|A| = - |J|^{-1} \ [|q| \ |v|^* \ |v| + |Q| \ |V|^* \ |V|] + |M| \ |a|. \tag{31}$$

Se pot exprima vitezele polilor de ieşire în funcţie de vitezele polilor de intrare $|V| = |M| \ |v|$ sau dacă s-ar fi plecat de la considerarea $|J| \equiv |1|$; $|M| = - |J|$; $|Q| \equiv 0$; $|N| = - |q|$ se ajungea la

$$A = |N| \ |v|^* \ |v| + |M| \ |a|. \tag{32}$$

Matricea de transfer $|M|$ a acceleraţiilor secundare $|A|'' = |M| \ |a|$ este chiar matricea de transfer a vitezelor. Matricea $|N|$ este matricea

de transmitere a acceleraţiior primare $|A|' = -|N|\,|v|^*|v|$. Matricea acceleraţiilor $|A| = |A|'' - |A'|$ este diferenţa între matricele acceleraţiilor secundare şi primare.

Conexiunile multipolilor. Compunerea matricelor de transfer pentru diverse legături ale multipolilor se face în mod simplu pentru viteze. Matricele acceleraţiilor se pot calcula conform formulelor (31,32) pe multipolul complex rezultant.

Cele mai simple legături dintre doi multipoli sînt aşezările lor în serie sau paralel urmate de legăturile lor mixte şi inverse. Pentru calculul matricelor de transfer rezultante se utilizează

— secţionarea ieşirilor (fig. 4)

$$|V_e| = |M|\,|v_i|$$

$$\begin{matrix} |V_{e_1}| = |m_1|\,|v_i| \\ |V_{e_2}| = |m_2|\,|v_i| \\ |V_{e_3}| = |m_3|\,|v_i| \end{matrix} \quad ; \quad |V_e| = \left|\begin{matrix} V_{e_1} \\ V_{e_2} \\ V_{e_3} \end{matrix}\right| \quad ; \quad |M| = \left|\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{matrix}\right| . \tag{33}$$

Matricea de transfer $|M|$ este o matrice compusă unicoloană

— secţionarea intrărilor (fig. 5)

$$|V_e| = |M|\,|v_i| = |m_1|\,|v_{i_1}| + |m_2|\,v_{i_2}| + |m_3|\,|v_{i_3}|,$$

$$|M| = \left|\begin{matrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{matrix}\right| , \quad |v_i| = \left|\begin{matrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ v_{i_3} \end{matrix}\right| . \tag{34}$$

Matricea de transfer $|M|$ este o matrice compusă unilinie

— secţionarea intrărilor şi ieşirilor (fig. 6)

$$|V_e| = |M|\,|v_i|,$$

$$\begin{aligned} |V_{e_1}| &= |m_{11}|\,v_{i_1}| + |m_{12}|\,|v_{i_2}| + |m_{13}|\,|v_{i_3}|, \\ |V_{e_2}| &= |m_{21}|\,|v_{i_1}| + |m_{22}|\,|v_{i_2}| + |m_{23}|\,|v_{i_3}|, \\ |V_{e_3}| &= |m_{31}|\,|v_{i_1}| + |m_{32}|\,|v_{i_2}| + |m_{33}|\,|v_{i_3}|, \end{aligned} \tag{35}$$

$$|M| = \left|\begin{matrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{matrix}\right| .$$

Matricea de transfer este o matrice compusă dreptunghiulară

Legarea în serie se obține prin legarea polilor de ieșire de la primul multipol cu polii de intrare ai multipolului următor, astfel că multipolul rezultant are aceiași poli de intrare cu ai primului și aceiași poli de ieșire cu ai ultimului (fig. 7). Avem deci condițiile :

$$|v_i| = |v_{i_1}| \; ; \; |V_{e_1}| = |v_{i_2}| \; ; \; |V_{e_2}| = |V_e| \, . \tag{36}$$

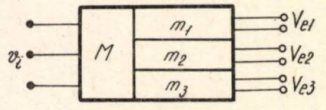


Fig. 4

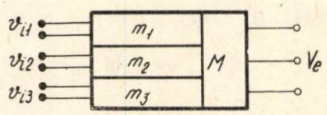


Fig. 5

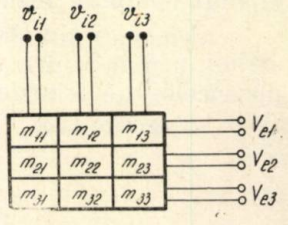


Fig. 6

Pentru că

$$|V_e| = |M_1| \, |v_{i_1}| \; ; \; |V_{e_2}| = |M_2| \, |v_{i_2}| \; ; \; |V_e| = |M| \, |v_i| \tag{37}$$

se găsește că matricea rezultantă de transfer

$$|M| = |M_2| \, |M_1| \tag{38}$$

este produsul matricelor componente în ordinea inversă legării multipolilor.

La așezarea în paralel multipolul rezultant are polii de intrare și de ieșire aceiași cu ai multipolilor componenți (fig. 8). Deoarece

$$|v_i| = \begin{vmatrix} v_{i_1} \\ v_{i_2} \end{vmatrix} \; ; \; |V_e| = \begin{vmatrix} V_{e_1} \\ V_{e_2} \end{vmatrix} \tag{39}$$

și

$$|V_{e_1}| = |M_1| \, |v_{i_1}| \; ; \; |V_{e_2}| = |M_2| \, |v_{i_2}| \; ; \; |V_e| = |M| \, |v_i| \tag{40}$$

matricea de transfer rezultantă

$$|M| = \left|\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right| \tag{41}$$

este diagonală.

Legătură mixtă (fig. 9) cuprinde legături în serie și așezări în paralel și corespunde unor secționări ale ieșirilor în primul multipol și ale intrărilor în multipolul următor. Conform figurii avem condițiile

$$|V_{e_1}| = |m_{11}| \, |v_{i_1}| \; ; \; |V_{e_2}| = |m_{21}| \, |X| + |m_{22}| \, |v_{i_2}| \; ; \; |X| = |m_{12}| \, |v_{i_1}| , \tag{42}$$

ceea ce conduce la matricea

$$|M| = \left|\begin{array}{c|c} |m_{11}| & |0| \\ \hline |m_{21}|\ |m_{12}| & |m_{22}| \end{array}\right| \tag{43}$$

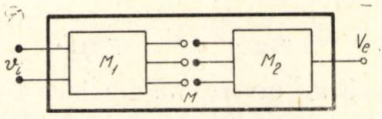


Fig. 7

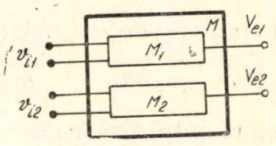


Fig. 8

Aceeaşi matrice de transfer se mai poate obţine prin utilizarea legăturii mixte (fig. 10) şi a matricelor unitate. Ţinînd seama de secţionările interne, matricele, pentru aşezările în paralel, sînt

$$\text{— rezultanta dintre } |M_1| \text{ şi } |1| \text{ ; } |M_1'| = \left|\begin{array}{cc} M_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} m_{11} & 0 \\ m_{12} & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right|,$$

$$\text{— rezultanta dintre } |1| \text{ şi } |M_2| \text{ ; } |M_2'| = \left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m_{12} & m_{22} \end{array}\right|. \tag{44}$$

La legarea acestora în serie se obţine matricea rezultată prin

$$|M| = |M_2'|\,|M_1'| = \left|\begin{array}{c|c} |m_{11}| & 0 \\ \hline |m_{12}|\ |m_{21}| & |m_{22}| \end{array}\right|. \tag{45}$$

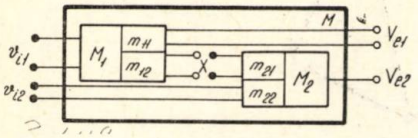


Fig. 9

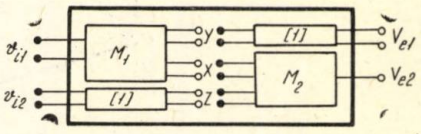


Fig. 10

Legătura inversă se obţine cînd o parte a polilor de ieşire sînt legaţi printr-un multipol invers la unii poli de intrare, ceea ce conduce la un multipol rezultat cu ieşirile şi intrările reduse (fig. 11). Complexitatea este superioară, numărul elementelor şi cuplelor cinematice însumîndu-se, dar mobilitatea generală rămîne aceeaşi.

Din secţionarea primului multipol avem :

$$|V_e| = |m_{11}|\,|v_i| + |m_{12}|\,|v_i'|,$$
$$|V_e'| = |m_{21}|\,v_i| + |m_{22}|\,|v_1'| \;;\; |v_i'| = |M_2|\,|V_e'|, \tag{46}$$
$$|V_e| = |M|\,|v_i|,$$

şi se găseşte că intrarea $|v_i'|$ depinde de intrarea $|v_i|$ prin relaţia

$$|v_i'| = |1 - M_2 m_{22}|^{-1}\,|M_2|\,|m_{21}|\,|v_i|, \tag{47}$$

astfel că matricea de transfer rezultată este

$$|M| = |m_{11}| + |m_{12}|\,|1 - M_2 m_{22}|^{-1}\,|M_2|\,|m_{21}|. \tag{48}$$

Pentru exemplificarea acestei legături inverse luăm triada 1—2—3——4 (fig. 12) cu polii de intrare X Y Z şi polii de ieşire U şi V, la care adăugînd diada 5—6 cu polii de intrare în U şi V şi de ieşire în Y se obţine o nouă grupă structurală cu două contururi deformabile de clasele IV şi V de ordinul doi (X şi Z). La fel, considerînd două diade, prima 1—2 cu polii de intrare X, Y şi polul de ieşire U, iar a doua 3—4 cu polii de intrare Z, T şi polul de ieşire V şi legînd V cu Y precum şi U cu T se obţine tetrada cu intrările X, Z (fig. 13).

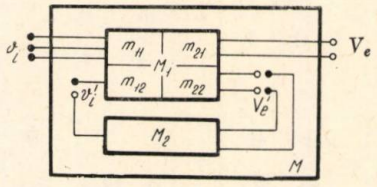


Fig. 11

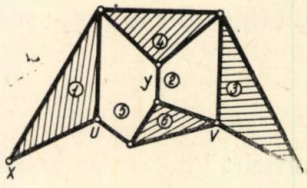


Fig. 12

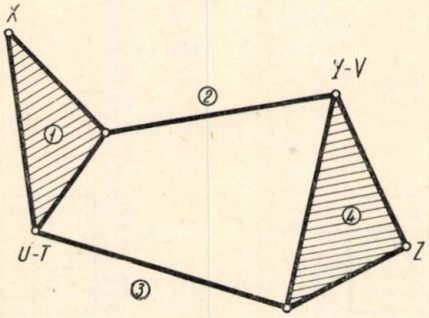


Fig. 13

Legarea intrărilor la doi multipoli distincţi nu influenţează mobilitatea, deoarece acestea pot primi în general orice semnale de mişcare şi în particular semnale comune.

Legarea ieşirilor la doi multipoli separaţi influenţează posibilităţile de mobilitate şi în general blochează grupa structurală. Numai în cazuri

singulare cînd avem aceleaşi ieşiri se pot lega polii respectivi. Acestea îndeplinesc apoi rolul de legături pasive (fig. 14). Deoarece $|V_{e_1}| = |V_{e_2}|$ condiţia de compatibilitate devine $|M_1|\,|v_{i_1}| = |M_2|\,|v_{i_2}|$, care depinde prin $|M_1|$ şi $|M_2|$ de structura geometrică a multipolilor, iar prin $|v_{i_1}|$ şi $|v_{i_2}|$ de structura parametrilor cinematici de intrare.

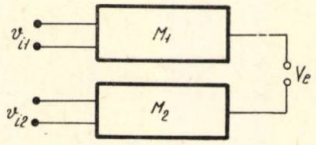


Fig. 14

În continuare se pot face desigur alte legături combinate care duc la structuri complexe de multipoli.

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Metoda conturelor în sinteza numerică şi structurală a lanţurilor cinematice*, St. cerc. mec. apl., *3* (1967).

2 — *Bazele analizei mecanismelor*, Bucureşti, Edit. Academiei 1967.

3. R. Voinea, M. Atanasiu, *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1964.

INFLUENȚA PRINCIPALILOR FACTORI AI FRECĂRII ASUPRA ALUNECĂRII INTERMITENTE LA GHIDAJELE MAȘINILOR-UNELTE

de CIGAN LEONTIN
Institutul de cercetări și proiectări mașini unelte și agregate (ICPMUA) București

621.09 : 531.4

În lucrare se prezintă cercetările efectuate pentru stabilirea influenței sarcinii de apăsare, a vitezei de deplasare, calității suprafețelor, uleiului de ungere și a temperaturii, asupra fenomenului de alunecare intermitentă indicîndu-se criteriile ce trebuie să stea la baza alegerii cuplei de frecare pentru ghidajele mașinilor unelte.

Dezvoltarea mașinilor unelte cu comandă program ridică în fața constructorilor noi probleme cum ar fi realizarea unor avansuri mici (avansuri de poziționare). Atît realizarea avansurilor mici, cît și obținerea unei precizii mari de poziționare depinde de sensibilitatea mecanismelor de avans.

Mecanismele de poziționare însă lucrează la viteze de deplasare mici, viteze la care, în anumite condiții de suprafață, ungere și sarcină, poate apare fenomenul de alunecare intermitentă (stik-slip), care influențează negativ asupra preciziei.

În lucrarea [1] pentru calculul sensibilității mecanismelor de avans este dată relația

$$\Delta = \frac{(\mu_s - \mu_c)\, N}{R}, \tag{1}$$

unde

$\mu_s - \mu_c$ reprezintă diferența dintre coeficientul de frecare static și cinetic;
N — mărimea sarcinii normale;
R — rigiditatea mecanismului de avans.

Rezultă că micșorînd diferența $(\mu_s - \mu_c)$ se mărește sensibilitatea mecanismelor de avans.

Acest deziderat se poate realiza fie înlocuind ghidajele de alunecare cu ghidaje de rostogolire, cu ghidaje hidrostatice sau cu ghidaje aerostatice, fie prin găsirea unor soluții constructive tehnologice și de ungere

adecvate. Totodată sensibilitatea mecanismelor de poziționare și a mecanismelor de avans se poate crește prin mărirea rigidității sau reducerea sarcinii specifice pe unitatea de suprafață a ghidajelor.

În ceea ce privește viteza critică de la care începe să apară fenomenul de alunecare intermitentă [2], poate fi determinată cu ajutorul relației

$$V_{cr} = \frac{N(\mu_s - \mu_c)}{\sqrt{R \cdot m}}, \tag{2}$$

unde m este masa elementelor deplasabile ale sistemului.

Din formulele (1), (2) rezultă că atît sensibilitatea mecanismelor de transmitere a mișcării Δ, cît și viteza critică de apariția fenomenului de mișcare intermitentă cu alunecare V_{cr}, depind de diferența dintre coeficientul de frecare static și cel cinetic $(\mu_s - \mu_c)$, de sarcina N de rigiditatea R a mecanismului de transmiterea mișcării.

Vom analiza mai departe principalii parametri ai fenomenului de alunecare intermitentă (stik-slip) și influența factorilor amintiți mai sus asupra acestora.

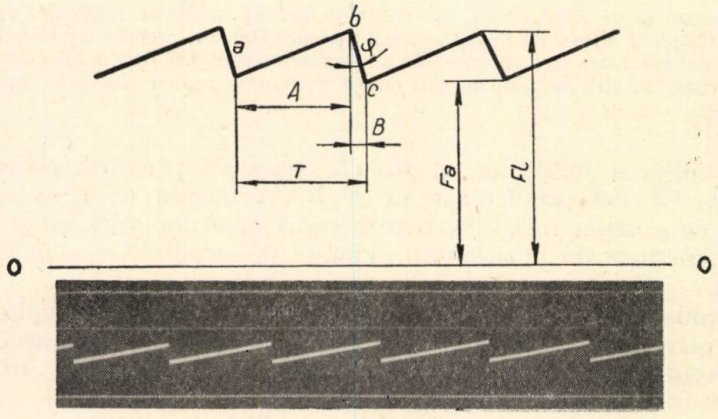


Fig. 1. — Variația forței de frecare în timp :
F_l, F_a — forțele de frecare maximă și minimă în perioada de aderare ;
h — amplitudinea fenomenului de alunecare intermitentă ;

$$h = \frac{\Delta F}{R} = \frac{F_l - F_a}{R} = \frac{N}{R}(\mu_l - \mu_a),$$

A — perioada de aderare ; B — perioada de alunecare ; φ — unghiul de cădere ; T — perioada totală ; $T = A + B = \frac{h}{t}$; N — sarcina ;

$\frac{n}{t}$ — frecvența fenomenului în unitate de timp.

Fenomenul de alunecare intermitentă, așa cum se arată și în lucrările [3], [4], [5], se caracterizează prin următoarele 2 etape :

Aderarea (lipirea) suprafețelor la nivelul microasperităților și a straturilor de adsorbție a uleiului — *perioada de aderare* fig. 1.

Datorită deformației elementelor elastice ale lanțului cinematic al mecanismului de transmitere a mișcării și a forței de frecare ce acționează

între suprafețe, are loc ruperea legăturii dintre aceste suprafețe — *perioada de alunecare.*

În figura 1 este prezentat un aspect al fenomenului de alunecare intermitentă înregistrat cu ajutorul unui dispozitiv de modelare prezentat în figura 2.

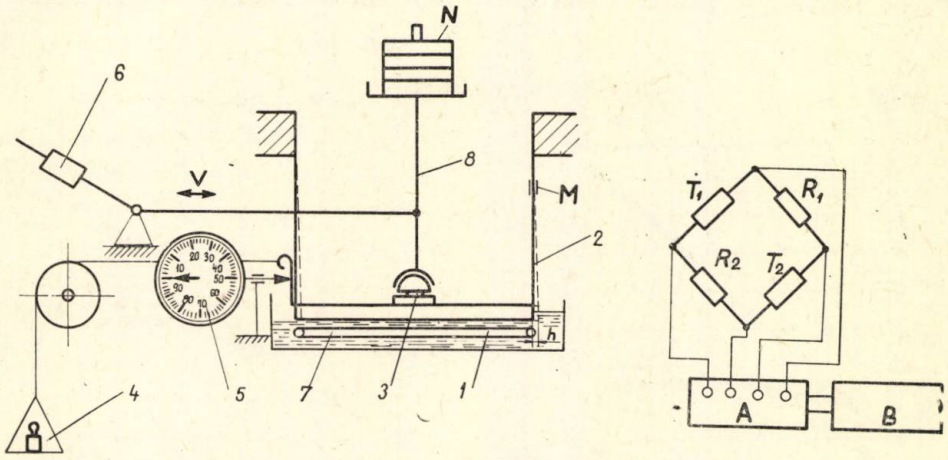


Fig. 2. — Schema de principiu a dispozitivului de încercare :

1 — placa de bază (una din epruvete); *2* — cadru elastic; *3* — epruveta mobilă pe care este aplicată sarcina *N* prin intermediul pîrghiei 8; *4* — Taler cu greutăți pentru tarare; *5* — Comparator; *6* — comtragreutate; *M* — mărcile tensometrice montate în puncte Weaston pentru înregistrarea fenomenului (fig. 2 *b*); *7* — serpentină pentru termostatare

Așa cum se vede în figura 1 *a* principalii parametri ai fenomenului de alunecare intermitentă sînt : amplitudinea h, unghiul de cădere φ, perioada de aderare A și perioada de alunecare B.

Parametrii fenomenului de alunecare intermitentă în afară de sarcină și rigiditate, mai depind de o serie de factori ca : viteza de deplasare, calitatea uleiului, mărimea și orientarea rizurilor de suprafață, calitatea materialului, temperatură, modul de ungere etc. [3], [6], [7].

În cele ce urmează sînt prezentate unele rezultate experimentale care stabilesc influența celor mai importanți din acești factori și anume : sarcina, viteza de deplasare, calitatea suprafețelor, calitatea uleiului și temperatura.

1. SARCINA ȘI CALITATEA SUPRAFEȚELOR

Așa cum rezultă din relațiile (2) și (3) atît viteza la care apare fenomenul de mișcare intermitentă cu alunecare, cît și mărimea amplitudinii acestuia depind direct de sarcina N.

Dat fiind mulțimea factorilor de care depinde frecarea, diferența $(\mu_l - \mu_a)$ [1]) poate avea valori diferite de la o cuplă de frecare la alta, sau schimbînd condițiile de ungere.

---

[1]) μ_l, μ_a, valorile coeficienților de frecare corespunzători forțelor de frecare F_l și respectiv F_a (fig. 1); Diferența $\mu_l - \mu_a = 2(\mu_s - \mu_c)$.

De aceea, atît viteza de deplasare la care apare fenomenul de alunecare intermitentă cît şi dependenţa acestuia de sarcină şi rigiditate trebuie determinate experimental pentru fiecare cuplă de frecare în parte, în condiţii de lucru cît mai apropiate de cele din exploatare.

În figurile 3 şi 4 este arătată dependenţa forţelor de frecare F_l şi F_a de sarcina N pentru două dintre cuplele de frecare experimentate.

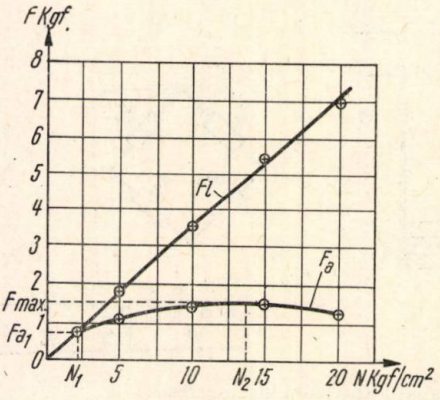


Fig. 3. — Suprafeţele prelucrate prin tuşare (parte mobilă) — rectificare cu piatră periferică (partea fixă).

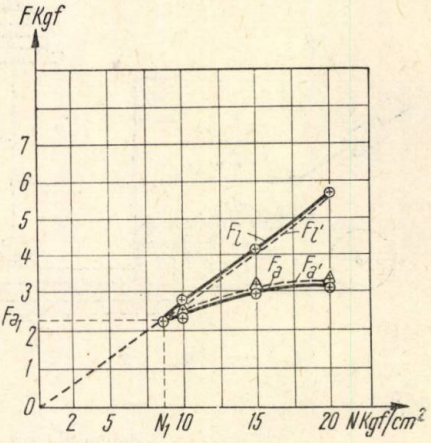


Fig. 4. — Suprafeţele pelucrate prin frezare fină (partea mobilă) — tuşare (partea fixă).

Dependenţa forţei de frecare de sarcină şi prelucrarea suprafeţelor.

Ulei 405 AT; temperatura 35° C; $N=10$ kgf/cm²; rigiditatea sistemului elastic $R = 4{,}3$ kgf/mm; epruvetele FC—25 de dimensiuni ⌀ 16,1 mm partea mobilă şi partea fixă 25×200 mm; F_{a1}, N_1 — forţa de frecare, respectiv sarcina la care începe alunecarea intermitentă; Na_2 — sarcina de la a cărei valoare apare tendinţa de gripare.

Cupla de frecare avînd suprafeţele prelucrate prin rectificare (partea fixă) şi tuşare (partea mobilă) (fig. 3) a prezentat amplitudini ale fenomenului de alunecare intermitentă mai mari decît cupla de frecare avînd suprafeţele prelucrate prin tuşare (partea fixă) şi frezare fină (partea mobilă) (fig. 4).

Aşa cum se vede în figurile 3 şi 4, amplitudinea fenomenului de alunecare intermitentă creşte cu sarcina (confirmînd [6], [7]).

Cercetările de faţă arată că forţa de frecare F_l creşte aproape direct proporţional cu sarcina N, în timp ce forţa de frecare F_a, ce se remarcă de la o anumită sarcină N_1 creşte pînă cînd aceasta are o valoare maximă $F_{a_{max}}$ corespunzătoare sarcinii N_2 (fig. 3). Mărind mai departe sarcina N, forţa de frecare F_a descreşte, iar amplitudinea fenomenului de alunecare intermitentă creşte brusc, ducînd în cele din urmă la gripare.

Se constată de asemenea că sarcina N_2 corespunzătoare forţei de frecare $F_{a_{max}}$, diferă de la o cuplă de frecare la alta, de la un regim de ungere la altul. La cupla de frecare tuşare-frezare (fig. 4) amplitudinea fenomenului este mult mai mică decît la cupla de frecare rectificare-tuşare (fig. 3) şi sarcina N_2 este mult mai mare la cupla de frecare tuşare-frezare (fig. 4) decît la cupla de frecare rectificare-tuşare (fig. 3).

De aici rezultă că la operațiile de prelucrare cu rugozități foarte mici datorită aderenței mari există o tendință de gripare mai mare.

De altfel, fenomenul de alunecare intermitentă apare la sarcini mult mai mari la cupla de frecare tușare-frezare (fig. 4) decît la cupla de frecare rectificare-tușare (fig. 3).

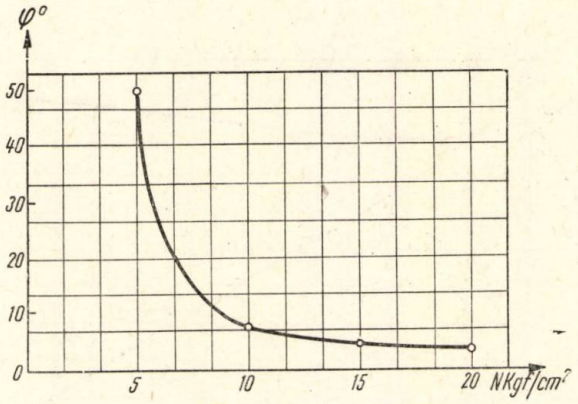


Fig. 5. — Dependența unghiului φ de sarcina N kgf.

Din cercetările efectuate a mai rezultat că la cuplele de frecare avînd orientarea rizurilor de suprafață paralelă cu direcția de alunecare există o tendință de micșorare a amplitudinei fenomenului de alunecare intermitentă.

În figura 4, liniile continue reprezintă forțele de frecare F_t și F_a în funcție de sarcină în cazul orientării rizurilor de suprafață a epruvetei mobile, perpendiculară pe direcția de deplasare, iar liniile punctate reprezintă forțele de frecare F'_t, F'_a în cazul unei orientări a rizurilor paralelă cu direcția de mișcare. Unghiul de cădere φ [2]), așa cum se vede în figura 5, crește brusc cu sarcina.

Rezultă deci că pentru fiecare cuplă de frecare, într-o anumită condiție de ungere și viteză, se poate determina experimental *sarcina N_1 de la a cărei valoare apare fenomenul de alunecare intermitentă și o sarcină N_2 de la a cărei valoare există tendința de gripare.*

2. VITEZA DE DEPLASARE

Influența vitezei de deplasare a fost studiată parțial de unii autori [8]. În figura 6 prezentăm o diagramă a variației coeficientului de frecare funcție de viteză pentru cupla de frecare avînd suprafețele prelucrate prin rectificare cu piatră periferică (partea fixă) și tușare (partea mobilă), în condițiile de încercare, arătate.

[2]) Unghiul de cădere φ determină viteza medie de „slip" [7].

Zona I reprezintă domeniul de viteze în care este prezent fenomenul de alunecare intermitentă; *zona II* reprezintă domeniul fără mişcare sacadată [3]); *zona III* reprezintă domeniul unde apar vibraţiile proprii.

Domeniul de viteze în care nu există alunecare intermitentă şi vibraţii proprii (zona II) poate fi extins sau redus, schimbînd condiţiile de

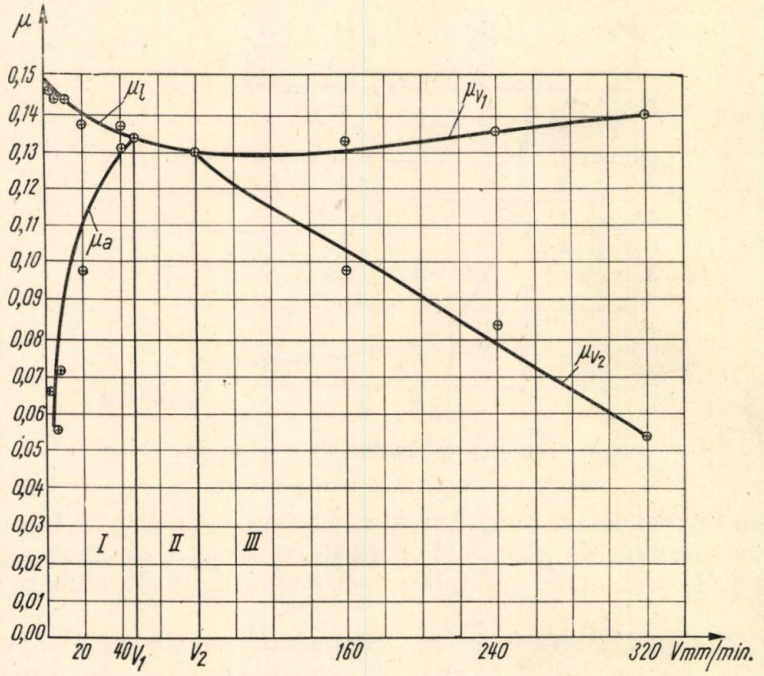


Fig. 6. — Dependenţa coeficientului de frecare de viteză. Suprafeţele prelucrate — piatră periferică (partea fixă) — tuşare (partea — mobilă); Ulei 405 AT; încărcarea 6 kgf/cm²; ∅ = 35°C, rodaj iniţial 1 km; rigiditatea $R = 4{,}33$ kgf/mm; epruvete Fc — 25 20×20 mm (partea mobilă) şi 25×200 (partea fixă); V_{cr} — viteza la care dispare fenomenul de alunecare intermitentă; V_v — viteza la care apar vibraţiile proprii; μ_l, μ_a — coeficient de frecare corespunzător forţelor de frecare F_l şi F_a (fig. 1); μ_{v1}, μ_{v2} — coeficient de frecare maxim şi minim în domeniul de vibraţii.

lucru aşa cum se va arăta mai jos (fig. 8), lucru foarte important care trebuie avut în vedere la proiectarea ghidajelor de maşini-unelte.

Apariţia vibraţiilor proprii depinde de rigiditatea sistemului elastic [9]. Constatăm însă că mărind rigiditatea sistemului elastic se măreşte domeniul de viteze în care nu există alunecare intermitentă şi vibraţii (zona II fig. 6).

Pe de altă parte, prin reducerea forţei de frecare, în afară de faptul că se poate extinde domeniul de viteze în care nu există vibraţii proprii, va rezulta şi o reducere a uzării suprafeţelor cuplei de frecare.

---

[3]) Prin mişcare sacadată înţelegem „stick-slip" + vibraţii.

Aşa cum se va arăta mai jos, o deosebită importanţă pentru reducerea coeficientului de frecare (corespunzător lui F_l) o are uleiul şi aditivii, confirmîndu-se astfel unele rezultate din [7].

În general, la maşinile-unelte ce lucrează la viteze de deplasare mici, pentru reducerea fenomenului de alunecare intermitentă, considerăm că trebuie luate măsuri pentru reducerea valorii coeficientului de frecare corespunzător lui F_l, iar la maşinile unelte ce lucrează la viteze mari de deplasare trebuie mărită rigiditatea sistemului elastic ca să nu apară vibraţiile proprii.

Condiţiile optime de lucru atît pentru domeniile de viteze mici unde poate apărea alunecarea intermitentă, cît şi pentru domeniile de viteze mari unde pot apare vibraţiile proprii, trebuie stabilite ţinînd cont şi de restul factorilor amintiţi mai sus.

3. INFLUENŢA VITEZEI DE ALUNECARE ŞI A FORŢEI DE APĂSARE ASUPRA ALUNECĂRII INTERMITENTE

Din cele arătate pînă acum rezultă că există o sarcină N_1 la care apare fenomenul de alunecare intermitentă şi o viteză V_{1cr} corespunzătoare unei anumite sarcini (fig. 3 şi fig. 6).

În figura 7 este prezentată dependenţa vitezei la care apar vibraţiile proprii V_2 şi vitezei la care apare alunecarea intermitentă V_1 funcţie de sarcina N.

Aplicînd diferite sarcini pe epruveta mobilă s-a urmărit cu două rigidităţi viteza la care fenomenul de alunecare intermitentă dispare (diagrama 1, 2 din figura 7). La aceeaşi sarcină s-a urmărit şi viteza la care apar vibraţiile proprii (diagrama 3). Rezultă că în zona II alunecarea este fără intermitenţă şi fără vibraţii proprii.

La o rigiditate R_1 (mai redusă) şi la o sarcină N_1 domeniul de viteze în care nu există alunecare intermitentă şi vibraţii va fi cuprins între limitele $V_1 \div V_2$. Aşa cum se vede din figură, pînă la o valoare a sarcinii N_2, nu există pericolul de apariţia vibraţiilor proprii chiar la viteze mari de deplasare. De la valoarea N_2 a sarcinii pînă la valoarea N_3 vor apare vibraţii la viteze mari de deplasare. În domeniul de sarcini $N_3 - N_4$ există toate cele 3 aspecte prezentate în figura 6. La sarcini mai mari decît N_4 există atît alunecare intermitentă, cît şi vibraţii proprii.

În felul acesta, cunoscînd domeniul de viteze la care lucrează maşina-unealtă şi sarcina maximă pe ghidaje se poate determina experimental dacă, în acel domeniu, alunecarea este fără intermitenţă şi fără vibraţii. Cînd apar vibraţii proprii se va mări rigiditatea mecanismului de transmitere a mişcării. Dacă apare alunecarea intermitentă, se vor schimba condiţiile de lucru căutîndu-se obţinerea unor coeficienţi de frecare mai mici, schimbînd cupla de frecare, uleiul de ungere, introducînd eventual canale de ungere etc.

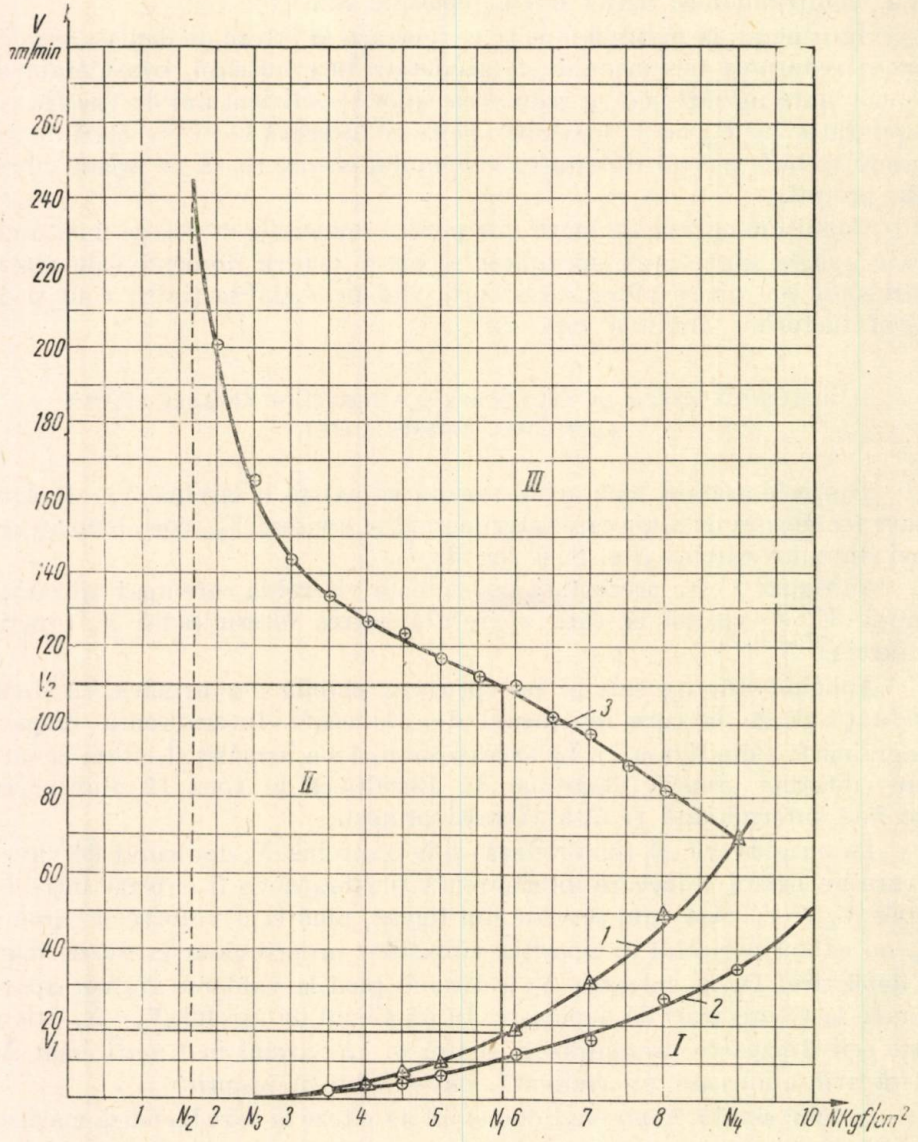


Fig. 7. — Dependența vitezei la care dispare fenomenul de alunecare intermitentă și a vibrațiilor proprii de N kgf. I — domeniul de viteze și sarcini în care apare alunecarea intermitentă; II — lipsesc intermitențe și vibrații. III — apar vibrațiile proprii. Epruvetele tușate Fc — 25; ulei 405 AT; $R_1 = 4{,}33$ kgf/mm (curba 1); $R_2 = 3{,}36$ kgf/mm (curba 2); $t = 25°$ C. Partea mobilă 20×20 mm și partea fixă 25×250; rodaj inițial 1 km.

4. CALITATEA ULEIULUI ŞI TEMPERATURA

După cum s-a arătat şi de alţi autori calitatea uleiului şi vîscozitatea prin intermediul temperaturii au o mare influenţă atît asupra fenomenului de alunecare intermitentă, cît şi asupra amplitudinii vibraţiilor proprii [6], [7], [9].

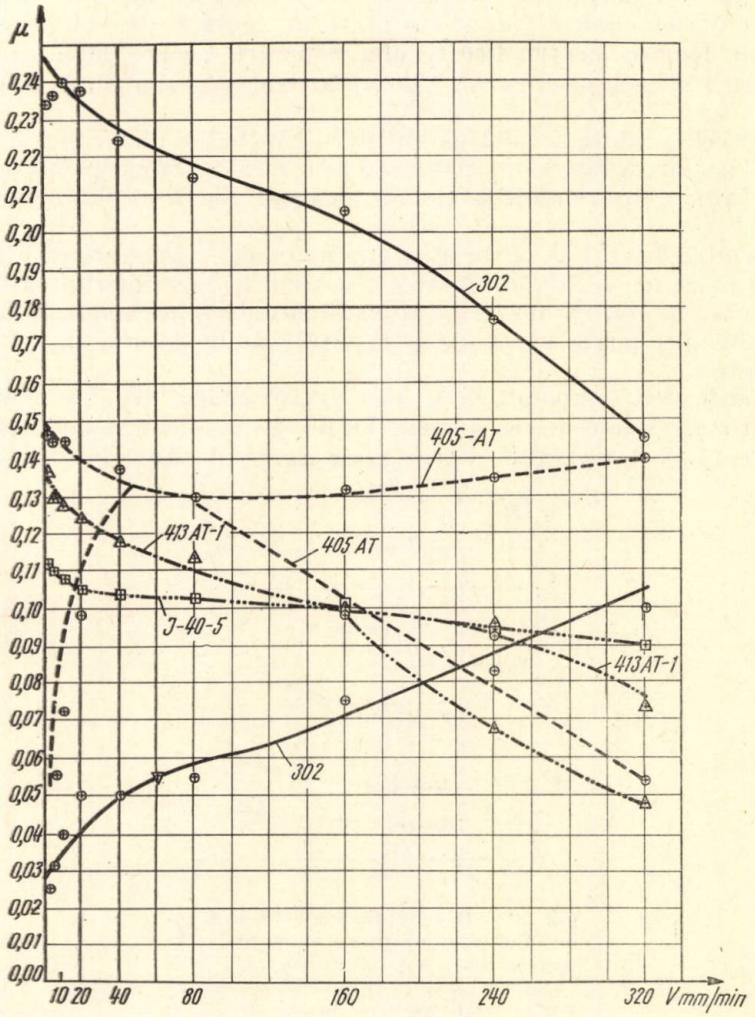


Fig. 8. — Dependenţa coeficientului de frecare μ de calitatea uleiului. Epruvetele din fontă Fc—25 (partea mobilă) 20×20 rectificată şi partea fixă 25×200 tuşată; rigiditatea $R = 3{,}9$ kgf/mm; sarcina 6 kgf/cm²; rodaj iniţial 1 km.

Dintre uleiurile româneşti, studiate, prezentăm o parte, datorită unor aspecte semnificative. În figura 8 este prezentată variaţia coeficientului de frecare (μ_i, μ_a) în funcţie de viteză la cîteva din uleiurile experimentate.

În condițiile de încercare arătate în figura 8 la uleiul I—40—5 nu au apărut alunecare intermitentă și vibrații, în timp ce la uleiul 302, în întreg domeniul de viteze 2—320 mm/min, se remarcă prezența alunecării intermitente. La uleiul 413—AT—1 în domeniul vitezelor de deplasări mari, apar vibrații proprii. Așa cum se vede și în figura 6 uleiul 405—AT prezintă toate cele 3 aspecte arătate mai sus.

Rezultă de asemenea că mărind sau micșorînd sarcina N, se poate mări sau micșora una din zonele arătate în igura 6 pentru fiecare ulei.

Prin urmare, pentru fiecare ulei și pentru fiecare cuplă de frecare este diferită influența sumară a vitezei de deplasare și a forței de apăsare (fig. 7).

I in cele arătate rezultă că nu trebuie utilizate uleiul 302 și 405 AT pentru ungerea suprafețelor prelucrate prin rectificare cu piatră periferică (partea fixă) — tușare (partea mobilă) în condițiile de rigiditate și sarcină arătate.

Uleiul 413 AT-1 se poate utiliza numai dacă mașina unealtă lucrează la viteze mai mici decît 100 mm/min. În cazul în care rigiditatea mecanismului de transmitere a mișcării este mai mare decît cea indicată în figură, uleiul 413 AT-1 poate fi utilizat și la viteze de deplasare mai mari decît 100 mm/min.

Modificarea temperaturii și deci a viscozității uleiului aduce după sine, mărirea sau micșorarea domeniului de viteze în care apare alunecarea intermitentă și domeniul de viteze unde apar vibrațiile proprii.

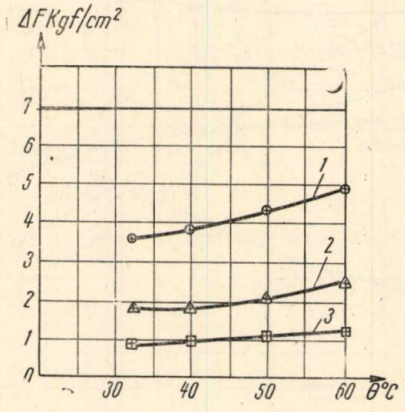


Fig. 9. — Dependența amplitudinii fenomenului de alunecare intermitentă de temperatură. $N = 20$ kgf/cm²; (1) $N = 15$ kgf/cm² și $N = 10$ kgf/cm². (3) Suprafețele rectificate cu piatră frontală; Ulei 405, restul condițiilor similare, figurile 3 și 4.

Acest lucru este cu atît mai important cu cît în cursul anului și chiar în aceeași zi poate varia temperatura medie a ghidajelor.

În figura 9 se prezintă influența temperaturii asupra amplitudinii h a fenomenului de alunecare intermitentă. Amplitudinea fenomenului de alunecare intermitentă, la o variație a temperaturii de 10°C, se modifică cu aproximativ 10—15% pentru uleiul 405 AT—1.

CONCLUZII

Experimentările au arătat că se pot determina pentru fiecare cuplă și condiții de frecare, sarcina critică atît privind apariția fenomenului de alunecare intermitentă cît și privind tendința de gripare.

Se pare că orientarea rizurilor de suprafață paralelă în raport cu direcția de mișcare poate avea o influență favorabilă micșorării fenomenului.

Viteza de deplasare a părții mobile a cuplei de frecare determină apariția a trei zone a variației coeficientului de frecare și anume : o zonă de alunecare intermitentă, o zonă cu vibrații și o zonă lipsită de mișcare sacadată. Condițiile de lucru influențează mărimea acestor zone. De asemenea se remarcă o influență conjugată privind deplasarea zonelor (spre valori mai mari sau mai mici de viteză) funcție de sarcină.

În cazul asperităților mici și totodată fără posibilități de formare a pungilor de ulei, apare tendința alunecării intermitente și a vibrațiilor.

Constatările arătate privind apariția celor trei zone, constituie un criteriu important pentru aprecierea calităților uleiurilor, funcție de viteza și sarcina impusă.

BIBLIOGRAFIE

1. C. C. Волосов, *Технологические и метрологические основы точности регулирования размеров в машиностроении*, Машиностроение, 1964.
2. G. Niemann, K. Ehrlenspiel, *Anlaufreibung und Stick-Slip bei Gleitpaarungen*, VDI Zeitschrift, **105**, *6*, 221—233 (1963).
3. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, Oxford at the Clarendon Press P.I. 1964 p. 105—110 și p. 248.
4. D. Pavelescu, *Main parameteres of the Wear of plane surfaces in alternating motion*, Modelling and measuring instalation 1, Rev. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., **12**, *2* (1967).
5. G. Niemann, K. Ehrlehspiel, *Relative influente of various factor in the stick-slip of metal lubric*, Ingin. **20**, *3*, 84—86 (1964).
6. E. Rabinovicz, *Stick-slip process Friction and Wear*, Elsevier Publ. Comp., 1959, pp. 157—1958.
7. D. Pavelescu, *Dependența regimului de frecare și a mișcării sacadate de principalii factori ai uzării*, St. cerc. mec. apl., **27**, *1* (1968).
8. D. Domoros, *Über Verschleierscheinungen an Werkzeugmaschinen Gleitführungen*, pp. 37—41, Industrie Altzeiger 15, 1967.
9. A. S. Tobias, *Machine tool vibration*, Edit. Blakie London, 1965, pag. 7, pag. 40—44.

MECANISMUL TRANSMITERII VIBRAȚIILOR LA SUPRAFAȚA PIESEI ÎN PROCESUL DE STRUNJIRE

de DODOC PETRE
Institutul Politehnic, „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

621.91.07

În articol se explică procesul transmiterii vibrațiilor care iau naștere în sistemul „sculă-piesă-dispozitiv de prindere a piesei-mașină unealtă" la suprafața piesei în procesul de strunjire; se prezintă o nouă metodă originală de construcție exactă a conturului piesei strunjite și se indică modul de determinare și posibilitățile de micșorare a greșelilor de prelucrare.

Cunoașterea mișcării arborilor lagăruiți în diferite tipuri de lagăre este pentru constructorii de mașini unelte și pentru tehnologi de o deosebită importanță teoretică și practică. Cercetările de pînă acum au urmărit în special să elucideze cauzele care determină deplasarea axei de rotație a arborelui de la poziția sa ideală, considerată pînă nu de mult ca fiind fixă. De-abia în ultimii ani s-au făcut încercări de a stabili influența mișcării axei arborelui principal al mașinii unelte asupra preciziei de prelucrare.

Bahmann [1], de exemplu, a cercetat influența unei mișcări armonice a piesei (sau a cuțitului) în direcția y (fig. 1) asupra preciziei de prelucrare la strunjire. Bahmann a elaborat o metodă de construcție a conturului piesei în funcție de diametrul dorit al acesteia și de parametrii vibrației armonice, obținînd cu aceasta unele rezultate interesante.

Metoda dată, fiind valabilă numai pentru un caz care nu se întîlnește în practică, nu poate fi folosită pentru construcția rapidă și exactă a conturului piesei obținut în diferite condiții de prelucrare. Pornind de la acest model simplu, Bahmann nu numai că nu a reușit să explice apariția excentricității observată la strunjirea cu turații diferite a doua suprafețe în trepte, dar a tras și concluzia greșită că în toate cazurile excentricitatea este zero. Cercetînd mai departe influența raportului dintre frecvența vibrației armonice f_e și frecvența de rotație $f_n = n/60$ asupra conturului piesei, Bahmann a ajuns la concluzia că raportul $f_e/f_n = 1$ reprezintă practic influența desechilibrării piesei și a axului principal asupra greșelii de diametru, greșelii de rotunjime și excentricității. Pentru acest caz el a stabilit că conturul este eliptic și a dedus o formulă pentru determinarea

abaterii maxime de formă (greşeala de rotunjime):

$$f_{ak} \approx \frac{A_0^2}{2r_0}, \tag{1}$$

în care A_0 este amplitudinea vibraţiei armonice, iar r_0 raza cilindrului dorit.

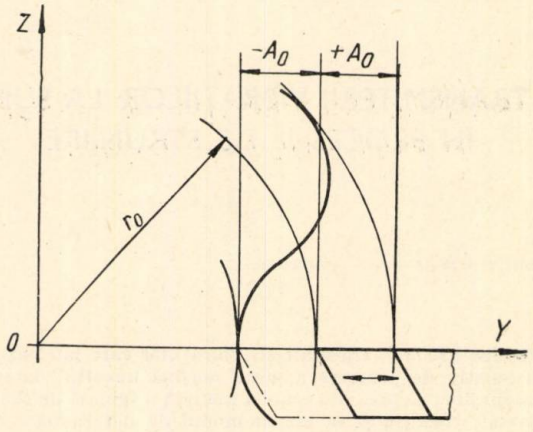


Fig. 1

La o cercetare exactă a acestui caz [2] s-a stabilit că la excitaţia prin dezechilibru greşeala de rotunjime dată de formula (1) nu există (piesa fiind rotundă în secţiunea perpendiculară pe axa de rotaţie) şi că, datorită unor cauze necunoscute lui Bahmann, conturul piesei ia naştere în alt mod.

Mecanismul transmiterii vibraţiei la suprafaţa piesei rămîne mai departe nelămurit.

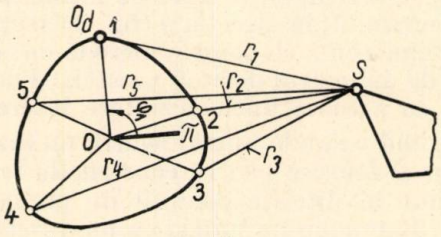


Fig. 2

Încercînd să construiască conturul piesei în secţiune normală pornind de la o traiectorie oarecare a axei de rotaţie a piesei şi neţinînd seama de cauzele care provoacă această traiectorie, Berthold [3] a elaborat o metodă extrem de simplă pentru construirea conturului piesei.

El consideră traiectoria axei de rotaţie a piesei ca fiind dată (fig. 2). Pe aceasta se alege un număr de puncte 1, 2, 3, ... care ar reprezenta poziţii momentane ale axei de rotaţie a piesei (O_d). Într-o poziţie momentană,

de exemplu 1, piesa este rotită cu unghiul φ_1 — măsurat de la un plan de referință oarecare π — și are raza vectoare $r_1 = \overline{1S}$, S reprezentînd vîrful sculei. Orice punct al conturului piesei este determinat de raza vectoare r_i măsurată de la punctul i și unghiul corespunzător φ_i.

Folosind această metodă pentru determinarea conturului piesei în cazul cînd traiectoria axei de rotație a piesei este un cerc de rază A_n, A_n reprezentînd amplitudinea vibrației forțate produsă de forța centrifugă (adică de turație și de dezechilibrarea dinamică), se găsește conturul piesei reprezentat în figura (3). Rezultă așadar o greșeală de rotunjime determinată de mărimea A_n, adică de turație și de dezechilibru (pentru o mașină dată).

Deoarece în practică există întotdeauna și o astfel de traiectorie, ar însemna că nu se poate obține niciodată o piesă rotundă, ceea ce este de-a dreptul fals.

Neajunsul acestei metode constă în aceea că nu ține seama de cauzele care provoacă mișcarea axei de rotație a piesei și nici de legile acestei mișcări. Acest fapt conduce atît la obținerea unor contururi foarte deformate cît și la concluzii extrem de dăunătoare pentru teorie și practică. Din motivele menționate, metoda nu poate fi folosită.

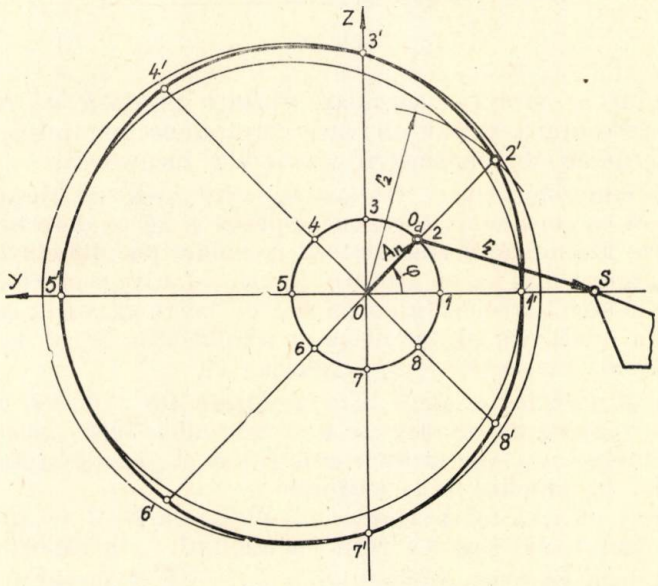


Fig. 3

Efectuînd cercetări teoretice și experimentale asupra mișcării axei de rotație a piesei în diferite situații practice autorul a reușit să stabilească atît cauzele cît și legile acestei mișcări [2] [4] [5]. Astfel s-a demonstrat pentru prima dată în primăvara anului 1965 că, în timp ce piesa se rotește o dată în jurul axei sale de rotație, axa la rîndul său descrie o traiectorie determinată de deformațiile statice și dinamice ale sistemului „sculă-piesă-dispozitiv de prindere a piesei-mașină unealtă", traiectorie care a

fost numită „trocoidă de vibrații" și care influențează în mod hotărîtor precizia piesei strunjite la turații înalte.

Figura (4) arată că, independent de traiectoria (T) a axei reale de rotație a piesei O_d, cauzată de exemplu de vibrațiile cu amplitudinile A_n, A_{E1}, A_{E2}, A_{E3}, ... și cu frecvențele $f_n = n/60$, f_{E1}, f_{E2}, f_{E3}, ..., piesa P se rotește în același sens și cu aceeași frecvență de rotație ca vectorul

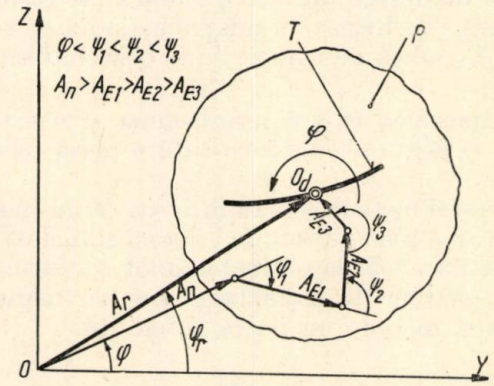


Fig. 4

amplitudine A_n al vibrației circulare forțate produsă de forța centrifugă și că vectorului rezultant A_r nu-i corespunde unghiul φ, ci unghiul $\varphi_r \neq \varphi$, determinat de parametrii vibrațiilor menționate.

Numai cunoscînd exact traiectoria axei reale de rotație a piesei este posibil să se construiască conturul piesei și să se determine greșelile de prelucrare. Mecanismul transmiterii trocoidei de vibrații la suprafața piesei va fi lămurit mai jos cu ajutorul figurii (5), care reprezintă, de exemplu, o parte a unei astroide (hipocicloidă cu patru ramuri), rezultată din compunerea a două vibrații circulare de amplitudini A_n și A_E și de frecvențe $f_n = n/60$, respectiv $f_E > f_n$ (curba T).

În lungul axei Oy se alege raza nominală $\overline{OS}$ a piesei, unde O reprezintă axa virtuală de rotație, iar S vîrful sculei. Într-o poziție momentană, de exemplu, φ_3 a vectorului amplitudine A_{n3} axa de rotație a piesei O_d se va afla în punctul 3 al astroidei.

În raport cu axa sa de rotație (3) piesa s-a rotit cu unghiul φ_3 în timp ce, la rîndul său, axa s-a rotit cu unghiul χ_3 în raport cu vîrful S al cuțitului. Raza vectoare a piesei va fi $\rho_{w3} = \overline{3S}$. Punctul 3′ al conturului piesei corespunzător poziției momentane 3 a axei este determinat exact de raza momentană ρ_{w3} și de unghiul $\sigma_3 = \varphi_3 + \chi_3$, măsurat în jurul punctului O sau în jurul oricărui alt punct, de exemplu O_d, de la o dreaptă de referință oarecare, de exemplu Oy. În felul acesta se poate determina fără greutate orice punct al conturului piesei.

Conturul piesei poate fi construit însă și mai rapid dacă se procedează în felul următor:

Se construiește traiectoria T a axei de rotație a piesei sau se folosește oscilograma corespunzătoare, trasînd pe aceasta elementele care

determină cîteva poziții momentane ale axei de rotație (vezi fig. 5). Apoi se trasează pe o hîrtie de calc, care ar reprezenta piesa, axa Oy pe care se marchează punctul O_d.

După aceea se suprapune în mod succesiv punctul O_d cu fiecare punct *0*, *1*, *2*, *3*, ... al traiectoriei axei de rotație a piesei, rotind în același timp hîrtia de calc, adică piesa, pînă ce axa Oy devine paralelă cu vectorii

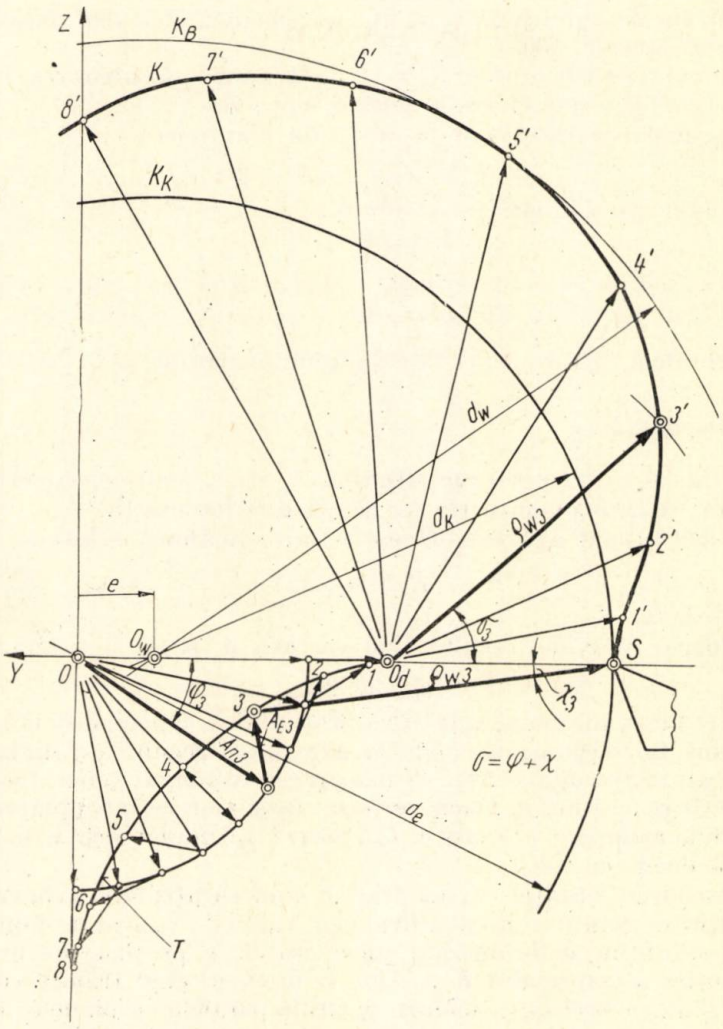


Fig. 5

corespunzători A_{n1}, A_{n2}, A_{n3}, ... Pentru fiecare poziție *0*, *1*, *2*, *3*, ... se marchează (se copiază) pe hîrtia de calc punctul *S*, obținînd punctele *0'*, *1'*, *2'*, *3'*, ... Unind punctele *0'*, *1'*, *2'*, *3'*, ... de pe hîrtia de calc se obține curba *K*, curbă care reprezintă conturul piesei în secțiune normală.

Trasînd cercul K_B de diametru minim $d_B = d_w$, tangent exterio la curba K şi cercul K_k de diametru maxim d_k, concentric cu K_B şi tangent interior conturului K, se observă că diferenţa

$$R_F = \frac{1}{2}(d_B - d_K) = 2A_E \tag{2}$$

reprezintă eroarea de formă, greşeala de rotunjime sau abaterea de la forma rotundă provocată de vibraţia de amplitudine A_E.

Vibraţia de amplitudine A_n nu influenţează conturul piesei aşa cum afirmă unii autori [3].

Greşeala de rotunjime R_F este dată numai de abaterea traiectoriei axei de rotaţie a piesei de la forma circulară.

Mai departe rezultă o greşeală de diametru:

$$R_D = d_w - 2\overline{OS} = 2A_E \tag{3}$$

şi o excentricitate dinamică absolută:

$$e = \overline{OO_w} = A_E, \tag{4}$$

care reprezintă eroarea de poziţie a suprafeţei prelucrate (conturul K) în raport cu suprafaţa de fixare în dispozitivul de prindere.

Formulele (2) (3) şi (4) sînt valabile pentru $m_f \geqq 2$. $\left(m_f = \frac{f_E}{f_n}\right.$ — raportul frecvenţelor$\left.\right)$

În figura (5) vectorii amplitudine A_n şi A_E s-au considerat în fază. Dacă faza variază punctul O_w va ocupa diferite poziţii.

În acest mod apare o excentricitate dinamică relativă

$$e_i^* = \overline{O_{w1}O_{wi}} \tag{5}$$

unde $i = 2, 3, 4, \ldots$

Valoarea maximă rezultă cînd vectorii A_n şi A_E sînt defazaţi cu π:

$$e_{\max}^* = 2A_E. \tag{6}$$

Acest lucru înseamnă o rotire a profilului K şi deci, deşi la măsurarea diametrului în secţiune normală la axa piesei rezultă un diametru mai mare cu cantitatea $R_D = 2A_E$, la măsurarea în lungul generatoarelor diametrul va fi şi mai mare. Dacă variaţia fazei se face întîmplător, valorile diametrului, respectiv ale erorii R_D, vor fi întîmplătoare şi în orice caz mai mare decît cu $2A_E$.

O astfel de situaţie există practic cînd turaţia sau avansul variază (fără a intra în detalii se poate afirma că, variind avansul în scopul ruperii şpanului, se obţine o înrăutăţire considerabilă a preciziei de prelucrare).

O rotire a conturului K are loc şi în cazul cînd traiectoria vîrfului cuţitului şi axa piesei nu-şi menţin poziţiile paralele cu planele *xoy* şi *xoz*. Rotirea conturului K, care apare mai ales cînd raportul frecvenţelor nu este întreg, înseamnă apariţia rugozităţii de vibraţii. Această problemă va fi tratată într-un alt articol. Dacă se construieşte conturul piesei pentru diferite traiectorii ale axei de rotaţie a piesei se constată că în toate cazurile, indiferent de faptul dacă traiectoria axei de rotaţie a piesei este hipotrocoidă, epitrocoidă sau circular-translatorică, numărul de maxime al traiectoriei de vibraţii nu se transmite direct la suprafaţa piesei, ci

un maxim mai puțin pentru traiectorii hipotrocoide și circular-translatorice și un maxim mai mult pentru traiectorii epitrocoide.

Numărul de maxime al conturului piesei este întotdeauna determinat de raportul frecvențelor vibrațiilor :

$$m_f = n_E + 1 = \frac{f_E}{f_n} \text{ pentru traiectorii epitrocoide,}$$
$$m_f = n_H - 1 = \frac{f_E}{f_n} \text{ pentru traiectorii hipotrocoide} \qquad (7)$$
$$\text{și circular-translatorice.}$$

În formulele (7) n_E și n_H reprezintă numărul de maxime ale traiectoriei axei de rotație a piesei.

Figurile (6) și (7) arată contururile piesei construite cu metoda elaborată de autor și traiectoriile axei de rotație pentru cazul cînd aceasta

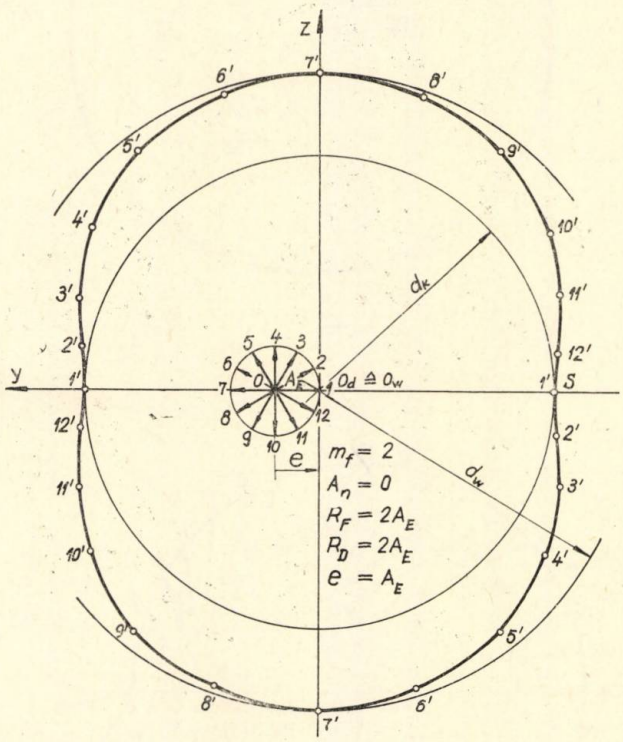


Fig. 6

din urmă este determinată numai de vibrația proprie principală (A_E, $f_E = 2f_n$).

Figura (8) dovedește că vibrația forțată (A_n, f_n) nu are influență asupra conturului piesei, respectiv asupra greșelii de rotunjime.

Peste o mie de probe strunjite la excitații, ca dezechilibrarea dinamică, autoexcitații, excitații prin șoc și excitații armonice exterioare, au confirmat fără excepție rezultatele obținute cu metoda arătată.

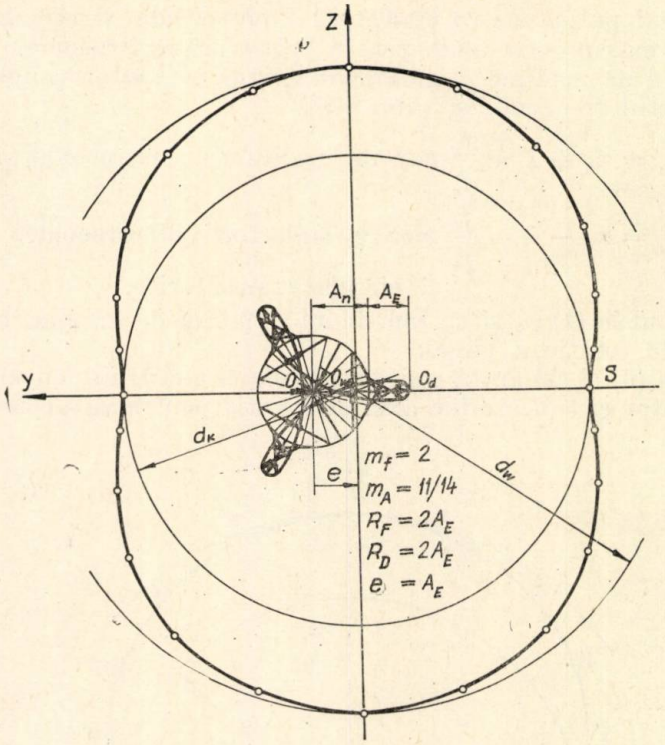

Z
y
S
A_n
A_E
0
0_w
0_d
d_K
d_w
e
$m_f = 2$
$m_A = 11/14$
$R_F = 2A_E$
$R_D = 2A_E$
$e = A_E$

Fig. 7

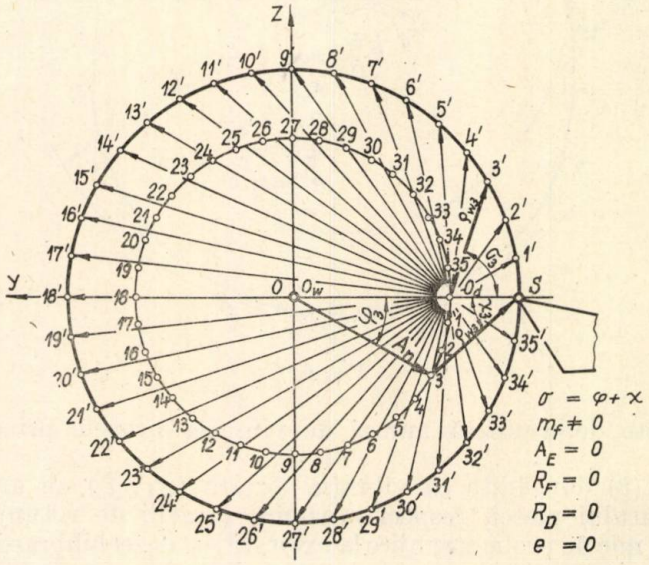

Z
y
S
0
0_w
A_n
$\sigma = \varphi + \chi$
$m_f \neq 0$
$A_E = 0$
$R_F = 0$
$R_D = 0$
$e = 0$

Fig. 8

Figura (9) arată, de exemplu, traiectoriile reale ale axei de rotație a piesei și contururile corespunzătoare la excitația prin dezechilibru subcritic pentru $m_f = 3$, 4 și 5 și $f_E = 124$ Hz.

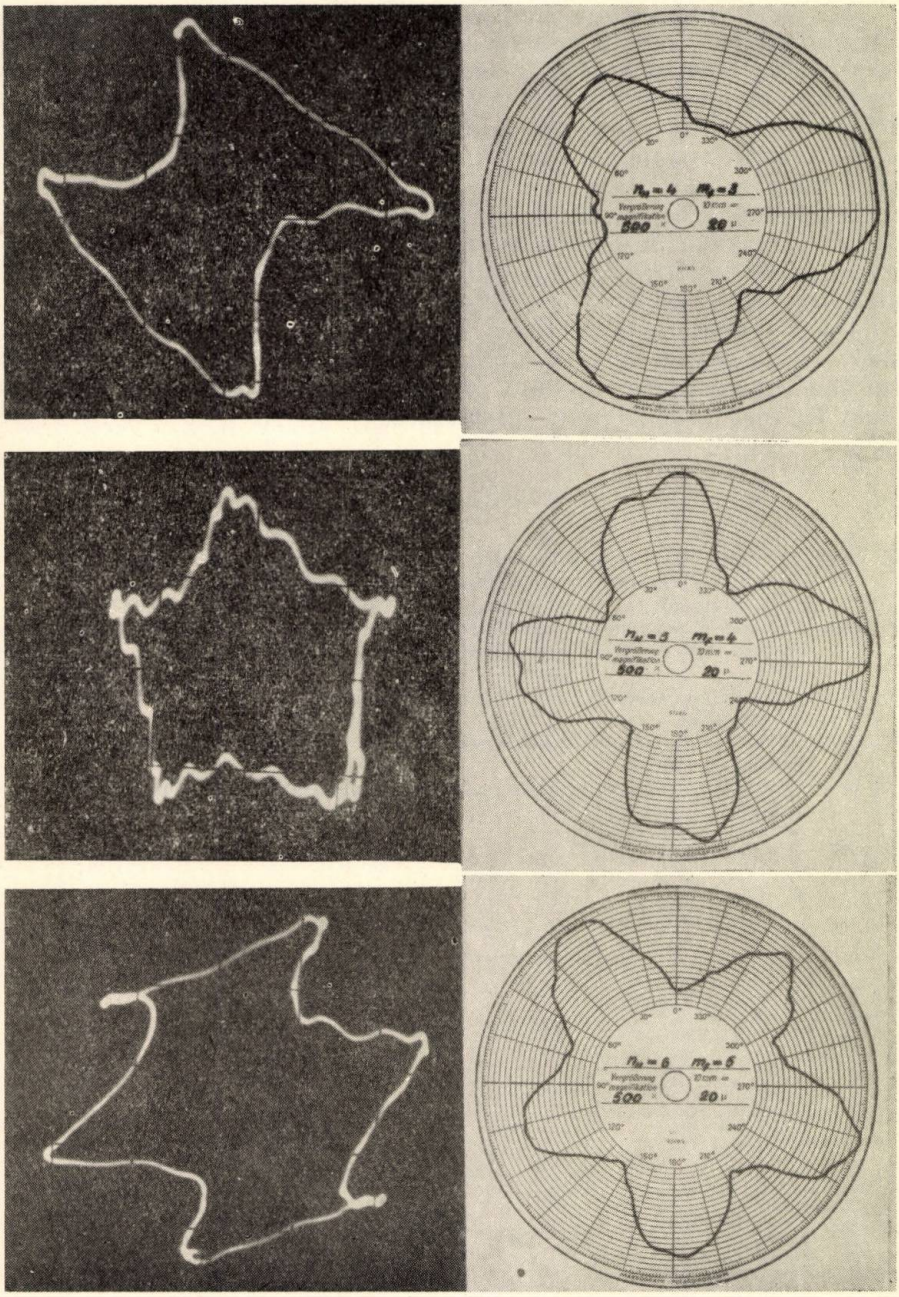


Fig. 9

Deoarece amplitudinea A_E creşte cu lungimea piesei în consolă greşelile de prelucrare vor creşte şi ele. La capătul liber al piesei ele vor fi maxime. Piesa avînd o formă de paraboloid rezultă o greşeală de cilindricitate Z_F la prelucrarea unei singure suprafeţe.

Ar fi încă de menţionat faptul că, datorită numărului de maxime al conturului piesei — contur care teoretic reprezintă o trocoidă scurtată — şi a variaţiei înălţimii acestor maxime (vezi [5]), măsurarea exactă a diametrului piesei devine o problemă extrem de dificilă. Datorită traiectoriei axei de rotaţie a piesei unghiul de degajare γ variază în timpul unei rotaţii a piesei, fapt de care trebuie să se ţină seama la strunjirea profilelor şi filetelor.

Metoda descrisă permite determinarea rapidă şi exactă a conturului piesei şi a greşelilor de prelucrare datorită vibraţiilor cînd sînt date două sau mai multe vibraţii circulare eliptice sau translatorice cu orice amplitudini, frecvenţe, direcţii de vibrare, sau diferenţe de fază.

Dacă traiectoria axei piesei este dată sub formă de oscilogramă atunci metoda poate servi la analiza mişcărilor vibratorii componente, permiţînd determinarea rapidă a greşelilor de prelucrare fără ca acestea să mai fie măsurate la probe prelucrate.

BIBLIOGRAFIE

1. W. Bahmann, *Der Einfluß einer harmonischen Relativbewegung zwischen Werkstück und Werkzeug auf Kreisformfehler, Exzentrizität und Durchmesserabweigung des Werkstückes beim Längsdrehen*, Maschinenbautechnik 10 (1961), Heft 5, p. 257—263.
2. P. Dodoc, *Ursachen der dynamischen Verlagerung der Werkstückdrehachse und ihre Auswirkungen auf die Herstellungsgenauigkeit beim Drehen*, Disertaţie, T U Dresden, 1967.
3. H. Berthold, *Haladó módszerek a preciziós szerszámgépek tervezésében*, G É P Nr. 6/1965, p. 209—218.
4. P. Dodoc, *Trocoide de vibraţii la axele principale ale maşinilor unelte* (I), Construcţia de maşini, *2* (1968).
5. — *Trocoide de vibraţii la axele principale ale maşinilor unelte* (II), Construcţia de maşini, *3* (1968).

PREOCUPĂRI ŞI APLICAŢII ALE STUDIILOR DE FRECARE ŞI UZARE

de IVAN ILIUC
Centrul de mecanică a solidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

539.6 : 621

Sînt trecute în revistă o serie de probleme actuale ale cercetărilor şi aplicaţiilor în domeniul frecării şi uzării. După ce se discută principalele trăsături ale procesului de frecare şi uzare, se arată că separarea suprafeţelor cuplei se poate face cu ajutorul unui fluid sau al unui solid. Sînt scoase în evidenţă posibilităţile de realizare a stratului solid protector, prin reacţie, înainte sau în timpul funcţionării, precum şi folosirea lubrifianţilor solizi. Pentru a sublinia cîmpul vast de aplicaţie a studiilor de frecare şi uzare, exemplele sînt alese în special din domenii mai puţin cunoscute.

Introducere. Datorită complexităţii procesului de frecare, anumite elemente prezentate în referate precedente, şi totodată pentru a nu repeta, vom aborda numai unele aspecte ale acestuia, pe care le considerăm importante, astfel încît să putem asigura continuitatea expunerii şi de asemenea să fundamentăm diverse aplicaţii practice.

În prima parte, vom face totuşi apel, succint, la anumite elemente de bază ale frecării (legile frecării, contactul între suprafeţe, efectul deplasării, uzarea suprafeţelor şi lubrificaţia limită) care vor înlesni, terminologic şi fenomenologic, restul expunerii.

Dacă se presupune că suprafeţele în contact ale cuplei de frecare sînt „curate" şi suficient de netede, atunci s-a admis că forţa de frecare nu depinde de mărimea suprafeţelor în contact, este direct proporţională cu sarcina şi nu depinde de viteza de alunecare.

În această situaţie coeficientul de frecare rezultă a fi o mărime constantă, care nu depinde decît de materialele cuplei de frecare. În realitate se constată că există un interval foarte larg, în care se situează valorile coeficientului de frecare pentru două materiale date. Principala cauză a acestei situaţii se dovedeşte a fi insuficienta precizare a noţiunii de suprafeţe „curate". Astfel, după cum se va vedea mai jos, este suficient ca pe suprafeţe să existe un strat monomolecular de substanţă, diferită de cel al corpului suport, pentru ca coeficientul de frecare să fie puternic influenţat.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 5, 1968, P. 1101–1110

În valoare absolută cantitatea de substanţă necesară pentru a acoperi 1 cm^2 de suprafaţă este extrem de mică; de exemplu pentru a acoperi 1 cm^2 de suprafaţă presupusă netedă, cu un strat monomolecular de oxigen adsorbit, sînt suficiente aprox. 10^{15} molecule, adică $5{,}910^{-8}$ g.

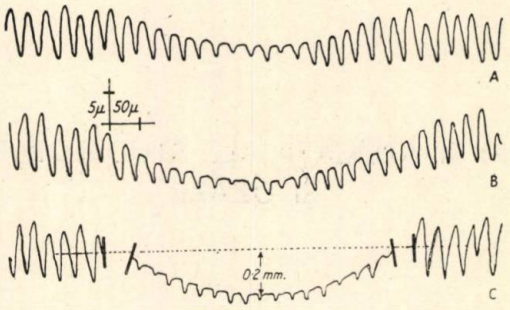


Fig. 1. — Profilograme ale unei suprafeţe de cupru presată cu un cilindru de oţel dur: A — sarcina cea mai mică; C — sarcina cea mai mare [1].

Contatcul între suprafeţe. În cazul unei cuple de frecare reale s-a putut pune în evidenţă că suprafaţa reală de contact este mult mai mică decît suprafaţa aparentă de contact; pentru un material dat aria de contact este dependentă de sarcină. În cazul deplasării uneia dintre suprafeţe, temperatura poate atinge local valori mari.

Dat fiind faptul că suprafeţele prelucrate cel mai fin prezintă denivelări cuprinse între 100—1000 Å, iar suprafeţele tehnice, denivelări mult mai mari, şi că linia medie a asperităţilor prezintă de asemenea denivelări, contactul între două suprafeţe se poate realiza în cel mult trei zone. În interiorul acestor trei zone asperităţile se vor deforma (elastic şi plastic), presiunea reală atingînd limita de curgere a materialului; straturile imediat inferioare de asemenea vor fi deformate iniţial elastic iar la creşterea sarcinii va apare şi deformaţia plastică [1]. În figura 1 sînt reprezentate profilogramele obţinute în cazul presării unui cilindru de oţel pe o placă de cupru, la trei sarcini diferite.

Este posibilă şi o altă situaţie şi anume aceea în care nivelarea după profilul corpului mai dur să se producă prin deformarea elastică a straturilor inferioare. În figura 2 este reprezentată amprenta obţinută prin presarea unui stift pe o placă (ambele din oţel) cu o sarcină aparentă de 10898 kg/cm^2, [2]. O anumită proporţionalitate între sarcină şi suprafaţa reală de contact a putut fi pusă în evidenţă şi prin măsurători asupra rezistenţei electrice de contact [1].

Distanţa foarte redusă între „suprafeţe" în zonele de contact face posibilă intervenţia forţelor moleculare. Apare aderenţa şi difuzia de material.

Efectul deplasării. Dacă una din suprafeţe se deplasează se produce deformarea elastică şi plastică a asperităţilor, formarea punctelor de aderenţă şi desprinderea lor. Energia degajată în zonele de contact de-

Fig. 2. — Amprenta rezultată prin presarea unui stift pe o placă, ambele din oţel la sarcina de 10898 kg/cm² [2].

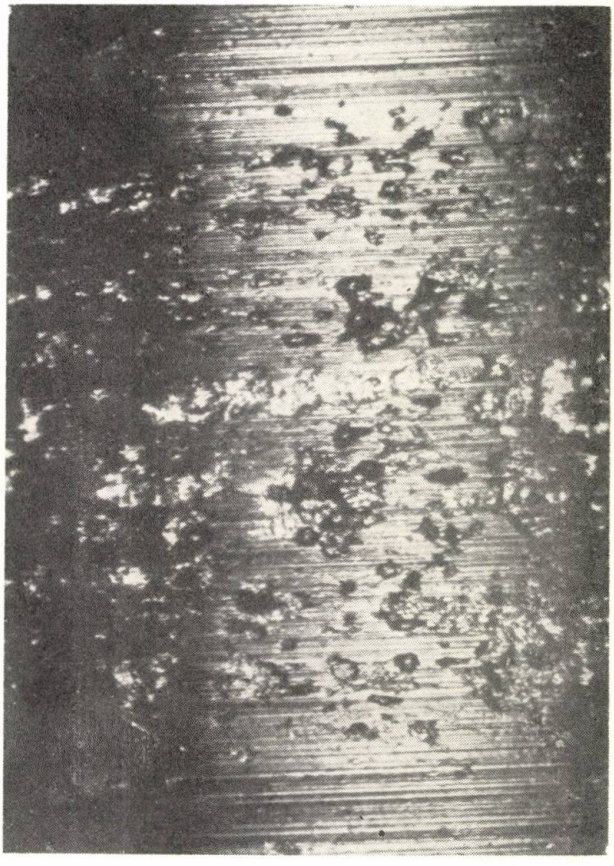


Fig. 3. — Suprafaţa de bronz deteriorată prin uzare adezivă la sarcină mare [5].

termină apariţia unor vîrfuri de temperatură; temperatura ridicată şi solicitările mecanice intense vor stimula procesele de desorbţie-adsorbţie, reacţiile chimice, difuzia şi transformările de structură.

Dacă se consideră suprafeţele suficient de „netede", astfel încît deplasarea să producă numai forfecarea joncţiunilor, atunci coeficientul de frecare poate fi pus şi sub forma cunoscută

$$\mu = \frac{\tau_r}{\tau_c},$$

unde τ_r — rezistenţa la forfecare a joncţiunii;

τ_c — limita de curgere a materialului de bază.

Cu toată simplicitatea ei, relaţia nu poate fi folosită la calculul concret al coeficientului de frecare deoarece, pe de o parte este foarte dificil de a obţine suprafeţe complet curate, iar pe de altă parte rezistenţa la forfecare şi limita de curgere pentru straturile superficiale este diferită de valorile determinate pentru volume mari de material.

Un efect cunoscut, care modifică proprietăţile mecanice ale stratului superficial de metal, este ecruisarea locală; în acest mod se explică şi prezenţa asperităţilor în amprenta de contact la sarcină mare din figura 1.

Cu toate acestea relaţia menţionată indică modul în care unele materiale cu rezistenţă la forfecare mică pot reduce frecarea dacă sînt aplicate în strat subţire pe un suport cu limită de curgere ridicată; τ_r va scădea fără ca τ_c să crească corespunzător.

Uzarea suprafeţelor. Principalele efecte ale deplasării relative ale suprafeţelor în contact, din punct de vedere al folosirii cuplelor de frecare, este uzarea şi consumul de energie. După unii autori, definiţia uzării, avînd în vedere efectele ei, este:

„Procesul de frecare însoţit de desprinderea de material din suprafeţele în contact şi modificarea stării iniţiale a acestora" [3].

Dacă se adoptă drept criteriu de clasificare mecanismul procesului de uzare, se obţine următoarea clasificare, admisă în multe lucrări: uzarea adezivă, uzarea abrazivă, uzarea corozivă şi uzarea de oboseală.

Cu toate că au fost efectuate numeroase studii, pînă în prezent nu s-a reuşit să fie elucidate toate aspectele procesului de uzare şi de formare a particulei de uzură. Dificultăţile investigaţiei sînt determinate de scara la care are loc procesul şi de faptul că acesta nu este accesibil în momentul desfăşurării.

Totuşi, unele trăsături generale, care au permis şi clasificarea de mai sus, au putut fi puse în evidenţă. Astfel, de exemplu, uzarea adezivă va apare dacă suprafeţele în frecare ajung în contact direct. În funcţie de duritatea relativă a elementelor cuplei şi de rezistenţa joncţiunii, desprinderea are loc din profunzimea suprafeţei mai moi, sau la suprafaţa acesteia [1]. În figura 3 se poate vedea suprafaţa de bronz a unei cuple bronz-oţel deteriorată prin uzare de adeziune [5]. Particulele desprinse din suprafaţa de bronz rămîn aderente la suprafaţa de oţel pînă se desprind formînd particula independentă de uzură. Desprinderea poate avea loc împreună cu un fragment din suprafaţa de oţel. Intensitatea uzării de adeziune

depinde în primul rînd de rezistenţa joncţiunii. Rezistenţa joncţiunii, în cazul metalelor, poate fi determinată de solubilitatea în fază solidă a elementelor cuplei de frecare, de posibilitatea de formare a unor compuşi definiţi sau de alte proprietăţi metalurgice.

Pe baza acestor proprietăţi se pot stabili criterii de alegere a elementelor cuplei de frecare care să conducă la o uzare de adeziune minimă [6]. Acest tip de uzare ce poate apare atît în cuplele nelubrifiate, cît şi cele lubrifiate, este deosebit de distructiv.

Se poate afirma că tocmai dificultăţile întîmpinate în studiul mecanismului de uzare a îndreptat efortul de cercetare în special spre studiul fenomenologic al procesului. În general, s-au putut pune în evidenţă parametrii determinanţi şi stabili, importanţa fiecăruia, folosind diferite instalaţii de modelare; totuşi, rezultatele obţinute cu o instalaţie sînt dificil de regăsit cantitativ cu altă instalaţie. Una din cauzele acestei situaţii este împrăştierea mare a valorilor uzurii (sau a vitezei de uzare). Se pare că aceasta este o trăsătură specifică a procesului de uzare, care impune efectuarea unor medii pe intervale mari de timp [7]. Deşi cu anumite limitări, ca metodă pentru studiul uzării, s-a dovedit deosebit de eficace matoda trasorilor radioactivi, caracterizată prin sensibilitate şi posibilitate de urmărire continuă a procesului [8], [9].

Reducerea uzării şi frecării prin separarea suprafeţelor. Un mare volum de cercetări îşi propun ca scop final reducerea intensităţii uzării, sau şi a coeficientului de frecare (cu excepţia cazurilor cînd se urmăreşte de exemplu un coeficient de frecare ridicat). Este clar că, indiferent de mecanismul procesului de uzare, *acest deziderat se poate realiza separînd suprafeţele cuplului de frecare* cu ajutorul unui fluid sau al unui solid care să poată transmite sarcina şi să posede o rezistenţă la forfecare cît mai mică.

Dacă se foloseşte un fluid, atunci presiunea necesară preluării sarcinii se realizează hidrodinamic (sau hidrostatic). Desigur, lubrificaţia hidrodinamică este cea mai eficace, ea fiind caracterizată, în cazul ideal, prin absenţa uzării şi printr-un coeficient de frecare redus. Teoria hidrodinamică a lubrificaţiei a fost dezvoltată pentru o mare varietate de forme de cuple de frecare şi condiţii de lucru [10], [11]. Datorită calităţilor ei, ungerea hidrodinamică este folosită ori de cîte ori este posibil. În celelalte cazuri se folosesc pentru separarea surpafeţelor în frecare straturi solide*) aderente cu proprietăţi lubrifiante.

Protejarea suprafeţelor cu un strat solid aderent este utilizată uneori şi în condiţiile ungerii hidrodinamice deoarece este posibil să nu se poată asigura filmul de lubrifiant corespunzător în toate etapele procesului de frecare. Existenţa regimului de ungere limită este inerentă funcţionării cuplelor de frecare lubrifiate datorită pornirilor, opririlor şi a suprasolicitărilor.

Facem apel la o diagramă cunoscută [1] pentru a exemplifica că sub o anumită viteză, sau peste o anumită sarcină, se trece în regimul mixt iar apoi în regim limită. Ungerea limită, spre desoebire de cea fluidă, se caracterizează printr-un coeficient de frecare mai ridicat şi existenţa

*) În această categorie sînt incluşi atît lubrifianţii solizi cît şi straturile formate prin reacţie chimică.

uzării. Se pare totuşi că uzarea, în cazul ungerii limită (pure, fără abraziune etc.), este datorată străpungerii stratului de lubrifiant limită şi realizării contactului direct între suprafeţe.

Ţinînd seama de cele de mai sus, în cazul optim, o cuplă de frecare ar trebui să îndeplinească integral următoarele condiţii :

— compatibilitatea (neaderenţa) suprafeţelor ;
— prezenţa unui strat limită ;
— ungere hidrodinamică.

Din păcate, în funcţionarea maşinilor, aceste condiţii nu pot fi îndeplinite totdeauna simultan.

Lubrifiacţia limită. Nu vom sublinia decît unele aspecte ce privesc clasificarea lubrifianţilor, formarea şi comportarea stratului-limită.

Lubrifianţii limită se pot clasifica după mai multe criterii. Astfel, după modul de realizare a stratului :

— cu ajutorul unor substanţe active din lubrifiant (aditivi) ;
— formarea prealabilă prin reacţie chimică ;
— depunere pe suprafaţa de frecare prin diverse procedee (topire, evaporare etc.).

Prima metodă are avantajul că permite regenerarea stratului chiar în timpul procesului de uzare ; procedeul necesită prezenţa unui lichid de transport, respectiv prezenţa lubrifiantului, condiţie care nu poate fi îndeplinită totdeauna.

Un alt criteriu de clasificare al lubrifianţilor limită, formaţi cu participarea suprafeţlor cuplei de frecare, este mecanismul de formare : adsorbţie fizică, chemosorbţie, reacţie chimică.

Straturile formate prin cele trei mecanisme se deosebesc prin grosime şi prin stabilitate. Spre deosebire de adsorbţie şi chemosorbţie, care conduc la straturi monomoleculare sau polimoleculare, prin reacţia chimică se formează straturi mai groase.

Această clasificare reprezintă într-o oarecare măsură o idealizare deoarece, în cazul real, la formarea stratului pot fi implicare simultan două procese, de exemplu, chemosorbţia urmată de reacţia chimică.

În sfîrşit, temperatura de topire, sau de desorbţie, constituie un alt criteriu de clasificare important, deoarece, peste această temperatură, stratul încetează să mai fie eficace. În cazul straturilor formate prin adsorbţie, temperatura este relativ joasă, faţă de straturile formate prin reacţie. În ultimul caz, în general, temperatura de topire este cea mai coborîtă în cazul sărurilor şi maximă în cazul oxizilor.

Stratul de oxid, fără să fie un lubrifiant limită în sensul curent, nu lipseşte din nici o cuplă de frecare metalică în condiţiile prezenţei atmosferei. De asemenea, el intervine în mecanismul de formare al celorlalte straturi-limită, sau asigură eficacitatea altor straturi.

Cel mai răspîndit mod de formare a stratului-limită este folosirea substanţelor active (aditivi) în lubrifiant. În afară de formarea de straturi de protecţie a suprafeţei, aditivii se folosesc şi pentru îmbunătăţirea altor proprietăţi de exploatare ale lubrifianţilor (aditivi anticorozivi, antioxidanţi detergenţi etc.). O condiţie pentru folosirea unei substanţe active, ca aditiv pentru ameliorarea procesului de frecare şi uzare, este ca aceasta să nu înrăutăţească alte proprietăţi ale lubrifiantului, de exemplu corozivitatea.

În condițiile specifice procesului de frecare și uzare, existența stratului format cu ajutorul aditivilor va fi determinată de viteza procesului de formare și de viteza procesului de uzare. În cazul reacției chimice, viteza de formare depinde de reactivitatea aditivului în raport cu metalul, de concentrația reactanților și de temperatură (locală). Reactivitatea aditivului față de metalul cuplei de frecare este o condiție necesară pentru formarea stratului de lubrifiant limită și eficacitatea aditivului respectiv. Procesul de uzare, în aceste condiții, va depinde de sarcina și de viteza de alunecare.

Deoarece s-a constatat că mecanismul de acțiune al aditivilor este mult mai complicat decît un proces de absorbție, sau de reacție chimică, cu metodele de care se dispune, se pot studia numai aspectele calitative ale procesului. Pentru elucidarea mecanismului de acțiune al substanțelor active în procesul de frecare au fost folosite, printre altele, și metode deosebit de sensibile (metoda trasorilor radioactivi sau metode fizice moderne de analiză).

În cazul acizilor grași, folosiți ca aditivi, s-a demonstrat importanța reactivității suprafeței suport a oxigenului și apei în formarea și rezistența stratului protector de săpun. În acest scop s-a folosit, de exemplu, acid stearic marcat cu C^{14}: $CH_3-(CH_2)_{16}$ COOH [12], [13]. Stratul de stearat pe suprafețele reactive a fost pus în evidență și prin difracție electronică.

Mecanismul de acțiune a aditivilor de extremă presiune. De această problemă ne vom ocupa mai mult în lucrarea de față. Mecanismul de acțiune al aditivilor cu sulf, fosfor sau clor, este mai puțin cunoscut. Și în acest caz, prin folosirea unor compuși marcați cu S^{32} sau P^{35}, s-a putut pune în evidență prezența elementelor active, sulf și fosfor pe suprafețele metalice. Dacă și în acest caz reactivitatea metalului în raport cu aditivul este o condiție necesară, totuși reactivitatea cea mai mare nu implică și eficacitatea maximă a acestuia. De exemplu, în cazul folosirii soluțiilor de sulf, sau a unor compuși organici ai sulfului (de exemplu disulfură de benzil-DDB) în hidrocarburi, pe suprafețele de oțel se formează sulfura de fier. Cantitatea de sulfură de fier la echilibru (limita către care tinde cantitatea de sulfură după un timp de funcționare suficient) este mai mare în cazul soluțiilor de sulf decît în cazul soluțiilor de DDB. Reactivitatea sulfului este mai mare decît a compusului organic. Totuși, viteza de uzare a stratului de sulfură de fier este mai mare pentru sulf decît pentru DDB, datorită, probabil, formării unui strat chemosorbit de DDB pe stratul de sulfură de fier [15]. Se constată deci că reactivitatea nu este singura condiție pentru eficacitatea unui aditiv.

S-a considerat totuși că, folosirea directă a compușilor marcați poate conduce la concluzii eronate în ceea ce privește compusul format la suprafață deoarece, suprafața supusă acțiunii aditivului, poate reține chiar cantități oarecari de aditiv. Prin folosirea metodelor fizice de analiză, ca fluorescență de raze X și difracție de electroni [16], [17], unii autori au determinat compoziția materialului „urmei de uzură" și particulei de uzură. S-a putut astfel face o distincție între adsorbție și reacția chimică. Dacă compoziția procentuală a principalelor elemente în materialul desprins de pe urma de uzură este aceeași ca în aditiv, atunci este vorba de adsorbție, iar dacă este diferită, atunci este vorba de reacție chimică. S-a

constatat că în majoritatea cazurilor cînd se folosesc aditivi cu S, P, Cl este vorba de o reacţie chimică. În acelaşi timp însă, aditivul, datorită condiţiilor din zona de frecare, suferă şi alte transformări chimice, astfel că pe urma de uzare pot apărea şi elemente din aditiv care nu reacţionează cu metalul; de exemplu zincul din ditiofosfatul de zinc [16]. S-a putut demonstra, de asemenea, că şi în cazul aditivilor cu sulf, este necesară prezenţa oxigenului. Pentru a fi eficace, sulfura de fier trebuie să fie în prezenţa oxidului feric [17].

În cazul aditivilor cu fosfor, de exemplu, în cazul tricrezilfosfatului, şi a suprafeţelor de oţel, stratul protector format este fie eutecticul fosforos, sau mai probabil fosfatul de fier format prin reacţia acidului fosforic cu suprafaţa metalică; acidul fosforic ia naştere prin descompunerea limitată a tricrezilfosfatului [18].

Constatarea că unii aditivi cu moleculă complexă suferă prin încălzire o serie de reacţii, al căror produs final poate fi un compus solid cu proprietăţi de frecare bune, a condus la ideea folosirii condiţiilor deosebite din zona de contact în scopul iniţierii unor astfel de reacţii. În acest scop au fost încercaţi, diferiţi compuşi complexi care prin încălzire pot conduce la produşi solizi de polimerizare, formaţi numai pe suprafeţele de frecare. A fost încercată de asemenea şi o combinaţie complexă a molibdenului în prezenţa dialchilditiofosfatului (ca donator de sulf) combinaţie care a condus la formarea pe suprafaţa metalică a sulfurii de molibden înglobată într-un strat de polimer [19]. Eficacitatea acestor aditivi s-a demonstrat cu maşina cu patru bile.

Ideea folosirii unor aditivi a căror acţiune să nu necesite intervenţia chimică directă a suprafeţei metalice, deci într-un anumit fel corodarea ei, aditivi care să refacă în permanenţă stratul de lubrifiant solid de pe suprafeţele în frecare, este deosebit de atrăgătoare. În mod ideal acştia aditivi ar trebui să asigure protecţia completă a suprafeţei metalice.

Pentru aprecierea calităţii de exploatare (globale) al unui lubrifiant sau aditiv se foloseşte frecvent temperatura critică, sau sarcina de gripare. Ambele mărimi sînt determinate de mai mulţi factori printre care condiţiile de lubrifiere a cuplei folosite şi temperatura în zona de frecare.

Vom sublinia în continuare şi cîteva aplicaţii de dată relativ mai recentă. Un caz special de frecare, în care se întîlnesc presiuni şi eventual temperaturi mari, îl constituie prelucrarea metalelor. Procedeele de prelucrare a metalelor se pot împărţi în două categorii:

— cu îndepărtare de material: aşchiere, rectificare etc;

— fără îndepărtare de material: laminare, trefilare etc.

În primul caz, lichidele folosite trebuie să asigure răcirea zonei solicitate, şi reducerea adeziunii între sculă (în cazul aşchierii) şi piesă. În acest scop se folosesc lichide cu vîscozitate mică, cu conţinut ridicat de aditivi de extremă presiune. Folosirea aditivilor EP este deosebit de eficace în cazul prelucrării materialelor dure. De exemplu în cazul unui oţel cu duritate de 52 HRC folosirea unui aditiv cu clor s-a dovedit că măreşte durata unui burghiu de filet, de circa 15 ori. Se constată însă că compoziţia aditivului folosit este deosebit de critică [20].

În cazul proceselor de deformare a metalelor se întîlnesc presiuni pînă la 35.000 kg/cm^2 şi temperaturi pînă la cîteva sute de grade, în cazul prelucrării la rece, şi pînă la 1600°C, în cazul laminării la cald a aliajelor

refractare [21]; folosirea lubrifianţilor lichizi şi la temperaturi mari a celor solizi este necesară pentru : reducerea frecării, controlul finisării suprafeţelor şi împiedicarea formării de aglomerări de material pe matriţă prin adeziune.

Reducerea frecării va afecta atît puterea necesară cît şi limita de deformare pentru o trecere (laminare, trefilare). În cazul trefilării, frecarea limitează reducerea diametrului pe o treaptă, prin depăşirea rezistenţei la rupere, iar în cazul refulării, limita este impusă de rezistenţa matriţei şi de presiunea maximă realizabilă.

Lubrifianţii solizi. Dacă temperatura depăşeşte cîteva sute de grade, sau atunci cînd nu este posibilă folosirea lubrifianţilor fluizi, se recurge la lubrifianţi solizi; aceştia constituie o preocupare de mare perspectivă.

Lubrifianţii solizi pot fi clasificaţi după proprietăţile care asigură un coeficient de frecare redus :

— structura cristalină lamelară (grupa MoS_2, grafit);

— rezistenţa mică la deformare plastică (metale moi, substanţe amorfe ca PbS, FeS etc.);

— lipsa de adeziune (politetrafluoretilena).

În tabela 1 sînt date sarcina maximă şi coeficientul de frecare pentru o cuplă de frecare oţel pe oţel pentru cîţiva lubrifianţi solizi [22].

Tabela 1 [22]

Cupla de frecare : oţel pe oţel
Mediu : lubrifiant în atmosferă. Viteză : 0,6—1 m/s.

Lubrifiantul	Coeficientul de frecare	Sarcina max. kg.	Calitatea ungerii
B.N	0,1—1	16	
Ftalocianină	0,3—0,4	22	slabă
Sulf	0,17	22	
Grafit	0,1—0,2	52	potrivită
E P + ulei	0,06	166	bună
P T F E	0,05	166	
MoS_2	0,1—0,05	400	f. bună

Realizarea şi menţinerea stratului de lubrifiant solid între suprafeţele în frecare se soluţionează pe mai multe căi şi anume :

— prin frecarea suprafeţelor cu lubrifiantul solid sub formă de pulbere sau cu o emulsie în apă sau ulei (MoS_2, grafit);

— înglobarea în răşini (MoS_2) sau lipire în strat subţire (PTFE);

— reacţia chimică pe suprafaţă (FeS);

— sinterizarea în metale sau răşini;

— depunerea electrolitică (în cazul metalelor).

În acest ultim caz este interesant un patent care asigură frezarea unor metale dure prin depunerea pe cale electrolitică, pe tăişul sculei, a unui metal moale care, joacă rol de lubrifiant solid;

În cazul folosirii lubrifianţilor solizi în strat subţire, principala caracteristică de exploatare este durata filmului. Ea poate varia de la cîteva

zile pînă la cîteva minute sau secunde, în funcţie de natura şi rugozitatea suprafeţelor, modul de aplicare, atmosfera în care are loc frecarea (umiditatea şi conţinutul de oxigen), temperatura etc.

Prin înglobarea lubrifiantului solid în matrice metalice, de exemplu prin sinterizare, se realizează aşa numitele materiale autolubrifiante cu proprietăţi constante de frecare în tot volumul. Folosirea materialelor autolubrifiante este avantajoasă în următoarele cazuri :

— la sarcini foarte mari şi viteze mici ;

— temperaturi înalte sau foarte joase ;

— cînd nu este economic să se folosească un circuit de lubrifiant ;

— cînd ungerea periodică este la latitudinea persoanelor care nu sînt de specialitate (în special dispozitivele mecanice pentru uzul marelui public).

Folosirea materialelor autolubrifiante a făcut posibilă reducerea punctelor de ungere la maşini. De asemenea, lubrifianţii solizi au permis realizarea sau ameliorarea funcţionării unor cuple de frecare în condiţii extreme şi îmbunătăţirea unor procese care ţin de alt domeniu decît al construcţiei de maşini însă în care intervin procese de frecare. Astfel, condiţiile spaţiului cosmic impun funcţionarea normală a cuplelor de frecare în vacuum foarte înaintat (10^{-7} torr sau mai puţin). Dacă aceste cuple fac parte dintr-un reactor nuclear plasat pe orbită, atunci intervine şi temperatura şi fluxul de neutroni care înăspresc condiţiile de funcţionare [23]. Dar condiţii similare ($\theta = 600°C$; $p = 10^{-6}$ torr) se pot întîlni şi pe pămînt ca de exemplu în lagărele tuburilor cu raze X cu anod rotitor [24]. În acest caz, modificarea căii de rulare a rulmenţilor prin introducerea unor piese din Ag sau In a mărit simţitor durata de funcţionare. Ca exemple de folosire mai puţin clasică a lubrifianţilor solizi se pot da : folosirea MoS_2 în metalurgia pulberilor, care a permis reducerea presiunii de compactizare de la 120 t la 20 t fără afectarea proprietăţilor produsului finit [25] ; îmbunătăţirea proprietăţilor de prelucrare prin refulare a maselor plastice prin adăugare de MoS_2.

Din expunerea succintă de mai sus rezultă sfera largă de probleme şi aplicaţii ale studiilor de frecare şi uzare. Folosirea rezultatelor cercetării a condus la mărirea duratei de funcţionare a instalaţiilor sau la mărirea productivităţii muncii. În domeniile mai puţin tradiţionale cercetarea proceselor de frecare este indispensabilă. Descoperirea noilor materiale lubrifiante face posibilă abordarea cu succes a unor probleme dificile de frecare.

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. Bowden, D. Tabor, *The friction and lubrication of solids*, Oxford at the Clarendon Press, 1964,
2. A. Dorinson, *Microtopography of finely ground steel surfaces in relation to contact and wear*, ASLE TRANS. 2 (1965).
3. STAS *Încercarea la uzare a metalelor*, (Standard de Stat) 1968.
4. Er. Braitwaite, *Solid lubricants and surface*, Pergamon Press, London, 1964.
5. D. Pavelescu, *Aspecte ale evoluţiei uzurii în frecarea limită şi semifluidă de alunecare, în legătură cu caracterul statistic al fenomenului şi al metodei de măsură*, Teză de doctorat.

6. L. F. Coffin Jr., *Some metallurgical aspects of friction and wear*, Proceedings of the Symposium on friction and wear, Detroit, 1967, Eloevier P.C., 1959.
7. D. Pavelescu, *On the measurement errors and their magnitude in the case of the examination of wear with radioactive izotope*, Rev. Roum. Sci. Techn.Méc. Appl., 4 (1963).
8. D. Pavelescu, I. Iliuc, *Aspecte privind evoluția uzurii și temperaturii unor cupluri radioactive bronz-oțel*, St. cerc. mec. apl., *1* (1963).
9. — *Studiul unor metode radioactive pentru aprecierea calităților lubrifiante ale uleiurilor prin prizma uzurii suprafețelor*, St. cerc. mec. apl., *1*, *2* (1961).
10. N. Tipei, *Hidroaerodinamica lubrificației*, Edit. Academiei 1957.
11. D. Dowson, G. R. Higginson, *New roller-bearing lubrication formula*, *Engineering*, p. 158, 1961, London.
12. G. L. Eisler, *Radiometric study of the adsorbtion characteristics of stearic acid*, Corrosion Nr. 3/1953.
13. I. E. Young, *A radioactive tracer study of the behaviour of long chain organic molecules on solid surfaces*, Australian J. Chem., p. 173—193, 1955.
14. E. H. Loeser, G. B. Twiss, *Analysis of film formed by radioactive EP additives*, Lubrication Engineering *8* (1958).
15. T. Sakurai, *The mechanism of reaction of sufur compounds with steel surface during boundary lubrication uzing S^{35} as tracer*, ASLE TRANS, 1 (1962).
16. F. Rounds, *Effects of additives on the friction of steel on steel I. Surface topography and film composition studies*, ASLE TRANS 1 (1964).
17. D. Godfrey, *Chemical changes in steel surfaces during EP lubrication*, ASLE TRANS. *1* (1962).
18. O. Biță, I. Dincă, *Comportarea aditivilor cu fosfor la sarcini mari*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl. 441—1963.
19. Feng-I-Ming, W. L. Perilstein, M. R. Adams, *Solid film deposition and non-sacrifical boundary lubrication*, ASLE TRANS. *1* (1963).
20. N. Zlatin, R. E. Snider, *Critical aspects in the selection of cutting fluids for difficult to machine materials*, Lubrication Engineering *7* (1965).
21. I. A. Shey, *Purposes and attributes of metalworking lubricants*, Lubrication Engineering *5* (1967).
22. G. Solomon, *Grundlagen der Feststoffschmierung*, Mitteilung nr. 232 Zentrallaboratorium TNO Delft.
23. L. E. Kellog, *Developments in high-temperature ultrahigh-vacuum friction studies*, Lubrication Engineering *2* (1966).
24. G. R. Kessler, G. R. Mahn, *Factor affecting design and operation of rolling element bearings in rotating anode x-ray tubes*. Lubrication Engineering *3* (1967).
25. G. H. Kitchen, *Uses of molybdenum disulfide in the communications industry*. Lubrication Engineering *5* (1967).

RECENZII

G. VOGELPOHL : *Betriebssichere Gleitlager.* (Lagăre cu alunecare sigure în exploatare). Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967, vol. I, ed. a II-a, 286 p., 143 fig.

Una din importantele preocupări în lubrificaţie o constituie studiile şi cercetările referitoare la stabilirea condiţiilor în care diferitele rezultate de lubrificaţie teoretică pot fi transpuse în cazul lagărelor practice, de o neobişnuită diversitate în ceea ce priveşte construcţia şi regimul de funcţionare. Complexitatea mare a factorilor care intervin pe această cale în procesul de alunecare, ca lipsa unei geometrii perfecte a suprafeţelor, microgeometria acestora, comportarea diferită a lubrifianţilor în spaţii înguste, transferul de căldură etc. fac calculul, numai cu parametrii teoretici cunoscuţi, extrem de dificil pentru marea majoritate a acestor lagăre.

Prin conţinutul ei, lucrarea de faţă se încadrează tematic în această categorie de preocupări şi se poate considera că numai studiile şi experienţa de o viaţă întreagă i-au permis autorului să obţină rezultate pozitive în această direcţie. Astfel, în cazul a 52 de lagăre, dintre care unele tipizate, altele speciale ca pentru turbine, motoare, maşini unelte etc, se prezintă calcule care au la bază în cea mai mare parte construcţii deja verificate în exploatare.

Pentru stabilirea acestor condiţii certe de aplicare a soluţiilor teoretice de calcul, autorul a apreciat util să analizeze critic aceste soluţii, relevînd forma acelora care prezintă cea mai mare apropiere faţă de cazul practic dat. Din această analiză autorul a dedus de asemenea că temperatura lagărelor, mai mult decît alţi paarmetri ai acestora, se poate calcula şi urmări în practică cu destulă uşurinţă. Aceasta l-a determinat să dea în lucrare aspectelor de temperatură şi de transfer de căldură o dezvoltare mai amplă şi binevenită. Aprecierea rolului debitului de lubrifiant în comportarea termică a lagărelor şi problemele de încărcare dinamică au condus de asemenea la tratarea mai largă a acestora în această a doua ediţie a lucrării.

Lucrarea umple astfel în această direcţie un gol de mult resimţit în literatura de specialitate, constituind un preţios auxiliar pentru cercetători, proectanţi şi specialişti din industria de maşini.

Gh. Vasilca

CHRISTIANE LEGRAS, *Analyse des phénomènes de relaxation dans les matériaux anélastiques* (Analiza fenomenelor de relaxare în materialele anelastice). Thèse pour l'obtention du doctorat de spécialité Mathématiques (3ème CYCLE). Soutenue devant le Jury le 30 novembre 1967. Université de Nancy, Faculté des Sciences, 1967, 106 p.

Autoarea, în cadrul tezei sale de doctorat susţinută en succes în seria de doctorate din ciclul 3, din cunoscutele cicluri de doctorate ce se practică în Franţa, face un studiu amănunţit asupra fenomenelor de relaxare în cazul materialelor neelastice, aducînd contribuţii originale

atît în ceea ce priveşte o serie de schematizări matematice, cît şi în domeniul calculului numeric şi al programării la MEC (maşini electronice de calcul), cu care prilej utilizează procedurile Resyslin (A, B, X, Y, IMPOSS), Resnewton (N, aqua, eps, P, K, XO, H, X, βo, Nonposs), „Reel procédure Inttcheb" (N, A, B, F), Miat (P, X_1, X_2, N, A, Resyslin), „Reel procédure erf" (X).

După cum se ştie, teoria elasticităţii clasice, reflectată de legea lui Hooke, nu poate reprezenta fenomenele de neelasticitate a materialelor vîscoelastice, motiv pentru care au fost studiate alte legi specifice acestor materiale.

Ţinînd seama de cele mai recente lucrări în domeniu care au precedat teza, ca acelea ale lui Zener, Gross, Ke T'Ing Sui, Kubat, Guittard, Tissier, Khalil, şi avînd la bază cele mai actuale proceduri de lucru în domeniul MEC, elaborate de Directorul Institutului de Calcul Automat al Universităţii din Nancy Prof. Dr. Jean Legras, cu unele contribuţii ale lui Depaix, Gosse, Georges, Noël ş.a., care formează osatura personalului de cercetare din acel institut, teza de doctorat elaborată se distinge prin utilizarea celor mai moderne şi directe mijloace în tratarea matematică a anumitor fapte puse în evidenţă, în mod experimental în domeniul materialelor anelastice precum şi printr-o prezentare unitară a diverselor fenomene de neelasticitate.

Lucrarea este subdivizată în patru capitole. Capitolul I este consacrat expunerii metodei lui Gross de obţinere a legii de comportament a materialelor vîscoelastice prin extinderi făcute asupra legii lui Hooke. Extinderile prezentate reflectă fenomenul de elasticitate ca fenomen de echilibru, păstrînd totodată liniaritatea în domeniul micilor variaţii ale contracţiei şi deformaţiei. Legea fundamentală se exprimă prin

$$\tau(t) = M_R\,\varepsilon_0 + (\sigma_0 - M_r\varepsilon_0)\,e^{-t/\tau_e}$$

permiţînd explicarea relaxărilor exponenţiale. Privind fenomenul de relaxare ca rezultat al suprapunerii unui număr finit sau infinit de fenomene de relaxare elementare, fiecare din acestea fiind schematizat matematic printr-o exponenţială cu timpul de relaxare τ_i, se obţine în final legea lui Zener la deformare constantă: $\dfrac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(0) - \sigma(\infty)} = e^{-t/\tau_e}$, iar la contracţie constantă $\dfrac{\varepsilon(t) - \varepsilon(\infty)}{\varepsilon(0) - \varepsilon(\infty)} = \displaystyle\int_0^\infty \Delta(\tau)\, e^{-t/\tau}\, d_\tau(\log_{10}\tau)$. Se introduc astfel două spectre continue, spectrul de relaxare şi spectrul întîrziat, care caracterizează complet fenomenul de relaxare. Plecînd de la legea dedusă mai sus în acelaşi capitol I este construită o teorie matematică care permite tratarea unitară a principalelor fenomene de neelasticitate ca relaxarea, frecarea internă etc.

În capitolul II obiectul cercetării îl constituie rezultatele experimentale ale lui Kubat. Studiul matematic făcut în primul capitol este utilizat aici în sensul găsirii unei expresii analitice care să reprezinte curbele de relaxare experimentale furnizate de Kubat. Se ajunge la exprimarea curbei de relaxare reduse sub forma

$$\frac{\sigma(t) - \sigma(\infty)}{\sigma(0) - \sigma(\infty)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\log_{10} t - m}{\xi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du. \qquad (1)$$

Datele experimentale indică aproximarea spectrului de relaxare cu o curbă de tipul legii lui Gauss

$$\Delta\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\zeta_1} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\log_{10}\tau - m_1}{\zeta_1}\right)^2\right].$$

Acestea permit găsirea curbelor experimentale pe de o parte, cît şi calcularea diferitelor funcţii introduse de Gross, cum ar fi modulul complex, frecări interne, spectrul întîrziat ş.a.

În capitolul III sînt date și interpretate o serie de rezultate obținute în cazul concret al cadmiului și indiumului. În capitolul II au fost introduse o serie de funcții, exprimarea cărora sub forma explicită impune rezolvarea unor integrale care depășesc cadrul clasic. Strict ele nu sînt calculabile, de aceea se folosesc metode aproximative de analiză numerică.

În acest sens ultimul capitol reface două metode de integrare numerică și le aplică apoi la problemele apărute în capitolele II și III. Este vorba de metoda „interpolarea lui Cebîșev", strălucit prezentată de prof. dr. J. Legras în cadrul Colocviului de Teoria Aproximării Funcțiilor, organizat sub egida Institutului de calcul al Academiei Republicii Socialiste România la Cluj (sept. 1967), luîndu-se ca bază de interpolare polinoamele lui Cebîșev, iar ca suport de interpolare „lăcinile „x_i" ale ecuației $T_{N+1}(x) = 0$. Se observă cu acest prilej că polinoamele scrise sub formă obișnuită sînt foarte sensibile la erori, în timp ce aceleași polinoame scrise sub formă de combinații liniare de polinoame Cebîșev pentru $x \in [-1, 1]$ sînt mult mai stabile, practic insensibile la erori.

A doua metodă de aproximare se referă la aproxiarea unei funcții $f(x)$ în baza Cebîșev (T_i). Aceasta revine la a cere ca $\| f(x) - \sum_i a_i T_i(x) \|$ să fie minimă. Se convine a se lua $\| f(x) - \sum_i a_i T_i(x) \| = \sum_j [f(x_j) - \sum_i a_i T_i(x_i)]^2$ deoarece funcțiile care se aproximează sînt obținute experimental sub formă de mulțimi discrete de valori în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Lucrarea este scrisă într-un stil curgător, dar concis. Ea este utilă atît specialiștilor în teoria elasticității cît și celor în teorii adiacente cu aceasta. Ea poate servi totodată ca punct de plecare pentru cercetări ulterioare în sensul ameliorării rezultatelor obținute, știut fiind că problema determinării aproximațiilor de ordin superior poate scoate în evidență și fapte noi, iar, pe de altă parte, așa cum subliniază în concluzie autoarea tezei, alegerea pentru studiul curbelor de relaxare a spectrului de relaxare sub formă de lege log-normală (1), nu eset suficientă pentru cuprinderea diferitelor fenomene de anelasticitate observate experimental. Și aici, ca și în alte domenii, breșa este deschisă, cercetările ulterioare o vor adînci.

Maria Giurgiu, Anatol Grecu

D. MAROȘ, N. ORLANDEA, I. TĂPĂLAGĂ, *Teoria mecanismelor și mașinilor.* Institutul Politehnic Cluj, 1966.

Urmărind îndeaproape programa analitică a cursului de teoria mecanismelor și mașinilor la facultățile de specialitate, lucrarea este dezvoltată corespunzător întregirii cunoștințelor de bază în acest domeniu. Materialul său este redat într-o formă concisă, cu multe referiri bibliografice, sistematizat și profund analizat cu ajutorul aparatajului matematic adecvat și a unor planșe grafice clar executate.

Fără a mai enumera subiectele obișnuite ale acestui curs, vom evidenția subiectele și aspectele deosebite. Este remarcată încă la început o descriere istorică destul de completă a dezvoltării științei mecanismelor și mașinilor cu contribuția oamenilor de știință din U.R.S.S. S.U.A., Germania, R. S. România etc. Un studiu sistematizat este realizat asupra cinematicii analitice cu discuții asupra rezolvărilor generale și cu multe aplicații pe mecanisme larg utilizate. Sînt întrebuințate funcțiile de transmitere de primul și al doilea ordin pentru viteze și accelerații. Partea cinematică grafică este bazată pe analiza ecuațiilor vectoriale și pe desfacerea mecanismelor în mecanismul inițial și în grupe structurale, ceea ce prezintă avantaje clare în simplificarea calculelor respective.

Partea de dinamică cuprinde o succintă discuţie asupra caracteristicilor mecanice ale maşinilor şi dezvoltă calculul forţelor de frecare şi de inerţie, precum şi a reacţiunilor în cuplele cinematice ale grupelor structurale şi ale mecanismelor. Echilibrarea mecanismelor este completată ţinînd seama de forţele de inerţie de diverse ordine pe baza dezvoltărilor în serie Fourier a coordonatelor centrului de greutate al mecanismului. O amplă analiză este făcută asupra determinării mişcării maşinii, a mecanismelor cu mai multe grade de mobilitate cu exemplificări la mecanismele diferenţiale, asupra optimizării mersului maşinii. Reglajul maşinii cuprinzînd analiza mai multor regulatoare studiază procesele tranzitorii şi stabilitatea generală a funcţionării automate.

Conţine de asemenea o dezvoltare largă a sintezei mecanismelor ceea ce marchează latura de proiectare a cursului. Sînt tratate problemele poziţiilor finit şi infinit vecine, locurile geometrice importante, realizarea de traiectorii exacte şi aproximative, sinteza pe baza valorilor extreme ale parametrilor cinematici. Expunerea grafo-analitică a sintezei mecanismelor cu elemente articulate este încheiată cu metoda analitică a celei mai bune aproximaţii.

Separat este expusă sinteza mecanismelor cu came şi o bogată sinteză a mecanismelor cu roţi dinţate la care colectivul condus de prof. dr. ing. Maroş are realizări importante, menţionînd în special angrenajele melcate şi angrenajele spaţiale.

Lucrarea conţine aşadar trei părţi : structura mecanismelor cu un volum mai redus ; analiza mecanismelor cuprinzînd analiza cinematică, analiza dinamică, şi sinteza mecanismelor, ultimele fiind de aceleaşi dimensiuni. Este o lucrare care prezintă problemele sintezei mecanismelor sub o formă dezvoltată şi organizată pe baza lucrărilor lui L. Burmester, H. Alt, P. Cebîşev etc.

În cuprinsul său este urmărită rigurozitatea matematică, determinarea erorilor în diverse aproximaţii, utilizarea diferenţelor finite, aparatajul matematic al reglării automate etc., grafice clare şi diagrame pentru uşurarea calculelor.

Este foarte utilă studenţilor care îşi pot întregi şi clarifica cunoştinţele obţinute la lecţiuni şi totodată necesară inginerilor din producţie şi proiectare.

Chr. Pelecudi

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 27, nr. 6 1968

SUMAR

STUDII Pag.

IOAN ANTON şi DUMITRU IONESCU, O metodă aproximativă pentru calculul stratului-limită laminar 1117

T. OROVEANU, Dezlocuirea în regim nepermanent a fluidelor miscibile într-un mediu poros 1127

GABRIEL MANOLESCU, Contribuţii la cunoaşterea efectelor interfeţelor asupra curgerii polifazice în medii poroase 1145

DAN MATEESCU, Aripi cruciforme şi ampenaje prevăzute cu fuzelaj conic în regim supersonic. I. Mişcarea conică. 1167

VASILE IONESCU şi CIPRIAN COZMA, Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase omogene. 1187

ION SETEANU, Dezlocuirea plană negravitaţională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros (I) 1209

V. N. CONSTANTINESCU şi FL. DIMOFTE, Asupra efectului de pompaj electromagnetic în lubrificaţia cu gaze 1221

R. CHALÉAT, M. N. OGUZTÖRELI şi D. MANGERON, Aplicarea aproximaţiilor de ordin superior din teoria perturbaţiilor la calculul perioadei oscilaţiilor . . . 1231

G. BĂRĂNESCU, RODICA MANIŢIU şi C. DOBRE, Asupra dimensionării segmenţilor de piston 1237

A. PAVEL, Legile de variaţie a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune (I) 1251

S. RĂUTU şi V. CHIROIU, Determinarea ultimei articulaţii plastice a unei structuri alcătuite din bare drepte şi solicitate dominant la încovoiere 1273

AL. VAICUM, Contribuţii la stabilirea funcţiilor reologice pentru pămînturi puternic compresibile nesaturate 1281

CHR. PELECUDI, Diada interpretată ca dipol şi cvadripol cinematic 1293

D. TUTUNARU, Mecanisme pentru trasarea profilelor cu bord de fugă rotunjit 1307

P. C. ŢEPELUŞ, Metodă generală privind calculul parametrilor diagramelor de viteze ale ascensoarelor 1319

GH. ZGURĂ şi C. ISPAS, Cercetări teoretice asupra stabilităţii dinamice a procesului de prelucrare la frezarea frontală 1347

PETRE DODOC, Influenţa vibraţiilor asupra preciziei de prelucrare la strunjire . . . 1355

RECENZII 1379

Index alfabetic 1385

St. cerc. mec. apl., Tom. 27, Nr. 6, P. 1115—1388, Bucureşti, 1968

ANUNŢ

Cel de-al *IV-lea Congres Internaţional asupra transferului de căldură* se va ţine la Paris de la 31 august la 5 septembrie 1970 (dată provizorie) sub auspiciile Societăţii Franceze a Specialiştilor Termicieni, a Verfahrentechnische Gesellschaft (VDI) şi a DECHEMA. Problemele tratate vor face parte din domeniul transferului de căldură şi se vor referi la:

— radiaţia termică
— conducţie termică
— convecţiune forţată
— convecţiune naturală
— ebuliţie şi condensare
— transfer de căldură combinat (evaporare, paturi fixe, paturi fluidizate)
— transfer de căldură cu fluide ne-newtoniene
— schimburi termice (vibraţii, aripioare de răcire etc.)
— tehnica măsurilor.

Pentru a se putea face alegerea articolelor, se va trimite un rezumat de 1 pagină dactilografiată, în engleză, franceză sau germană, pînă la data de 1 martie 1969. De preferinţă, recomandăm să fie folosite unităţile SI. Aceste rezumate vor fi trimise unuia din membrii Comitetului Ştiinţific a căror listă o dăm mai jos, la alegere avîndu-se în vedere limba folosită de autor.

CANADA:

Professor T. W. HOFFMAN
Dept. of Chemical Engineering
McMaster University
HAMILTON Ontario

FRANŢA:

Professeur M. VERON
Société Française des Thermiciens
28, rue de la Source
75 — PARIS (16-ème)

R.F.G.:

Professor Dr. U. GRIGULL
Technische Hochschule München
8 MÜNCHEN 2
Arcisstrasse 21

JAPONIA:

Professor Fujio TACHIBANA
Dept. of Nuclear Engineering
University of Tokyo
Hongo, Bunkyo-ku
TOKYO, 113

MAREA BRITANIE:

Professor W. B. HALL
The United Kingdom Committee for Heat Transfer
c/o The Institution of Mechanical Engineers
1 Birdcage Walk
Westminster LONDON SW

U.S.A.:

Professor S. P. KEZIOS (pentru A.S.M.E.)
Director, School of Mechanical Engineering
Georgia Institute of Technology
ATLANTA, Georgia 30332

Dr. K. O. BEATTY Jr (pentru A.I.Ch.E.)
Department of Chemical Engineering
North Carolina State University
RALEIGH, North Carolina 27607

U.R.S.S.:

Professor A. V. LUIKOV
Academy of Sciences B.S.S.R.
Heat and Mass Transfer Institute
25 Podlesnaya
MINSK

Professor S. S. KUTATELADZE
Academy of Sciences SSSR
Institute of Thermal Physics
NOVOSIBIRSK

Informațiile suplimentare pot fi solicitate unuia din cei doi Președinți ai acestei Conferințe:

Professor E. A. BRUN
Société Française des Thermiciens
28, rue de la Source
75 — PARIS (16-ème)

Professor U. GRIGULL
Technische Hochschule München
8 MÜNCHEN 2
Arcisstrasse 21

O METODĂ APROXIMATIVĂ PENTRU CALCULUL STRATULUI-LIMITĂ LAMINAR

de IOAN ANTON
Membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
DUMITRU IONESCU
Baza de cercetări științifice, Timișoara

532

În lucrarea de față se prezintă o nouă soluție aproximativă a ecuației stratului-limită laminar. Pentru rezolvarea acestei ecuații s-a admis pentru profilul vitezei un polinom de gradul patru conținînd un parametru nedeterminat. Folosind ecuațiile impulsului și energiei în stratul-limită și relația dintre λ și α stabilită de I. Tani, s-a obținut soluția stratului-limită sub forma unei integrale, care poate fi rezolvată prin cvadraturi.
Metoda propusă permite determinarea parametrilor stratului-limită cu o precizie mai bună decît prin alte metode și este la fel de expeditivă.

Soluționarea exactă a ecuațiilor stratului-limită nu este posibilă decît în cazuri destul de particulare din cauza caracterului lor neliniar. Din acest motiv, pentru rezolvarea problemei cu caracter general, a apărut necesitatea introducerii unor metode aproximative de calcul, care se bazează pe ecuația impulsului a lui Karman sau pe ecuația energiei a lui Wiegardt.

Una dintre primele metode de rezolvare aproximativă a ecuației stratului-limită a fost dată de K. Pohlhausen [1], care consideră că ecuația impulsului este îndeplinită la perete. Această metodă aproximează profilul vitezei în stratul-limită printr-un polinom de gradul patru ai cărui coeficienți au fost determinați prin condiții la limită. Metoda propusă de Pohlhausen a fost îmbunătățită de H. Holstein și T. Bohlen [2] introducînd parametrul adimensional

$$\varkappa = \frac{\theta^2}{\nu} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x},$$

în care x este distanța în lungul peretelui, u_1 viteza la marginea stratului-limită, ν viscozitatea cinematică și θ grosimea pierderilor de impuls. Profilul vitezei s-a exprimat ca o funcție de parametrul $\varkappa$.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 6, P. 1117–1126, BUCUREȘTI, 1968

Metoda Pohlhausen, comparată cu cazurile în care sînt cunoscute soluţiile exacte, dă rezultate bune în domeniul în care scurgerea potenţială exterioară este accelerată. Dificultăţile cresc în domeniul curenţilor decelerați; pe măsură ce ne apropiem de punctul de desprindere, metoda devine din ce în ce mai puţin precisă.

Numeroase lucrări au apărut cu scopul de a mări precizia acestei metode admiţînd diferite profile de viteză în stratul-limită. Astfel, H. Schlichting şi A. Ulrich [3] au considerat pentru profilul vitezei un polinom de gradul şase. Rezultatele obţinute nu diferă esenţial de cele obţinute prin metoda Pohlhausen şi, în plus, determinarea parametrului $\varkappa$ în punctul de impact se face cu dificultate.

Un studiu sistematic al influenţei gradului polinomului şi al condiţiilor-limită la perete asupra preciziei rezultatelor a fost făcut de S. K. Ojha [4], care recomandă folosirea unui polinom de gradul patru în regiunea curenţilor accelerați şi un polinom de gradul trei în regiunea curenţilor decelerați.

Metodele aproximative bazate pe ecuaţia impulsului nu pot îmbunătăţi suficient precizia calculelor, chiar dacă se folosesc pentru profilul vitezei polinoame de grad mai înalt. De aceea, au apărut alte lucrări, care au adăugat la ecuaţia impulsului ecuaţia energiei, exprimînd profilul vitezei ca o funcţie de doi parametri. Metodele cu doi parametri sînt mai precise decît cele cu un singur parametru, însă ele cer soluţionarea a două ecuaţii diferenţiale. Pentru simplificarea acestor metode, A. Walz [5] sugerează integrarea simultană a celor două ecuaţii. Rezultatele obţinute fiind satisfăcătoare, metoda a fost folosită cu succes de E. Truckenbrodt [6] şi I. Tani [7]. În regiunea curenţilor decelerați, ambele metode dau rezultate mai bune decît alte soluţii aproximative. Trebuie să menţionăm în mod special că îmbunătăţirea preciziei prin metodele Truckenbrodt şi Tani se datoreşte renunţării la una dintre condiţiile-limită la perete şi, prin urmare, abandonării lui $\varkappa$ ca parametru al profilului vitezei.

EXPUNEREA METODEI

Multe lucrări de soluţionare aproximativă a ecuaţiei stratului-limită au fost elaborate în scopul de a mări precizia metodei originale a lui Pohlhausen. Cele mai bune rezultate s-au obţinut prin metodele care au adăugat la ecuaţia impulsului ecuaţia energiei, însă folosirea lor practică este destul de greoaie.

Lucrarea de faţă prezintă o nouă metodă pentru rezolvarea ecuaţiei stratului-limită. Introducînd un nou parametru de formă, a fost posibilă integrarea simultană a ecuaţiilor impulsului şi a energiei, prezentînd soluţia sub forma unei integrale care poate fi rezolvată prin cvadraturi.

În conformitate cu Pohlhausen, vom considera pentru profilul vitezei un polinom de gradul patru, renunţînd însă la una din condiţiile-limită la perete. În consecinţă, unul din coeficienţii polinomului va rămîne nedeterminat şi, prin urmare, profilul vitezei va avea forma

$$\frac{u}{u_1} = 1 - \left(1 - \frac{y}{\delta}\right)^3 \left[1 + (3 - \alpha)\frac{y}{\delta}\right], \qquad (1)$$

în care u_1 este viteza curentului potențial, y distanța normală la perete și δ grosimea stratului-limită.

Ecuația impulsului și ecuația energiei în stratul-limită sînt :

$$u_1 \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} + (2 + H)\,\theta \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} = \frac{\tau_0}{\rho u_1}, \tag{2}$$

$$u_1 \frac{\mathrm{d}\delta^{**}}{\mathrm{d}x} + 3\delta^{**} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} = 2\nu \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y, \tag{3}$$

în care

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \mathrm{d}y, \\ \theta &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{u_1}\right) \frac{u}{u_1}\, \mathrm{d}y, \\ \delta^{**} &= \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u^2}{u_1^2}\right) \frac{u}{u_1}\, \mathrm{d}y, \\ H &= \frac{\delta^*}{\theta}. \end{aligned} \tag{4}$$

Substituind (1) în (2), (3) și (4), obținem

$$\delta^* = \delta \cdot p(\alpha); \quad p(\alpha) = \frac{1}{20}(8 - \alpha), \tag{5}$$

$$\theta = \delta \cdot q(\alpha); \quad q(\alpha) = \frac{1}{1260}(144 + 12\alpha - 5\alpha^2), \tag{6}$$

$$\delta^{**} = \delta \cdot r(\alpha); \quad r(\alpha) = \frac{1}{60.060}(10.512 + 876\,\alpha - 253\alpha^2 - 21\alpha^3), \tag{7}$$

$$H = \frac{63(8 - \alpha)}{144 + 12\alpha - 5\alpha^2}, \tag{8}$$

$$\frac{\tau_0}{\rho u_1} = \frac{\nu\alpha}{\delta}, \tag{9}$$

$$2\nu \int_0^{\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \mathrm{d}y = \frac{\nu u_1}{\delta} \cdot s(\alpha); \quad s(\alpha) = \frac{2}{35}(48 - 4\alpha + 3\alpha^2). \tag{10}$$

Din relația (9) rezultă că $\alpha = 0$ corespunde punctului de desprindere.

Pentru a găsi valoarea parametrului α corespunzătoare punctului de impact facem $u_1 = 0$ în ecuațiile (2) și (3) și eliminăm pe $\mathrm{d}u_1/\mathrm{d}x$ dintre ele. Se obține ecuația

$$\frac{2 + H}{3} = \frac{\alpha r(\alpha)}{q(\alpha) \cdot s(\alpha)},$$

a cărei rădăcină $\alpha = 4$ corespunde punctului de impact. O valoare a parametrului α mai mare decît 4 nu poate fi folosită, deoarece ar rezulta că în stratul-limită există puncte în care u este mai mare decît u_1.

În continuare vom stabili ecuaţia diferenţială a stratului-limită. Adunînd ecuaţiile (2) şi (3), înmulţite respectiv cu δ^{**} şi θ, obţinem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u_1\frac{\theta\delta^{**}}{\nu}\right)+(4+H)\frac{\theta\delta^{**}}{\nu}u_1'=\alpha r(\alpha)+q(\alpha)\cdot s(\alpha).$$

Introducînd ca parametru de formă expresia

$$\lambda(\alpha)=\frac{\theta\delta^{**}}{\nu}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}, \tag{11}$$

ultima ecuaţie devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u_1\frac{\theta\delta^{**}}{\nu}\right)=F(\alpha), \tag{12}$$

în care

$$F(\alpha)=\alpha v(\alpha)+q(\alpha)\cdot s(\alpha)-(4+H)\,\lambda(\alpha). \tag{13}$$

Expresia (12) este o ecuaţie diferenţială neliniară de ordinul unu pentru $\theta\delta^{**}/\nu$ funcţie de lungimea x.

Funcţia $F(\alpha)$, deşi are o expresie complicată, este o funcţie universală, independentă de forma corpului. Pentru calculul acestei funcţii, folosim relaţiile (5), (6), (7) şi valorile parametrului $\lambda(\alpha)$ deduse după I.Tani [7]. Între λ şi $\varkappa$ există relaţia $\lambda=\varkappa\, r(\alpha)/q(\alpha)$. În tabela 1 sînt date valorile funcţiilor $\lambda(\alpha)$, $F(\alpha)$, H şi $\tau_0\,\delta^{**}/\mu u_1$.

Tabela 1

α	$\lambda(\alpha)$	$F(\alpha)$	$H=\frac{\delta^*}{\theta}$	$\frac{\tau_0\delta^{**}}{\mu u_1}$
0	−0,1254	1,2540	3,500	0
0,25	−0,1157	1,2062	3,328	0,0446
0,50	−0,1033	1,1400	3,176	0,0906
0,75	−0,0885	1,0787	3,041	0,1376
1,00	−0,0712	0,9995	2,921	0,1850
1,25	−0,0522	0,9151	2,813	0,2325
1,50	−0,0315	0,8240	2,716	0,2793
1,75	−0,0092	0,7731	2,630	0,3251
2,00	0,0130	0,6330	2,554	0,3691
2,25	0,0355	0,5384	2,486	0,4107
2,50	0,0576	0,4464	2,427	0,4492
3,00	0,0966	0,2881	2,333	0,5143
3,50	0,1250	0,1742	2,273	0,5582
4,00	0,1344	0,1408	2,250	0,5744

Ecuaţia (12) poate fi integrată numeric sau grafic. Calculul trebuie început în punctul de impact $\alpha = 4$ şi continuat pînă la punctul de desprindere $\alpha = 0$.

Integrarea ecuației (12) poate fi făcută cu o bună aproximație printr-o cvadratură, observînd că funcția $F(\alpha)$ este aproape liniară în raport cu $\lambda(\alpha)$ (fig. 1)

$$F(\lambda) = a - b\lambda.$$

Cu această observație, ecuația (12) poate fi scrisă astfel :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(u_1 \frac{\theta\delta^{**}}{\nu}\right) = a - b\left(u_1 \frac{\theta\delta^{**}}{\nu}\right) \cdot \frac{1}{u_1} \cdot \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x},$$

care prin integrare devine

$$u_1 \frac{\theta\delta^{**}}{\nu} = \frac{a}{u_1^b} \int_0^x u_1^b \, \mathrm{d}x.$$

Constantele a și b, determinate pe baza valorilor funcțiilor $F(\alpha)$ și $\lambda(\alpha)$, în punctul de impact și în punctul de desprindere, au valorile $a = 0{,}712$ și $b = 4{,}25$.

Cu acestea, ultima ecuație ia forma finală

$$u_1 \frac{\theta\delta^{**}}{\nu} = \frac{0{,}712}{u_1^{4.25}} \int_0^x u_1^{4.25} \, \mathrm{d}x, \tag{14}$$

x se măsoară de la punctul în care $\theta\delta^{**} = 0$.

Cunoscînd valoarea produsului $\theta\delta^{**}/\nu$ într-un punct oarecare C, se pot determina cu ușurință mărimile caracteristice stratului-limită cu relațiile

$$\left(\frac{\theta}{\upsilon^{1/2}}\right)_C = \left(\frac{\theta\delta^{**}}{\upsilon}\right)_C^{1/2} \left[\frac{q(\alpha)}{r(\alpha)}\right]_C^{1/2}, \tag{15a}$$

$$\left(\frac{\delta^{**}}{\upsilon^{1/2}}\right)_C = \left(\frac{\theta\delta^{**}}{\upsilon}\right)_C^{1/2} \left[\frac{q(\alpha)}{r(\alpha)}\right]_C^{1/2}. \tag{15b}$$

În tabela 2 sînt date valorile funcțiilor $[q(\alpha)/r(\alpha)]^{1/2}$ și $[r(\alpha)/q(\alpha)]^{1/2}$, iar pentru simplificarea calculelor în figura 2 sînt reprezentate grafic mărimile necesare calculului stratului-limită în funcție de parametrul α.

Tabela 2

α	$\left[\frac{q(\alpha)}{r(\alpha)}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{r(\alpha)}{q(\alpha)}\right]^{1/2}$	α	$\left[\frac{q(\alpha)}{r(\alpha)}\right]^{1/2}$	$\left[\frac{r(\alpha)}{q(\alpha)}\right]^{1/2}$
0	0,6530	1,2375	1,75	0,6395	1,2506
0,25	0,6526	1,2379	2,00	0,6365	1,2535
0,50	0,6514	1,2390	2,25	0,6334	1,2565
0,75	0,6498	1,2406	2,50	0,6305	1,2594
1,00	0,6476	1,2426	3,00	0,6250	1,2649
1,25	0,6451	1,2450	3,50	0,6208	1,2692
1,50	0,6424	1,2576	4,00	0,6191	1,2720

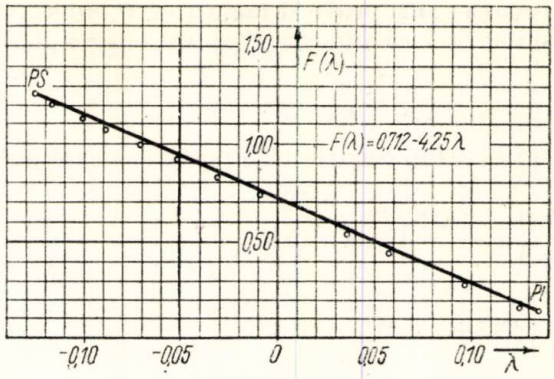

1,50
F(λ)
PS
1,00
F(λ)=0,712-4,25λ
0,50
PI
-0,10
-0,05
0
0,05
0,10
λ

Fig. 1

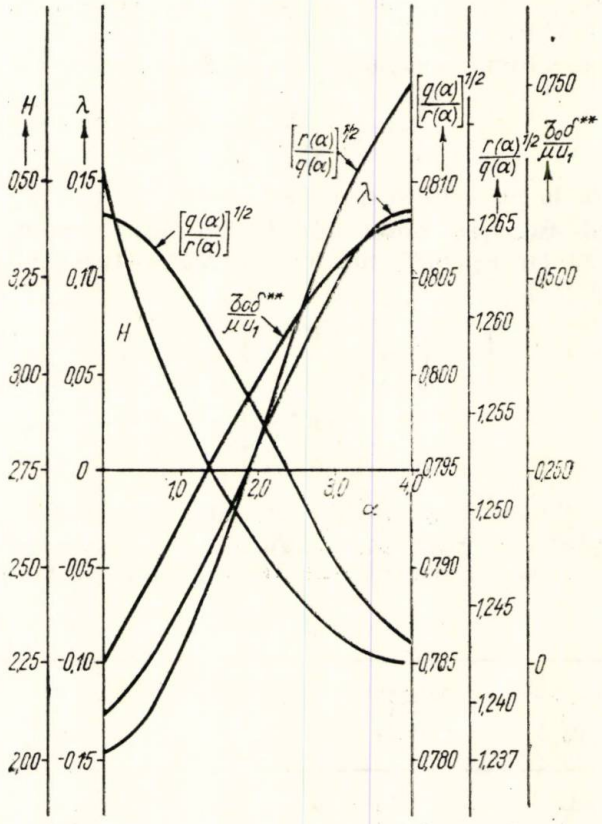

H
λ
0,50
0,15
3,25
0,10
3,00
0,05
2,75
0
2,50
-0,05
2,25
-0,10
2,00
-0,15
1,0
2,0
3,0
4,0
α
0,810
0,805
0,800
0,795
0,790
0,785
0,780
1,265
1,260
1,255
1,250
1,245
1,240
1,237
0,750
0,500
0,250
0

Fig. 2

Pentru a evidenția precizia soluției aproximative propusă în această lucrare, sînt prezentate în tabela 3 valorile parametrilor stratului-limită

Tabela 3

Soluția	Punctul de impact			Punctul de desprindere		
	$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} u_1'$	$T = \frac{\tau_0 \theta}{\mu u_1}$	$H = \frac{\delta^*}{\theta}$	$\lambda = \frac{\theta^2}{\nu} u_1'$	$T = \frac{\tau_0 \theta}{\mu u_1}$	$H = \frac{\delta^*}{\theta}$
Pohlhausen [1]	0,0770	0,332	2,31	−0,1567	0	3,50
Timman [8]	0,0712	0,311	2,37	−0,0871	0	3,75
Ojha [4]	0,0770	0,332	2,31	−0,0992	0	3,87
Prezentă	0,0840	0,355	2,25	−0,0819	0	3,50
Hartere [9] $u_1 = c\,x^m$	0,0855	0,360	2,21	−0,0680	0	4,03
Howarth [10] $u_1 = u_0 - bx$	—	—	—	−0,0820	0	3,70

în punctul de impact și în punctul de desprindere calculate prin această metodă și prin alte metode aproximative [1] [4], [8] și exacte [9], [10].

EXEMPLU DE CALCUL

Pentru exemplificarea metodei prezentăm în continuare calculul stratului-limită pe un profil NACA-4412 [11] cu unghi de incidență $i = 5°$

În acest caz vom folosi ecuația stratului-limită (14) transformată în elementele caracteristice unui profil aerodinamic

$$\frac{\theta\delta^{**}}{l^2}\left(\frac{u_\infty l}{\nu}\right) = \frac{0{,}712}{\overline{u}_1^{5{,}25}} \int_0^{\overline{x}} \overline{u}_1^{4{,}25}\, \mathrm{d}\overline{x}, \tag{16}$$

în care $\overline{x} = x/l$ și $\overline{u}_1 = u_1/u_\infty$ (l fiind coarda profilului, iar u_∞ viteza curentului neperturbat).

Etapele de calcul sînt următoarele :

a) Fiind dată viteza curentului potențial $\overline{u}_1(\overline{x})$ (fig. 3), se stabilește punctul de impact $\overline{u}_1 = 0$.

b) Se calculează derivata $\mathrm{d}\overline{u}_1/\mathrm{d}\overline{x}$; variabila $\overline{x}$ se măsoară pe conturul profilului de la punctul de impact.

c) Se calculează $\theta\delta^{**}/l^2 \cdot (u_\infty l/\upsilon)$ de-a lungul profilului cu ajutorul ecuației (16). Integrarea se efectuează pînă la punctul de desprindere, adică pînă se obține $\lambda = -0{,}1254$. Variația parametrului λ în lungul profilului este prezentată în figura 4. Pentru extrados desprinderea are loc în punctul $\overline{x}/l' = 0{,}401$, l' fiind lungimea profilului măsurată de la punctul de impact pînă la bordul de fugă. Pe intrados nu se produce desprindere.

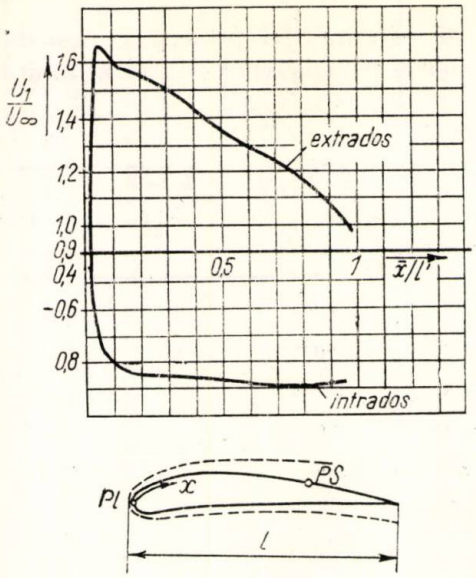


Fig. 3

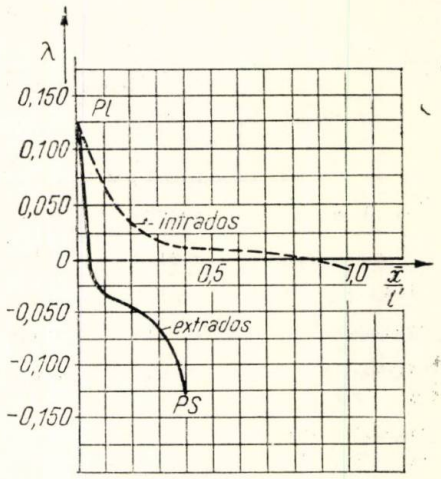


Fig. 4

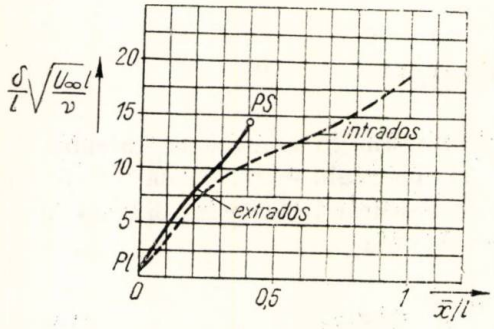


Fig. 5

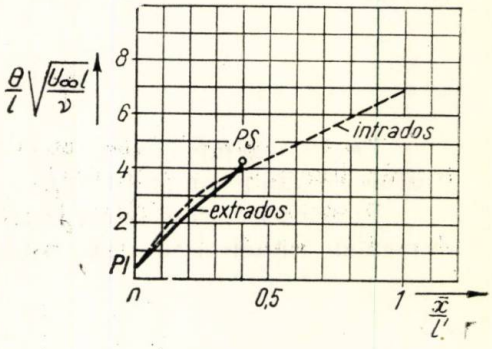


Fig. 6

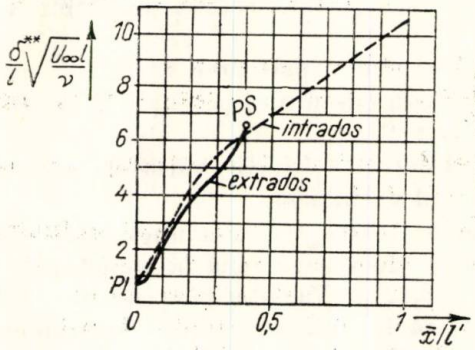


Fig. 7

d) Folosind relaţiile (15), (4d), (7) şi (9), se determină parametrii stratului-limită $\delta^*/l\cdot\sqrt{u_\infty l/\nu}$, $\theta/l\cdot\sqrt{u_\infty l/\nu}$, $\delta^{**}/l\cdot\sqrt{u_\infty l/\nu}$ şi $2\tau_0/\rho u_\infty\cdot\sqrt{u_\infty l/\nu}$, a căror variaţie pe profil se poate urmări în figurile 5 —8.

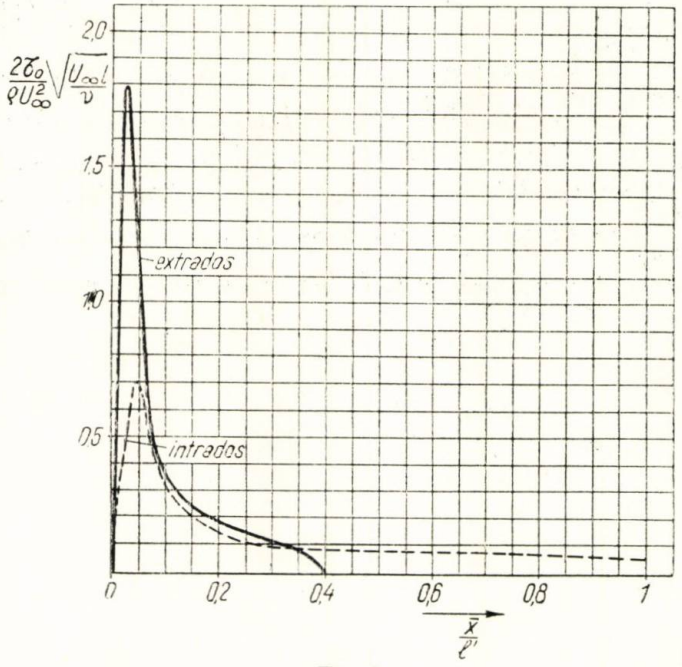


Fig. 8

Calculele se conduc separat pentru stratul-limită de pe extrados şi intrados pornind de la punctul de impact.

CONCLUZII

Rezolvarea ecuaţiei stratului-limită laminar prin metoda propusă în această lucrare dă rezultate mai bune din punct de vedere al preciziei decît alte metode care exprimă profilul vitezei ca funcţie de un singur parametru. Din punct de vedere al utilizării practice, metoda este mai expeditivă decît metodele cu doi parametri.

Primită la redacţie la 25 martie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. K. Pohlhausen, *Zur Näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht*, ZAMM *1*, 252—268 (1921).
2. H. Holstein, T. Bohlen, *Ein einfaches Verfahren zur Berechnung laminarer Reibungsschichten, die dem Näherungsansatz von K. Pohlhausen genügen*, Lilienthal-Bericht S *10*, 5—16 (1940).

3. H. SCHLICHTING, A. ULRICH, *Zur Berechnung des Umschlages laminar-turbulent*, Jahrbuch der deutschen Luftfahrforschung *1—8*, 8—36 (1942).
4. S. K. OJHA, *On approximate calculation of laminar boundary layers using polynomials*, ZAMM *45*, 277—288 (1965).
5. A. WALZ, *Anwendung des Energiesatzes von Wiegardt auf einparametrige Geschwindigkeitsprofile in laminaren Grenzschichten*, Ingen-Arch *16*, 243—248 (1948).
6. E. TRUCKENBRODT, *Quadraturverfahren zur Berechnung der laminaren und turbulenten Reibungsschicht bei ebener und rotationssymmetrischer Strömung*, Ingen-Arch *20*, 211—228 (1952).
7. I. TANI, *On the solution of the laminar boundary layer equations*, 50 Jahre Grenzschichtforschung, 1954, p. 193—200.
8. R. TIMMAN, *A one-parameter method for the calculation of laminar boundary layers*, Report F—35 National Luchtvaartlaboratorium, 1949.
9. D. R. HARTREE, *On the equation occurring in Falkner and Skan's approximate treatment of the equations of the boundary layer*, Proc. Cambridge Phil. Soc., *33*, 223—239 (1937).
10. L. HOWARTH, *On the solution of the laminar boundary layer equations*, Proc. Roy. Soc. A *164* (1938).
11. F. W. RIEGELS, *Aerodynamische Profile*, R. Oldenbourg-München, 1958, p. 166.

DEZLOCUIREA ÎN REGIM NEPERMANENT A FLUIDELOR MISCIBILE ÎNTR-UN MEDIU POROS

de T. OROVEANU
Institutul de petrol, gaze și geologie, București.

Lucrarea are ca scop studiul scurgerii fluidelor miscibile în medii poroase în cazul în care viteza de dezlocuire este variabilă în timp. Se consideră scurgerea liniară și se ține seama numai de dispersia longitudinală. Se ia în considerație mai întîi cazul unei relații liniare între coeficientul de dispersie longitudinală și viteza de dezlocuire și după aceea o relație mai generală. Pentru primul caz sînt găsite soluțiile a două probleme, care sînt apoi generalizate pentru cel de-al doilea caz.

1. Vom considera în cele ce urmează dezlocuirea unui fluid care se găsește într-un mediu poros de către un altul miscibil cu el. Cercetările teoretice și experimentale referitoare la fenomenul de dispersie în mediile poroase au pus în evidență dependența coeficienților de dispersie longitudinală și transversală de viteza de dezlocuire a fluidelor. Atunci cînd este vorba de scurgeri în care această viteză este constantă, atît în timp, cît și în fiecare punct al mediului poros, dependența pe care am semnalat-o mai sus nu introduce nici o complicație în rezolvarea matematică a problemelor. Aceasta explică faptul că studiile teoretice efectuate pînă în prezent au avut în cea mai mare parte ca obiect probleme de dezlocuire corespunzînd unor scurgeri unidimensionale cu viteză constantă în timp. Scopul pe care ni-l propunem este acela de a căuta soluții pentru unele probleme cu un caracter puțin mai general. Mai precis, vom considera tot scurgerile unidimensionale, dar cu o viteză de dezlocuire variabilă în timp. Luînd în considerație numai dispersia longitudinală și presupunînd că cele două fluide au aceeași masă specifică și aceeași viscozitate, concentrația C satisface ecuația

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \overline{w}\,\frac{\partial C}{\partial x} = K\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{1}$$

în care $\overline{w}$ este viteza de dezlocuire (viteza medie reală, obținută împărțind viteza de filtrare cu porozitatea) și K coeficientul de dispersie longitudinală. Pentru a fixa ideile, vom nota cu C concentrația în fluidul de dezlocuire.

Dat fiind că viteza de dezlocuire este o funcție de timp, coeficientul de dispersie longitudinală care depinde de această viteză va fi și el variabil

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 6. p. 1127–1144, BUCUREȘTI, 1968

în timp. În literatura de specialitate există un număr destul de mare de formule, atît teoretice, cît şi experimentale, care exprimă relaţia între K şi $\overline{w}$. De la început trebuie să precizăm că, pentru motive care vor apărea evidente mai departe, vom lăsa la o parte formulele care fac să intervină difuzia moleculară efectivă sub forma unui termen aditiv. Formulele de acest gen sînt utilizabile atunci cînd viteza de dezlocuire este extrem de mică, ceea ce face ca difuzia moleculară să devină importantă. Consideraţiile noastre vor fi deci valabile pentru regimuri de scurgere cu viteză medie puţin mai mare, astfel ca să ne găsim în domeniul în care dispersia este predominantă, deşi este posibilă o interferenţă cu difuzia moleculară.

Printre formulele teoretice în care coeficientul de dispersie longitudinală depinde numai de viteza de dezlocuire, semnalăm pe aceea dată de A. E. Scheidegger [14]

$$K = \alpha \overline{w}, \tag{2}$$

α fiind o constantă caracteristică a mediului poros. Consideraţii bazate pe un model matematic diferit l-au condus pe acelaşi autor la o formulă în care coeficientul de dispersie longitudinală apare proporţional cu pătratul vitezei de dezlocuire. O formulă asemănătoare a fost găsită, tot pe cale teoretică, de G. I. Taylor [16], dar trebuie să menţionăm că, pentru scurgerea prin medii poroase, aceste formule sînt mai degrabă infirmate de experienţe, aşa cum vom arăta numaidecît. Într-adevăr, cercetările experimentale ale lui E. A. Ebach şi R. R. White [6] au avut drept concluzie relaţia

$$\frac{\rho K}{\mu} = 1{,}92 \left(\frac{\rho \overline{w} d_p}{\mu} \right)^{1{,}06}, \tag{3}$$

d_p fiind diametrul granulelor mediului poros, ρ masa specifică şi μ viscozitatea fluidelor. De asemenea, D. R. F. Harleman, P. F. Mehlhorn şi R. R. Rumer Jr. [8], au propus, tot drept concluzie a unor cercetări experimentale, formula

$$\frac{\rho K}{\mu} = \beta \left(\frac{\rho \overline{w} d_p}{\mu} \right)^{n}. \tag{4}$$

Tot cu ajutorul unor date experimentale, D. R. F. Harleman şi R. R. Rumer [9] au găsit pentru coeficientul β valoarea 0,66 şi au arătat de asemenea că, atunci cînd numărul lui Reynolds $\frac{\rho \overline{w} d_p}{\mu}$ este mai mic decît 10, exponentul n are valoarea 1, 2. Cînd numărul lui Reynolds creşte, acest exponent devine mai mic.

În relaţia dintre coeficientul de dispersie longitudinală şi viteza de dezlocuire se poate face să intervină, în locul numărului lui Reynolds, numărul lui Péclet de difuzie moleculară. Acest lucru l-au făcut R J. Blackwell, J. R. Rayne şi W. M. Terry [2], care au găsit, pe cale experimentală, formula

$$\frac{K}{D_0} = 8{,}8 \left(\frac{\overline{w} a_p}{D_0} \right)^{1{,}17}, \tag{5}$$

în care D_0 este coeficientul de difuzie moleculară şi a_p raza granulelor mediului poros. Numărul lui Péclet de difuzie moleculară are deci expresia $\frac{\overline{w}a_p}{D_0}$. Formule asemănătoare au fost propuse de H. O. Pfannkuch [12] în încercarea sa de a clasifica diversele regimuri de dispersie în mediile poroase. În domeniul care ne interesează, H. O. Pfannkuch distinge un regim în care există o oarecare interferenţă între dispersie şi difuzia moleculară şi un alt regim de dispersie pură. Primului regim îi corespunde o formulă analogă cu (5), dar cu exponentul egal cu 1,2, în timp ce pentru cel de-al doilea regim formula îşi păstrează aceeaşi structură, dar cu un exponent egal cu unitatea. Această ultimă formulă coincide cu (2) şi prezintă avantajul de a da o valoare numerică pentru constanta α, pe care A. E. Scheidegger nu a putut să o precizeze în cercetările sale teoretice.

Apare deci posibil să se utilizeze în dezvoltările teoretice o relaţie de forma

$$K = \alpha_1 w^n, \tag{6}$$

exponentul n având în general valori cuprinse între 1 şi 1,2. Această ultimă relaţie a fost preconizată de R. R. Rumer Jr. într-una din lucrările sale [13]. În ceea ce priveşte problema de care ne ocupăm, aceasta a fost considerată pentru prima oară, după cîte ştim, de R. B. Banks şi S. Jerasate [1], care au adoptat relaţia (3), dar cu un exponent egal cu unitatea. Remarcăm că în acest fel autorii citaţi au recunoscut valabilitatea formulei (2). Această formă particulară a fost aleasă pentru a se face posibilă utilizarea ecuaţiei (1) fără dificultăţi suplimentare.

Într-o lucrare publicată cu cîţiva ani în urmă [10] am arătat că printr-o schimbare de variabile se poate aduce ecuaţia (1) la o formă care nu mai face necesară alegerea unei relaţii particulare între coeficientul de dispersie longitudinală şi viteza de dezlocuire. Într-adevăr, considerînd valori constante de referinţă $\overline{w}_0$ şi K_0 ale acestor două mărimi, putem scrie

$$T = \int_0^t \frac{K}{K_0}\,\mathrm{d}t, \qquad X = x - \int_0^t \overline{w}\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

şi ecuaţia (1) devine

$$\frac{\partial C}{\partial T} = K_0 \frac{\partial^2 C}{\partial X^2}. \tag{8}$$

Problemele revin astfel la cele corespunzătoare pentru cazul în care coeficientul de dispersie longitudinală este constant. Pentru ca schimbarea de variabilă (7) să fie posibilă, este suficient ca funcţiile $\overline{w}(t)$ şi $K(t)$ să fie continue. De asemenea, alegerea constantelor w_0 şi K_0 este totdeauna posibilă.

Am aplicat acest procedeu la acelaşi tip de probleme ca şi cele studiate în [1], unde s-a considerat mediul poros ca fiind infinit. În prezent, ne propunem să studiem probleme de acelaşi gen pentru cazul unui mediu poros de lungime finită. De la început trebuie să remarcăm că schimbarea de variabile (7) prezintă unele inconveniente, deoarece conduce la probleme cu condiţii la limită pe frontiere mobile. Din acest motiv, vom considera

mai întîi cîteva cazuri particulare, presupunînd că este valabilă relaţia (2 sau una dintre acelea asemănătoare cu ea.

2. Fie un mediu poros de lungime l, frontierele fiind la $x = 0$ şi $x = l$, şi să admitem că în momentul iniţial $t = 0$ concentraţia este $C_0(x)$. Dacă scurgerea se produce în sensul pozitiv al axei absciselor şi concentraţia ia pe frontiere valorile C_i, respectiv C_e, pe care le putem considera ca funcţii de timp, ajungem la problema următoare :

Să se găsească soluţia ecuaţiei

$$\frac{1}{\overline{w}} \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{9}$$

cu condiţia iniţială

$$t = 0, \quad C = C_0(x) \tag{10}$$

şi condiţiile la limită

$$x = 0, \quad C = C_i(t); \quad x = l, \quad C = C_e(t). \tag{11}$$

Dacă facem schimbarea de variabile

$$\theta = \frac{1}{l} \int_0^t \overline{w} \, dt, \qquad \xi = \frac{x}{l}, \tag{12}$$

sîntem conduşi la ecuaţia

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \tag{13}$$

cu condiţiile

$$\theta = 0, \quad C = C_0(\xi) \tag{14}$$

şi

$$\xi = 0, \quad C = C_i(\theta); \quad \xi = 1, \quad C = C_e(\theta). \tag{15}$$

În ecuaţia (13) am introdus notaţia

$$\frac{1}{P_0} = \frac{\alpha}{l} = \frac{K_0}{l \overline{w}_0}, \tag{16}$$

w_0 fiind o valoare constantă de referinţă a lui $\overline{w}$ şi K_0 valoarea corespunzătoare a coeficientului de dispersie longitudinală. Acest parametru poate fi numit numărul lui Péclet de dispersie longitudinală.

Schimbarea de funcţie

$$C = C' \, e^{-\frac{P_0}{2} \xi} \tag{17}$$

ne conduce la ecuaţia

$$\frac{\partial C'}{\partial \theta} = \frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} - \frac{P_0}{4} C' \tag{18}$$

şu condiţiile

$$\theta = 0, \quad C' = C_0(\xi)\, e^{-\frac{P_0}{2}\xi} \tag{19}$$

ci

$$\xi = 0, \quad C' = C_i(\theta); \quad \xi = 1, \quad C' = C_e(\theta)\, e^{-\frac{P_0}{2}}. \tag{20}$$

Problema astfel pusă nu prezintă nici o dificultate şi, pentru a-i găsi soluţia, vom utiliza sinus-transformarea lui Fourier finită. În acest scop, ajunge să înmulţim cei doi membri ai ecuaţiei (18) cu $\sin n\pi\, \xi d\xi$ şi să integrăm apoi de la 0 la 1. Dacă ţinem seama de proprietăţile acestei transformări integrale [15] şi de condiţiile la limită ale problemei, găsim ecuaţia

$$\frac{d\overline{C}'_{sn}}{d\theta} + \left(\frac{n^2\pi^2}{P_0} + \frac{P_0}{4}\right)\overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{P_0}\left[(-1)^{n+1} C_e(\theta)\, e^{-\frac{P_0}{2}} + C_i(\theta)\right], \tag{21}$$

unde

$$\overline{C}'_{sn} = \int_0^1 C' \sin n\pi\, \xi d\xi \tag{22}$$

este sinus-transformata finită a lui Fourier a funcţiei C'.

Aplicarea aceluiaşi procedeu de transformare condiţiei iniţiale (19) ne dă

$$\theta = 0, \quad \overline{C}'_{os} = \int_0^1 C_0(\xi)\, e^{-\frac{P_0}{2}\xi} \sin n\pi\, \xi d\xi, \tag{23}$$

astfel că soluţia ecuaţiei (21) este

$$\overline{C}'_{sn} = e^{-\left(n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta}{P_0}} \int_0^1 C_0(\xi)\, e^{-\frac{P_0}{2}\xi} \sin n\pi\, \xi d\xi +$$

$$+ \frac{n\pi}{P_0}\int_0^\theta \left[(-1)^{n+1} C_e(\tau)\, e^{-\frac{P_0}{2}} + C_i(\tau)\right] e^{-\left(n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta-\tau}{P_0}} d\tau. \tag{24}$$

Revenirea la funcţia C' se face cu ajutorul formulei de inversiune cunoscute [15]. Pentru a scurta expunerea, vom da direct expresia concentraţiei C, ţinînd seama de (17)

$$C = 2\, e^{\frac{P_0}{2}\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-\left(n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta}{P_0}} \int_0^1 C_0(\xi)\, e^{-\frac{P_0}{2}\xi} \sin n\pi\, \xi\, d\xi + \right.$$

$$\left. + \frac{n\pi}{P_0}\int_0^\theta \left[(-1)^{n+1} C_e(\tau)\, e^{-\frac{P_0}{2}} + C_i(\tau)\right] e^{-\left(n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta-\tau}{P_0}} d\tau \right\} \sin n\pi\xi. \tag{25}$$

Un caz particular interesant este acela în care C_0, C_i şi C_e sînt constante. După cîteva calcule simple, expresia precedentă devine

$$C = 2\, e^{\frac{P_0}{2}\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}} \left\{ \left[(-1)^{n+1} C_e\, e^{-\frac{P_0}{2}} + C_i\right] + \right.$$

$$\left. + \left[C_0 - C_i + (-1)^{n+1}(C_0 - C_e)\, e^{-\frac{P_0}{2}}\right] e^{-\left(n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta}{P_0}} \right\} \sin n\pi\xi \tag{26}$$

şi, dacă remarcăm că se poate scrie

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{n^2\pi^2+\frac{P_0^2}{4}}[(-1)^{n+1}C_e\,e^{-\frac{P_0}{2}}+C_i]\sin n\pi\xi=$$

$$=\frac{C_e-C_i}{e^{P_0}-1}\,e^{\frac{P_0}{2}\xi}+\frac{C_i\,e^{P_0}-C_e}{e^{P_0}-1}\,e^{-\frac{P_0}{2}\xi}, \tag{27}$$

găsim

$$C=\frac{C_e-C_i}{e^{P_0}-1}\,e^{P_0\xi}+\frac{C_i\,e^{P_0}-C_e}{e^{P_0}-1}+2e^{\frac{P_0}{2}\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi}{n^2\pi^2+\frac{P_0^2}{4}}[C_0-$$

$$-C_i+(-1)^{n+1}(C_0-C_e)\,e^{-\frac{P_0}{2}}]\,e^{-\left(n^2\pi^2+\frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta}{P_0}}\sin n\pi\xi. \tag{28}$$

Această soluţie prezintă dezavantajul că nu se pretează atît de bine la calculele numerice; într-adevăr, atunci cînd P_0 este mare sau θ mic, sau amîndouă deodată, seria este slab convergentă.

Atunci cînd P_0 este destul de mare, ceea ce corespunde de altfel condiţiilor reale, se poate găsi o soluţie aproximativă a problemei cu ajutorul transformării lui Laplace.

Presupunînd şi de data aceasta că C_0, C_i şi C_e sînt constante, vom introduce funcţia

$$C''=\left(\frac{C-C_i}{C_e-C_i}-\frac{e^{P_0\xi}-1}{e^{P_0}-1}\right)e^{-\frac{P_0}{4}(2\xi-\theta)}, \tag{29}$$

care este soluţia ecuaţiei

$$\frac{\partial C''}{\partial\theta}=\frac{1}{P_0}\,\frac{\partial^2 C''}{\partial\xi^2}, \tag{30}$$

cu condiţia iniţială

$$\theta=0,\quad C''=\frac{C_0-C_i}{C_e-C_i}\,e^{-\frac{P_0}{2}\xi}-\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{P_0}{2}\xi}{e^{P_0}-1} \tag{31}$$

şi condiţiile la limită

$$\xi=0,\ C''=0;\ \xi=1,\ C''=0. \tag{32}$$

Dacă aplicăm transformarea lui Laplace la ecuaţia (30), aceasta devine

$$\frac{1}{P_0}\,\frac{d^2\overline{C}''}{d\xi^2}-s\,\overline{C}''=\frac{2\,\mathrm{sh}\,\frac{P_0}{2}\xi}{e^{P_0}-1}-\frac{C_0-C_i}{C_e-C_i}\,e^{-\frac{P_0}{2}\xi}, \tag{33}$$

cu

$$\overline{C}'' = \int_0^\infty C'' \, e^{-s\theta} \, d\theta. \tag{34}$$

Condiţiile la limită rămîn evident neschimbate pentru funcţia $\overline{C}''$. Soluţia corespunzătoare a ecuaţiei (33) este deci

$$C'' = \left[\frac{C_0 - C_i}{C_e - C_i} \left(e^{-\frac{P_0}{2}} - e^{-\sqrt{P_0 s}} \right) - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{P_0}{2}}{e^{P_0} - 1} \right] \frac{e^{\sqrt{P_0 s}\,\xi} - e^{-\sqrt{P_0 s}\,\xi}}{\left(e^{-\sqrt{P_0 s}} - e^{\sqrt{P_0 s}} \right) \left(s - \frac{P_0}{4} \right)} +$$

$$+ \left[\frac{C_0 - C_i}{C_e - C_i} \left(e^{\frac{P_0}{2}\xi} - e^{-\sqrt{P_0 s}\,\xi} \right) - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{P_0}{2}\xi}{e^{P_0} - 1} \right] \frac{1}{s - \frac{P_0}{4}}. \tag{35}$$

Avem însă

$$\frac{2 \operatorname{sh} \frac{P_0}{2}}{e^{P_0} - 1} = e^{-\frac{P_0}{2}} \tag{36}$$

şi, atunci cînd P_0 este destul de mare, ajungem după cîteva calcule simple la soluţia aproximativă

$$C'' = \frac{(C_e - C_0)\, e^{-\frac{P_0}{2}}}{C_i - C_e} \frac{e^{-\sqrt{P_0 s}} \left(e^{-\sqrt{P_0 s}\,\xi} - e^{\sqrt{P_0 s}\,\xi} \right)}{s - \frac{P_0}{4}} +$$

$$+ \frac{C_i - C_0}{C_i - C_e} \frac{e^{-2\sqrt{P_0 s}} \left(e^{\sqrt{P_0 s}\,\xi} - e^{-\sqrt{P_0 s}\,\xi} \right)}{s - \frac{P_0}{4}} +$$

$$+ \left(\frac{C_i - C_0}{C_i - C_e} e^{-\frac{P_0}{2}\xi} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{P_0}{2}\xi}{e^{P_0} - 1} \right) \frac{1}{s - \frac{P_0}{4}} - \frac{C_i - C_0}{C_i - C_e} \frac{e^{-\sqrt{P_0 s}\,\xi}}{s - \frac{P_0}{4}}. \tag{37}$$

Această expresie a lui $\overline{C}''$ nu satisface riguros decît condiţia la limită la $\xi = 0$. Aceasta va fi desigur valabil şi pentru soluţia finală a problemei, însă, aşa cum vom arăta mai departe, eroarea referitoare la condiţia la limită la $\xi = 1$ este nesemnificativă.

Considerînd separat fiecare din termenii din care se compune această soluţie, găsim funcţiile originale în tabelele referitoare la transformarea lui

Laplace [5]. Obținem deci

$$C'' = \frac{C_i - C_0}{C_i - C_e} e^{-\frac{P_0}{4}(2\xi - \theta)} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] - \right.$$

$$- \frac{1}{2} e^{P_0 \xi} \operatorname{erfc} \left[\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] + \frac{1}{2} e^{-P_0(1-\xi)} \operatorname{erfc} \left[\left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \right.$$

$$- \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \left. \right] + \frac{1}{2} e^{P_0} \operatorname{erfc} \left[\left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] -$$

$$- \frac{1}{2} e^{-P_0} \operatorname{erfc} \left[\left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] -$$

$$\left. - \frac{1}{2} e^{P_0(1+\xi)} \operatorname{erfc} \left[\left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{C_e - C_0}{C_i - C_e} e^{-\frac{P_0}{4}(2\xi - \theta)} \left\{ e^{-P_0} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} (1 + \xi) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] + \right.$$

$$+ e^{P_0 \xi} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} (1 + \xi) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] - e^{-P_0(1-\xi)} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} (1 - \xi) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} (1 - \xi) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] \right\} - \frac{2 \operatorname{sh} \frac{P_0}{2} \xi}{e^{P_0} - 1} e^{\frac{P_0}{4} \theta} . \quad (38)$$

Dacă ținem seama de (29), găsim în cele din urmă

$$C = C_0 + \frac{C_i - C_0}{2} \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] + e^{P_0 \xi} \operatorname{erfc} \left[\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \right. \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \left. \right] - e^{-P_0(1-\xi)} \operatorname{erfc} \left[\left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] -$$

$$- e^{P_0} \operatorname{erfc} \left[\left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] + e^{-P_0} \operatorname{erfc} \left[\left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] + e^{P_0(1+\xi)} \operatorname{erfc} \left[\left(1 + \frac{\xi}{2} \right) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] \left. \right\} -$$

$$- \frac{C_e - C_0}{2} \left\{ e^{-P_0} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} (1 + \xi) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] + \right.$$

$$+ e^{P_0 \xi} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} (1 + \xi) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] - e^{-P_0(1-\xi)} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} (1 - \xi) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] - \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} (1 - \xi) \sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2} \sqrt{P_0 \theta} \right] \right\} \quad (39)$$

şi trebuie să observăm că primii trei termeni din această expresie ne furnizează soluţia aceleiaşi probleme atunci cînd mediul poros este semiinfinit şi a doua condiţie la limită $C = C_e$ pentru $\xi = 1$, dispare.

Expresia (39) a concentraţiei satisface exact condiţia iniţială, $C = C_0$ pentru $\theta = 0$, şi prima condiţie la limită, $C = C_i$ pentru $\xi = 0$. În ceea ce priveşte a doua condiţie la limită, $C_e = C$ pentru $\xi = 1$, aceasta nu este satisfăcută decît aproximativ, dar cînd P_0 este mare, aşa cum am presupus, eroarea este foarte mică. Într-adevăr pentru $\xi = 1$ obţinem din (39)

$$C = C_0 + \frac{C_i - C_0}{2}\left[e^{-P_0}\operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right) + e^{2P_0}\operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right]\right] - \frac{C_e - C_0}{2}\left[e^{-P_0}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{P_0}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right) - \operatorname{erfc}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right)\right] \quad (40)$$

şi remarcăm numaidecît că termenii care conţin pe e^{-P_0} sînt neglijabili. De altfel nu am păstrat aceşti termeni în (39) decît pentru a arăta că această soluţie satisface riguros prima condiţie la limită; pentru calculele numerice, pot fi neglijaţi de la început.

În ceea ce priveşte termenii din (40) care conţin pe e^{2P_0} sau pe e^{P_0}, vom arăta, considerînd pe primul dintre ei, că sînt de asemenea neglijabili. Într-adevăr, în argumentul funcţiei

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right),$$

atunci cînd θ este mic, termenul $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\theta}}$ este foarte mare şi, atunci cînd θ este destul de mare, termenul $\frac{1}{2}\sqrt{P_0\,\theta}$ devine la rîndul său foarte mare. Aceasta înseamnă că argumentul funcţiei considerate este totdeauna suficient de mare pentru ca să se poată utiliza dezvoltarea asimptotică binecunoscută. În felul acesta obţinem

$$e^{2P_0}\operatorname{erfc}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right) =$$

$$= \frac{e^{2P_0 - \frac{9}{4}P_0\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{3}\right)^2}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{\frac{3}{2}\sqrt{P_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{3}\right)} - \frac{1}{\frac{27}{4}P_0\sqrt{P_0}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{3}\right)^3} + \cdots\right] \quad (41)$$

şi, deoarece cea mai mică valoare a lui $\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \frac{\sqrt{\theta}}{3}$ este $\frac{2}{\sqrt{3}}$, expresia prece-

dentă rămîne mereu inferioară în valoare lui $\frac{e^{-P_0}}{\sqrt{\pi}}$. Într-un mod absolut analog se poate arăta că această concluzie este valabilă și pentru termenul din (40) care conține factorul e^{P_0}. Prin urmare, acești doi termeni sînt neglijabili și trebuie să luăm în considerație numai ultimii doi termeni din a doua paranteză din (40), care ne dau $C = C_e$ pentru $\xi = 1$.

3. Tot pentru un mediu poros cu frontierele la $x = 0$ și $x = l$ vom considera o altă problemă, care poate fi formulată după cum urmează :

Să se găsească soluția ecuației (9) cu condiția inițială

$$t = 0, \quad C = C_0 \tag{42}$$

și condițiile la limită

$$x = 0, \quad C_i = C - \alpha \frac{\partial C}{\partial x}; \quad x = l, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \tag{43}$$

C_0 și C_i fiind constante. Condițiile (43) au fost introduse de P. V. Danckwerts [4], și problema astfel formulată a fost rezolvată de H. Brenner [3] pentru cazul în care viteza de dezlocuire este constantă. Vom relua această problemă urmînd o cale puțin diferită care prezintă avantajul de a se lega, din punctul de vedere al metodei utilizate, de considerațiile precedente.

Cu schimbarea de variabile (12) și schimbarea de funcție

$$C = C_i = C' e^{\frac{P_0}{2}\xi} \tag{44}$$

ajungem la ecuația

$$\frac{\partial C'}{\partial \theta} = \frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} - \frac{P_0}{4} C', \tag{45}$$

a cărei soluție trebuie găsită cu condiția inițială

$$\theta = 0, \quad C' = (C_0 - C_i)\, e^{-\frac{P_0}{2}\xi} \tag{46}$$

și condițiile la limită

$$\xi = 0, \quad C' - \frac{2}{P_0} \frac{\partial C'}{\partial \xi} = 0; \quad \xi = 1, \quad C' + \frac{2}{P_0} \frac{\partial C'}{\partial \xi} = 0. \tag{47}$$

În acest scop vom introduce funcțiile

$$\varphi_n = A_n [P_0 \sin(\lambda_n \xi) + 2\lambda_n \cos(\lambda_n \xi)] \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{48}$$

care satisfac condițiile

$$\xi = 0, \quad \varphi_n - \frac{2}{P_0} \frac{d\varphi_n}{d\xi} = 0; \quad \xi = 1, \quad \varphi_n + \frac{2}{P_0} \frac{d\varphi_n}{d\xi} = 0 \tag{49}$$

atunci cînd λ_n sînt rădăcinile ecuației

$$\operatorname{tg} \lambda_n = \frac{\lambda_n P_0}{\lambda_n^2 - \frac{P_0^2}{4}}. \tag{50}$$

Este uşor de arătat că funcţiile φ_n sînt ortogonale în $[0, 1]$. În ceea ce priveşte constantele A_n, le vom determina din condiţia

$$\int_0^1 \varphi_n^2(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1, \tag{51}$$

care ne dă

$$A_n^2 = \frac{2}{4\lambda_n^2 + P_0^2 + 4P_0}. \tag{52}$$

Fiecare funcţie φ_n îndeplineşte condiţiile necesare pentru a reprezenta nucleul unei transformări integrale finite. Înmulţind deci termenii ecuaţiei (45) cu $\varphi_n\,\mathrm{d}\xi$ şi integrînd apoi de la 0 la 1, obţinem

$$\frac{\mathrm{d}\overline{C}_n'}{\mathrm{d}\theta} + \left(\frac{\lambda_n^2}{P_0} + \frac{P_0}{4}\right)\overline{C}_n' = 0, \tag{53}$$

unde am pus

$$\overline{C}_n' = \int_0^1 C'\varphi_n \mathrm{d}\xi. \tag{54}$$

Din (46) rezultă imediat că trebuie să integrăm ecuaţia (53) cu condiţia iniţială

$$\theta = 0,\ \overline{C}_n' = (C_0 - C_i)\frac{2\lambda_n A_n P_0}{\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4}}, \tag{55}$$

care se obţine ţinînd seama şi de (50). Găsim imediat

$$\overline{C}_n' = (C_0 - C_i)\frac{2\lambda_n A_n P_0}{\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4}}\,\mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta}{P_0}} \tag{56}$$

şi

$$C' = (C_0 - C_i)\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n P_0}{\left(\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4} + P_0\right)\left(\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)}\,[P_0 \sin(\lambda_n \xi) +$$

$$+ 2\lambda_n \cos(\lambda_n \xi)]\,\mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta}{P_0}}, \tag{57}$$

ceea ce ne dă în cele din urmă

$$C = C_i + (C_0 - C_i)\,\mathrm{e}^{\frac{P_0}{2}\xi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n P_0}{\left(\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4} + P_0\right)\left(\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)}\,[P_0 \sin(\lambda_n \xi) +$$

$$+ 2\lambda_n \cos(\lambda_n \xi)]\,\mathrm{e}^{-\left(\lambda_n^2 + \frac{P_0^2}{4}\right)\frac{\theta}{P_0}}. \tag{58}$$

Această soluție are aceeași formă cu cea găsită de H. Brenner, afară de unele diferențe în notații și, firește, definiția diferită a timpului adimensional θ. În [3], soluția (58) a fost obținută cu ajutorul separării variabilelor, însă am preferat să utilizăm aici o transformare integrală.

Această soluție prezintă același dezavantaj ca și (28), fiind de asemenea slab convergentă atunci cînd P_0 este mare sau θ mic, sau cînd aceste două situații trebuie considerate simultan. Dacă P_0 are valori destul de mari, se poate găsi o soluție aproximativă, tot cu ajutorul transformării lui Laplace, care se pretează mai bine la calculele numerice. Această soluție este

$$C = C_0 - \frac{C_0 - C_i}{2}\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} - \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right] - 2\sqrt{\frac{P_0\theta}{\pi}}\, e^{-\frac{P_0(\xi-\theta)^2}{4\theta}} + \right.$$

$$+ [1 + P_0(\xi+\theta)]\, e^{P_0\xi}\operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2}\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right] - 2\sqrt{\frac{P_0\theta}{\pi}}\left[1 + \frac{P_0}{2} - \right.$$

$$- \frac{P_0}{4}(\xi - \theta)\Big] e^{P_0 - \frac{P_0(2-\xi+\theta)^2}{4\theta}} + P_0\Big[2(2-\xi+\theta) + \theta + \frac{P_0}{2}(2 - \xi +$$

$$\left. + \theta)^2\Big] e^{P_0}\operatorname{erfc}\left[\left(1 - \frac{\xi}{2}\right)\sqrt{\frac{P_0}{\theta}} + \frac{1}{2}\sqrt{P_0\theta}\right]\right\} \tag{59}$$

și, pentru detalii referitoare la calculele care conduc la această expresie, ca și pentru dezvoltările legate de ea, trimitem la lucrarea citată a lui H. Brenner sau la monografia noastră referitoare la scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase [11].

4. Să considerăm acum situația sensibil mai complicată în fața căreia ne găsim atunci cînd trebuie să admitem că relația dintre coeficientul de dispersie longitudinală și viteza de dezlocuire are forma (6). Dacă luăm pentru această viteză expresia

$$\overline{w} = \overline{w}_0\varphi(t), \tag{60}$$

în care $\overline{w}_0$ este o valoare constantă și $\varphi(t)$ o funcție adimensională, găsim

$$K = \alpha_1\overline{w}_0^n[\varphi(t)]^n = K_0\psi(t), \tag{61}$$

funcția $\psi(t)$ fiind tot fără dimensiuni. În acest mod ecuația (1) devine

$$\frac{1}{\overline{w}_0\psi(t)}\frac{\partial C}{\partial t} + f(t)\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{K_0}{\overline{w}_0}\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \tag{62}$$

cu

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = [\varphi(t)]^{1-n}. \tag{63}$$

Schimbarea de variabile

$$\theta = \frac{\overline{w}_0}{l}\int_0^t \psi(t)\,dt = \frac{\overline{w}_0}{l}\int_0^t [\varphi(t)]^n dt, \quad \xi = \frac{x}{l} \tag{64}$$

ne conduce la ecuaţia

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} + f(\theta)\frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{1}{P_0}\frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \tag{65}$$

cu

$$P_0 = \frac{\overline{w}_0 l}{K_0}. \tag{66}$$

Considerînd din nou prima dintre problemele pe care le-am rezolvat mai înainte, urmează să rezolvăm ecuaţia (65) cu condiţia iniţială

$$\theta = 0, \qquad C = C_0 \tag{67}$$

şi condiţiile la limită

$$\xi = 0, \quad C = C_i; \qquad \xi = 1, \quad C = C_e, \tag{68}$$

C_0, C_i şi C_e fiind constante.

Cu schimbarea de funcţie (17), ajungem la ecuaţia

$$\frac{\partial C'}{\partial \theta} = \frac{1}{P_0}\frac{\partial^2 C'}{\partial \xi^2} + [1 - f(\theta)]\frac{\partial C'}{\partial \xi} + \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\theta)]\, C' \tag{69}$$

cu condiţia iniţială

$$\theta = 0, \quad C' = C_0 \, e^{-\frac{P_0}{2}\xi} \tag{70}$$

şi condiţiile la limită

$$\xi = 0, \quad C' = C_i; \qquad \xi = 1, \quad C' = C_e \, e^{-\frac{P_0}{2}}. \tag{71}$$

Vom încerca să utilizăm tot sinus-transformarea finită a lui Fourier, care ne conduce la ecuaţia

$$\frac{d\overline{C}'_{sn}}{d\theta} + n\pi[1 - f(\theta)]\int_0^1 C' \cos n\pi\xi \, d\xi + \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\theta)]\right\}\overline{C}'_{sn} =$$

$$= \frac{n\pi}{P_0}\left[(-1)^{n+1} C_e \, e^{-\frac{P_0}{2}} + C_i\right], \tag{72}$$

a cărei soluţie trebuie s-o găsim ţinînd seama de condiţia iniţială

$$\theta = 0, \ \overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}}\left[(-1)^{n+1} e^{-\frac{P_0}{2}} + 1\right] C_0. \tag{73}$$

Însă utilizarea acestei metode presupune posibilitatea de a se pune soluţia sub forma

$$C' = 2\sum_{m=1}^{\infty} C'_{sn} \sin m\pi\xi \tag{74}$$

și, după cîteva calcule simple, ecuația (72) devine

$$\frac{d\overline{C}'_{sn}}{d\theta} + 2n\,[1-f(\theta)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2-n^2}\,[(-1)^{m+n+1}+1]\,\overline{C}'_{sm} + \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{P_0}{4}\,[1-2\,f(\theta)]\right\} \overline{C}'_{sn} = \frac{n\pi}{P_0}\,[(-1)^{n+1}\,C_e\,e^{-\frac{P_0}{2}} + C_i], \qquad (75)$$

cu observația că pentru $m = n$ termenul corespunzător al sumei este nul.

Funcțiile $\overline{C}'_{sn}(\theta)$ sînt deci soluțiile unui sistem infinit de ecuații diferențiale liniare de primul ordin. Trebuie să remarcăm că atunci cînd n este un număr impar, $n = 2q + 1$), funcțiile $\overline{C}'_{s,2q+1}$ rezultă din sistemul

$$\frac{d\overline{C}'_{s,2q+1}}{d\theta} + 8\,(2q+1)\,[1-f(\theta)] \sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{4r^2-(2q+1)^2}\,\overline{C}'_{s,2r} + \left\{\frac{(2q+1)^2\,\pi^2}{P_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{P_0}{4}\,[1-2f(\theta)]\right\} \overline{C}'_{s,2q+1} = \frac{(2q+1)\,\pi}{P_0}\,[C_i + C_e\,e^{-\frac{P_0}{2}}], \qquad (76)$$

în timp ce pentru n par, $n = 2q$, găsim

$$\frac{d\overline{C}'_{s,2q}}{d\theta} + 8q\,[1-f(\theta)] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2r+1}{(2r+1)^2-4q^2}\,\overline{C}'_{s,2r+1} + \left\{\frac{4q^2\pi^2}{P_0} - \right.$$

$$\left. - \frac{P_0}{4}\,[1-2f(\theta)]\right\} \overline{C}'_{s,2q} = \frac{2q\pi}{P_0}\,[C_i - C_e\,e^{-\frac{P_0}{2}}]. \qquad (77)$$

Observăm că, dacă $f(\theta) = 1$, putem determina funcțiile fără nici o dificultate, ceea ce este de altfel normal, deoarece acest caz corespunde problemei pe care am tratat-o mai înainte ($n = 1$). Însă această observație ne sugerează un procedeu aproximativ de determinare a funcțiilor $\overline{C}'_{sn}(\theta)$. Într-adevăr, am putea pune $f(\theta) = 1$ în (75) și găsi astfel, în primă aproximație, funcțiile $\overline{C}'_{sn}$. Introducînd apoi expresiile funcțiilor $\overline{C}'_{sm}$ astfel găsite în termenul din (75) care conține suma lor, s-ar putea rezolva din nou această ecuație, ceea ce ne-ar da o a doua aproximație a funcțiilor $\overline{C}'_{sn}$. Remarcăm însă că este suficient să punem $f(\theta) = 1$ numai în cel de-al doilea termen din (75), cel care conține suma, pentru ca să-l facem să dispară și să ajungem astfel la o ecuație ușor de integrat. În acest mod găsim

$$\overline{C}'_{sm} = e^{-\int_0^\theta \left\{\frac{m^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}\,[1-2f(\theta)]\right\} d\theta} \left\{\frac{m\pi}{m^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}}\,[(-1)^{m+1}e^{-\frac{P_0}{2}} + 1]\,C_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{m\pi}{P_0}\,[(-1)^{m+1}\,C_e\,e^{-\frac{P_0}{2}} + C_i] \int_0^\theta e^{\int_0^\theta \left\{\frac{m^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}\,[1-2f(\theta)]\right\} d\theta}\,d\theta\right\} \qquad (78)$$

după ce am ţinut seama de condiţia iniţială (73). Rezultă apoi, tot din (75),

$$\overline{C}'_{sn} = e^{-\int_0^\theta \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1-2f(\theta)]\right\} d\theta} \left\{ \frac{n\pi}{n^2\pi^2 + \frac{P_0^2}{4}} [(-1)^{n+1} e^{-\frac{P_0}{2}} + 1] C_0 + \right.$$

$$+ \frac{n\pi}{P_0} [(-1)^{n+1} C_e e^{-\frac{P_0}{2}} + C_i] \int_0^\infty e^{\int_0^\theta \left\{\frac{n^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1-2f(\theta)]\right\} d\theta} d\theta - 2n \int_0^\theta [1 -$$

$$\left. - f(\theta)] \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{m^2 - n^2} [(-1)^{m+n+1} + 1] \overline{C}'_{sm} e^{\int_0^\theta \left\{\frac{m^2\pi^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1-2f(\theta)]\right\} d\theta} d\theta \right\}, \quad (79)$$

unde trebuie să introducem pentru $\overline{C}'_{sm}$ expresia precedentă. Această de-a doua aproximaţie este mai bună atunci cînd viteza de dezlocuire variază puţin în timp, şi exponentul n este mai apropiat de unitate.

Cu funcţiile $\overline{C}'_{sn}(\theta)$ date de formula precedentă, concentraţia are expresia

$$C = 2 e^{\frac{P_0}{2}\xi} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{C}'_{sn} \sin n\pi\xi. \quad (80)$$

Pentru a efectua calculele trebuie aleasă funcţia $f(\theta)$ şi valoarea exponentului n sau, altfel spus, legea de variaţie a vitezei de dezlocuire în timp şi relaţia dintre această viteză şi coeficientul de dispersie longitudinală. Calculele sînt destul de laborioase şi observaţia referitoare la convergenţa slabă pe care am făcut-o în legătură cu soluţia (28) rămîne în general valabilă.

Observaţie. Cu schimbarea de variabile

$$\theta = \frac{\overline{w}_0 t}{l}, \qquad \xi = \frac{x}{l}, \quad (81)$$

ecuaţia (1) devine

$$\frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\overline{w}}{\overline{w}_0} \frac{\partial C}{\partial \xi} = \frac{K}{K_0} \frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}, \quad (82)$$

$\overline{w}_0$ şi K_0 fiind valori constante de referinţă. Dacă utilizăm apoi o schimbare de variabile de forma (7), şi anume

$$T = \int_0^\theta \frac{K}{K_0} d\theta, \quad X = \xi - \int_0^\theta \frac{\overline{w}}{\overline{w}_0} d\theta, \quad (83)$$

ajungem la ecuaţia

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{P_0} \frac{\partial^2 C}{\partial X^2}, \quad (84)$$

pe care trebuie să o rezolvăm cu condiţia iniţială

$$T = 0, \quad C = C_0 \quad (85)$$

și condițiile la limită

$$X = -\int_0^T \varphi(T)\,\mathrm{d}T, \quad C = C_i; \quad X = 1 - \int_0^T \varphi(T)\,\mathrm{d}T, \quad C = C_e. \tag{86}$$

Luînd ca punct de plecare ecuația (65), găsim un rezultat asemănător cu ajutorul schimbării de variabile

$$\tau = \theta, \quad \Xi = \xi - \int_0^\theta f(\theta)\,\mathrm{d}\theta, \tag{87}$$

care ne conduce la ecuația

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = \frac{1}{P_0}\frac{\partial^2 C}{\partial \Xi^2} \tag{88}$$

cu o condiție inițială și condiții la limită de aceeași formă cu (85), în acestea din urmă funcția $\varphi(T)$ fiind înlocuită cu $\varphi(\tau)$.

În ambele cazuri ar trebui deci să rezolvăm o problemă cu condiții pe frontiere mobile, cărea i se poate aplica metoda propusă de G. A. Grinberg [7], dar este ușor de constatat că se ajunge la rezultate analoge cu cele pe care le-am expus mai sus.

5. Ultima problemă a cărei soluție o vom schița corespunde de asemenea alteia pe care am tratat-o mai înainte. Este vorba tot de ecuația (65) pe care trebuie s-o rezolvăm cu condiția inițială (67) și condițiile la limită

$$\xi = 0, \quad C_i f(\theta) = C f(\theta) - \frac{1}{P_0}\frac{\partial C}{\partial \xi}; \quad \xi = 1, \quad \frac{\partial C}{\partial \xi} = 0. \tag{89}$$

Cu schimbarea de funcție (44), ajungem la ecuația (69) și trebuie să găsim soluția acesteia care satisface condiția inițială (46) și condițiile la limită

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad & C'\left[f(\theta) - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{P_0}\frac{\partial C'}{\partial \xi} = 0, \\ \xi = 1, \quad & C' + \frac{2}{P_0}\frac{\partial C'}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \tag{90}$$

Funcțiile

$$\Phi_n(\xi, \theta) = A_n(\theta)\left\{2P_0\left[f(\theta) - \frac{1}{2}\right]\sin(\lambda_n \xi) + 2\lambda_n \cos(\lambda_n \xi)\right\} \quad (n = 1, 2, 3,)\ldots \tag{91}$$

satisfac condițiile

$$\begin{aligned} \xi = 0, \quad & \Phi_n\left[f(\theta) - \frac{1}{2}\right] - \frac{1}{P_0}\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} = 0, \\ \xi = 1, \quad & \Phi_n + \frac{2}{P_0}\frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi} = 0, \end{aligned} \tag{92}$$

dacă λ_n sînt rădăcinile ecuației

$$\operatorname{tg} \lambda_n = \frac{\lambda_n P_0 f(\theta)}{\lambda_n^2 - \frac{P_0^2}{2}\left[f(\theta) - \frac{1}{2}\right]}. \tag{93}$$

Funcțiile Φ_n sînt ortogonale în intervalul [0, 1] și coeficienții $A_n(\theta)$ rezultă tot din condiția

$$\int_0^1 \Phi_n^2(\xi, \theta)\, d\xi = 1. \tag{94}$$

Să înmulțim acum fiecare termen al ecuației (69) cu $\Phi_n\, d\xi$ și să integrăm de la 0 la 1. După cîteva calcule simple, găsim

$$\frac{d\overline{C}_n'}{d\theta} - \int_0^1 \overline{C}' \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}\, d\xi = \left\{\frac{P_0}{4}[1 - 2f(\theta)] - \frac{\lambda_n^2}{P_0}\right\}\overline{C}_n' +$$

$$+ [1 - f(\theta)] \int_0^1 C' \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi}\, d\xi, \tag{95}$$

unde

$$\overline{C}_n' = \int_0^1 C' \Phi_n\, d\xi. \tag{96}$$

Cu

$$C' = \sum_{m=1}^{\infty} \overline{C}_m' \Phi_m \tag{97}$$

ecuația precedentă devine

$$\frac{d\overline{C}_n'}{d\theta} + \left\{\frac{\lambda_n^2}{P_0} - \frac{P_0}{4}[1 - 2f(\theta)]\right\}\overline{C}_n' - \sum_{m=1}^{\infty} \overline{C}_m' \left\{\int_0^1 \Phi_m \frac{\partial \Phi_n}{\partial \theta}\, d\xi + \right.$$

$$\left. + [1 - f(\theta)] \int_0^1 \Phi_m \frac{\partial \Phi_n}{\partial \xi}\, d\xi \right\} = 0, \tag{98}$$

condiția inițială fiind

$$\theta = 0, \quad \overline{C}_n' = (C_0 - C_i) \frac{2\lambda_n(0)\, A_n(0)\, P_0 f(0)}{[\lambda_n(0)]^2 + \frac{P_0^2}{4}}. \tag{99}$$

Nu insistăm asupra calculului integralelor care apar în (98), deoarece nu prezintă dificultăți. Pentru a găsi funcțiile $\overline{C}_n'(\theta)$ apare necesar să recurgem la un procedeu de aproximație. Așa cum am făcut mai înainte, putem înlocui funcțiile $\overline{C}_m'$ în (98) prin expresii de aceeași formă cu (56). În acest mod, ajungem la o ecuație pe care o putem integra pentru a obține o a doua aproximație a funcțiilor $\overline{C}_n'(\theta)$, calculele fiind evident laborioase. Tot astfel, revenirea la funcția originală $C'(\xi, \theta)$, respectiv $C(\xi, \theta)$, ne

conduce la o serie care este destul de slab convergentă în circumstanţele pe care le-am semnalat mai sus.

6. Studiul pe care l-am făcut arată că, pentru cazul particular al relaţiei liniare dintre coeficientul de dispersie longitudinală şi viteza de dezlocuire, problemele considerate nu prezintă nici o dificultate de calcul. Dar, cînd se admite o relaţie puţin mai generală, calculele devin destul de complicate chiar atunci cînd introducem unele aproximaţii.

Primită la redacţie la 10 iulie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Robert B. Banks, Somsakdi Jerasate, *Dispersion in unsteady porous media flow*, Journal of the Hydraulics Division, Procedings of the American Society of Civil Engineers, **88**, HY3, *1* (1962).
2. R. J. Blackwell, J. R. Rayne, W. M. Terry, *Factors influencing the efficiency of miscibile displacement*, Transactions AIME, **216**, 1959.
3. H. Brenner, *The diffusion model of longitudinal mixing in beds of finite length*, Numerical values. Chemical Engineering Science, Génie Chimique, **XVII**, *4* (1962).
4. P. V. Danckwerts, *Continous flow systems. Distribution of residence times.* Chemical Engineering Science, Génie Chimique, **5**, *6* (1956).
5. V. A. Ditkin, P. I. Kuznețov, *Spravocinik po operaţionnomu iscisleniiu*, GITTL, Moskva—Leningrad, 1954, p. 112, 152.
6. Earl E. Ebach, Robert R. White, *Mixing of fluids flowing through beds of packed solids*, AIChE Journal, **4**, *2* (1958).
7. G. A. Grinberg, *Ob odnom vozmojnom metode podhoda k rassmotreniiu zadaci teorii teploprovodnosti, diffuzii, volnovîh i im podobnîh pri nalicii dvijuşcihsia granit i o nekotorîh inîh ego prilojeniiah*, Prikladnaia matematika i mehanika **31**, *2 (1967)*.
8. D. R. F. Harleman, P. F. Mehlhorn, R. R. Rumer Jr., *Dispersion-permeability corelation in porous media*, Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, **89**, HY2, *1* (1963).
9. D. R. F. Harleman R. R. Rumer, *Longitudinal and lateral dispersion in an isotropie prous medium*, Journal of Fluid Mechanics, **16**, *3* (1963).
10. T. Oroveanu, *Quelques considérations sur le déplacement des fluides miscibles dans les milieux poreux*, Rev. Roum. Sci. Techn. Mécanique Appliquée, **10**, *6* (1965).
11. — *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1966, p. 543—551.
12. H. O. Pfannkuch, *Contribution à l'étude des déplacements des fluides miscibles dans un milieu poreux*, Revue de l'Institut Français du Pétrole et Annales des combustibles liquides, **XVIII**, *2* (1963).
13. R. R. Rumer Jr., *Longitudinal dispersion in steady and unsteady flow*, Journal of the Hydraulics Division, Procedings of the American Society of Civil Engineers, **88**, HY3, *1* (1962).
14. A. E. Scheidegger, *Statistical hydrodynamics in porous media*, Journal of Applied Physics **25**, *8* (1954).
15. I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, Toronto, London, 1951, p. 71—76.
16. G. I. Taylor, *Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube.* Proceedings of the Royal Society, Series A, Mathematical and Physical Sciences, **225**, 1163 (1954).

CONTRIBUȚII LA CUNOAȘTEREA EFECTELOR INTERFEȚELOR ASUPRA CURGERII POLIFAZICE ÎN MEDII POROASE

de GABRIEL MANOLESCU
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

622.276 :553.98

Se studiază unele aspecte ale fenomenelor de dezlocuire a țițeiului la scara de dimensiuni a porilor cu concluzia necesității introducerii în ecuația de tip Darcy (3′) a unui termen-prag ca în ecuația (12), verificată pe lucrări anterioare, și se estimează în aceste cazuri valoarea gradientului-prag de origine capilară, menționat.

I. ÎNCERCARE DE ESTIMARE A EFECTELOR INTERFEȚELOR ASUPRA CĂDERILOR DE PRESIUNE ÎN CAZUL CURGERII PARALELE POLIFAZICE ÎNTR-UN ELEMENT DE MEDIU POROS

Dacă pentru curgerea monofazică se dispune de un aparat clasic de analiză, cu o gamă mare de condiții de aplicabilitate ($0 < N_{Re} < 1$ la 4, după diverși autori, condiții care predomină în marea majoritate a zăcămintelor), dintre care putem reține numai două forme simplificate :

$$\text{grad}_f P = a v_f \tag{1}$$

lege exprimată cu mai mult de un secol în urmă de H. G. Darcy [5], în care :

$\text{grad}_f P$ reprezintă modulul gradientului de presiune în curgerea paralelă (căderea de presiune de pe unitatea de lungime a parcursului, dyne/cm³, exprimabil ca multiplu al greutății specifice a apei) ;

a — o constantă de proporționalitate egală cu raportul dintre viscozitatea dinamică aparentă în condițiile de curgere ale fluidului, și permeabilitatea absolută a mediului poros, între limitele de valabilitate ale acestor două noțiuni ;

v_f — viteza de filtrație, convențională, rezultînd din repartiția debitului-volum, pe secțiunea totală (brută) normală de curgere a mediului poros,

şi, mult mai rar, practic numai în cîteva cazuri de curgere a gazelor şi chiar în aceste cazuri numai în imediata apropiere a găurii de sondă,

$$\text{grad}_f\ P = a_1 v_f + a_2 v_f^2, \tag{2}$$

Dupuit şi Forchheimer, acceptată pentru fluidele newtoniene într-o gamă de condiţii (N_{Re}) mult mai întinsă, pentru curgerile polifazice nu se dispune încă de o lege cu un grad de acceptabilitate comparabil legii lui Darcy(1).

Încercările iniţiale de aplicare a legii de tip (1) fiecăreia din faze separat s-au soldat cu neconcordanţe cu rezultatele experimentale, nepotrivirile fiind cu atît mai mari, cu cît coeficienţii de saturaţie ai mediului poros cu faza respectivă erau mai depărtaţi de unitate. Tipic pentru acest stadiu este eşecul propunerilor iniţiale ale unuia dintre „părinţii" necontestaţi ai fizicii zăcămintelor de hidrocarburi, M. Muskat [v. 24]. Unele dintre aceste încercări, plecînd de la faptul că, în curgerea polifazică, fiecare fază nu dispune decît de o fracţiune din secţiunea de curgere, au propus ocolirea acestei dificultăţi aplicînd ecuaţia de curgere nu fiecărei faze separat, ci sumei debitelor-volum, respectiv vitezei de filtraţie v_f care îi corespunde, propunere limitată de condiţia formală a egalităţii viscozităţilor fazelor, ceea ce îi reduce mult cîmpul eventual de aplicabilitate. Încercările de a atribui fluidului în ansamblu o viscozitate intermediară „medie" s-au soldat cu depărtări sistematice de realitate cu atît mai mari, cu cît saturaţia era mai îndepărtată de cazul curgerii omogene. Interesul de a analiza aceste tentative, aproape exclusiv istoric, se rezumă astăzi la laturile enunţate de ei : concepţiile disponibilităţii unei fracţiuni (cîteodată foarte mici) din secţiunea totală liberă pentru una din faze şi concepţia creşterii (cîteodată considerabilă) a lungimii traiectului uneia din faze (tortuozitatea de fază).

Pentru acest motiv, ilustrarea acestor încercări se va rezuma la citarea lor cu titlu informativ în două grupe :

1) încercările anterioare anilor 1936—1937 (data apariţiei noţiunii de „permeabilitate efectivă-relativă") : Cloud W. F. (1930) [3], Gărdescu I. I. (1930) [7], Versluys (1931) [27], Bartell şi Miller (1932) [v. 24], Uren şi Bradshaw (1932) [25], Garrison A. D. (1934) [v. 24] şi

2) încercările tardive, ulterioare apariţiei noţiunii de permeabilitate efectivă : Uchida (1937) [v. 24], Uren şi Domerecq (1937) [26], Plummer şi col. (1937) [v. 24] Christiansen J. E. (1944) [v. 24], Pillsbury şi Appleman (1945) [v. 24], Fletcher J. E. (1949) [v. 24] şi Pirverdian (1952) [v. 24].

Apariţia acestor variante, de o concepţie total diferită de cea considerată astăzi clasică, aceea a permeabilităţii efective, chiar la 9—16 ani de la apariţia acesteia — lucrările lui Muskat şi Meres (1936) [15] şi Botset şi Wickoff (1936) [28], prezintă un interes cu totul altul decît cel istoric-documentar.

Ea constituie un argument de ordin probabilistic de îndoială sau de critică a aplicabilităţii concepţiei permeabilităţii efective şi de compatibilitate a ecuaţiei lui Darcy cu această permeabilitate, cu toate că această aplicabilitate [15], [28] a fost din ce în ce mai mult acceptată. Explicaţia simplistă a persistenţei acestor concepţii prin necunoaşterea lucrărilor [15], [28] eventual acceptabilă pentru lucrările din grupa 2 indicată mai sus, apărute în 1937, este inadmisibilă pentru cele apărute în 1944 şi devine cu totul inacceptabilă pentru cele apărute cu 10 ani în urmă. Explicaţia

reală : dacă după o asemenea întîrziere de aplicație a ecuației lui Darcy cu corectivul pentru permeabilitatea efectivă ca funcție exclusivă sau aproape, a saturației cu faza corespunzătoare, pentru curgerea polifazică, este direct sau indirect contestată, aceasta se datorește existenței unui mare număr de rezultate experimentale care nu concordă cu concepția citată. Chiar dacă ulterior multe din aceste nepotriviri au fost lămurite și corectate, existența lor indică prezența unor condiții care limitează (și poate chiar mai mult decît se admite azi) domeniul de aplicabilitate al concepției discutate.

Printre cauzele care produc aceste nepotriviri se pot cita :

— problema saturațiilor ireductibile ;

— influența factorilor geometrici-structurali ai rocii asupra legii curgerii ;

— influența naturii mineralogice a componenților rocii ;

— problema influenței compoziției chimice a fluidelor care saturează mediul poros, și în special aceea a microcomponenților cu activitate interfacială ;

— problema efectelor de capăt („end effects") ;

— influența compresibilității fazelor saturate ;

— influența rețelei de canale capilare.

În special pentru obiectul prezentei lucrări, un interes deosebit se acordă problemei influenței vitezelor de curgere asupra curbelor de permeabilitate relativă în funcție de saturații. Cadrul acestei ultime probleme este schițat în concepțiile de bază expuse în [16], rezultînd din conexiunea lucrărilor [15] și [28] cu cîteva corecturi, [17], [23], [1], [9] și altele, și în limba română [4], [18],]20] și cu cîteva limitări datorite condițiilor de imprimare [13]. Pentru cazul prezenței a două faze notate cu indicii 1 și 2 sau g („gas") și o („oil") sau l („liquid") în unele figuri de referință, imiscibile și prezentînd o umidivitate diferită față de solidele din mediul poros, concepțiile cuprinse în [16] pot fi rezumate în

$$\vec{v}_1 = -k\frac{\overline{k}_1}{\mu_1}(\operatorname{grad} P_1 - \vec{g}\,\rho_1), \tag{3}$$

$$\vec{v}_2 = -k\frac{\overline{k}_2}{\mu_2}(\operatorname{grad} P_2 - \vec{g}\,\rho_2), \tag{4}$$

unde :

$\vec{v}_{1,2}$ reprezintă vitezele de filtrație,

k — permeabilitatea absolută a mediului poros,

$P_{1,2}$ — presiunile fazelor 1 și 2 în secțiunea curentă a curgerii examinate,

$\vec{g}$ — accelerația gravității,

$\rho_{1,2}$ — masele specifice ale celor două faze în condițiile din secțiunea examinată,

$\overline{k}_{1,2}$ — coeficienții adimensionali care caracterizează fracția de capacitate a curgerii oferită de mediul poros fazei (1, 2) în raport cu cea determinată de permeabilitatea absolută ; $\overline{k}_1$ și $\overline{k}_2$ au valori care satisfac prin definiție ecuațiile (3) și (4).

Pentru completare trebuie puse următoarele condiţii :
— de continuitate ;

$$m \frac{\partial (\rho_1 S_1)}{\partial t} = - \operatorname{div} (\rho_1 \vec{v}_1), \tag{5}$$

$$m \frac{\partial (\rho_1 S_2)}{\partial t} = - \operatorname{div} (\rho_2 \vec{v}_2); \tag{6}$$

— de stare :

$$\rho_1 = \rho_1 (P); \tag{7}$$

şi

$$\rho_2 = \rho_2 (P); \tag{8}$$

— de saturaţii :

$$S_1 + S_2 = 1; \tag{9}$$

— de presiune capilară :

$$P_2 - P_1 = \Delta_c P = \Delta_c P (S_1) = \Delta_c P (S_2), \tag{10}$$

S_1 şi S_2 fiind coeficienţii de saturaţie ai mediului poros cu fazele 1 şi 2 în secţiunea analizată. Printre ipotezele admise tacit, este de menţionat că :

— $\overline{k}_{1,2}$ este o funcţie univocă a saturaţiei $S_{1,2}$,
— fazele saturante se comportă ca fluide newtoniene,
— condiţiile curgerii rămîn în domeniul de valabilitate al legii lui Darcy în curgere omogenă.

Sub forma iniţial propusă de [16], aceste ecuaţii se limitau la (2) —(4) cu $P_1 = P_2$. Concepţia $P_1 \neq P_2$ precizată ca atare (10) a apărut de-abia în 1941, în lucrările lui Leverett [11]. În toate aceste cazuri aplicabilitatea acestor ecuaţii era fizic limitată prin continuitatea variaţiei fiecăreia din presiunile P_1 şi P_2 dintre punctele amonte şi aval ale curgerii căreia i se aplicau aceste ecuaţii. Chiar cu corectivele şi precizările citate, admiterea ecuaţiei (10) implică admiterea continuităţii celor două faze pe tot parcursul de curgere sau cel puţin continuitatea fazei mobile dacă cealaltă este imobilă. Curgerile trifazice pot fi descrise completînd grupele (5) şi (6), precum şi (7) şi (8), fiecare printr-o a 3-a ecuaţie simetrică, ecuaţia (9) prin introducerea lui S_3 în membrul stîng şi (10) printr-o ecuaţie suplementară $\Delta_c P_{2,3}$ (fiindcă $\Delta_c P_{3,1}$ este determinat prin $\Delta_c P_{1,2}$ şi $\Delta_c P_{2,3}$). Rezultatele experimentale din [16], rămase clasice, precum şi concepţia citată, sînt reprezentate în figura 1 şi caracterizate prin :

1) Prezenţa unui „umăr" pe curba permeabilităţii relative pentru faza „neumezitoare" (mai corect desemnată ca fază „mai puţin umezitoare"), care se situează din cauza acestei umidivităţi preferenţiale, statistic, pe porţiunile centrale ale secţiunii de curgere, mai îndepărtată de pereţi, porţiuni care oferă o capacitate specifică de curgere superioară celor din apropierea pereţilor, ocupate preferenţial de faza „umezitoare".

2) Căderea rapidă a permeabilităţii relative cu ocazia reducerii saturaţiei în intervalul 1...0,8 pentru faza „umezitoare", respectiv 0,8...0,5 pentru faza neumezitoare, în aşa fel încît permeabilitatea efectivă şi rela-

tiv se anulează înaintea saturației respective de îndată ce aceasta atinge o valoare S_1', respectiv S_2', numită „saturație ireductibilă" sau cîteodată în literatura de limbă engleză „saturație de echilibru". În realitate, această stare nu reprezintă un echilibru, nici chiar o valoare strict ireductibilă. Principial, ea nu e decît valoarea minimă a saturației, realizabilă în cursul

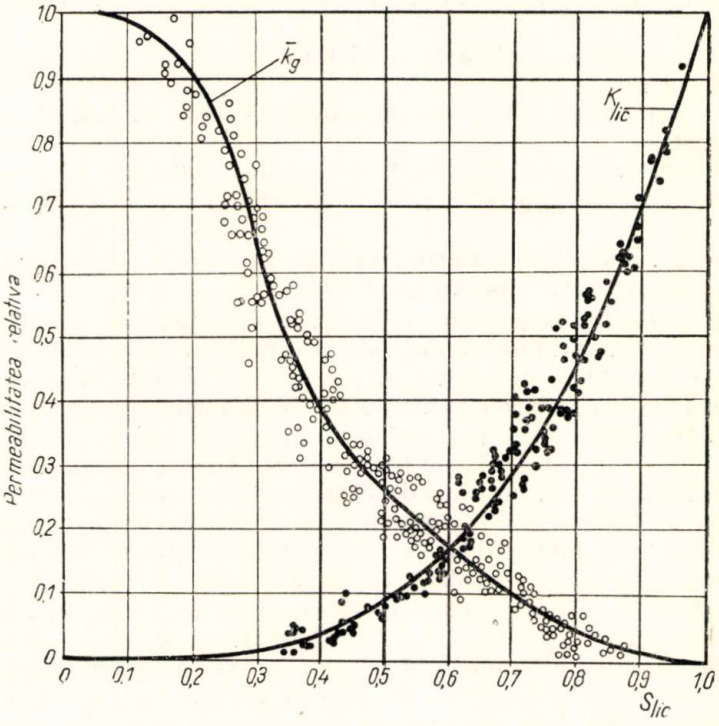


Fig. 1. — Forma clasică a curbelor de permeabilitate relativă-saturație, după [16].

unui proces de desaturare efectuat în condiții particulare, de care depinde. Chiar dacă se admite într-o primă aproximație că ea reprezintă o valoare ireductibilă pentru un proces de desaturare realizat prin mijloace strict mecanice, ea nu e în nici un caz ireductibilă față de procesele termodinamice (schimbări de stare de agregație prin variația temperaturii, entalpiei, presiunii, antrenare prin solubilitate parțială etc.). Faptul că curbele de permeabilitate efectivă și relativă astfel definite prezintă, cu tot aspectul calitativ indicat, o variabilitate pronunțată de la un mediu poros la altul, și chiar în cadrul aceluiași mediu poros, că diferă în funcție de diversele cupluri de fluide (eventual puțin diferite ca compoziție chimică, de exemplu : apă-țiței, apă-ulei rafinat) pe de o parte, precum și faptul că, în principalele probleme de comportare, respectiv de controlul exploatării, parametrul k_a/k_t (d fiind faza dezlocuitoare și t țițeiul) apare ca un factor determinant al acestor procese, pe de altă parte, contribuie la importanța unei cunoaș-

teri mai precise a curbelor k_a, $k_t = f(S_{a,t})$ și chiar (obiectul studiului de față) a unei cunoașteri mai exacte a legilor curgerii de tip

$$q_{t,a} = f(k_{t,a}, \Delta P/\Delta L).$$

Tema propusă aici este de a verifica dacă influența forțelor de interfață a fost corect cuprinsă în sistemul de ecuații clasice de curgere heterogenă.

Ipotezele de bază ale acestui sistem de exprimare a legilor curgerii heterogene sînt :

— o distribuție a celor două faze în două rețele de canale prin care ele curg separat ;

— o continuitate a fazelor între secțiunea amonte și secțiunea aval a curgerii (vezi [21], p. 85 : „two interwoven but distinct network of channels") ;

— o continuitate a interfețelor care le separă, astfel încît condiția (10) să-și păstreze fundamentarea fizică.

Observația lui Gărdescu [7] că în mediile poroase ale zăcămintelor există întotdeauna un mare număr de ramificații — interconexiuni care fac ca blocajul, imaginat prin analogie cu efectul Jamin în canalele unice, care se produce în capilarele sanguine ale scafandrilor decomprimați brusc, și invocat de adepții teoriei „razei de influență" limitată a sondelor, să nu se producă, a constituit probabil fundamentul fizic al admiterii satisfacerii acestor condiții de continuitate de către marea majoritate a cercetătorilor care au atacat studiul legilor curgerii heterogene. Cu titlu strict informativ se pot cita cîteva lucrări clasice care enunță explicit această accepție : [21, p. 84], [24, p. 181—182], [22, p. 190] ș.a. Este foarte interesant de observat că lucrarea de bază a acestei concepții, [16, p. 73], păstra cîteva rezerve în această privință, dar, luată în ansamblu cu alte rezerve ulterior lichidate, această întemeiată rezervă a avut aceeași soartă. Dacă se analizează modelul geometric simplificat al unei „roci fictive" clasice cu elemente sferice egale de rază R, dispuse tetraedric (fig. 2), se găsește că gradientul capilar de presiune are o valoare de ordinul

$$\left| \frac{2\Delta_c P}{2R} \right| \simeq 4{,}029 \frac{\tau}{R^2} \tag{11}$$

estimată cu un unghi de contact $\theta = 0°$ și o tensiune interfacială vecină cu $\sigma = 30$ dyn/cm. Valoarea citată nu e decît aproximativă, fiindcă în realitate, pentru un contrast total de umidivitate ($\theta = 0°$), este foarte probabil ca continuitatea fazei umezitoare să persiste, cu toate că este întreținută doar prin intermediul unui strat foarte subțire, probabil monomolecular. Pentru deplasările cu viteză finită, bistereza umidivității asigură o valoare a unghiului de contact regresiv θ_r finită, deși în general foarte mică, ceea ce conduce la egalitatea (11) cu condiția ca $\cos\theta \simeq 1$. Întreruperea continuității este favorizată în rocele reale de formarea progresivă a zonelor de contact, respectiv a punctelor de contact între sfere (fig. 3), prin procesul de diageneză-cimentare îndată ce raza zonelor de contact dintre două granule adiacente atinge o valoare pentru care limita cercului de contact se apropie pînă la o distanță de aproape 0,225 R de centrul tetraedrului ele-

mentar. Dată fiind neregularitatea geometrică a rocelor naturale, o analiză geometrică mai exactă decît cea care a condus la (11) e lipsită de utilitate. În aceste condiții, se vede că ecuația clasică (10) își pierde temeiul fizic,

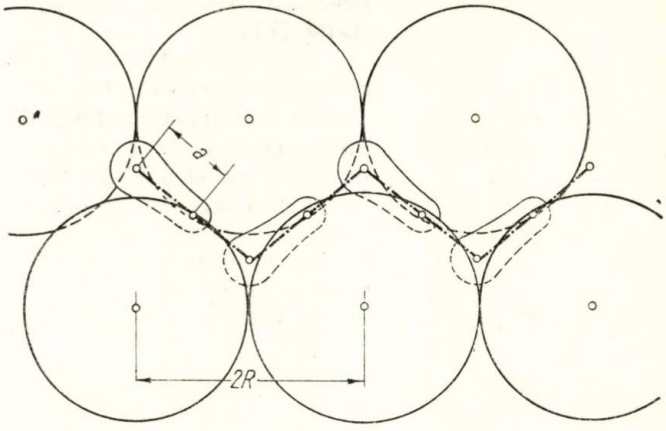


Fig. 2. — Reprezentarea schematică a bulelor închise într-un mediu poros fictiv pentru estimarea diferențelor capilare de presiune.

din cauza valorilor gradientului capilar de presiune determinate prin (11), care sînt mai mari decît cele care ar rezulta din diviziunea lui $\Delta_c P$ din ecuația (10), prin lungimi de parcurs de ordinul 10^2 m (cazul obișnuit al

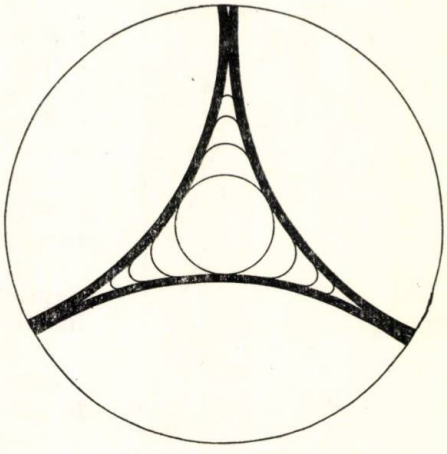


Fig. 3. — Reprezentarea schematizată a etapelor succesive de constricție a secțiunii minime într-un mediu poros fictiv.

sondelor care exploatează un zăcămînt de țiței). Pentru compararea gradienților de presiune capilară, calculați prin (11), cu cei datoriți frecărilor în curgerea monofazică după legea lui Darcy, s-a estimat permeabilitatea rocei fictive prin criteriul Leibenzon-Kozeny și prin cel al lui Krumbein-

Monck, luîndu-se media celor două rezultate şi substituind-o în ecuaţia curgerii radiale Dupuit la distanţa de 1 m de axa sondei, obţinîndu-se rezultatele exprimate în figura 4, în care :

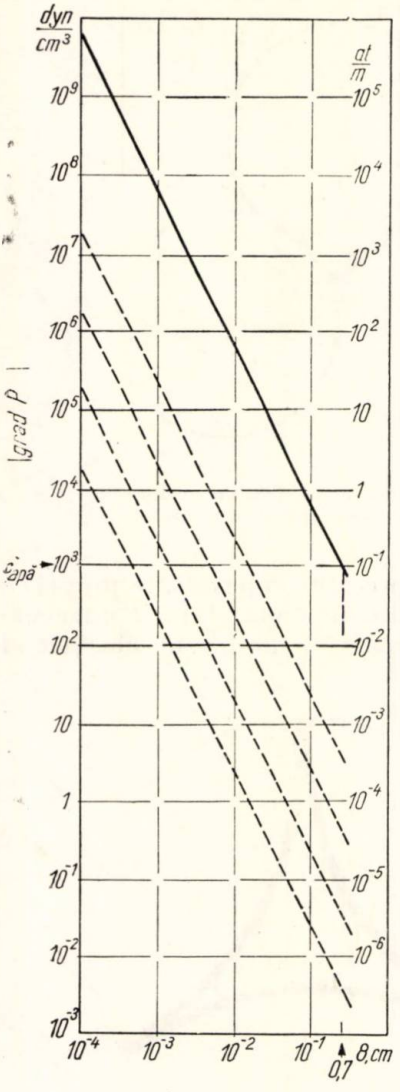


Fig. 4. — Comparaţia gradienţilor de presiune de origine capilară estimaţi ca 4,029 σ/R^2, curba continuă, cu cei de frecare (Darcy) estimaţi la distanţa de 1 metru de axul găurii de sondă, pentru cele patru cazuri care încadrează condiţiile de zăcămînt (5 cP et 10 m³/zi. m, 0,5 cP şi 10m³/zi.m, 5cP şi 0,1 m³/zi. m, 0,5 cP şi 0,1 m³/zi. m în ordine descendentă), curbele întrerupte.

— curba continuă superioară reprezintă variaţia $|\text{grad}_c P|$ estimată după (11),

— cele patru curbe întrerupte reprezintă variaţia $|\text{grad}_f P|$ datorit frecărilor în curgerea omogenă pentru cele patru cazuri între care se încadrează majoritatea situaţiilor care se întîlnesc în zăcăminte, în ordine descendentă :

Debitul sondelor m³/zi pe metrul de strat	Viscozitatea fluidului (centipoise)
10	5
10	0,5
0,1	5
0,1	0,5

Concluzia care se deduce este că, pentru toate distanţele de la axa sondei mai mari de 1 m (echivalînd cu 99,99% din volumul zăcămîntului drenat de o sondă cu contur convenţional de alimentare cu rază de 200 m), valorile gradienţilor de presiune de origine capilară sînt de peste 10^2 ori superioare celor ale gradienţilor frecărilor în curgerea omogenă, chiar în cazul cel mai defavorabil acestei comparaţii (10 m³/zi şi 5 cP), şi aceasta pe lungimi de parcurs de ordinul a cîţiva metri minimum în stadiul iniţial al procesului de exploatare pînă la cîteva zeci de metri în cursul deplasării efective cauzate de exploatare. O indicaţie a justeţii evaluării $|\text{grad}_c P|$ utilizată aici o constituie faptul că valoarea acestui gradient atinge valoarea greutăţii specifice a apei la un diametru al granulei în jurul a 0,2 cm (fig. 4), confirmare a criteriului Atterberg. Comparaţiile indicate mai sus şi concluziile lor au evident o valoare cantitativ-orientativă, servind exclusiv la a demonstra că, departe de a fi neglijabile în raport cu căderile de presiune datorite frecărilor, cum, din

nefericire, au fost întotdeauna considerate, căderile de presiune datorite prezenței interfețelor le sînt superioare în toate regiunile zăcămîntului unde distribuția fazelor se apropie de cea indicată în figura 2. Se poate admite că o astfel de distribuție se prezintă în zonele inițiale de tranziție apă-țiței, gaz-țiței, și mai cu seamă în zonele de zăcămînt, ajunse cu țițeiul suprasaturat cu gaze atît timp și în măsura în care gazele degajate rămîn în stare de gaze ocluse, fără continuitate, fenomen care se întîlnește pe porțiuni mari de zăcămînt chiar după formarea zonelor locale de „canalizare" a gazelor.

II. INFLUENȚA FORȚELOR DE INTERFAȚĂ ASUPRA LEGILOR CURGERII POLIFAZICE

Concluzia existenței unui gradient de presiune datorit forțelor generate de meniscuri în toate porțiunile zăcămîntului unde distribuția fazelor e discontinuă și alternată conduce la concepția că orice curgere efectivă nu e posibilă decît pentru valori medii (pe traseul de curgere analizat) ale gradientului presiunilor exterioare, superioare unei valori-prag egală cu gradientul citat $(\Delta P/\Delta L)_c$ și că valoarea eficace pentru curgerea efectivă nu e decît excedentul gradientului presiunilor exterioare față de cel de origine capilară.

În aceste condiții, ecuația, exprimată mai prescurtat prin introducerea forțelor gravitației în termenul gradientului motor de presiune sub forma „presiunilor reduse" P^+ la un nivel de referință,

$$v_i = -k\frac{\overline{k}_1}{\mu_1}\cdot\frac{\Delta P^+}{\Delta L} \tag{3'}$$

nu corespunde realității. Vitezele de curgere, proporționale numai cu excedentul citat, de asemenea sub formă scalară ca (3') sînt :

$$v_1 = -k\frac{\overline{k}_1}{\mu_1}\left[\left(\frac{\Delta P^+}{\Delta L}\right)-\left(\frac{\Delta P}{\Delta L}\right)_c\right]. \tag{12}$$

Pentru valori neneglijabile ale lui $(\Delta P/\Delta L)_c$, nu numai că ecuația (12) este singura valabilă, dar diferențele dintre presiunile celor două faze (1 și 2), P_1 și P_2, de ambele părți ale aceluiași menisc situat în secțiunea amonte sau aval a elementului analizat, devenind neglijabile în raport cu căderea de presiune datorită meniscurilor întîlnite pe parcursul dintre secțiunea amonte și secțiunea aval, se pot neglija diferențele între presiunile P_1 și P_2 a celor două faze în aceeași secțiune de curgere și se poate neglija de asemenea indicele 1 în termenul ΔP_1^+ în ecuația (12). Acceptarea ecuației (3) sau (3') în cazul vitezelor suficient de mari este cauza că în majoritatea (dar nu totalitatea) experiențelor de laborator în care $(\Delta P/\Delta L)_c$ nu a putut fi determinată, fiind nu numai neglijată, dar neluată în considerare, permeabilitatea aparentă fiind redusă prin referință la căderea totală de presiune în probă (și nu numai la excedentul citat), s-a ajuns al concluzia că, în limitele aparente ale erorilor experimentale, permeabilitatea relativă ar fi independentă de viteze, respectiv de gradientul mediu al presiunilor exterioare aplicat. Concentrarea binecunoscută a căderilor de presiune datorite frecărilor în curgerea plan-radială către gaura de sondă, în imediata

apropiere a acesteia, a condus, mai mult sau mai puţin direct, la concluzia că, pierderile de presiune datorite frecărilor fiind foarte mici în regiunile depărtate de gaura de sondă în comparaţie cu căderea totală, interesul cunoaşterii lor mai exacte, ţinînd seama eventual de căderile capilare, ar fi mic sau chiar nul. Printre cercetătorii ale căror experienţe au sesizat efectele dependenţei permeabilităţilor relative de viteză se pot cita : Morse [14], Henderson şi Yuster [v. 24], Leas şi colab. [12], Richardson şi colab. [22], Rapoport şi Leas [21], Caudle şi colab. [2], Osoba şi colab. [19] şi alţii.

Din nenorocire, marea lor majoritate a atribuit acest rezultat binecunoscutului „efect de capăt" (end effect), real şi cauzînd deviaţii sistematice de acelaşi sens ca cele datorite neglijării efectelor capilare citate. Pentru eliminarea acestui efect de capăt ei au conceput, realizat şi aplicat diverse artificii sau procedee, dintre care cel mai răspîndit este cel al utilizării vitezelor relativ mari ale curgerii. Această soluţie, de departe cea mai simplă de realizat şi ieftină, era de natură să conducă experienţele într-un domeniu în care permeabilităţile efective să fie practic independente de viteze, dar în acelaşi timp un domeniu de condiţii care nu se întîlnesc efectiv decît într-o fracţie extrem de mică (mergînd de la 0,01% pînă la cel mult 1%) din volumul zăcămîntului. În aceste condiţii, căderile capilare de presiune erau efectiv mascate de cele de frecare, iar restul (nemascat) influenţei vitezelor (rate sensivity) asupra permeabilităţilor efective era explicat subiectiv. Unii [19], [21], o atribuie exclusiv efectelor de capăt, alţii pledează pentru importanţa ei practică redusă. Chiar cei care, luînd măsurile cele mai îngrijite pentru eliminarea efectelor de capăt, întîlnesc totuşi o dependenţă a permeabilităţilor de viteză ocolesc recunoaşterea cauzelor reale prin exprimări ambigue, ca, de exemplu, [22] : „The results of these show that changing pressure gradient or rate of flow (in the viscous flow range) did not change the drainage relative permeability saturation *relations* (subliniat de noi), ceea ce în limitele traducerii poate însemna :

— fie că nu a modificat valorile permeabilităţilor relative (subînţeles „pentru aceeaşi saturaţie"), sens inexact din punct de vedere fizic, dar susţinînd teza neglijabilităţii efectului vitezei ;

— fie că nu a modificat *aspectul curbelor* de relaţie între permeabilităţi şi saturaţie, ceea ce, cu oarecare rezerve şi precizări, poate să fie la rigoare admis, însă nu lămureşte cu nimic problema dependenţei permeabilităţilor efective de viteze.

Pentru elucidarea problemei se dispunea în principiu de două căi :

— una directă, a organizării unei serii de lurări experimentale în condiţii medii de precizie, de dorit superioare celor realizate de autorii citaţi, dar într-o gamă de viteze comparabile cu cele care se întîlnesc în curgerile reale din zăcămînt la distanţe de gaura de sondă de ordinul a 20 ...200 m, gamă de viteze atinsă de-abia la limită de cercetătorii citaţi, şi

— alta, exploatarea cît mai completă posibilă a materialului experimental disponibil în publicaţiile aceloraşi cercetători.

Fiind bine cunoscute costul extrem de ridicat al lucrărilor experimentale de determinare a curbelor de permeabilitate relativă, dificultăţile realizării aparaturii corespunzătoare în condiţiile exigenţelor speciale ale problemei (eliminarea efectelor de capăt etc.), esenţial necesare în această

problemă, și volumul excepțional de muncă de nivel mediu de calificare, derivate la rîndul lor din : *a*) necesitatea de a realiza debite *constante și foarte mici* de ordinul a sub 10^{-4} cm^3/s, măsurabile cu o eroare de ordinul a 10^{-7} cm^3/s, *b*) necesitatea de a realiza membrane cu permeabilitate perfect selectivă pentru lichidele utilizate, *cu proprietăți constante, reproductibile și rezistînd la diferențe de presiune relativ mari* pentru a permite și cercetarea fenomenelor generate de interfețele conținute în porii fini ai rocelor, *c*) necesitatea realizării stărilor de saturație îngrijit controlate și măsurate, *d*) durata apreciabilă a ridicării unei singure curbe*) prin metode suficient de exacte, cu excluderea oricărei „metode expeditive", s-a considerat că întreprinderea unei cercetări pe prima din căile indicate nu s-ar putea încadra nici într-un timp acceptabil, nici în mijloacele disponibile și că ar fi mult mai rațional a se recurge la calea a doua, cea a exploatării materialului disponibil în literatură. Una dintre dificultățile întîlnite în această cale, și nu una dintre cele mai mici, a fost aceea datorită faptului că în publicațiile respective nu erau indicate integral și în amănunt condițiile de lucru, ceea ce limitează folosirea lor într-un mod insuficient cunoscut, decurgînd din necunoașterea în multe cazuri a ponderii relative care s-ar putea acorda acestor diverse rezultate. Din cauza motivelor subiective menționate, ilustrate mai sus în cazul lucrării lui Richardson și colab. [22], este foarte probabil ca, cu ocazia selectării materialului numeric prezentat, să se fi eliminat de preferință rezultatele care tindeau să infirme teza autorului citat, aceea a independenței permeabilităților efective de viteză, adică chiar datele cele mai necesare problemei puse în prezenta lucrare. Pentru estimarea ponderii relative a acestor rezultate, vom analiza vitezele și gradienții de presiune întrebuințați.

Analiza vitezelor. Datele relative la viteze, exprimate ca viteze de filtrație prin referință la secțiunea brută, au fost deduse plecîndu-se de la datele debitelor și secțiunilor (în general carote de diametre cuprinse între 7/8 și 1 țoli). Cazurile în care nu se indicau decît diferențele totale de presiune aplicate au fost excluse din această analiză, pentru a se evita incertitudinile cauzate mai cu seamă de lipsa de informație asupra lungimii de parcurs pe care s-a produs această cădere de presiune. Această incertitudine provenea din faptul că, în cîteva cazuri, căderile de presiune păreau să cuprindă și pe cele produse pe porțiunile terminale destinate să „absoarbă" efectele de capăt.

În cîteva cazuri, chiar indicațiile asupra lungimii carotelor erau ambigue. În limitele acestor incertitudini și ambiguități ale materialului, informațiile asupra vitezelor utilizate sînt :

Autorul	Lucrarea	Viteza min.	Viteza max.
Claude , Slobod	[2] p.149	0,078nm/s	—
Richardson și colab.	[22] p.189	0,91 "	200nm/s
Geffen și colab.	[8] p.100	0,36 „	—
Osoba și colab.	[19]	(v. analiza gradienților de presiune)	

Concluzia este că vitezele minime utilizate au fost de ordinul 0, 1... 0,4 10^{-4} cm/s. Trebuie de asemenea remarcat că cea mai mare parte dintre

*) de ordinul unei săptămîni, prin metoda Hassler.

cercetători *nu au acordat decît o pondere redusă rezultatelor obținute cu aceste viteze minime, rar și puțin utilizate în curbele construite.* Astfel, cu toate că Caudle [2] citează cea mai mică dintre minime ca fiind 0,078 nm/s (corespunzînd la un debit de 0,00005 cm³/s, de altfel foarte greu de realizat constant și destul de greu de măsurat), *nu utilizează efectiv* pentru studiul relației permeabilitate-saturație (pentru faza umezitoare) decît valori cuprinse

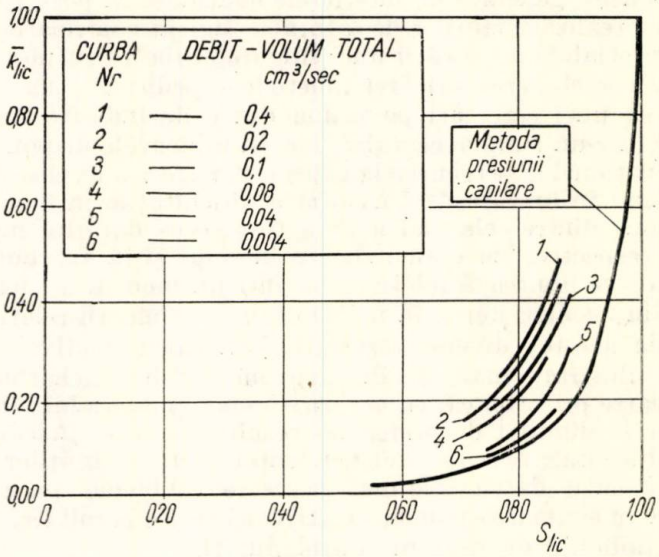


Fig. 5. — Variația permeabilității relative pentru faza umezitoare, măsurată de Caudle [2], la diferite viteze (debite).

în gama de peste 6,2 nm/s, adică o minimă de 100 de ori superioară celei indicate în paragraful informativ asupra condițiilor de lucru (v. fig. 10 din [2], reprodusă aici ca fig. 5). Reluînd rezultatele sale și transpunîndu-le în $\bar{k}_u = f(v_f)$, $\bar{k}_u$ fiind permeabilitatea relativă pentru faza umezitoare, pentru cazul particular în care saturația $S_u = 0,8$ (dacă se iau ca valori $S_u = 0,7$ sau 0,6, rezultatele rămîn foarte asemănătoare, dar precizia lecturilor grafice fiind mai mică, acestea nu au mai fost redate aici) se obțin curbele din figura 6. Din această figură se poate deduce :

1. Reducerea netă și regulată a „permeabilității relative" (estimată cu o ecuație de genul (3), respectiv (3'), o dată cu reducerea vitezei. Regularitatea curbei obținute este chiar surprinzătoare, dacă se ține seama de faptul că lectura curbelor originale a implicat o incertitudine de aproape $\pm$ 0,01 $\simeq \Delta\bar{k}$ datorită grosimii curbelor autorului.

2. Concordanța relativ mai puțin satisfăcătoare a punctului pentru viteza minimă utilizată de 6,2 nm/s e imputabilă erorilor care survin în aceste condiții, ceea ce, la rîndul său, explică evitarea vitezelor mai mici, deși autorul indică experimentarea unei viteze cam de 100 ori mai mică, 0,078 nm/s. Faptul că permeabilitățile determinate prin metode Hassler sînt constant superioare celor determinate prin celelalte metoda e de natură a susține teza prezentei lucrări, dependența permeabilităților efective calculate cu (3) de viteze, și dacă nu s-a putut utiliza efectiv acest argument

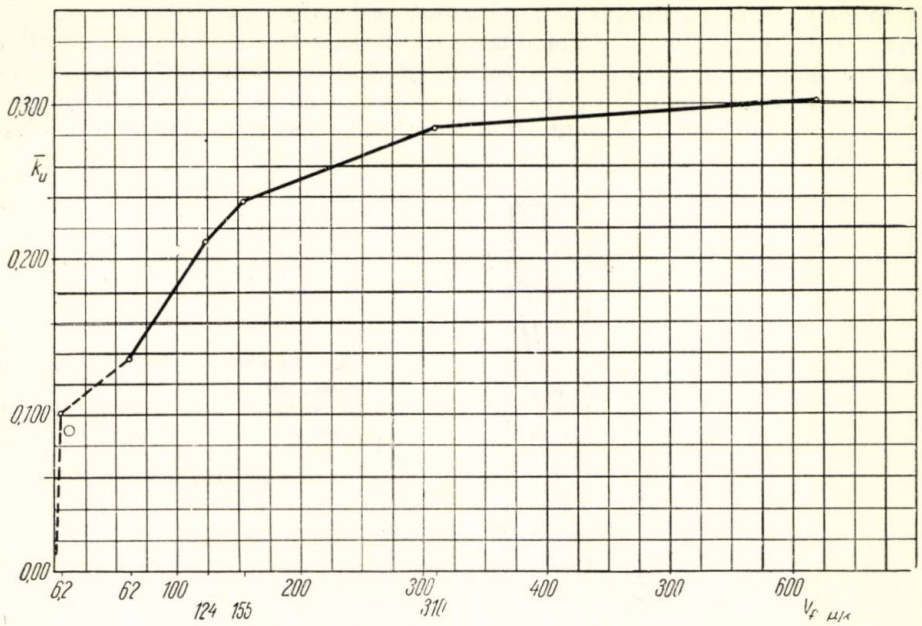


Fig. 6. — Variația permeabilității relative pentru faza umezitoare în funcție de viteza de filtrație, calculată din datele lui Caudle, fig. 5.

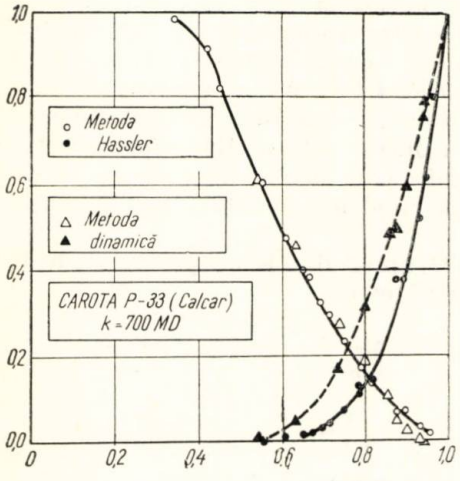


Fig. 7. — Comparație între curbele de permeabilitate relativă pentru faza umezitoare ridicate prin metoda Hassler și metoda dinamică (single core) după Osoba și colab. [19].

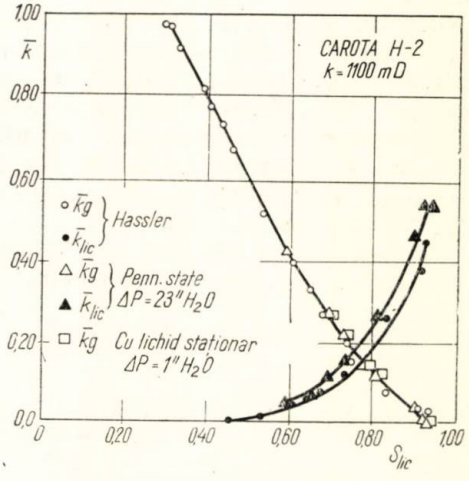


Fig. 8. — Comparație între curbele de permeabilitate relativă pentru faza umezitoare ridicate prin metoda Hassler, aceea a Colegiului de stat din Pennsylvania și aceea a lichidului staționar a lui Osoba și colab. [19].

este numai pentru că singura indicație asupra vitezelor folosite de autori [21], [12] este semicantitativă : vitezele utilizate prin metoda Hassler sensibil mai mici (v. fig. 7, 8 și 9 (durata determinărilor cam de 20 de ori

mai mare)). În discuţiile [10]—[19], Sandiford şi Josendal întreabă dacă la inferioritatea valorilor $\bar{k}_u$ determinate după Hassler, s-ar datora erorilor experimentale sau e reală, fiind datorată unui alt mecanism de curgere sau dezlocuire (wether the observed difference is caused by errors in technique or actually represents different fluid flow and fluid displacement mecha-

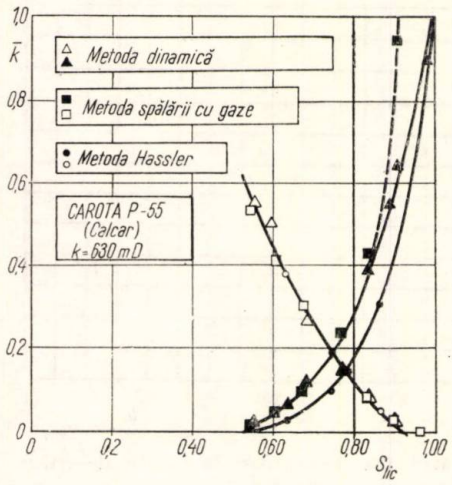


Fig. 9. — Comparaţie între curbele de permeabilitate relativă pentru faza umezitoare ridicate prin metoda Hassler, prin metoda dinamică (single core) şi prin aceea a spălării cu gaze a lui Osoba şi colab. [19].

nism, p. 55, l. cit.), şi autorii răspund că, deşi diferenţele au fost constatate printr-un mare număr de măsurători foarte precise (ceea ce echivalează cu o negare a versiunii explicării prin erori experimentale), nu s-a ajuns la nici o concluzie precisă asupra *posibilităţii* vreunui alt mecanism diferit de curgere : „These differences have been present in a large number of a very accurate comparisons, of which only a few of the representative curves are shown in the paper. No definite conclusions have been reached as to the possibility of different flow or fluid displacement mechanisms" (p. 56, op. cit.).

Analiza gradienţilor de presiune. Grupînd datele asupra gradienţilor de presiune utilizaţi de autorii citaţi, se găseşte :

Autorii	Lucrarea şt locul	Grad P min	Grad P max
Osoba şi colab.	[19] fig. 1, p.44	9 $\gamma_{apă}$	260 $\gamma_{apă}$
" "	[19] fig. 4, p.50	19 "	217 "
" "	[19] p.51	„gradienţi de presiune f. scăzuţi"	
" "	[19] fig. 7, p.52	15 $\gamma_{apă}$	270 $\gamma_{apă}$
" "	[19] fig. 11, p.54	circa 2 "	
Geffen şi colab.	[8] fig. 3, p.101	19 "	173 "

În afară de aceste date concrete, se găseşte în lucrarea lui Rapoport şi Leas [21] „The flowing pressure gradient in the liquid is kept constant and sufficiently low so as not to disturb the capillary equilibrium and the previously established saturation", fără vreo altă indicaţie. În sprijinul

tezei acestei lucrări vine faptul că [21] fig. 10, p. 91 punctele notate cu X reprezintă valori experimentale pentru care s-a menținut un gradient de presiune dublu celui utilizat pentru punctele notate cu „0" și „Δ", obținîndu-se (cu o singură excepție, și aceasta discutabilă, fiind situată la extremitatea gamei saturațiilor posibile) cu regularitate valori ale permea-

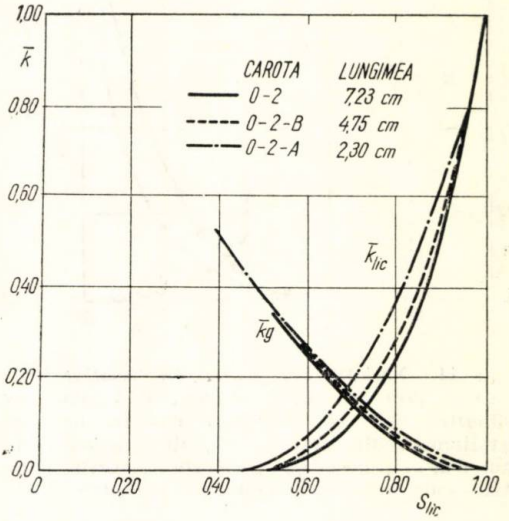


Fig. 10. — Variația permeabilității relative pentru faza umezitoare determinată pe carote de lungimi diferite din aceeași carotă, experiențele lui Richardson [22], pentru a ilustra efectul gradientului de presiune modificat prin lungimea probei.

bilităților aparent mai mari în cazurile gradienților de presiune mari. În același sens ar pleda informația din lucrarea lui Richardson și colab. [22 fig. 20, p. 196] redată aici ca figura 10, prin care se arată că s-au obținut permeabilități mai mici lucrînd pe carote mai lungi, dacă această informație ar fi fost completată prin precizarea : „toți ceilalți factori rămînînd neschimbați", inclusiv ΔP, ceea ce pare destul de plauzibil. Pentru o argumentare mai puțin susceptibilă de rezerve, vom face apel la rezultatele experimentale ale lui Osoba și colab. [19] fig. 1, p, 48; fig. 4, p. 50; fig. 7, p. 52 exemplificate aici în figurile 11, 12 și 13.

Transpunînd aceste curbe sub forma $\bar{k}_u = f(\text{grad } P)$, se obține :

1. Pentru datele din figura 11 (limitate la două puncte pentru fiecare saturație), rezultatele prezentate în figura 14 care arată prin extrapolare că există o valoare pentru gradientul de presiune, pentru care permeabilitățile efective sînt nule, ca și pentru oricare valoare a gradientului mai mică decît aceasta.

Din cauza numărului mic de puncte (lipsă de date pentru gradienții de presiune superiori lui 35 $\gamma_{apă}$) curbele nu ating domeniul marilor gradienți în care $\bar{k}_u$ tinde către valori constante (a se compara cu fig. 11 și 12). Este evident că o asemenea comportare nu corespunde valabilității unei ecuații de tip clasic (3) sau (3') ci uneia de tip (12), cu o valoare de circa 6,4 $\gamma_{apă}$ pentru termenul $(\Delta P/\Delta L)_c$. Faptul că în acest caz particular valoarea lui $(\Delta P/\Delta L)_c$ este aceeași pentru stări de saturație diferite nu reprezintă o regularitate, ci este probabil rezultatul lipsei relative de informații. Această concluzie se sprijină pe examinarea figurilor 15 și 16, în care valo-

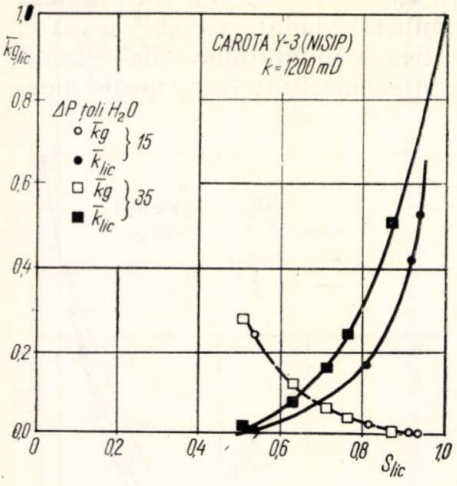


Fig. 11. — Variația permeabilității relative pentru faza umezitoare determinată sub diferite valori ale diferenței motoare de presiune, pentru studiul influenței gradientului de presiune asupra permeabilității relative, după lucrarea lui Osoba și colab. [19].

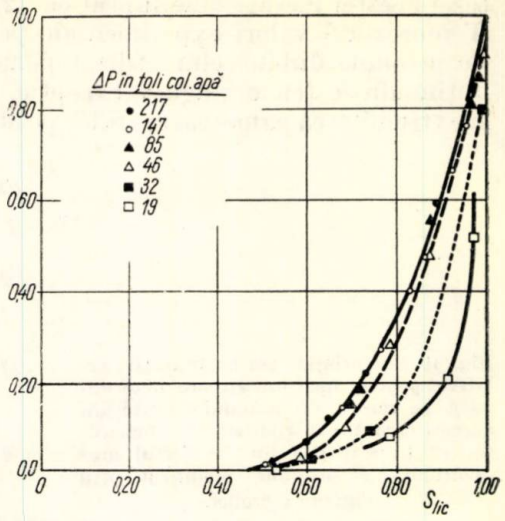


Fig. 12. — Variația permeabilității relative pentru faza umezitoare determinată sub diferite valori ale diferenței motoare de presiune, pentru studiul influenței gradientului de presiune asupra permeabilității relative, după lucrarea lui Osoba și colab. [19].

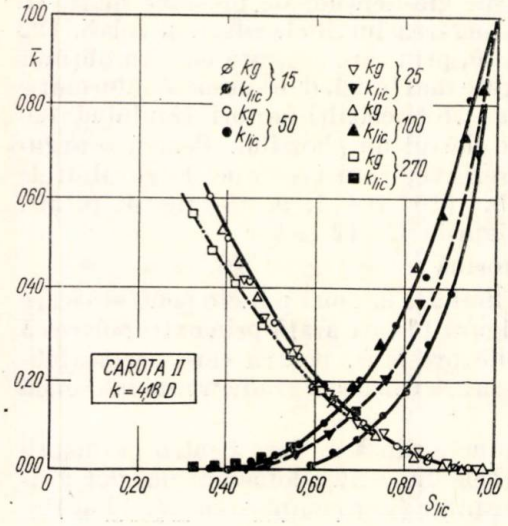


Fig. 13. — Variația permeabilității relative pentru faza umezitoare determinată sub diferite valori ale diferenței motoare de presiune, pentru studiul influenței gradientului de presiune asupra permeabilității relative, după lucrarea lui Osoba și colab. [19].

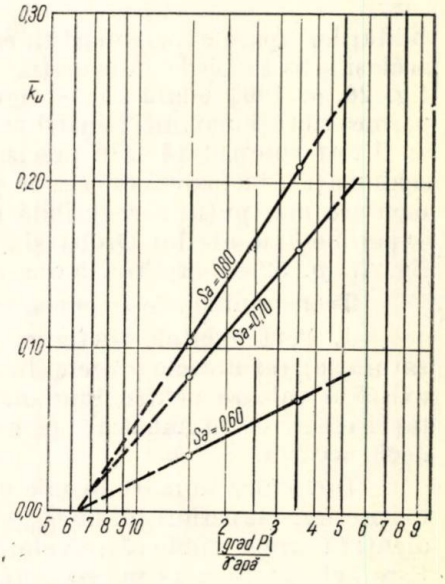


Fig. 14. — Variația permeabilității relative aparente, calculate cu ecuația (3′), pentru faza umezitoare în funcție de gradientul de presiune motoare aplicat, curbe stabilite plecînd de la datele din figura 11.

rile $(\Delta P/\Delta L)_c = f(S_u)$ se eşalonează vizibil şi destul de regulat pe un interval relativ mic, dar nu nul.

2. Prin datele din figura 12, cea mai bogată în informaţii, rezultatele prezentate aici în figura 15 sînt vizibil de natură a conduce către necesitatea unei ecuaţii de curgere de tipul (12), în loc de (3), respectiv (3′).

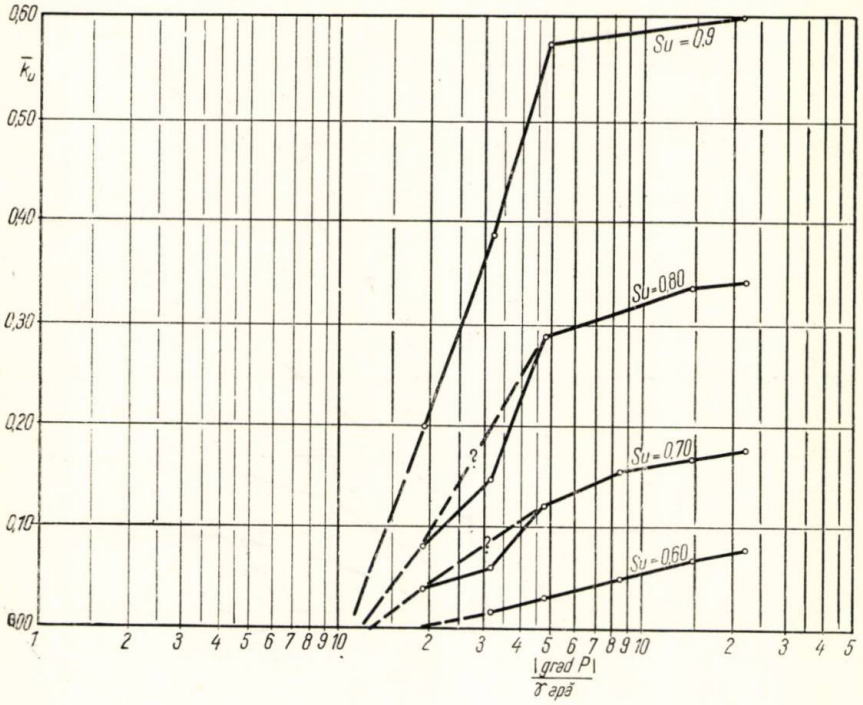


Fig. 15. — Variaţia permeabilităţii relative aparente, calculată cu ecuaţia (3′), pentru faza umezitoare în funcţie de gradientul de presiune motoare aplicat, curbe stabilite plecînd de la datele din figura 12.

Dacă se ţine seama de faptul că în figura de bază, aici 12, curba permeabilităţii pentru $\Delta P/\Delta L = 32\gamma_{apă}$ se sprijină practic numai pe două puncte (al treilea fiind vecin cu punctul de convergenţă $S_{apă} = 1$) şi se convine să i se acorde o pondere mai mică, ne putem permite netezirea figurată punctat în figura 11 în gama de gradienţi cuprinsă între valorile $19\gamma_{apă}$ şi $46\ \gamma_{apă}$. Se poate astfel observa că curbele $\bar{k}_u = f\,(\text{grad}\ P)$ prezintă o remarcabilă regularitate, interceptînd axa gradienţilor la valori ale acestora, crescînd regulat pe măsură ce saturaţia S_u e în fază umezitoare se apropie, reducîndu-se, de $S_u = 0{,}5m$, stare care în principiu prezintă probabilitatea unei frecvenţe maxime a alternanţelor de interfeţe.

În cazul figurii 12, respectiv 15, valorile-prag ale gradientului $(\Delta P/\Delta L)_c$ care trebuie introduse în ecuaţia (12) se eşalonează între $11 \ldots 17\gamma_{apă}$, cu regularitatea indicată.

3. Pentru datele din figura 13, de asemenea bogată în informaţii, rezultatele sînt de aceeaşi natură (fig. 16). Acest caz prezintă importanţa particulară de a fi împins investigaţiile pînă într-o gamă de gradienţi destul de mari în raport cu valorile-prag, pentru ca tendinţa independenţei permeabilităţii de gradienţii de presiune, cînd aceştia au valori mari, să apară

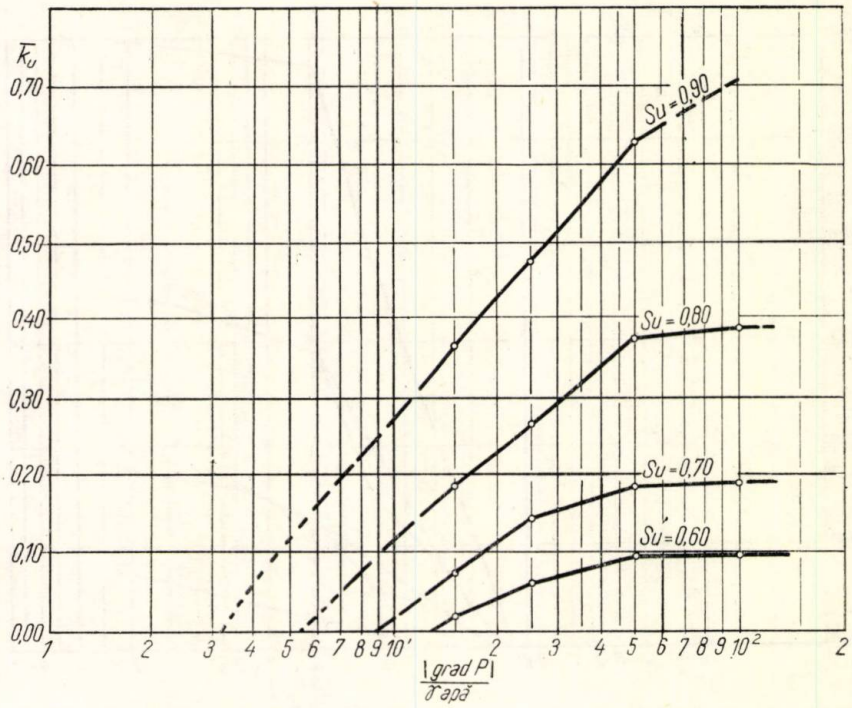


Fig. 16. — Variaţia permeabilităţii relative aparente, calculată cu ecuaţia (3'), pentru faza umezitoare în funcţie de gradientul de presiune motoare aplicat, curbe stabilite plecînd de la datele din figura 13.

vizibil. În realitate gradienţii utilizaţi au fost, în valoare absolută, aceiaşi ca în cazul precedent. Numai din cauza inferiorităţii valorilor-prag în acest ultim caz valorile relative $(\Delta P/\Delta L)/(\Delta P/\Delta L)_e$ au atins domeniul asimptoticităţii permeabilităţii. Pentru aceeaşi cauză valorile-prag sînt relativ mai împrăştiate, ceea ce, de altfel, nu schimbă cu nimic concluzia necesităţii aplicării unei ecuaţii de tip (12). Dacă analiza efectului vitezelor arată că, în condiţiile acestor experienţe, permeabilităţile relative calculate cu ecuaţia (3) sau (3'), pe care le vom numi „permeabilităţi aparente", sînt efectiv dependente de vitezele de filtraţie utilizate, analiza gradienţilor de presiune arată că, în cazurile examinate, curgerea nu se produce sub acţiunea valorii integrale a gradientului de presiune aplicat, ci numai sub acţiunea unei părţi a acestuia : excedentul cu care el depăşeşte valoarea-prag a gradientului de presiune caracteristic sistemului rocă-fluid şi stării de saturaţie respective. Tendinţa vizibilă a acestui gradient prag de a se micşora pe măsură ce starea de saturaţie se apropie de condiţiile curgerii

monofazice (saturația în faza principală tinzînd către unitate) poate fi explicată prin probabilitatea, evident mai mică, a prezenței alternanțelor de faze și deci și a meniscurilor care, cumulînd diferențele capilare de presiune generează gradientul-prag, pe măsură ce starea de saturație tinde către omogeneitatea curgerii. Pentru a compara importanța relativă a acestor gradienți-prag (care în condițiile figurilor 11—13, respectiv 14—16, sînt cuprinse între 6 și 18 $\gamma_{apă}$) cu a gradienților de presiune datorîți frecărilor, s-au reprezentat în figura 17 în coordonate „gradienți de presiune în funcție de permeabilitatea absolută a rocii fictive corespunzînd diametrelor elementelor rocii fictive" :

1. Curbele gradienților-prag datorîți existenței alternanțelor interfețelor, și nu numai curba valorii maxime calculată după ecuația (11) și reprezentată în figura 4, dar și curbele pentru valori cu mult mai mici : o sutime, respectiv o miime din valoarea indicată în figura 4, pentru a ține seama de existența derivațiilor (by pass) posibile pentru diferite frecvențe (cele trei curbe superioare)

2. Modulii gradienților de presiune datorîți frecărilor în curgere omogenă în aceleași patru situații ale debitelor sondelor și viscozității țițeiului citate în fig. 4 și încadrînd practic toate situațiile care se pot întîlni în zăcămînt (cele patru curbe inferioare) la distanța de $R = 20$ m de axa sondei. Această valoare separă zăcămîntul în două porțiuni : prima în care $R < 20$ m și care reprezintă circa 1% din volumul elementului de zăcămînt drenat de sonda respectivă și alta în care $R > 20$ m, circa 99% din același volum al zăcămîntului. Comparînd 1 cu 2 se poate deduce că în mai mult de 99% din volumul zăcămîntului gradienții capilari de presiune, chiar reduși la 1/100...1/1000 din valoarea maximă pentru a se obține seama de posibilitățile de ocolire și de efectele histerezei de udare, depășesc gradienții de presiune în curgere omogenă a unui același țiței (și cu atît mai mult la apă), în aceeași rocă, la aceeași distanță de sondă.

3. Gamele gradienților de presiune efectiv utilizați în experiențele lui Geffen și Osoba (în dreptunghiuri — linii pline verticale aproape de axa gradienților și paralele cu aceasta).

Examinarea figurii 17 permite concluziile :

α—gradienții-prag deduși din experiențe care au condus la figurile 11—13 și 14—16 concordă într-un mod satisfăcător cu valorile 1/100 ... 1/1000 din $(\Delta P/\Delta L)_{c\,max}^{-}$ dacă se ține seama de existența numeroșilor factori perturbatori, de lipsa datelor de plecare și de faptul că lucrările experimentale publicate nu indică toate condițiile de lucru (de exemplu în cazul fig. 12, respectiv 15, iar fi fost de dorit să se cunoască permeabilitatea absolută a carotei întrebuințate) ;

β — gradienții de presiune necesari pentru învingerea frecărilor sînt inferiori, în mai mult de 99% din volumul zăcămîntului, valorii de 1/1000 din gradientul mediu de presiune datorit efectului analog celui lui Jamin și de ordinul de mărime al gradientului-prag citat ;

γ — gradienții de presiune exteriori, utilizați în experiențele care au avut drept scop determinarea dependenței permeabilităților relative de saturațiile respective, au fost întotdeauna superiori celor capilari întîlniți în zăcăminte (valori-prag estimate prin calcul sau măsurate experimental) ;

δ — aceiași gradienți utilizați în lucrările de determinare a curbelor $\overline{k_i} = f(S_i)$ au fost practic totdeauna prea mari pentru a permite identificarea

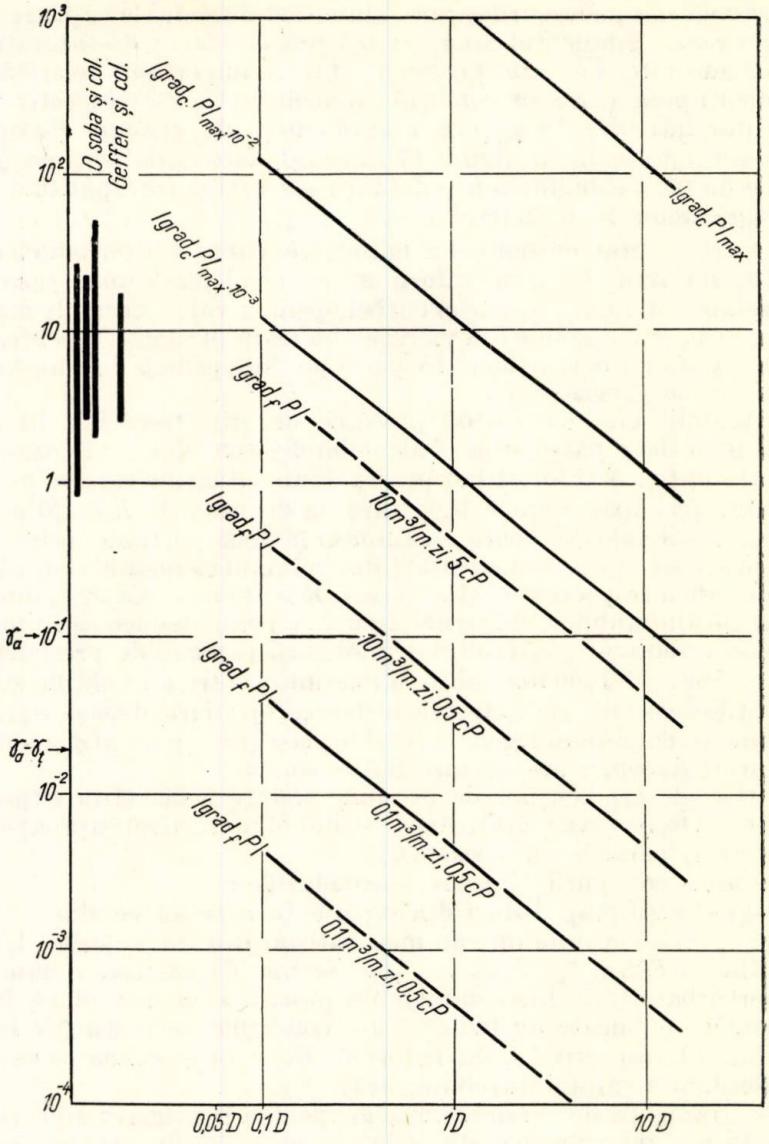


Fig. 17. — Comparație între gradienții de presiune (at/m) care se opun curgerii, cauzați de forțele de interfață (cele două curbe superioare), de către forțele de frecare (Darcy) în cele patru cazuri citate în figura 4 (dar la distanță de $R = 20$ m de axa găurii de sondă), prin propria greutate a fluidelor ($\gamma_{apă}$ și $\gamma_{apă} - \gamma_{țiței}$), și gradienții utilizați în experiențele lui Geffen și colab. [8] și acelea ale lui Osoba și colab. [19], în funcție de permeabilitatea absolută.

fără ambiguitate a prezenței gradientului-prag și, în consecință de a înlocui ecuațiile de tip (3)—(3′) prin tipul (12);

ε — în condițiile ce se întîlnesc în mai mult de 99% din volumul zăcămîntului, ecuațiile clasice de tip (3) — (3′) nu reprezintă fizic relația cauză-efect a curgerii heterogene și în acest procent de 99% al zăcămîntului tipul de ecuație care reprezintă fizic fenomenul este acela cu gradient-prag (12).

Obiecția eventuală și destul de naturală la prima vedere că suma căderilor de presiune capilare între contur și sondă ar putea fi (și uneori chiar mult) inferioară căderii totale, disponibilă pe același parcurs, nu are valoare decît în ceea ce privește bilanțul căderilor de presiune la un moment dat și consecința lui, debitul instantaneu al sondei (și chiar în acest caz fenomenele de blocaj în zona vecină sondei, prea frecvente din păcate, temperează această concluzie).

Tocmai această aparență este cauza care a întîrziat punerea corectă a problemei și tragerea concluziilor realizate în lucrarea de față.

În ceea ce privește însă evoluția în timp a proceselor de dezlocuire în zăcămînt, obiecția cade. Într-adevăr, chiar fără o rezolvare analitică a problemei distribuțiilor vitezelor și presiunilor în fiecare moment, într-o curgere radial-plană centripetă, apare evident că în porțiunile din zăcămînt în care $(\Delta P/\Delta L) < (P/L)_c$, faza respectivă este staționară, în timp ce în altele, eventual situate la aceeași distanță de sondă sau chiar mai departe, aceeași fază poate curge, și anume cu o viteză proporțională cu excedentul $(\Delta P/\Delta L) - (\Delta P/\Delta L)_c$ respectiv, ceea ce provoacă amorsarea și dezvoltarea instabilităților de front, instabilități responsabile în cea mai mare parte de faptul că din majoritatea zăcămintelor nu se reușește decît extragerea unor fracții foarte mici din conținutul inițial de hidrocarburi.

Primită la redacție la 15 ianuarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Amyx J. W., Bass D. M., Whiting R. L., *Petroleum reservoir engineering*, Mc. Graw Hill 1960.
2. Caudle B. H., Slobod R., Brownscombe E. R., *Further developments in the laboratory determinations of relative permeability*, Trans. AIME **192**, 1951, 1945.
3. Cloud W. F., *Variation of pressure gradient with distance of rectilinear flow of gas-saturated oil and unsaturated oil through unconsolidated sands* (Part I of final report of API Project No. 33) Trans. AIME **86**, 337 (1930).
4. Cristea N., *Hidraulica subterană* (partea I) Edit. tehnică, București, 1956.
5. Darcy H. G., *Les fontaines publiques de la ville de Dijon*. Expositions et applications des principes à suivre et formules à employer dans les questions de distributions de l'eau. Victor Dalmont, librairie des Corps Impériaux des Ponts et Chaussées et des Mines, Paris, 1856.
6. Freundlich H., *Kapillarchemie*, Leipzig, 1930. *Colloid and capillary chemistry*. Methuen, Co. London, 1926.
7. Gărdescu I., *Behavior of gas bubbles in capillary spaces*, Trans. AIME **86**, 351 (1930).
8. Geffen T. M. și colab., *Experimental investigations of factors affecting laboratory relative permeability measurements*, Trans. AIME **192**, 99 (1951).
9. Ghimatudinov S. K., *Fizika nefteanogo plasta*, Gostoptehizdat, Moscova—Leningrad, 1963.
10. Josendal V. A., *Discussions to* [19], Trans. AIME, **192**, 55 (1951).
11. Leverett M. C., Lewis W. B., *Steady flow of gas-oil-water mixtures through unconsolidated sands*, Trans. AIME **142**, 107 (1941).

12. Leas W. J., Lenks L. M., Russell D. Ch., *Relative permeability to gas*, Trans. AIME **142**, 65 (1950).
13. Manolescu G., *Curs de fizica zăcămintelor de hidrocarburi*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1964.
14. Morse R. A. şi colab., *Paper 24 of the Mineral industries experimental station of the Pennsylvania State College 1947*, redat şi în „Relative permeability meassurements on small core samples. Oil and gas journal, **46**, 16 (23 August 1947).
15. Muskat M., Meres M. W., *Flow of gas liquid mixtures through sands*, Physics, **7**, 346 (1936).
16. Muskat M., Botset H., Meres M. W., Wyckoff R. D., *Flow of gas-liquid mixtures through sands*, Trans. AIME **123**, 69 (1937).
17. Muskat M., *Physical principles of oil production*, Mc Graw Hill N.Y. 1949.
18. Oroveanu Th., *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1966.
19. Osoba J. S., Richardson J. G., Kerver J. K., Hafford J. A., *Laboratory measurements of relative permeability*, Trans. AIME **192**, 47 (1951).
20. Penescu Tr., *Consideraţii asupra metodei de intensificarea afluxului de ţiţei în gaura de sondă prin reducerea tensiunii interfaciale apă-ţiţei*, Petrol şi Gaze, **3**, 116 (1958).
21. Rapoport L. A., Leas W. G., *Relative permeability to liquid in liquid-gas systems*, Trans. AIME **192**, 83 (1951).
22. Richardson J. G., Kerver J. K., Hafford J. A., Osoba J. S., *Laboratory determinations of relative permeability*, Trans. AIME, **195**, 187 (1952).
23. Scheidegger A., *Hydrodynamics in porous media*, Encyclopedia of Physics, vol. 9, J. Springer, Berlin, 1956.
24. Scheidegger A., *Physics of flow through porous media*, Univ. of Toronto Press, 1957.
25. Uren L. C. Bradshaw E. J., *Experimental study of pressure conditions within the oil reservoir rock in the vicinity of a high pressure producing well*, Trans. AIME, **198**, 48 (1932).
26. Uren L. C., Domercq, *Influence of well diameter upon the pressure gradient and the rate of flow of oil through the reservoir rock in the vicinity of a high pressure flowing well*, Trans. AIME **114**, 25 (1935).
27. Versluys J., *Can absence of edge water encrouchement in certains oil fields be ascribed to capillarity*, Bull. Amer. Assoc. Petroleum Geologists, **15**, 189 (1931).
28. Wyckoff R. D., Botset H. G., *Flow of gas liquid mixtures through sands*, Physics **7**, 325—345 (1936).

ARIPI CRUCIFORME ŞI AMPENAJE PREVĂZUTE CU FUZELAJ CONIC ÎN REGIM SUPERSONIC. I. MIŞCAREA CONICĂ

de DAN MATEESCU
Institutul de mecanică a fluidelor al
Academiei Republicii Socialiste România

533 : 629.135

În această lucrare este studiată mişcarea conică în jurul sistemelor aripă cruciformă-fuzelaj şi ampenaj-fuzelaj în cazul general cînd incidenţele sau pantele aripilor sînt constante pe porţiuni, luîndu-se în consideraţie diferitele poziţii ale bordurilor aripii faţă de conul Mach.
Printr-o serie de transformări convenabile, problema este redusă la studiul unei aripi cruciforme fictive avînd incidenţa variabilă după o anumită lege. Pentru rezolvarea acestei din urmă probleme, în lucrare se utilizează metoda analogiei hidrodinamice elaborată de prof. E. Carafoli.

NOTAŢII

U_∞ — reprezintă viteza curentului neperturbat,

a_∞ — viteza sunetului în condiţiile curentului neperturbat,

$M_\infty = \dfrac{U_\infty}{a_\infty}$ — numărul Mach, $B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$,

$Ox_1 x_2 x_3$ — sistem ortogonal de coordonate, axa Ox_1 fiind axa de simetrie a fuzelajului,

$y = \dfrac{x_2}{x_1}$, $z = \dfrac{x_3}{x_1}$ — coordonate adimensionale,

$\Phi\ (x_1, x_2, x_3)$ — potenţialul vitezei de perturbaţie, care în cazul mişcării conice este o funcţie omogenă de ordin unu,

$u = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1}$, $v = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2}$, $w = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3}$ — componentele vitezei de perturbaţie după direcţia axelor Ox_1, Ox_2, Ox_3.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Într-o lucrare anterioară [1] am tratat sistemul fuzelaj conic-aripă cruciformă subțire cuprins în întregime în interiorul conului Mach, aripa orizontală avînd incidența constantă α, iar placa verticală neavînd incidență.

În cele ce urmează vom încerca să extindem metoda stabilită în lucrarea menționată la studiul mișcării conice în jurul sistemelor aripă cruciformă-fuzelaj și ampenaj-fuzelaj în cazul general cînd incidențele sau pantele aripilor sînt constante pe porțiuni, luîndu-se în considerație diferitele poziții ale bordurilor aripii față de conul Mach.

După cum am arătat în lucrarea [1], din mișcarea în jurul sistemului considerat poate fi separată mișcarea axial-simetrică cunoscută în jurul fuzelajului izolat fără incidență.

Ocupîndu-ne de mișcarea care rezultă în urma acestei separări și considerînd sistemul aripă cruciformă-fuzelaj din figura 1, vom observa

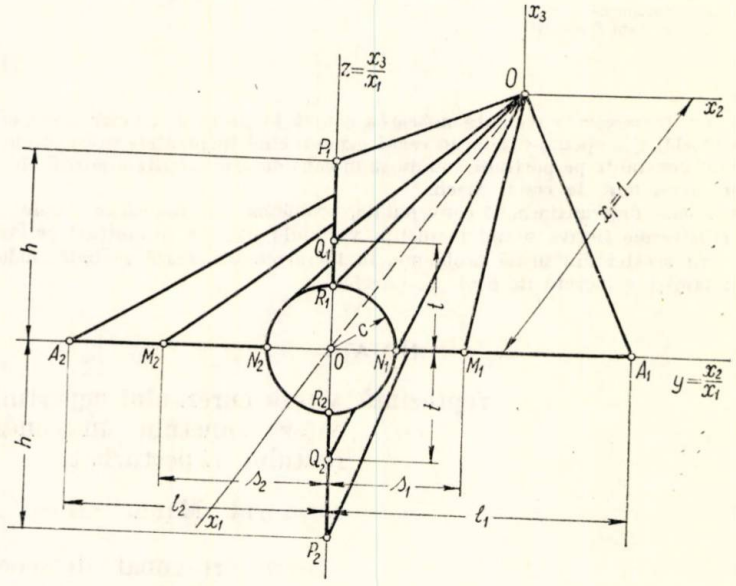


Fig. 1

că cazul general al acestui sistem poate fi obținut prin suprapunerea următoarelor cazuri de sisteme mai simple :

a) Sistemul la care fuzelajul are incidența laterală β_0 în plan orizontal, placa verticală considerată subțire are incidența laterală β_0 pe porțiunile centrale $R_j Q_j$ și incidența β_1 pe porțiunile $Q_j P_j$, iar aripa este subțire și are incidența nulă, sistem caracterizat prin condițiile

$$[(v + \beta_0 U_\infty)\cos\theta + w \sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \quad [w]_{N_j A_j} = 0 \qquad (j = 1,2), \tag{1a}$$

$$[v]_{R_j Q_j} = 0, \quad [v]_{Q_j P_j} = -\beta_1 U_\infty \qquad (j = 1,2). \tag{1b}$$

b) Sistemul la care fuzelajul şi aripa au incidenţa nulă, iar placa este de grosime simetrică, avînd panta simetrică $\pm\nu$, sistem caracterizat prin condiţiile

$$[v\cos\theta + w\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \quad [w]_{N_j A_j} = 0, \tag{2a}$$

$$[v]_{P_j R_j} = \pm\nu\, U_\infty \quad (j = 1,2,), \tag{2b}$$

unde semnul plus se referă la faţa din dreapta a plăcii, iar semnul minus la cea din stînga.

c) Sistemul la care fuzelajul are incidenţa α_0 în plan vertical, aripa are incidenţa α_0 pe porţiunile centrale $N_j M_j$ şi incidenţele α_j pe porţiunile $M_j A_j$, iar placa are incidenţa laterală antisimetrică $\pm\beta$ pe porţiunile $Q_j P_j$ şi incidenţa nulă pe porţiunile $R_j Q_j$, sistem caracterizat prin condiţiile

$$[v\cos\theta + (w + \alpha_0)\, U_\infty \sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \tag{3a}$$

$$[w]_{N_j M_j} = 0, \quad [w]_{M_j A_j} = -\alpha_j\, U_\infty \qquad (j = 1,2), \tag{3b}$$

$$[v]_{R_j Q_j} = 0, \quad [v]_{Q_j P_j} = (-1)^j\, \beta U_\infty \qquad (j = 1,2). \tag{3c}$$

d) Sistemul la care fuzelajul şi placa verticală au incidenţa nulă, iar aripa este de grosime simetrică, avînd panta $\pm\gamma_j$ pe porţiunile $M_j A_j$ şi panta nulă pe porţiunile $N_j M_j$, sistem caracterizat prin condiţiile

$$[v\cos\theta + w\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \quad [v]_{P_j R_j} = 0, \tag{4a}$$

$$[w]_{N_j M_j} = 0, \quad [w]_{M_j A_j} = \pm\gamma_j\, U_\infty \qquad (j = 1,2), \tag{4b}$$

unde semnul plus se referă la extradosul aripii, iar semnul minus la intrados.

După cum este uşor de văzut, la primele două cazuri, datorită simetriei plăcii, condiţiile pe aripă sînt satisfăcute automat, astfel încît problema se reduce în aceste cazuri la studiul mişcării conice în jurul sistemului aripă delta-fuzelaj tratat în lucrările anterioare [2], [3], care este însă rotit acum cu 90°.

Utilizînd în acest sens transformarea

$$\zeta^* = \frac{z}{1 - B^2 y^2}, \tag{5a}$$

$$\eta^* = -\frac{y\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 y^2}, \tag{5b}$$

în care rolul celor două coordonate este inversat, se obţine planul complex x^* (fig. 2*a*)

$$x^* = \zeta^* + i\eta^*, \tag{6}$$

plan în care axa verticală este reprodusă la aceeaşi scară ($\zeta^* = z^*$, $\eta = y = 0$), în timp ce dimensiunile aripii, situată pe axa orizontală, se modifică conform relaţiilor

$$\eta^* = -\frac{y}{\sqrt{1 - B^2 y^2}}, \quad l_j^* = \frac{l_j}{\sqrt{1 - B^2 l_j^2}} \qquad (j = 1,2). \tag{7}$$

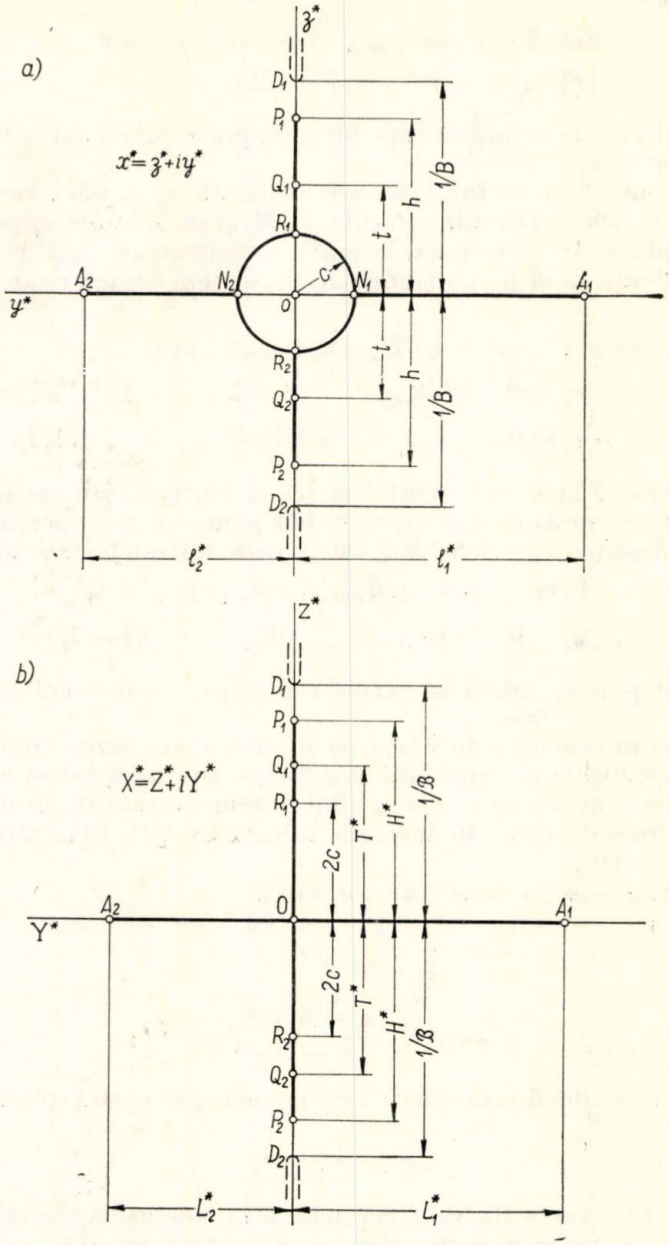

a)
$x^* = z^* + iy^*$
z^*
D_1
P_1
Q_1
R_1
A_2
N_2
C
N_1
A_1
y^*
O
R_2
Q_2
P_2
D_2
t
h
$1/B$
ℓ_2^*
ℓ_1^*
b)
$X^* = Z^* + iY^*$
Z^*
Y^*
$2c$
T^*
H^*
L_2^*
L_1^*

Fig. 2

Considerînd în ipoteza micilor perturbaţii că dimensiunile transversale ale fuzelajului sînt reduse faţă de conul Mach ($B^2 c^2 \ll 1$), fuzelajul va fi reprezentat în planul x^* prin cercul de rază c.

Procedînd în continuare în modul indicat în lucrările [2] şi [3], se vor obţine pentru primul caz, definit prin condiţiile (1), următoarele expresii pentru viteza axială de perturbaţie ($u = \mathrm{Re}\ \mathcal{U}$):

$$\mathcal{U} = \frac{A_{u0} + 2c^2 A_{v1}\left(1 + \frac{c^2}{x^{*2}}\right)}{\sqrt{h^2 - x^{*2}}\sqrt{1 - \frac{c^4}{h^2 x^{*2}}}} - \frac{2C}{\pi}\left(t - \frac{c^2}{x^*}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(H^* - X^*)(H^* + T^*)}{2H^*(T^* - X^*)}} -$$

$$- \frac{2C}{\pi}\left(t + \frac{c^2}{x^*}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(H^* + X^*)(H^* + T^*)}{2H^*(T^* + X^*)}} - \tag{8}$$

$$- \frac{2C}{\pi}\frac{c^2}{x^*}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(H^{*2} - X^{*2})(T^{*2} - 4c^2)}{(T^{*2} - X^{*2})(H^{*2} - 4c^2)}},$$

în cazul cînd bordurile plăcii sînt subsonice $\left(h < \frac{1}{B}\right)$, şi

$$\mathcal{U} = \frac{2Q}{\pi}\left(h - \frac{c^2}{x^*}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X^*)(1 + \mathcal{B}H^*)}{2\mathcal{B}(H^* - X^*)}} +$$

$$+ \frac{2Q}{\pi}\left(h + \frac{c^2}{x^*}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X^*)(1 + \mathcal{B}H^*)}{2\mathcal{B}(H^* + X^*)}} +$$

$$+ \frac{2Q}{\pi}\frac{c^2}{x^*}\arccos\sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}^2 X^{*2})(H^{*2} - 4c^2)}{(H^{*2} - X^{*2})(1 - 4\mathcal{B}^2 c^2)}} -$$

$$- \frac{2C}{\pi}\left(t - \frac{c^2}{x^*}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X^*)(1 + \mathcal{B}T^*)}{2\mathcal{B}(T^* - X^*)}} -$$

$$- \frac{2C}{\pi}\left(t + \frac{c^2}{x^*}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X^*)(1 + \mathcal{B}T^*)}{2\mathcal{B}(T^* + X^*)}} -$$

$$- \frac{2C}{\pi}\frac{c^2}{x^*}\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}^2 X^{*2})(T^{*2} - 4c^2)}{(T^{*2} - X^{*2})(1 - 4\mathcal{B}^2 c^2)}}, \tag{9}$$

în cazul cînd bordurile plăcii sînt supersonice $\left(h > \frac{1}{B}\right)$ în care am notat

$$X^* = x^* + \frac{c^2}{x^*}, \qquad \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1 + B^2 c^2}{B}, \tag{10a}$$

$$H^* = h + \frac{c^2}{h}, \qquad T^* = t + \frac{c^2}{t}, \tag{10b}$$

$$C = \frac{(\beta_1 - \beta_0)\, U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 t^2}}, \qquad Q = \frac{\beta_1\, U_\infty}{\sqrt{B^2 h^2 - 1}} \tag{10c}$$

şi în care A_{u0} şi A_{v1} se determină în modul indicat în lucrările menţionate.

Astfel, de exemplu, dacă întreaga placă are aceeaşi incidenţă β_0 ca şi axa fuzelajului, viteza axială de perturbaţie va avea, în cazul cînd bordurile plăcii sînt subsonice, expresia

$$u = \operatorname{Re} \mathcal{U} = \operatorname{Re} A_0 \frac{1 + \frac{c^4}{h^4} - 2\frac{c^4}{h^2 x^{*2}}}{\sqrt{h^2 - x^{2*}}\sqrt{1 - \frac{c^4}{h^2 x^{*2}}}}, \tag{11}$$

în care

$$A_0 = \frac{\beta_0 U_\infty h^2}{E(k)} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{h^2} B^2 c^2 \left[\frac{K(k)}{E(k)} - 2 + \frac{2}{3}\frac{c^4}{h^4}\left(\frac{1}{8} - B^2 h^2\right)\right]}, \tag{12}$$

unde $K(k)$ şi $E(k)$ sînt integrale eliptice de speţa I şi, respectiv, a II-a de modul

$$k = \sqrt{1 - B^2 h^2}.$$

Pentru cel de-al doilea caz, definit prin condiţiile (2), se obţine, procedînd într-un mod asemănător, următoarea expresie a vitezei axiale de perturbaţie ($u = \operatorname{Re} \mathcal{U}$):

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} = &- \frac{2G}{\pi}\left(h - \frac{c^2}{x^*}\right) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X^*)(1 + \mathcal{B}H^*)}{2\mathcal{B}(H^* - X^*)}} - \\
&- \frac{2G}{\pi}\left(h + \frac{c^2}{x^*}\right) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X^*)(1 + \mathcal{B}H^*)}{2\mathcal{B}(H^* + X^*)}} - \\
&- \frac{2G}{\pi}\frac{c^2}{x^*} \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}^2 X^{*2})(H^{*2} - 4c^2)}{(H^{*2} - X^{*2})(1 - 4\mathcal{B}^2 c^2)}} - \\
&- \frac{2Kc}{\pi}\left(1 - \frac{c}{x^*}\right) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 - \mathcal{B}X^*)(1 + 2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c - X^*)}} - \\
&- \frac{2Kc}{\pi}\left(1 + \frac{c}{x^*}\right) \operatorname{arg\,ch} \sqrt{\frac{(1 + \mathcal{B}X^*)(1 + 2\mathcal{B}c)}{2\mathcal{B}(2c + X^*)}} - \frac{\mathrm{i}\,Kc^2}{x^*},
\end{aligned} \tag{13}$$

în care

$$G = \frac{\gamma U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 h^2}}, \quad K = -\frac{\gamma U_\infty}{\sqrt{1 - B^2 c^2}}. \tag{14}$$

Expresia (14) îşi păstrează valabilitatea şi în cazul cînd bordurile plăcii devin supersonice, ţinînd seama de relaţia

$$G \operatorname{arg\,ch} \Theta = Q \arccos \Theta, \quad Q = \frac{\gamma U_\infty}{\sqrt{B^2 h^2 - 1}}. \tag{15}$$

După cum se vede, au mai rămas de rezolvat ultimele două cazuri ale sistemului aripă cruciformă-fuzelaj, pe care le vom trata în cele ce urmează.

2. METODA DE REZOLVARE

Pentru a ilustra principiul metodei de rezolvare, să considerăm cazul sistemului fuzelaj-aripă cruciformă subțire definit prin condițiile (3) și avînd bordurile de atac subsonice $\left(l_j < \frac{1}{B},\ h < \frac{1}{B}\right)$.

Să considerăm transformarea

$$\eta = \frac{y}{1-B^2z^2},\quad \zeta = \frac{z\sqrt{1-B^2(y^2+z^2)}}{1-B^2z^2}, \tag{16}$$

prin intermediul căreia se obține planul complex x (fig. 3*b*)

$$x = \eta + i\zeta, \tag{17}$$

plan în care vitezele de perturbație devin funcții armonice, astfel încît pot fi puse sub forma complexă

$$u = \operatorname{Re}\mathcal{U},\quad v = \operatorname{Re}\mathcal{V},\quad w = \operatorname{Re}\mathcal{W}, \tag{18}$$

funcțiile complexe $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ ale vitezelor de perturbație fiind legate între ele prin relațiile de compatibilitate

$$d\mathcal{U} = -x\,d\mathcal{V} = \frac{i\,x\,d\mathcal{W}}{\sqrt{1-B^2x^2}}. \tag{19}$$

Comportarea vitezelor de perturbație în imediata vecinătate a bordurilor și muchiilor aripii și plăcii fiind aceeași ca și în cazul aripii cruciforme izolate (deoarece această comportare nu depinde decît de configurația locală a acestor elemente ale aripii), funcțiile $\mathcal{U}$ și $\mathcal{V}$ vor prezenta în punctele corespunzătoare din planul x următoarele singularități:

$$\frac{1}{\sqrt{l_j+(-1)^j x}}\ (j=1,2);\quad \frac{1}{\sqrt{x \pm i\eta}}\ \left(\eta = \frac{h}{\sqrt{1-B^2h^2}}\right), \tag{20}$$

corespunzătoare bordurilor de atac subsonice ale aripii $\left(l_j < \frac{1}{B}\right)$ și plăcii $\left(h < \frac{1}{B}\right)$,

$$\ln[s_j + (-1)^j x]\ \ (j=1,2),\ \ln(x \pm it^*),\ t^* = \frac{t}{\sqrt{1-B^2t^2}}, \tag{21}$$

corespunzătoare muchiilor aripii și plăcii, și

$$[l_j + (-1)^j x]\ \ (j=1,2), \tag{22}$$

în cazul cînd bordurile aripii sînt supersonice $\left(l_j > \frac{1}{B}\right)$.

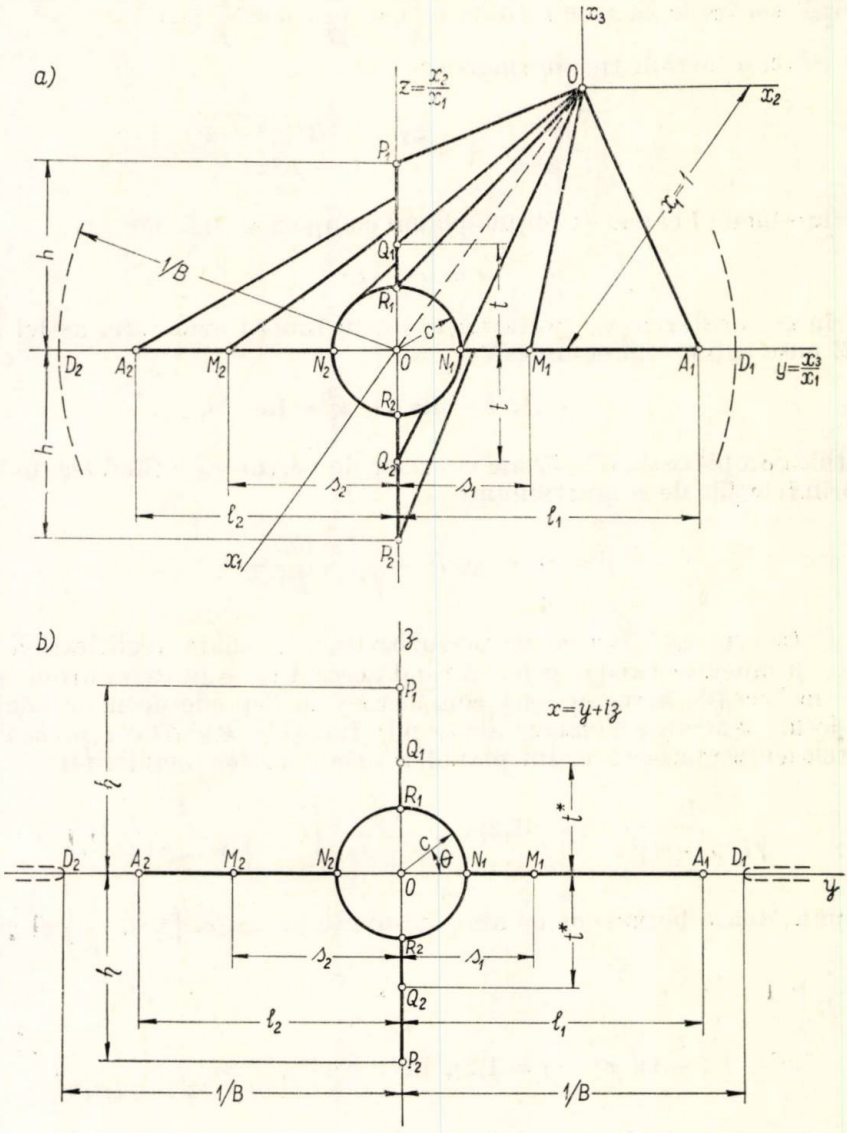

a)
x_3
$z=\frac{x_2}{x_1}$
0
x_2
P_1
$x_1=1$
h
1/B
Q_1
R_1
c
t
D_2
A_2
M_2
N_2
0
N_1
M_1
A_1
D_1
$y=\frac{x_3}{x_1}$
R_2
t
h
Q_2
δ_2
δ_1
ℓ_2
ℓ_1
x_1
P_2
b)
z
P_1
$x=y+iz$
Q_1
h
R_1
t
c
θ
D_2
A_2
M_2
N_2
N_1
M_1
A_1
D_1
y
0
t
R_2
h
δ_2
δ_1
Q_2
ℓ_2
ℓ_1
P_2
1/B
1/B

Fig. 3

După cum am procedat și în cazul sistemului aripă-fuzelaj, prin integrarea relațiilor de compatibilitate (19) pe fuzelaj și considerînd ca mai sus $B^2 c^2 \ll 1$, se poate deduce relația

$$w + \operatorname{Im} \mathcal{V} = -\alpha_0 U_\infty . \tag{23}$$

Ținînd seama de această relație, precum și de condițiile (3) și de singularitățile menționate mai sus, și integrînd relațiile de compatibilitate (19) pe un semicerc în jurul muchiilor aripii ($y = (-1)^{j+1} s_j$), se pot stabili condițiile la limită în planul x ale problemei considerate :

$$\operatorname{Re} [x\mathcal{V}]_{x = c e^{i\theta}} = 0, \tag{24a}$$

$$\operatorname{Im} [\mathcal{V}]_{N_j M_j} = 0 \qquad (j = 1,2), \tag{24b}$$

$$\operatorname{Im} [\mathcal{V}]_{M_j A_j} = C_j, \; C_j = \frac{(\alpha_j - \alpha_0) U_\infty}{\sqrt{1 - B_c^2 s_j^2}} \qquad (j = 1,2) \tag{24c}$$

$$\operatorname{Re} [\mathcal{V}]_{-\infty A_2, A_1 \infty} = 0, \tag{24d}$$

$$\operatorname{Re} [\mathcal{V}]_{R_j Q_j} = 0, \tag{24e}$$

$$\operatorname{Re} [\mathcal{V}]_{Q_j P_j} = (-1)^j \beta U_\infty \qquad (j = 1,2). \tag{24f}$$

Considerînd acum potențialul complex $F(x)$ al unei mișcări incompresibile fictive definit sub forma

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \mathcal{V}, \qquad F = \int \mathcal{V} \, \mathrm{d}x = \mathcal{U} + x\mathcal{V} \tag{25}$$

și utilizînd planul complex X definit prin transformarea conformă

$$X = x + \frac{c^2}{x}, \tag{26}$$

plan în care viteza complexă $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X}$ poate fi scrisă sub formă

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}} = \frac{1}{2} \mathcal{V} \left(1 + \frac{X}{\sqrt{X^2 - 4c^2}} \right), \tag{27}$$

condițiile la limită de mai sus vor putea fi scrise în planul $\boldsymbol{X}$ sub forma

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}} \right]_{M_2 M_1} = 0, \tag{28a}$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}} \right]_{M_j A_j} = \frac{C_j}{2} \left(1 + \frac{\boldsymbol{X}}{\sqrt{\boldsymbol{X}^2 - 4c^2}} \right), \tag{28b}$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}} \right]_{-\infty A_2, A_1 \infty} = 0, \tag{28c}$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}} \right]_{Q_2 Q_2} = 0, \tag{28d}$$

$$\operatorname{Re} \left[\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}} \right]_{Q_j P_j} = (-1)^j \frac{\beta U_\infty}{2} \left(1 + \frac{Z}{\sqrt{Z^2 + 4c^2}} \right) \qquad (j = 1, 2). \tag{28e}$$

Aceste condiţii se referă la configuraţia din planul X a sistemului considerat reprezentată în figura 4, în care am introdus notaţiile

$$L_j = l_j + \frac{c^2}{l_j}, \quad S_j = s_j + \frac{c^2}{s_j}, \quad \frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1 + B^2 c^2}{B}, \tag{29a}$$

$$H = h - \frac{c^2}{h}, \quad T = t^* - \frac{c^2}{t^*}. \tag{29b}$$

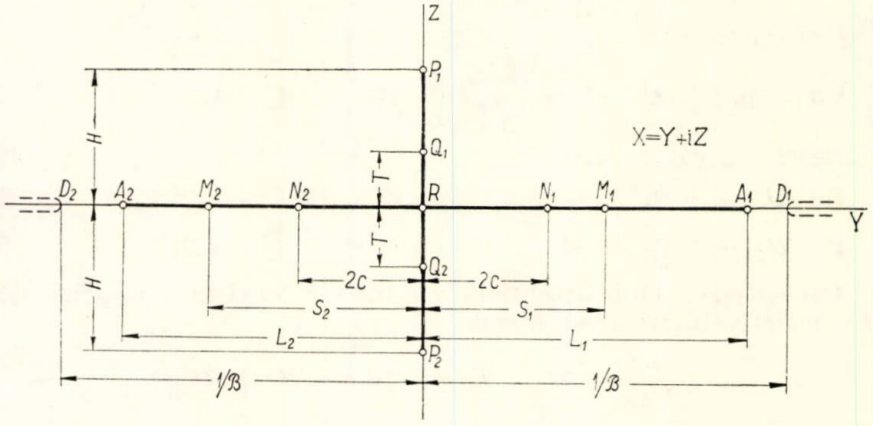


Fig. 4

Avînd în vedere condiţiile la limită de mai sus, precum şi singularităţile din planul X corespunzătoare celor menţionate mai sus, vom putea considera, ţinînd seama de cele stabilite în lucrările precedente [1], [2], [3], că mişcarea din planul X astfel definită corespunde, prin intermediul unei transformări analoge cu (17), unei mişcări conice în jurul unei aripi cruciforme fictive avînd bordurile de atac ale aripii şi plăcii situate în punctele $A_j\,(X = (-1)^{j+1} L_j)$ şi, respectiv, $P_j\,(X = \pm i H)$, avînd cîte două munchii situate pe aripă şi pe placă în punctele $M_j\,(X = (-1)^{j+1} S_j)$ şi $Q_j\,(X = \pm i T)$ şi prezentînd în plus condiţii de forma (28b) şi (28e) pe porţiunile $M_j\ A_j$ şi $Q_j\ P_j$ (fig. 4).

Notînd prin $\mathcal{U}_a$, $\mathcal{V}_a$, $\mathcal{W}_a$ funcţiile complexe corespunzătoare vitezelor de perturbaţie din mişcarea conică în jurul aripii cruciforme fictive, care sînt legate prin relaţii de compatibilitate analoge cu (19),

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_a = -X\mathrm{d}\mathcal{V}_a = \frac{i X\, d\mathcal{W}_a}{\sqrt{1-\mathcal{B}^2 X^2}} \left(\frac{1}{\mathcal{B}} = \frac{1 + B^2 c^2}{B}\right), \tag{30}$$

vom putea scrie analog cu (25)

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}X} = \mathcal{V}_a, \quad F = \mathcal{U}_a + X\mathcal{V}_a. \tag{31}$$

Ţinînd seama de aceste relaţii, precum şi de (25), (26), (27), va rezulta următoarea formulă generală pentru determinarea vitezei axiale de perturbaţie :

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_a + \frac{2c^2}{x}\mathcal{V}_a = \mathcal{U}_a - \frac{2c^2}{x}\int \frac{d\mathcal{U}_a}{X}. \tag{32}$$

În acest mod, problema mişcării supersonice în jurul sistemului aripă cruciformă-fuzelaj a fost redusă în cele din urmă la aceea a unei mişcări conice în jurul unei aripi cruciforme izolate fictive, definită prin condiţiile la limită şi singularităţile stabilite mai sus.

Pentru rezolvarea acestei din urmă probleme vom utiliza în cele ce urmează metoda analogiei hidrodinamice elaborată de prof. E. Carafoli pentru studiul aripilor şi aripilor cruciforme [4], [5]. În acest sens vom utiliza planul auxiliar χ, definit prin transformarea conformă

$$\chi^2 = X^2 + H^2 \qquad (\chi = \lambda + i\nu), \tag{33}$$

plan în care se obţine pentru cazul considerat configuraţia din figura 5, în care am introdus notaţiile

$$\Lambda_j = \sqrt{L_j^2 + H^2}, \quad \sigma_j = \sqrt{S_j^2 + H^2}, \quad \frac{1}{B^*} = \frac{\sqrt{1 + \mathcal{B}^2 H^2}}{\mathcal{B}}, \tag{34a}$$

$$\tau = \sqrt{H^2 - T^2}, \; \varkappa = \sqrt{4c^2 + H^2}. \tag{34b}$$

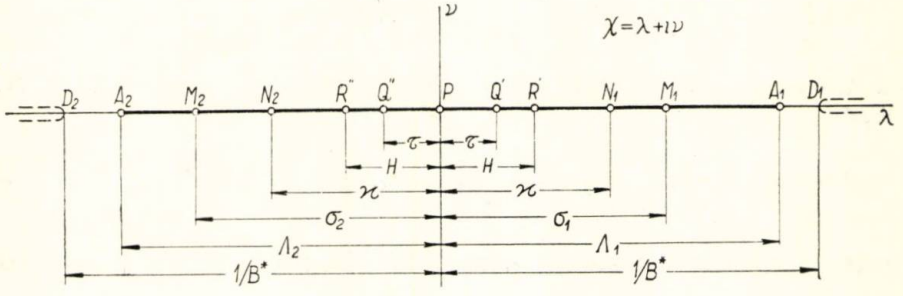


Fig. 5

Deoarece funcţia $\mathcal{V}_a$ este mai dificil de determinat direct, datorită condiţiilor la limită pe care le prezintă, ne propunem să determinăm mai întîi funcţia $\mathcal{U}_a$, urmînd ca pe $\mathcal{V}_a$ să o determinăm apoi prin integrare.

Considerînd că pentru transformarea conformă (33) funcţia $\mathcal{U}_a$ se comportă ca un potenţial complex, prin integrarea relaţiilor de compati-

bilitate (19) şi ţinînd seama de singularităţile stabilite mai sus, condiţiile la limită (28) vor putea fi scrise în planul χ, în funcţie de $\mathcal{U}_a$, sub forma

$$\operatorname{Im}[\mathcal{U}_a]_{Q''PQ'} = \frac{\beta U_\infty}{2}\left[T + \sqrt{T^2-4c^2} - \frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}\right], \tag{35a}$$

$$\operatorname{Im}[\mathcal{U}_a]_{Q'M_1,\,Q''M_2} = 0, \tag{35b}$$

$$\operatorname{Im}[\mathcal{U}_a]_{M_jA_j} = (-1)^j \frac{C_j}{2}\left[S_j + \sqrt{S_j^2-4c^2} + \frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\right] (j = 1,\ 2), \tag{35c}$$

$$\operatorname{Re}[\mathcal{U}_a]_{-\infty A_2,\,A_1\infty} = 0. \tag{35d}$$

De asemenea, deoarece transformarea (33) nu alterează caracterul singularităţilor menţionate mai sus, în punctele din planul χ corespunzătoare bordurilor şi muchiilor aripii şi plăcii, funcţia $\mathcal{U}_a$ va prezenta singularităţile

$$\frac{1}{\sqrt{\chi+(-1)^j\Lambda_j}} \quad (j = 1,\ 2), \quad \frac{1}{\chi}, \tag{36}$$

corespunzătoare bordurilor subsonice ale aripii şi, respectiv, ale plăcii,

$$\ln[\chi + (-1)^j\sigma_j] \quad (j = 1,\ 2), \quad \ln(\chi \pm \tau), \tag{37}$$

corespunzătoare muchiilor aripii şi, respectiv, plăcii, şi

$$\ln[\chi + (-1)^j\Lambda_j], \tag{38}$$

în cazul în care bordurile de atac ale aripii sînt supersonice.

În vederea determinării funcţiei $\mathcal{U}_a$, vom putea considera că condiţiilor (35c) şi (35a) le corespunde în sens hidrodinamic cîte o distribuţie continuă de muchii elementare pe porţiunile M_jA_j şi $Q''PQ'$ care aduc în funcţia $\mathcal{U}_a$ contribuţii de forma :

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_a' = -\frac{C_1}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta \tag{39}$$

pentru o muchie elementară situată în punctul $\chi = \eta$ pe porţiunea M_1A_1 a aripii ;

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_a'' = -\frac{C_2}{\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta \tag{40}$$

pentru o muchie elementară situată în punctul $\chi = -\eta$ pe porţiunea M_2A_2 a aripii ;

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_a^* = -\frac{\beta U_\infty}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\eta^2}}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)\,(\Lambda_2+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)\,(\eta-\chi)}} - \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\right]\mathrm{d}\eta \tag{41}$$

pentru două muchii elementare simetrice situate în punctele $\chi = \pm\eta$ pe porţiunile P_1Q_1 şi P_2Q_2 ale plăcii.

3. DETERMINAREA FUNCȚIEI $\mathcal{U}_a$

Ținînd seama de cele stabilite mai sus, în continuare vom determina expresiile funcției $\mathcal{U}_a$ pentru diferitele cazuri ale sistemului aripă cruciformă-fuzelaj.

3.1. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPĂ CRUCIFORMĂ SUBȚIRE LA CARE BORDURILE ARIPII ȘI PLĂCII SÎNT SUBSONICE

Avînd în vedere condițiile la limită (35) și singularitățile stabilite mai sus pentru acest caz, vom putea deduce, în modul indicat mai sus și utilizînd metoda analogiei hidrodinamice [4]—[6], următoarea expresie pentru funcția $\mathcal{U}_a$:

$$\mathcal{U}_\beta = \frac{A_0 + A_1\chi + A_2\chi^2}{\chi\sqrt{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\chi)}} - \frac{C_1S_1}{\pi}\left(1+\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2-4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\sigma_1)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\sigma_1-\chi)}} -$$

$$- \frac{C_2S_2}{\pi}\left(1+\frac{S_2}{S_2^2-4c^2}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\sigma_2)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\sigma_2+\chi)}} -$$

$$- \frac{C_1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{\Lambda_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$- \frac{C_2}{\pi}\int_{\sigma_2}^{\Lambda_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+ \frac{\beta U_\infty}{\pi}T\left(1+\frac{T}{\sqrt{T^2+4c^2}}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\tau)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\tau-\chi)}} -\right.$$

$$\left. - \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\tau)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\tau+\chi)}}\right] -$$

$$- \frac{\beta U_\infty}{\pi}\int_0^\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\varkappa^2-\eta^2}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_1-\chi)(\Lambda_2+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta-\chi)}} -\right.$$

$$\left. - \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(\Lambda_1+\eta)}{(\Lambda_1+\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\right]\mathrm{d}\eta. \qquad (42)$$

Funcția vitezei axiale de perturbație $\mathcal{U}$ pentru sistemul considerat se va determina introducînd expresia de mai sus în formula generală (32).

În ceea ce privește constantele A_0, A_1, A_2, acestea se determină din condițiile

$$\operatorname{Im}\int_{(-1)^{j+1}\frac{1}{B}}^{\nu_j'}\frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\,\mathrm{d}\mathcal{U} = -\alpha_j U_\infty \qquad (j=1,2), \qquad (43)$$

unde y_j' este abscisa unui punct de pe aripă situat în apropierea bordului A_j, și

$$\operatorname{Re}\int_{iz'}^{i\infty}\frac{1}{x}\,d\mathcal{U} = -\beta U_\infty, \tag{44}$$

unde z' este cota unui punct de pe placă situat în apropierea bordului P_1.

3.2. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPĂ CRUCIFORMĂ SUBȚIRE LA CARE BORDURILE ARIPII SÎNT SUPERSONICE, IAR BORDURILE PLĂCII SÎNT SUBSONICE

Considerînd din nou sistemul fuzelaj-aripă cruciformă subțire definit prin condițiile (3), în cazul cînd bordurile aripii sînt supersonice $\left(l_j > \frac{1}{B}\right)$, iar bordurile plăcii sînt subsonice $\left(h < \frac{1}{B}\right)$ condițiile la limită din planul χ (fig. 6) vor putea fi scrise, procedînd într-un mod asemănător celui utilizat mai sus, sub forma

$$\operatorname{Im}[\mathcal{U}_a]_{Q''PQ'} = \frac{\beta U_\infty}{2}\left[T + \sqrt{T^2+4c^2} - \frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\lambda^2}}\right], \tag{45a}$$

$$\operatorname{Im}[\mathcal{U}_a]_{Q'M_1,\,Q''M_2} = 0, \tag{45b}$$

$$\operatorname{Im}[\mathcal{U}_a]_{M_jD} = (-1)^j\frac{C_j}{2}\left[S_j + \sqrt{S_j^2-4c^2} + \frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\right] (j=1,2), \tag{45c}$$

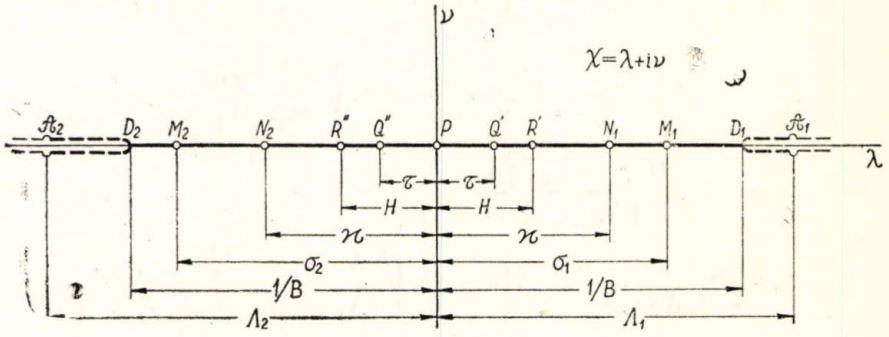


Fig. 6

$$\operatorname{Re}[\mathcal{U}_a]_{\mathcal{D}_j\mathcal{A}_j} = \frac{Q_j}{2}\left[L_j + \sqrt{L_j^2-4c^2} + \frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\right] (j=1,\ 2), \tag{45d}$$

$$\operatorname{Re}[\mathcal{U}_a]_{-\infty\mathcal{A}_2,\,\mathcal{A}_1\infty} = 0, \tag{45e}$$

unde

$$Q_j = \frac{\alpha_j U_\infty}{\sqrt{B^2 l_j^2-1}} \quad (j=1,\ 2). \tag{46}$$

Avînd în vedere aceste condiţii la limită, precum şi singularităţile stabilite mai sus, vom obţine, utilizînd aceeaşi metodă de lucru ca în cazul precedent, următoarea expresie pentru funcţia $\mathcal{U}_a$:

$$\mathcal{U}_a = \frac{Q_1 L_1}{\pi}\left(1 + \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 - 4c^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(1 + B^*\Lambda_1)}{2B^*(\Lambda_1 - \chi) +}} +$$

$$+ \frac{Q_2 L_2}{\pi}\left(1 + \frac{L_2}{\sqrt{L_2^2 + 4c^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 + B^*\chi)(1 + B^*\Lambda_2)}{2B^*(\Lambda_2 + \chi)}} -$$

$$- \frac{Q_1}{\pi}\int_{\overline{B^*}}^{\Lambda_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(1 + B^*\eta)}{2B^*(\eta - \chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$- \frac{Q_2}{\pi}\int_{\frac{1}{B^*}}^{\Lambda_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 + B^*\chi)(1 + B^*\eta)}{2B^*(\eta + \chi)}}\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+ \frac{A_0}{\chi}\sqrt{1 - B^{*2}\chi^2} - \frac{C_1 S_1}{\pi}\left(1 + \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 - 4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(1 + B^*\sigma_1)}{2B^*(\sigma_1 - \chi)}} -$$

$$- \frac{C_2 S_2}{\pi}\left(1 + \frac{S_2}{\sqrt{S_2^2 - 4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + B^*\chi)(1 + B^*\sigma_2)}{2B^*(\sigma_2 + \chi)}} -$$

$$- \frac{C_1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(1 + B^*\eta)}{2B^*(\eta - \chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$- \frac{C_2}{\pi}\int_{\sigma_2}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + B^*\chi)(1 + B^*\eta)}{2B^*(\eta + \chi)}}\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+ \frac{\beta U_\infty}{\pi}\left(T + \frac{T^2}{\sqrt{T^2 + 4c^2}}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(1 + B^*\tau)}{2B^*(\tau - \chi)}} -\right.$$

$$\left. - \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + B^*\chi)(1 + B^*\tau)}{2B^*(\tau + \chi)}}\right] -$$

$$- \frac{\beta U_\infty}{\pi}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2 - \eta^2}}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(1 + B^*\eta)}{2B^*(\eta - \chi)}} -\right.$$

$$\left. - \operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 + B^*\chi)(1 + B^*\eta)}{2B^*(\eta + \chi)}}\right]\mathrm{d}\eta, \qquad (47)$$

care, introdusă în (32), permite determinarea funcţiei vitezei axiale de perturbaţie $\mathcal{U}$ corespunzătoare cazului considerat.

Constanta A_0 se va determina din condiţia (44).

3.3. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPĂ CRUCIFORMĂ SUBȚIRE LA CARE UNUL DIN BORDURILE ARIPII ESTE SUPERSONIC, IAR CELĂLALT BORD AL ARIPII ȘI BORDURILE PLĂCII SÎNT SUBSONICE

Să considerăm de asemenea sistemul fuzelaj-aripă cruciformă subțire definit prin condițiile (3) și să presupunem acum că bordul A_1 al aripii este supersonic $\left(l_1 > \frac{1}{B}\right)$, în timp ce bordul A_2 al aripii împreună cu bordurile plăcii sînt subsonice $\left(l_2 < \frac{1}{B},\ \mathrm{h} < \frac{1}{B}\right)$.

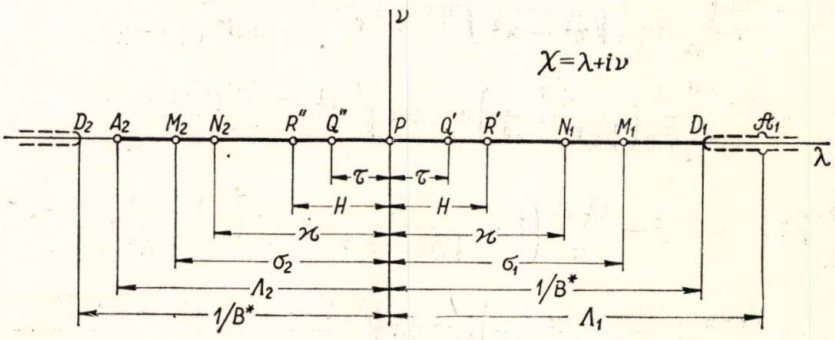


Fig. 7

Observînd că în acest caz vor rezulta în planul χ (fig. 7) condițiile la limită (35a, b, d), condiția (35c) pentru $j = 2$ și condițiile (45c, d) pentru $j = 1$, vom putea deduce pentru funcția $\mathcal{U}_a$ expresia

$$\mathcal{U}_a = \frac{A_0 + A_1\chi}{\chi}\sqrt{\frac{1 - B^*\chi}{\Lambda_2 + \chi}} +$$

$$+ \frac{Q_1 L_1}{\pi}\left(1 + \frac{L_1}{\sqrt{L_1^2 - 4c^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \Lambda_1)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\Lambda_1 - \chi)}} -$$

$$- \frac{Q_1}{\pi}\int_{1/B^*}^{\Lambda_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\arccos\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \eta)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\eta - \chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$- \frac{C_1 S_1}{\pi}\left(1 + \frac{S_1}{\sqrt{S_1^2 - 4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \sigma_1)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\sigma_1 - \chi)}} -$$

$$- \frac{C_2 S_2}{\pi}\left(1 + \frac{S_2}{\sqrt{S_2^2 - 4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2 + \chi)(1 + B^*\sigma_2)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\sigma_2 + \chi)}} -$$

$$- \frac{C_1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2 - \varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1 - B^*\chi)(\Lambda_2 + \eta)}{(1 + B^*\Lambda_2)(\eta - \chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$-\frac{C_2}{\pi}\int_{\sigma_2}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(1+B^*\eta)}{(1+B^*\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta+$$

$$+\frac{\beta U_\infty}{\pi}\left(T+\frac{T^2}{\sqrt{T^2+4c^2}}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(\Lambda_2+\tau)}{(1+B^*\Lambda_2)(\tau-\chi)}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(1+B^*\tau)}{(1+B^*\Lambda_2)(\tau+\chi)}}\right]-$$

$$-\frac{\beta U_\infty}{\pi}\int_0^\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\varkappa^2-\eta^2}}\right)\left[\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(\Lambda_2+\eta)}{(1+B^*\Lambda_2)(\eta-\chi)}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(\Lambda_2+\chi)(1+B^*\eta)}{(1+B^*\Lambda_2)(\eta+\chi)}}\right]\mathrm{d}\eta, \tag{48}$$

unde Q_1 este dat de relaţia (46) pentru $j=1$, C_1 şi C_2 de relaţia (24b), iar constantele A_1 şi A_1 se determină din condiţiile (43) pentru $j=2$ şi (44).

3.4. CAZUL SISTEMULUI FUZELAJ-ARIPĂ CRUCIFORMĂ LA CARE ARIPA ESTE DE GROSIME SIMETRICĂ

Să considerăm acum sistemul fuzelaj-aripă cruciformă definit prin condiţiile (4), la care aripa este de grosime simetrică.

În cazul cînd bordurile aripii şi plăcii sînt subsonice $\left(l_j<\frac{1}{B},\ h<\frac{1}{B}\right)$, condiţiile la limită din planul χ (fig. 5), care pot fi deduse urmînd o cale asemănătoare celei folosite mai sus, vor fi următoarele :

$$\operatorname{Im}\,[\mathcal{U}_a]_{R''R'}=0, \tag{49a}$$

$$\operatorname{Im}\,[\mathcal{U}_a]_{R'M_1,\,R''M_2}=0, \tag{49b}$$

$$\operatorname{Im}\,[\mathcal{U}_a]_{M_jD_j}=(-1)^j\frac{C_j}{2}\left[S_j+\sqrt{S_j^2-4c^2}+\frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\right]\ (j=1,2), \tag{49c}$$

$$\operatorname{Im}\,[\mathcal{U}_a]_{D_jA_j}=(-1)^j\frac{C_j+G_j}{2}\left[L_j+\sqrt{L_j^2-4c^2}+\frac{4c^2}{\sqrt{\lambda^2-\varkappa^2}}\right]\ (j=1,2), \tag{49d}$$

$$\operatorname{Re}\,[\mathcal{U}_a]_{-\infty A_2,\,A_1\infty}=0, \tag{49e}$$

unde

$$C_j=-\frac{\gamma_j U_\infty}{\sqrt{1-B^2s_j^2}}\ ,\quad G_j=\frac{\gamma_j U_\infty}{\sqrt{1-B^2l_j^2}}\ (j=1,2). \tag{50}$$

Utilizînd aceeaşi metodă ca şi în cazurile precedente, va rezulta pentru funcţia $\mathcal{U}_a$ expresia

$$\mathcal{U}_a = -\frac{G_1 L_1}{\pi}\left(1+\frac{L_1}{\sqrt{L_1^2-4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\Lambda_1)}{2B^*(\Lambda_1-\chi)}} -$$

$$-\frac{G_2 L_2}{\pi}\left(1+\frac{L_2}{\sqrt{L_2^2-4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\Lambda_2)}{2B^*(\Lambda_2+\chi)}} -$$

$$-\frac{G_1}{\pi}\int_{\Lambda_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$-\frac{G_2}{\pi}\int_{\Lambda_2}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta +$$

$$+\frac{A_0}{\chi}\sqrt{1-B^{*2}\chi^2} - \frac{C_1 S_1}{\pi}\left(1+\frac{S_1}{\sqrt{S_1^2-4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\sigma_1)}{2B^*(\sigma_1-\chi)}} -$$

$$-\frac{C_2 S_2}{\pi}\left(1+\frac{S_2}{\sqrt{S_2^2-4c^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\sigma_2)}{2B^*(\sigma_2+\chi)}} -$$

$$-\frac{C_1}{\pi}\int_{\sigma_1}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1-B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta-\chi)}}\,\mathrm{d}\eta -$$

$$-\frac{C_2}{\pi}\int_{\sigma_2}^{1/B^*}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left(\frac{4c^2}{\sqrt{\eta^2-\varkappa^2}}\right)\operatorname{arg\,ch}\sqrt{\frac{(1+B^*\chi)(1+B^*\eta)}{2B^*(\eta+\chi)}}\,\mathrm{d}\eta, \tag{51}$$

unde constanta A_0 se determină din următoarea condiţie, analogă cu (44) :

$$\operatorname{Re}\int_{iz}^{i\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\mathcal{U} = 0. \tag{52}$$

În cazul cînd bordurile aripii sînt supersonice $\left(l_j > \frac{1}{B}\right)$, bordurile plăcii fiind subsonice $\left(h < \frac{1}{B}\right)$, funcţia $\mathcal{U}_a$ va avea aceeaşi expresie ca în cazul sistemului fuzelaj-aripă cruciformă subţire.

4. CAZUL SISTEMULUI AMPENAJ-FUZELAJ

Pentru a exemplifica modul de aplicare a celor stabilite mai sus la cazul sistemului ampenaj-fuzelaj, să considerăm sistemul din figura 8, aripa şi fuzelajul avînd aceeaşi incidenţă α, iar placa avînd incidenţa nulă, sistem definit prin condiţiile

$$[v\cos\theta + (w+\alpha U_\infty)\sin\theta]_{\text{fuzelaj}} = 0, \tag{53a}$$

$$[v]_{R_j P_j} = 0 \ (j=1,\ 2)\ ,\ [W]_{M_1 A_1} = -\alpha U_\infty . \tag{53b}$$

Ţinînd seama de cele arătate în § 2, condiţiile la limită în planul χ pentru sistemul ampenaj-fuzelaj vor putea fi scoase în cazul bordurilor de atac subsonice sub forma

$$\operatorname{Im} [\mathcal{U}_a]_{N_2N_1} = 0, \tag{54a}$$

$$\operatorname{Re} (\mathcal{U}_a]_{-\infty A_2,\, A_1\infty} = 0. \tag{54b}$$

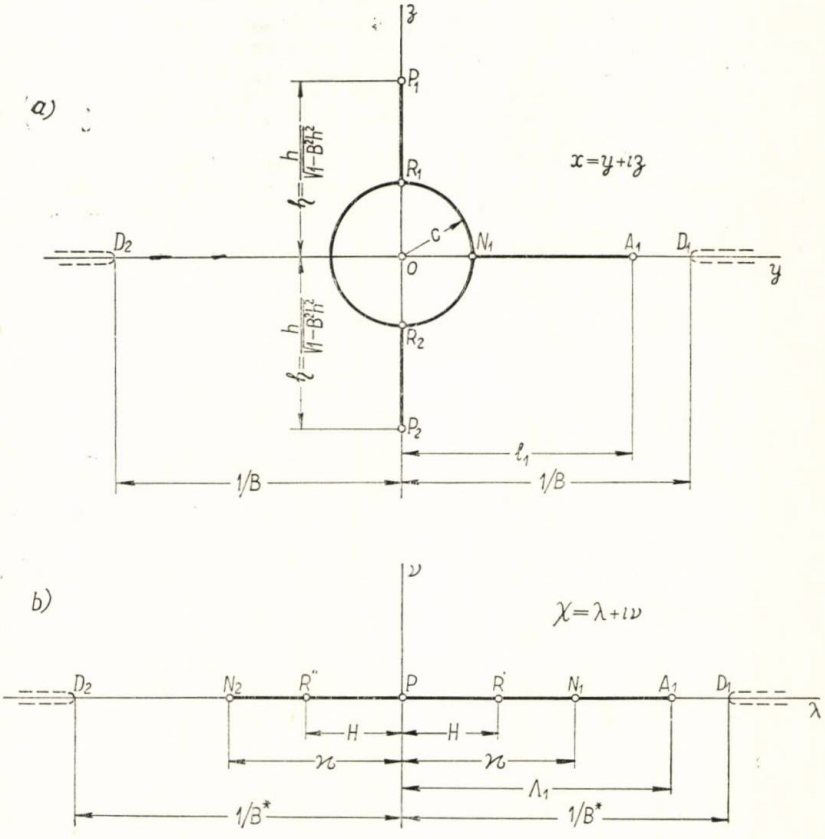


Fig. 8

Observînd că în acest caz nu intervin decît singularităţile corespunzătoare bordurilor plăcii şi bordului A_1 al aripii, vom obţine pentru funcţia $\mathcal{U}_a$, procedînd în modul indicat în § 3.1, expresia

$$\mathcal{U}_a = \frac{Q_0 + Q_1 \chi}{i\chi} \sqrt{\frac{H + \chi}{\Lambda_1 - \chi}}. \tag{55}$$

În continuare, pentru determinarea expresiei vitezei axiale de perturbaţie ($u = \operatorname{Re} \mathcal{U}$), se procedează în modul indicat în § 3.1, utilizînd formula generală (32).

Primită la redacţie la 16 iulie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. CARAFOLI E., MATEESCU D., *Supersonic flow around the cruciform wing-conical body system* Rev. Roum. Sci. Techn.—Mécanique Appliquée, **5**, *3* (1960).
2. CARAFOLI E., MATEESCU D., *L'écoulement supersonique autour du système portant aile-fuselage conique*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Mécanique Appliquée, **4**, *3* (1959).
3. CARAFOLI E., MATEESCU D., *General method for determining the wing-conical body interferance in supersonic flow*, Rev. Roum. Sci.Techn.—Mécanique Appliquée, **5**, *2* (1960).
4. CARAFOLI E., *High-speed aerodynamics*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1956.
5. CARAFOLI E., HOROVITZ B., *L'écoulement supersonique autour d'une aile angulaire à disque axial*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Mécanique Appliquée, **1**, *1* (1956).
6. CARAFOLI E., MATEESCU D., *Sur une classe d'ailes à incidence et pente variables d'après des fonctions homogenes en régime supersonique*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Mécanique Appliquée, **10**, *2* (1965).
7. MATEESCU D., *Sverhzukovoe obtekanie trapetsoidalnovo kryla s dvumia koniceskimi obtekateliami*, Rev. Roum. Sci. Techn.—Mécanique Appliquée **6**, *3* (1961).
8. MATEESCU D., *Tragflügel mit besonderer Abschlussfläche in Überschallstromung*, Rev. de Méc. Appl., **8**, *1* (1963).

DEZLOCUIREA INTEGRALĂ A FLUIDELOR ÎN MEDII POROASE OMOGENE

de VASILE IONESCU şi CIPRIAN COZMA
Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

Lucrarea este consacrată studiului matematic al dezlocuirii unui fluid dintr-un mediu poros de către altul introdus sub presiune în mediu. Fenomenul este studiat în ipoteza că fluidul injectat dezlocuieşte integral fluidul din zăcământ (piston), mişcarea e presupusă plană şi se neglijează efectul gravitaţiei. Se face în plus ipoteza că frontul de separare dintre cele două fluide în contact împarte domeniul de mişcare în două domenii complementare.

INTRODUCERE

În practica extracţiei petroliere se întîlneşte fenomenul de dezlocuire a unui fluid (ţiţeiul) de către altul (apa, gaze sau alte preparate speciale), introdus sub presiune în zăcământ prin sonde practicate special în acest scop. Metoda serveşte la recuperarea unei cantităţi mai mari de ţiţei din zăcământ, iar eficienţa ei a fost dovedită în numeroase cazuri practice. Mişcarea ansamblului de fluide, care constituie procesul de dezlocuire, este destul de complicată, şi de aceea se adoptă unele ipoteze mai mult sau mai puţin simplificatoare, cu scopul de a face studiul fenomenului abordabil din punct de vedere matematic.

Într-una din aceste forme se consideră că fluidul injectat este incompresibil şi dezlocuieşte integral fluidul din zăcământ, între cele două fluide stabilindu-se o suprafaţă de separare numită în mod obişnuit front. Problema revine la aflarea poziţiei frontului în orice moment, cunoscîndu-se natura şi forma zăcămîntului, caracteristicile fluidelor în contact, amplasarea sondelor şi poziţia iniţială a frontului.

În lucrarea de faţă ne propunem să rezolvăm problema în această aproximaţie, în cazul mişcării plane orizontale, mediul poros fiind omogen. Deşi ipotezele simplificatoare introduse îndepărtează într-o oarecare măsură fenomenul studiat de cel real, rezultatele dau o evaluare aproximativă utilă pentru necesităţile practice. Menţionăm existenţa unor fluide de

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 6, P. 1187–1208, BUCUREŞTI, 1968

dezlocuire de o compoziție specială, cu ajutorul cărora se poate realiza o mișcare foarte apropiată de cea din schema adoptată. În aceste condiții simplificate, fenomenul conduce la o problemă matematică ce se poate rezolva, iar rezultatele obținute sub formă finită pot fi utilizate în tehnică.

Pînă în prezent au fost studiate unele cazuri particulare de dezlocuiri în care se cunoaște frontul în tot timpul mișcării, urmărindu-se numai deplasarea lui în timp ([1] și [2]). Într-unul din aceste cazuri se presupune că dezlocuirea are loc între doi pereți paraleli care debitează, respectiv absorb, un debit de fluid cunoscut, variabil eventual cu timpul. Frontul de separare inițial fiind o dreaptă paralelă cu cei doi pereți, va rămîne paralelă cu ei în tot timpul mișcării, deplasîndu-se cu o viteză variabilă în timp.

Alt caz studiat este mișcarea frontului între două cercuri concentrice, unul debitor, altul absorbant, debitul de injecție fiind de asemenea cunoscut în timpul dezlocuirii. Se presupune că frontul de separare inițial este tot un cerc, concentric cu primele două. Datorită simetriei mișcării, el își va păstra forma circulară în tot timpul evoluției fenomenului, deplasîndu-se spre conturul de absorbție cu o viteză ce se poate determina în funcție de datele problemei.

După cum se vede, ambele cazuri prezentate conduc de fapt la dezlocuiri unidimensionale (prima liniară, a doua radială), datorită simplificărilor impuse fenomenului studiat. Mișcarea plană propriu-zisă a fost abordată în ipoteza că cele două fluide au viscozități egale, ceea ce din punct de vedere matematic revine la studiul deplasării unei linii fluide cunoscută la un moment dat, atunci cînd de fapt se consideră mișcarea unui singur fluid.

Vom formula în cele ce urmează problema plană sub forma cea mai generală care se pune în practică. Se presupune cunoscut domeniul ocupat de mediul poros D omogen, de caracteristici date, limitat de curba impermeabilă C. În D este dat un sistem de sonde de injecție în punctele z_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și unul de extracție în punctele ζ_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ (fig. 1). În jurul sondelor de injecție se cunoaște forma frontului la momentul inițial (curbele S_i). Cunoscîndu-se debitul Q_i^1 al sondelor de injecție și Q_j^2 al celor de extracție, precum și caracteristicile fluidelor în contact, se pune problema determinării mișcării fronturilor de separare.

În lucrarea de față ne limităm la studiul teoretic al unui caz mai particular decît cel prezentat mai sus. Vom presupune că sondele de injecție sînt separate de cele de extracție prin frontul S_1 cunoscut la momentul inițial, care unește două puncte de pe C (fig. 2). Rezolvarea matematică a problemelor ce se pun în studiul fenomenului este făcută în cazul general, urmînd ca în altă lucrare să ne ocupăm de aplicații la cazuri concrete de mișcări.

PROBLEMA MATEMATICĂ PENTRU CAZUL GENERAL

Vom formula problema matematică pentru ultimul caz amintit, scrierea ei pentru cel din figura 1 fiind imediată. Presupunem frontul la momentul inițial în poziția S_1 de ecuație $F(x, y) = 0$. Frontul S, a cărui

ecuație o căutăm, separă domeniile D_1 și D_2, unde se găsesc fluide de viscozități μ_1 și μ_2. Ținînd seama de legea lui Darcy pentru fiecare fluid

$$\bar{v}_i = -\frac{k}{\mu_i}\nabla p_i \qquad (i = 1, 2), \tag{1}$$

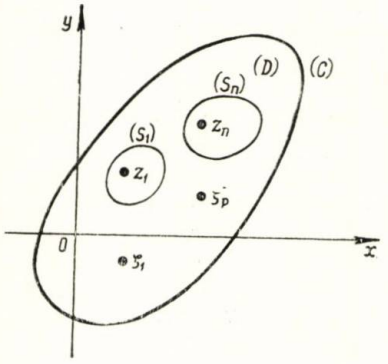


Fig. 1

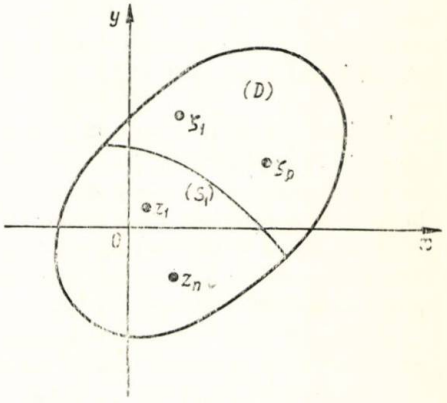


Fig. 2

și de asemenea de ecuația de continuitate

$$\nabla \bar{v}_i = 0\,,$$

rezultă că funcțiile $p_i = p_i\,(x, y, t)$ satisfac în D_i ecuațiile

$$\Delta p_i = 0. \tag{2}$$

Pe curba C condiția de impermeabilitate se scrie

$$\frac{\partial p_i}{\partial n} = 0, \tag{3}$$

iar pe linia de separare S presiunile și vitezele normale trebuie să fie egale în tot timpul mișcării, ceea ce revine la a scrie

$$p_1 = p_2\,; \quad \frac{k}{\mu_1}\frac{\partial p_1}{\partial n} = \frac{k}{\mu_2}\frac{\partial p_2}{\partial n}\,. \tag{4}$$

Ecuația liniei S, $F\,(x, y, t) = 0$, va trebui să satisfacă relația

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \bar{V}\nabla F = 0, \tag{5}$$

unde $\bar{V}$ este viteza particulelor fluide pe S, după cum se demonstrează în lucrările de specialitate (de exemplu [1] și [2]). Problema revine deci la determinarea funcțiilor armonice p_1 și p_2 în domeniile D_1 și D_2 și a curbei S de separare a acestor domenii astfel încît condiția (3) să fie îndeplinită pe C, iar pe S condițiile (4) și (5). Dificultatea problemei constă în special în faptul că aceste condiții se impun pe o curbă care trebuie ea însăși determinată prin rezolvarea problemei.

Pentru rezolvarea problemei generale formulate mai sus, avem nevoie de soluţiile altor probleme, particulare, la care vom reduce în cele din urmă studiul acesteia. Vom căuta, anume, soluţia problemei dezlocuirii în cazurile particulare cînd frontul iniţial este un cerc al planului complex, sonda de injecţie este plasată în centru, cea de extracţie la infinit şi cazul similar cînd sonda de injecţie e plasată într-un punct oarecare al frontului circular iniţial. Soluţia problemei obţinută în cazurile particulare de mai sus serveşte şi la compararea rezultatelor noastre cu cele obţinute pe altă cale, de alţi autori.

Cazul frontului iniţial circular, sonda de injecţie centrală, iar cea de extracţie la infinit. Să presupunem deci că frontul iniţial este un cerc cu centrul în originea axelor de coordonate de rază R_i, iar sonda de injecţie, plasată de asemenea în origine, debitează în fiecare unitate de timp o cantitate de fluid Q de viscozitate μ_1. În domeniul exterior acestui cerc, mediul poros este saturat de un fluid de viscozitate μ_2, care se recuperează printr-o sondă plasată la infinit. Problema asemănătoare studiată în [1] şi [2], în cazul în care mişcarea are loc între două frontiere permeabile concentrice, îşi găseşte soluţionarea în cadrul problemei astfel concepute.

Datorită simetriei mişcării, frontul păstrează forma circulară, dar raza sa va varia cu timpul, luînd la momentul T poziţia C (fig. 3), de rază $R(T)$. Necunoscuta problemei este această funcţie $R = R(T)$. Curba C împarte planul în două regiuni, domeniul interior D^+, ocupat de fluidul injectat, şi cel exterior D^-, ocupat de fluidul de extıacţie. Pentru formularea matematică a problemei notăm presiunile p_i (x, y, T), $i = 1, 2,$

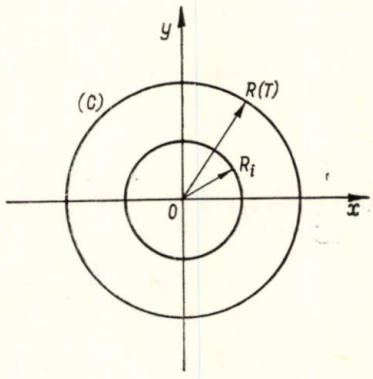


Fig. 3

respectiv, prin $\varphi^+(x, y, T)$ şi $\varphi^-(x, y, T)$, iar conjugatele lor armonice, respectiv, prin $\psi^+(x, y, T)$ şi $\psi^-(x, y, T)$. Se formează astfel, în conformitate cu condiţia (2), o funcţie olomorfă pe porţiuni (în afară de singularităţi date)

$$f(z) = \begin{cases} f^+(z) = \varphi^+ + i\psi^+ & \text{în } D^+, \\ f^-(z) = \varphi^- + i\psi^- & \text{în } D^-. \end{cases}$$

Condiţiile (3) şi (4) transpuse pentru funcţia $f(z)$ vor avea forma

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t), \tag{3'}$$

$$\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial\varphi^+}{\partial n} = \frac{k}{\mu_2}\frac{\partial\varphi^-}{\partial n}, \tag{4'}$$

unde prin t s-a notat afixa unui punct curent de pe curba C. Ţinînd seama de relaţiile lui Cauchy-Riemann, pe care funcţiile $f^+(z)$ şi $f^-(z)$ le satisfac identic în domeniile de olomorfie, relaţia (4') devine

$$\frac{k}{\mu_1}\frac{\partial\psi^+}{\partial s} = \frac{k}{\mu_2}\frac{\partial\psi^-}{\partial s}$$

sau, după integrare pe curba C,

$$\psi^+(t) = m\,\psi^-(t),$$

unde s-a notat

$$m = \frac{\mu_1}{\mu_2}.$$

Constanta de integrare de care nu am ţinut seama mai sus arată că soluţia pe care o vom obţine va fi independentă de o constantă pur imaginară. Cu aceste notaţii problema la limită se poate formula în modul următor : să se determine în planul complex z o funcţie analitică pe porţiuni $f(z)$ cu linia de salturi $|z| = R(T)$, care să satisfacă pe această curbă condiţiile

$$\varphi^+(t, T) = \varphi^-(t, T),$$
$$\psi^+(t, T) = m\,\psi^-(t, T). \tag{6}$$

Vom izola singularitatea cunoscută în origine căutînd funcţia $f(z)$ sub forma

$$f(z, T) = \frac{Q}{2\pi}\ln z + F(z, T), \tag{7}$$

unde $F(z, T)$ este o funcţie olomorfă pe porţiuni

$$F(z, T) = \begin{cases} F^+(z, T) = \Phi^+ + i\,\Psi^+ & \text{în } D^+, \\ F^-(z, T) = \Phi^- + i\,\Psi^- & \text{în } D^-. \end{cases}$$

Considerînd ca necunoscută a problemei funcţia $F(z, T)$, vom scrie pentru ea condiţiile la limită. Din (6) şi (7) se deduce

$$\Phi^+(t, T) - \Phi^-(t, T) = 0,$$
$$\Psi^+(t, T) - m\,\Psi^-(t, T) = \frac{m-1}{2\pi}\,Q\arg t. \tag{8}$$

A doua relaţie (8) se poate scrie :

$$\Psi^+ - \Psi^- = \frac{(m-1)\,Q}{2\pi}\arg t + (m-1)\,\Psi^-,$$

pe care, după înmulţirea cu i, o adunăm cu prima relaţie (8) şi obţinem

$$F^+ - F^- = \frac{\mathrm{i}\,(m-1)\,Q}{2\pi} \arg t + \mathrm{i}\,(m-1)\,\Psi^-. \tag{9}$$

Cu ajutorul relaţiei cunoscute

$$\Psi^- = \frac{F^- - \overline{F}^-}{2\mathrm{i}},$$

expresia (9) devine

$$F^+ - \frac{m+1}{2} F^- + \frac{m-1}{2} \overline{F}^- = \frac{\mathrm{i}\,(m-1)\,Q}{2\pi} \arg t. \tag{10}$$

Relaţia scrisă mai sus sugerează o condiţie care defineşte problema lui Riemann, de care diferă prin termenul care conţine pe $\overline{F}^-$. Printr-o schimbare de funcţie, aceasta se poate aduce la problema lui Riemann clasică, după cum se va vedea din cele ce urmează. Vom defini pentru aceasta funcţia $F_*(z, T)$ prin egalitatea (vezi [3])

$$F_*(z, T) = \overline{F^-\left[\frac{R(T)}{\bar{z}}\right]}.$$

Evident, funcţia $F_*(z, T)$ va fi olomorfă în D^+, fapt care reiese din modul în care a fost definită şi din aceea că $F^-(z, T)$ este olomorfă în D^-. În plus, $F_*(z, T)$ ia valori-limită conjugate cu $F^-(z, T)$ pe linia de salt $z| = R(T)$. Vom introduce acum funcţia $H(z, T)$ olomorfă pe porţiuni, pefinită de relaţiile

$$H(z, T) = \begin{cases} F^+(z, T) + \dfrac{m-1}{2} F_*(z, T) & \text{în } D^+, \\ \dfrac{m+1}{2} F^-(z, T) & \text{în } D^-, \end{cases} \tag{10'}$$

după care relaţia (10) devine

$$H^+(t, T) - H^-(t, T) = \frac{\mathrm{i}\,(m-1)}{2\pi} \arg t, \tag{11}$$

iar cu notaţia

$$J(z, T) = \frac{2\pi}{(m-1)\,Q} H(z, T), \tag{11'}$$

relaţia (11) se scrie

$$J^+(t, T) - J^-(t, T) = \mathrm{i} \arg t. \tag{12}$$

Deoarece membrul drept al relaţiei de mai sus nu este uniform la parcurgerea lui C, ea nu poate fi interpretată ca reprezentînd saltul unei funcţii olomorfe pe porţiuni, în conformitate cu relaţiile lui Plemelj.

Pentru a putea aplica metodele folosite în teoria problemelor la limită de tip Riemann, introducem o nouă funcţie, $L(z, T)$, legată de $J(z, T)$ prin relaţia

$$J(z, T) = \ln L(z, T), \tag{13}$$

pentru care condiţia la limită (12) devine

$$\ln L^+(t, T) - \ln L^-(t, T) = \ln e^{i \arg t}, \tag{14}$$

relaţie care arată că indicele problemei este $\varkappa = 1$.

În conformitate cu teoria generală a problemei lui Riemann, introducem funcţia

$$M(z, T) = \begin{cases} L(z, T) & \text{în } D^+, \\ z\, L(z, T) & \text{în } D^-, \end{cases} \tag{15}$$

după care condiţia pe linia de salt se scrie

$$\ln M^+(t, T) - \ln M^-(t, T) = i \arg t - \ln t = -\ln R(T).$$

Soluţia problemei lui Riemann relativă la condiţia precedentă, în care saltul este nu numai uniform, dar chiar constant la un moment dat, se scrie imediat sub forma

$$\ln M(z, T) = -\frac{\ln R(T)}{2\pi i} \int_c \frac{dt}{t - z}$$

au, după efectuarea integralei, trecînd la funcţia $M(z, T)$,

$$M(z, T) = \begin{cases} \dfrac{1}{R(T)} & \text{în } D^+, \\ 1 & \text{în } D^-. \end{cases}$$

De aici se deduce imediat

$$F(z, T) = \begin{cases} -\dfrac{Q(m-1)}{2\pi} \ln R(T) + \dfrac{Q(m-1)}{2\pi} \cdot \dfrac{m-1}{m+1} \overline{\ln \dfrac{R^2(T)}{z}}, \\ -\dfrac{2Q(m-1)}{2\pi(m+1)} \ln z, \end{cases}$$

iar funcţia $f(z, T)$ va avea expresia

$$f(z, T) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{m-3}{m+1} [m \ln z - (m-1) \ln R(T)], \\ \dfrac{Q}{2\pi} \dfrac{m-3}{m+1} \ln z. \end{cases} \tag{16}$$

Din forma condiţiilor la limită (6) se observă că, dacă $f(z, T)$ este o soluţie a problemei, $f_1(z, T) = c \cdot f(z, T) + c_1$, unde c şi c_1 sînt constante

oarecare, va fi de asemenea o soluție a problemei. În consecință vom scrie soluția (16) sub o formă mai convenabilă

$$f(z,\ T) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}\left[\ln z - \dfrac{m-1}{m}\ln R(T)\right], \\ \dfrac{Q}{2\pi m}\ln z, \end{cases} \tag{17}$$

corespunzătoare condițiilor la limită (8) scrise și sub forma

$$m\Phi^+(t,\ T) - m\ \Phi^-(t,\ T) = 0,$$

$$m\Psi^+(t,\ T) - m\Psi^-(t,\ T) = \frac{m-1}{2\pi}\arg t + (m-1)\,\Psi^+(t,\ T).$$

Verificarea condițiilor la limită pentru soluția obținută sub forma (16) sau (17) este imediată.

Pentru a deduce evoluția frontului, vom avea în vedere faptul că ecuația lui poate fi scrisă sub forma

$$F(R,\ T) = R - R\ (T) = 0,$$

iar ecuația (5) pe care o verifică ecuația frontului devine, în cazul mișcării radiale,

$$\frac{\partial F}{\partial T} + V_R\frac{\partial F}{\partial R} = 0,$$

care trebuie integrată cu condiția

$$R = R_i \quad \text{pentru} \quad T = 0.$$

Soluția se scrie imediat

$$R(T) = \sqrt{\frac{Q}{\pi m}\ T + R_i^2}\,. \tag{18}$$

În lucrările citate [1] și [2] se rezolvă problema deplasării suprafeței de contact între un contur circular de alimentare de rază R_c, pe care se presupune presiunea constantă și cunoscută p_c, și un contur de absorbție de rază R_s și presiune p_s. Frontul ocupă o poziție intermediară R_a. Vom arăta că, în aceste condiții, soluția (17) coincide cu cea determinată în lucrările citate. Deducem într-adevăr din (17) că

$$p_1(r) = \varphi^+(r) = \frac{Q}{2\pi}\left(\ln r - \frac{m-1}{m}\ln R_a\right) + C_1,$$

$$p_2(r) = \varphi^-(r) = \frac{Q}{2\pi}\ \frac{1}{m}\ln R.$$

Funcţia $p_1(r)$ ne dă presiunea pentru $R_s \leqslant r \leqslant R_a$, iar $p_2(r)$ pentru $R_a \leqslant r \leqslant R_c$. Să exprimăm soluţia în funcţie de constantele p_s, p_c, R_s, R_c şi R_a. Se obţine sistemul

$$p_s = \frac{Q}{2\pi}\left[\ln R_s - \frac{m-1}{m}\ln R_a\right] + C_1,$$

$$p_c = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{m}\ln R_s + C_1,$$

care, rezolvat în raport cu Q şi C_1, ne dă

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{p_s - p_c}{\ln\frac{R_s}{R_a} + \frac{1}{m}\ln\frac{R_a}{R_c}}, \quad C_1 = p_c - \frac{1}{m}\,\frac{p_s - p_c}{\ln\frac{R_c}{R_a} + \frac{1}{m}\ln\frac{R_a}{R_s}}.$$

Reintroducerea în soluţie a constantelor astfel exprimate ne permite să scriem

$$p_1 = p_s + \frac{p_s - p_c}{\ln\frac{R_s}{R_a} + \frac{1}{m}\ln\frac{R_a}{R_c}}\ln\frac{r}{R_s},$$

$$p_2 = p_c - \frac{1}{m}\,\frac{p_s - p_c}{\ln\frac{R_s}{R_a} + \frac{1}{m}\ln\frac{R_a}{R_c}}\ln\frac{R_c}{r}. \tag{19}$$

Folosind notaţia adoptată în [1] şi [2], $m = \frac{c_2}{c_1}$, coincidenţa formulelor (19) cu cele din lucrările citate este imediată.

Cazul frontului iniţial circular, sonda de injecţie excentrică, iar cea de extracţie la infinit. Ne ocupăm în continuare de cazul cînd în interiorul frontului iniţial circular sonda de injecţie este plasată excentric. Mişcarea considerată astfel este mai generală, frontul nemaipăstrînd în timpul mişcării forma circulară. În acest caz, vom rezolva problema la limită la diferite momente succesive ale mişcării, evoluţia frontului fiind determinată de succesiunea poziţiilor sale.

Să considerăm, aşadar, configuraţia iniţială a fenomenului, în care presupunem că frontul este cercul unitar al planului complex $z = x + iy$, că sonda de injecţie este plasată într-un punct arbitrar al cercului (noi am presupus a real, ceea ce nu este o particularizare esenţială) şi că debitul sondei Q este cunoscut (fig. 4). Sonda de extracţie se află la infinit. Cu aceleaşi notaţii ca în cazul precedent, avînd însă în vedere faptul că funcţiile nu mai depind de timp, condiţiile la limită se scriu pe C sub forma asemănătoare cu (6)

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t),$$
$$\psi^+(t) = m\,\psi^-(t), \tag{20}$$

unde $|t| = 1$, iar $\varphi(x, y)$ şi $\psi(x, y)$ sînt, respectiv, partea reală şi imaginară a funcţiei $f(z)$, pe care o căutăm acum sub forma

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - a) + F(z), \tag{21}$$

$F(z)$ fiind o funcţie definită prin $F^+(z)$ în D^+ şi $F^-(z)$ în D^-, olomorfe în domeniile respective. Condiţiile la limită pentru $F(z) = \Phi + i\Psi$, ţinînd seama de (20) şi (21), sînt :

$$\Phi^+ - \Phi^- = 0\,; \quad \Psi^+ - m\Psi^- = \frac{Q}{2\pi}(m - 1)\arg(t - a). \tag{22}$$

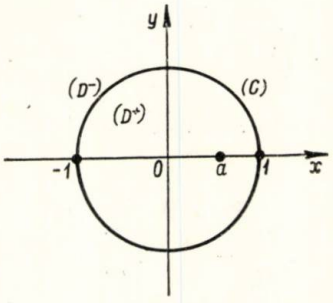


Fig. 4

Folosind calea urmată anterior pentru condiţiile asemănătoare (8), relaţiile precedente devin :

$$F^+ - \frac{m+1}{2} F^- + \frac{m-1}{2} \overline{F^-} = \frac{Q_i}{2\pi}(m - 1)\arg(t - a). \tag{23}$$

Trebuie determinată, aşadar, funcţia $F(z)$, olomorfă pe porţiuni, cu linia de salt $|z| = 1$, care satisface pe această curbă condiţia (23). Urmînd procedeul indicat în cazul precedent, vom reduce problema la limită la o problemă a lui Riemann. Introducînd, ca şi mai sus, funcţiile $H(z)$, $J(z)$ şi $L(z)$ (în acest caz ele nu depind de T) şi apoi funcţia $M(z)$, de data aceasta definită de expresia

$$M(z) = \begin{cases} L(z) & \text{în } D^+, \\ (z - a)\, L(z) & \text{în } D^- \end{cases}$$

(se poate lucra şi cu funcţia $M(z)$ definită sub forma (15), ceea ce complică calculele, soluţia fiind aceeaşi), sîntem conduşi la condiţia la limită pentru $M(z)$

$$\ln M^+(t) - \ln M^-(t) = i\arg(t-a) - \ln(t-a) = -\ln|t - a|,$$

în care membrul drept este o funcţie uniformă pe cercul $|z| = 1$. Condiţia este satisfăcută de funcţia

$$\ln M(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{\ln|t - a|}{t - z}\, dt,$$

care, după efectuarea calculelor, are expresia

$$\ln M(z) = -\frac{1}{2}\begin{cases} \ln(1-az), & z \in D^+, \\ \ln\dfrac{z}{z-a}, & z \in D^-. \end{cases}$$

Revenind la funcția $F(z)$, ținînd seama de substituțiile făcute, obținem

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi}\left[\ln(1-az) + \dfrac{m-1}{m+1}\ln z + \dfrac{m-1}{m+1}\ln\left(\dfrac{1}{\bar{z}} - a\right)\right], & z \in D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi(m+1)}[\ln z + \ln(z-a)], & z \in D^-, \end{cases} \tag{24}$$

care satisface condiția la limită (22), după cum se poate verifica. Vom scrie soluția (24) sub o formă mai utilă, ținînd seama că $\overline{\ln(1-az)} = \ln(1-az)$ și $\overline{\ln\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right)} = -\ln z$; aceasta capătă forma :

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi}\left[\ln(1-az) - \dfrac{m-1}{m+1}\ln(1-az) + 2\dfrac{m-1}{m+1}\ln z, \right. & z \in D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi(m-1)}[\ln z + \ln(z-a)], & z \in D^-. \end{cases} \tag{25}$$

În expresia pentru D^+ a funcției (25), apare un termen în $\ln z$ care nu este olomorf în domeniul respectiv. Observăm că, dacă din soluția generală care satisface condiția (22) scădem o soluție particulară $F_0(z)$ a problemei omogene

$$\Phi_0^+ = \Phi_0^-, \qquad \Psi_0^+ = m\Psi_0^-, \tag{26}$$

atunci diferența $F(z) - F_0(z)$, pe care pentru simplificare o notăm tot cu $F(z)$, va satisface de asemenea condiția (22). Se observă că funcția care satisface condiția omogenă (26) este

$$F_0(z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}\,\dfrac{m-1}{m+1}\ln z, & z \in D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi}\,\dfrac{m-1}{m(m+1)}\ln z, & z \in D^-, \end{cases}$$

cu ajutorul căreia $F(z)$ devine

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}\,\dfrac{m-1}{m+1}\ln(1-az), & z \in D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi}\,\dfrac{m-1}{m+1}\left[\dfrac{1}{m}\ln z + \ln(z-a)\right], & z \in D^-. \end{cases}$$

Sîntem acum în măsură să scriem expresia lui $f(z)$ sub forma :

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}\left[\ln(z-a) - \dfrac{m-1}{m+1}\ln(1-az)\right], & z \in D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi}\left[\dfrac{2}{m+1}\ln(z-a) - \dfrac{m-1}{m(m+1)}\ln z\right], & z \in D^-, \end{cases} \tag{27}$$

care este soluția finală a problemei. Ea coincide cu soluția problemei la limită identice, obținută pe altă cale în [4], în studiul unei probleme de filtrație într-un mediu poros neomogen.

Cu ajutorul celor stabilite mai sus putem să determinăm toate elementele mișcării. Familia liniilor de curent se deduce din (27)

$$\psi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}\left[\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{m-1}{m+1}\operatorname{arctg}\dfrac{-ay}{1-ax}\right] = \text{const}, & x^2+y^2 \leqslant 1, \\ \dfrac{Q}{2\pi}\left[\dfrac{2}{m+1}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x-a} - \dfrac{m-1}{m(m+1)}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right] = \text{const}, & x^2+y^2 \geqslant 1, \end{cases}$$

iar cîmpul vitezelor rezultă din aceeași expresie

$$W(z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}c_1\left[\dfrac{1}{z-a} + \dfrac{m-1}{m+1}\dfrac{a}{1-az}\right], & z \in D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi}c_2\left[\dfrac{2}{m+1}\dfrac{1}{z-a} - \dfrac{m-1}{m(m+1)}\dfrac{1}{z}\right], & z \in D^-, \end{cases} \tag{28}$$

unde $c_1 = \dfrac{k}{\mu_1}$ și $c_2 = \dfrac{k}{\mu_2}$.

Viteza unui punct de pe front se poate calcula ușor făcînd în expresiile precedente $z = e^{i\theta}$. Din relația pentru D^+ rezultă

$$u^+ - iv^+\Big|_{z=e^{i\theta}} = \frac{Qc_1}{2\pi}\left[(m+1)\frac{\cos\theta - a - i\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} + \right.$$

$$\left. + (m-1)\frac{a - a^2\cos\theta + i\,a^2\sin\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\right],$$

iar viteza radială

$$V_n = u^+\cos\theta + v^+\sin\theta = \frac{Qc_1}{2\pi}\,\frac{(1+m)+a^2(1-m)-2a\cos\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}.$$

Pornind de la expresia vitezei complexe pentru D^- se obține

$$u^- - iv^-\Big|_{z=e^{i\theta}} = \frac{Qc_2}{2\pi}\left[\frac{2(\cos\theta - a - i\sin\theta)}{1-2a\cos\theta+a^2} - \frac{m-1}{m}(\cos\theta - i\sin\theta)\right],$$

din care se calculează

$$V_n = u^- \cos\theta + v^- \sin\theta = \frac{Qc_1}{2\pi} \frac{(1+m) + a^2(1-m) - 2a\cos\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta},$$

observîndu-se identitatea cu expresia corespunzătoare calculată cu ajutorul lui w^+, ceea ce constitue o verificare în plus a celei de-a doua condiții la limită (4).

Expresia lui V_n este suficientă pentru determinarea ecuației curbei la momentul următor ΔT. Într-adevăr, ecuația (5) poate fi scrisă :

$$\frac{\partial F}{\partial T} + (V_n \bar{n} + V_t \bar{t}) \nabla F = 0,$$

unde $\bar{n}$ și $\bar{t}$ sînt versorii normalei și, respectiv, ai tangentei la curbă. Deoarece produsul scalar $\bar{t} \cdot \nabla F$ este nul în orice moment, expresia devine

$$\frac{\partial F}{\partial T} + V_n \frac{\partial F}{\partial n} = 0.$$

De aceea ecuația curbei la momentul următor se va scrie :

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta + \frac{Qc_1}{2\pi} \frac{1 + m + a^2(1-m) - 2a\cos\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} \Delta T \cos\theta, \\ y &= \sin\theta + \frac{Qc_1}{2\pi} \frac{1 + m + a^2(1-m) - 2a\cos\theta}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} \Delta T \sin\theta. \end{aligned} \tag{29}$$

Domeniul D^+, mărginit inițial de cercul unitar, a devenit după timpul ΔT un alt domeniu, D_1^+, mărginit de curba (29). Problema trebuie reformulată pentru noua configurație geometrică.

Înainte de a arăta modul de rezolvare a acestei probleme, vom trage cîteva consecințe imediate din cele arătate mai sus, necesare pentru tratarea cazului general pe care îl studiem.

Cazul frontului circular cu o sondă de injecție și una de extracție la distanță finită. Vom considera un front circular în planul Z avînd în interior în punctul A o sondă de injecție de debit Q, iar în exterior în punctul B o sondă de extracție de același debit. Soluția problemei se poate deduce în trei moduri, și anume : la soluția (27) a problemei, în care se consideră sonda de injecție în A și cea de extracție la infinit, se adaugă soluția problemei cu o sondă de injecție în origine și una de extracție în B, scăzîndu-se apoi efectul sondelor din origine și de la infinit (avem această posibilitate fără a modifica condițiile la limită, deoarece soluția problemei cu o sondă în origine și una la infinit coincide cu soluția problemei omogene). Metoda a doua constă în transformarea conformă a interiorului cercului $|z| \leqslant 1$ cu o sondă de injecție în a ($|a| < 1$) și una de extracție la infinit pe interiorul cercului $|Z| \leqslant 1$, astfel ca punctul a să treacă în A și punctului de la infinit din planul z să-i corespundă punctul B din planul Z. A treia cale constă în rezolvarea directă a problemei pentru cazul considerat (fig. 5). Soluțiile obținute pe cele trei căi coincid.

Urmînd prima dintre cele trei căi prezentate, observăm că soluţia problemei în cazul frontului circular cu o sondă de injecţie în origine şi una de extracţie în B ($|B|>1$) se poate deduce aplicînd o transformare conformă soluţiei (27) (sonda de injecţie în a şi cea de extracţie la infinit), care lasă cercul unitar neschimbat şi transformă punctul de la infinit în punctul B. Această transformare are forma :

$$Z=\frac{Bz+1}{z+B} \quad \text{sau} \quad z=\frac{1-BZ}{Z-B}. \tag{30}$$

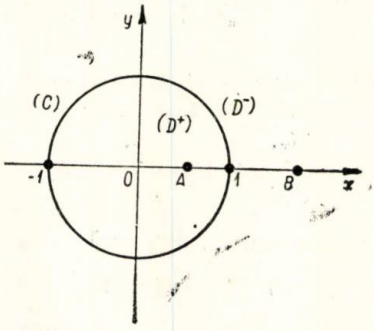


Fig. 5

Cu aceasta, punctul $a=-\frac{1}{B}$ din planul z va trece în originea planului Z. Obţinem din (27) soluţia problemei

$$f(Z)=\begin{cases}\dfrac{Q}{2\pi}\left[(m-1)\ln Z-2\ln(Z-B)+2\ln\dfrac{B^2-1}{-B}\right] & \text{în } D^+,\\[2ex] \dfrac{Q}{2\pi}\left[2\ln Z-\dfrac{m+1}{m}\ln(Z-B)-\dfrac{m-1}{m}\ln(1-BZ)+2\ln\dfrac{B^2-1}{-B}\right] & \text{în } D^-.\end{cases} \tag{30'}$$

După adunarea cu soluţia problemei cu o sondă de injecţie în A şi cea de extracţie la infinit (expresia (27)), obţinem

$$f(Z)=\begin{cases}\dfrac{Q}{2\pi}\Big[(m+1)\ln(Z-A)-(m-1)\ln(1-AZ)+\\ \qquad+(m+1)\ln Z-2\ln(Z-B)+2\ln\dfrac{B^2-1}{-B}\Big] & \text{în } D^+,\\[2ex] \dfrac{Q}{2\pi}\Big[2\ln(Z-A)-\dfrac{m+1}{m}\ln(Z-B)+\dfrac{m+1}{m}\ln Z-\\ \qquad-\dfrac{m-1}{m}\ln(1-BZ)+2\ln\dfrac{B^2-1}{-B}\Big] & \text{în } D^-.\end{cases}$$

Scăzînd soluția problemei omogene, după cum deja s-a arătat, obținem soluția problemei căutate sub forma

$$f(Z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}\left[(m+1)\ln(Z-A)-(m-1)\ln(1-AZ)-2\ln(Z-B)\right] \text{ în } D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi}\left[2\ln(Z-A)-\dfrac{m-1}{m}\ln(Z-B)-\dfrac{m-1}{m}\ln(1-BZ)\right] \text{ în } D^-. \end{cases} \tag{31}$$

Folosind a doua cale, cu ajutorul transformării conforme (30) se poate deduce direct soluția (31). Pentru ca după transformare punctului a să-i corespundă A stabilit dinainte, trebuie să luăm

$$a = \frac{1-AB}{A-B}.$$

Obținem cu aceasta

$$f(Z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}\left[(m+1)\ln(Z-A)-(m-1)\ln(1-AZ)- \right. \\ \qquad \left. -2\ln(Z-B)+2\ln\dfrac{B^2-1}{A-B}\right] \text{ în } D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi}\left[2\ln(Z-A)-\dfrac{m+1}{m}\ln(Z-B)-\dfrac{m-1}{m}\ln(1-BZ)+ \right. \\ \qquad \left. +2\ln\dfrac{B^2-1}{A-B}\right] \text{ în } D^-, \end{cases} \tag{32}$$

identică cu (31) în afară de o constantă pur imaginară, arbitrară în expresia soluției.

Cea de-a treia cale constă în rezolvarea directă a problemei după procedeul deja folosit. Căutăm soluția sub forma

$$f(Z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(Z-A) - \frac{Q}{2\pi}\ln(Z-B) + F(Z), \tag{33}$$

unde am pus în evidență sondele din A și B. Condițiile la limită (6) pentru $f(Z)$ dau pentru $F(Z) = \Phi + i\Psi$ pe cercul unitar,

$$\Phi^+ - \Phi^- = 0,$$

$$\Psi^+ - m\Psi^- = \frac{Q(m-1)}{2\pi}[\arg(t-A) - \arg(t-B)]. \tag{34}$$

Aplicînd artificiul deja întrebuințat, condițiile de mai sus se scriu

$$F^+ - \frac{m+1}{2}F^- + \frac{m-1}{2}\overline{F^-} = \frac{iQ(m-1)}{2\pi}[\arg(t-A)-\arg(t-B)], \tag{35}$$

După substituţia (10'), relaţia de mai sus devine

$$H^+ - H^- = \frac{iQ(m-1)}{2\pi}[\arg(t-A) - \arg(t-B)],$$

iar cu notaţiile (11') obţinem

$$J^+ - J^- = i \arg(t-A) - i \arg(t-B).$$

Substituţia

$$M(Z) = \begin{cases} J(Z) & \text{în } D^+, \\ \ln(Z-A) + J(Z) & \text{în } D^-, \end{cases}$$

ne conduce la condiţia

$$M^+ - M^- = -\ln|t-A| + \ln|t-B| - \ln(t-B),$$

a cărei soluţie este

$$M(Z) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln\frac{B}{(Z-B)(AZ-1)} & \text{în } D^+, \\ \frac{1}{2}\ln\frac{B(Z-A)}{BZ-1} & \text{în } D^-. \end{cases}$$

Ţinînd seama de substituţiile făcute, se obţine

$$f(Z) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi(m+1)}\left[(m+1)\ln(Z-A) - (m-1)\ln(1-AZ) - 2\ln(Z-B)\right] + \\ \quad + \frac{Q(m-1)}{2\pi(m+1)}\left[-(m-1)\ln Z - 2\ln(Z-B) + \ln(-B)\right], \\ \frac{Q}{2\pi(m+1)}\left[2\ln(Z-A) - \frac{m+1}{m}\ln(Z-B) - \frac{m-1}{m}\ln(1-BZ)\right] + \\ \quad + \frac{Q(m-1)}{2\pi(m+1)}\left[-\frac{m+1}{m}\ln(Z-B) - \frac{m-1}{m}\ln(1-BZ) + \ln(-B)\right]. \end{cases}$$

Dacă la aceasta se adaugă soluţia ecuaţiei omogene

$$f_0(Z) = \begin{cases} m\frac{Q(m-1)}{\pi(m+1)}\ln Z, & \text{în } D^+, \\ \frac{Q(m-1)}{\pi(m+1)}\ln Z & \text{în } D^-, \end{cases}$$

ea devine

$$f(Z) = \frac{1}{m+1}[f_1(Z) + f_2(Z)],$$

unde s-a notat

$$f_1(Z) = \begin{cases} \dfrac{Q}{2\pi}\left[(m+1)\ln(Z-A)-(m-1)\ln(1-AZ)-2\ln(Z-B)\right] \text{ în } D^+, \\ \dfrac{Q}{2\pi}\left[2\ln(Z-A)-\dfrac{m+1}{m}\ln(Z-B)-\dfrac{m-1}{m}\ln(1-BZ)\right] \text{ în } D^-, \end{cases}$$

care coincide cu (31) şi (32).

În ceea ce priveşte funcţia $f_2(Z)$, ea reprezintă soluţia problemei cu o sondă în origine şi alta în punctul B, după cum se vede imediat prin comparaţie cu (30'), şi care poate fi extrasă din soluţia noastră ca fiind fără suport fizic. Adoptînd deci pe $f_1(Z)$ ca soluţie a problemei se constată că rezultatul obţinut prin cele trei metod este acelaşi.

Cazul frontului circular cu n sonde de injecţie în interior şi p sonde de extracţie în exterior. Pentru studiul cazului în care în interiorul frontului circular sînt n sonde de injecţie plasate în punctele z_i care au respectiv debitele $Q_i^{(1)}$ iar în exterior p sonde de extracţie în punctele ζ_j de debite respectiv $Q_j^{(2)}$, vom considera mai întîi cazul cînd nu există decît o sondă de extracţie în exterior plasată la infinit. Soluţia acestui caz va fi suma soluţiilor problemelor cu o sondă de injecţie în z_i de debit $Q_i^{(1)}$ şi cu o sondă de extracţie la infinit de acelaşi debit, soluţie pe care o cunoaştem, oricare ar fi poziţia punctului z_i în interiorul cercului unitar. Vom deosebi apoi cazul în care se presupune existenţa unei sonde de injecţie plasată în origine de debit $Q = \sum_{j=1}^{p} Q_j^{(2)}$ şi a p sonde de extracţie în punctele ζ_j în exterior. De asemeni, soluţionarea acestui caz se reduce la însumarea efectelor din cazul unei singure sonde în origine de debit $Q_j^{(2)}$ şi o sondă în exterior în punctul ζ_j. Cazul expus iniţial se va rezolva prin însumarea celor două soluţii, iar sondele din origine şi de la infinit vor dispare dacă se va îndeplini condiţia

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{p} Q_j^{(2)},$$

afară de cazul în care s-a presupus existenţa unei sonde în unul din aceste puncte. Se poate arăta desigur că rezolvarea directă a problemei conduce la aceeaşi soluţie ca cea obţinută prin metoda de mai sus.

Cazul frontului oarecare. Conform procedeului adoptat pentru rezolvarea problemei, urmează să găsim potenţialul complex al mişcării în domeniul ocupat de fluidul de dezlocuire după un interval de timp ΔT. Frontul de dezlocuire la acest moment nu va mai fi circular în cazul general, ceea ce complică rezolvarea problemei matematice. După cum vom vedea în cele ce urmează, aceasta va căpăta o formă specială, neîntîlnită încă în teoria problemelor la limită liniare. Ne limităm şi de astă dată la cazul cînd în interiorul frontului de dezlocuire este o singură sondă de injecţie iar cea de extracţie este plasată la infinit. De cazurile mai generale ce pot apare nu ne ocupăm în detaliu deoarece soluţia acestor probleme se deduce uşor din cea enunţată.

Să considerăm în planul z curba închisă L care reprezintă frontul la momentul considerat (fig. 6) în interiorul căreia avem o sondă de injecție în punctul a iar cea de extracție la infinit. Căutăm ca și pînă acum potențialul complex $f(z) = \varphi + i\psi$ sub forma

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - a) + F(z),$$

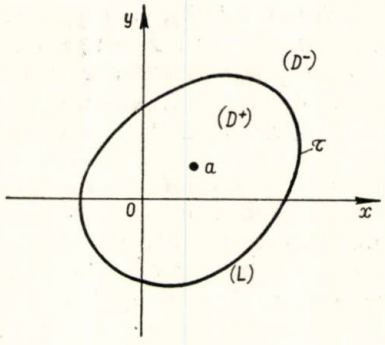


Fig. 6

unde $F(z) = \Phi + i\Psi$ trebuie să fie olomorfă pe porțiuni în planul z cu linia de salt L. Condiția la limită pe linia L pentru funcția $F(z)$ se obține ca și în cazurile precedente, și are forma

$$F^+(\tau) + A\overline{F^-(\tau)} - BF^-(\tau) = g(\tau), \tag{36}$$

unde

$$A = \frac{K-1}{2}\ ;\ B = \frac{K+1}{2}\ ;\ g(\tau) = \frac{Qi}{2\pi}(k-1)\arg(\tau - a),$$

iar τ este un punct curent de pe linia L. Deși condiția la limită (36) are o formă similară cu cele deja folosite, nu poate fi tratată prin același procedeu, deoarece curba L este oarecare. Ca și în cazul cercului, condiția (36) diferă de condiția problemei lui Riemann prin termenul care conține pe $\overline{F^-(\tau)}$. Vom reduce rezolvarea problemei la limită de mai sus la rezolvarea unei ecuații integrale singulare. Scriem pentru aceasta condiția (36) sub forma

$$F^+(\tau) + A(\varphi^- - i\psi^-) - B(\varphi^- + i\psi^-) = g(\tau)$$

sau sub altă formă

$$\frac{1}{A+B}F^+(\tau) - \frac{B-A}{B+A}\varphi^-(\tau) - i\psi^-(\tau) = \frac{1}{B+A}g(\tau).$$

Grupînd în mod convenabil termenii extensibili la D^-, relația de condiție pe L devine

$$\frac{1}{B+A}F^+(\tau) - F^-(\tau) + \frac{2A}{B+A}\varphi^-(\tau) = \frac{1}{B+A}g(\tau).$$

Introducem o nouă funcţie olomorfă pe porţiuni, $\Phi(z)$, legată de $F(z)$ prin relaţiile

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{B+A} F^+(z) & \text{în } D^+, \\ F^-(z), & \text{în } D^-. \end{cases}$$

Cu aceasta condiţia la limită capătă forma

$$\Phi^+(\tau) - \Phi^-(\tau) = \frac{1}{B+A} g(\tau) - \frac{2A}{B+A} \varphi^-(\tau), \tag{37}$$

al cărei membru drept reprezintă saltul funcţiei $\Phi(z)$ pe curba L. Putem aşadar scrie

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{B+A} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z} d\tau - \frac{A}{\pi i} \frac{1}{B+A} \int_L \frac{\varphi^-(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Trecînd în relaţia precedentă la limită pe L din D^- obţinem

$$\Phi^-(t) \equiv \varphi^-(t) + i\psi^-(t) = \frac{1}{B+A} g^-(t) + \frac{A}{B+A} \varphi^-(t) - \\ - \frac{A}{\pi i (B+A)} \int_L \frac{\varphi^-(\tau)}{\tau - t} d\tau, \tag{38}$$

unde

$$g^-(t) = -\frac{g(t)}{2} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{\tau - t} d\tau.$$

Dacă în relaţia (38) exprimăm funcţia $\psi^-(t)$ prin conjugata ei $\varphi^-(t)$ obţinem ecuaţia integrală singulară la care ne-am referit mai sus pentru determinarea lui $\varphi^-(t)$. Pentru a simplifica calculele vom reprezenta domeniul D^- pe exteriorul cercului unitar al planului auxiliar Z. Notînd

$$\tau = \alpha(\sigma) \quad \text{şi} \quad t = \alpha(\sigma_1),$$

corespondenţa punctelor de pe curba L şi cercul C, expresia (38) capătă forma

$$\Phi^-(\sigma_1) = \frac{g^-(\sigma_1)}{B+A} + \frac{A}{B+A} \varphi^-(\sigma_1) - \frac{A}{\pi i (B+A)} \int_C \frac{\varphi^-(\sigma)\, \alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma) - \alpha(\sigma_1)} d\sigma. \tag{39}$$

Expresia lui $\Phi^-(\sigma_1)$ o deducem ca limită din D^- (s-a păstrat aceeaşi notaţie pentru interiorul şi respectiv exteriorul cercului) pe C a unei funcţii olomorfe în D^- a cărei parte reală o cunoaştem pe C. Expresia lui $\Phi^-(Z)$ cu partea reală pe C $\varphi^-(\theta)$ este dată de formula lui Schwartz-Villat [6]

$$\Phi(Z) = -\frac{1}{2\pi} \int_C \varphi^-(\theta) \frac{\sigma + Z}{\sigma - Z} d\theta,$$

unde θ este argumentul lui σ. Ţinînd seama de relaţia $\sigma = e^{i\theta}$, formula de mai sus devine :

$$\Phi(Z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi^-(\sigma)\frac{\sigma + Z}{\sigma - Z}\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Expresia căutată a lui $\Phi^-(\sigma_1)$ va avea forma

$$\Phi^-(\sigma_1) \equiv \varphi^-(\sigma_1) + i\psi^-(\sigma_1) = \varphi^-(\sigma_1) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi^-(\sigma)}{\sigma}\frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma - \sigma_1}d\sigma. \quad (40)$$

Această expresie ne permite să scriem legătura dintre $\varphi^-(\sigma_1)$ şi $\psi^-(\sigma_1)$ de care vom avea nevoie în cele ce urmează

$$\psi^-(\sigma_1) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\varphi^-(\sigma)}{\sigma}\frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma - \sigma_1}d\sigma. \quad (41)$$

Dacă în (39) ţinem seama de (40), obţinem

$$\varphi^-(\sigma_1) - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi^-(\sigma)}{\sigma}\frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma - \sigma_1}d\sigma - \frac{g^-(\sigma_1)}{B + A} - \frac{A}{B + A}\varphi^-(\sigma_1) +$$

$$+ \frac{A}{\pi i(B + A)}\int_C \frac{\varphi^-(\sigma)\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma) - \alpha(\sigma_1)}d\sigma = 0$$

sau, grupînd termenii în mod convenabil,

$$\frac{B}{B + A}\varphi^-(\sigma_1) + \frac{1}{2\pi i}\int_C \varphi^-(\sigma)\left[\frac{2A}{B + A}\frac{\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma) - \alpha(\sigma_1)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma(\sigma - \sigma_1)}\right]d\sigma - \frac{g^-(\sigma_1)}{B + A} = 0, \quad (42)$$

care reprezintă ecuaţia integrală care determină pe $\varphi^-(\sigma)$.

Să arătăm că expresia

$$E = \frac{2A}{B + A}\frac{\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma) - \alpha(\sigma_1)} - \frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma(\sigma - \sigma_1)},$$

nucleul ecuaţiei integrale (42), tinde la infinit ca $\frac{1}{\sigma - \sigma_1}$ cînd $\sigma \to \sigma_1$, adică ecuaţia (42) este singulară. Pentru aceasta, scriem pe E sub forma

$$E = \frac{2A}{B + A}\left[\frac{\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma) - \alpha(\sigma_1)} - \frac{1}{\sigma - \sigma_1}\right] + \frac{1}{\sigma - \sigma_1}\left(\frac{2A}{B + A} - \frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma}\right).$$

Paranteza dreaptă din expresia de mai sus tinde la infinit cînd $\sigma \to \sigma_1$ cu un ordin mai mic ca unu dacă $\alpha'(\sigma)$ este o funcţie hölderiană (pentru

demonstrație vezi [5] pag. 146). Se vede imediat că termenii rămași din expresia lui E tind la infinit cu ordinul unu. Într-adevăr

$$\frac{1}{\sigma-\sigma_1}\left(\frac{2A}{B+A}-\frac{\sigma+\sigma_1}{\sigma}\right)=\frac{A(\sigma-\sigma_1)-B(\sigma+\sigma_1)}{\sigma(B+A)(\sigma-\sigma_1)}=$$

$$=\frac{A}{\sigma(B+A)}-\frac{B(\sigma+\sigma_1)}{\sigma(B+A)}\cdot\frac{1}{\sigma-\sigma_1},$$

expresie care demonstrează afirmația făcută.

Dacă în expresia (42) ținem seama de (41) ecuația integrală devine :

$$\frac{B}{B+A}\varphi^-(\sigma_1)+\mathrm{i}\,\psi^-(\sigma_1)+\frac{A}{\pi\mathrm{i}(B+A)}\int_C\frac{\varphi^-(\sigma)\,\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)-\alpha(\sigma_1)}\,\mathrm{d}\sigma-\frac{g^-(\sigma_1)}{B+A}=0.$$

Separînd în expresia de mai sus partea reală obținem următoarea ecuație integrală la care satisface $\varphi^-(\sigma_1)$:

$$B\varphi^-(\sigma_1)+\frac{A}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\varphi^-(\sigma)\left[\frac{\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)-\alpha(\sigma_1)}+\frac{\overline{\alpha'(\sigma)}}{\overline{\alpha(\sigma)}-\overline{\alpha(\sigma_1)}}\,\frac{1}{\sigma^2}\right]\mathrm{d}\sigma-$$

$$-\frac{g^-(\sigma_1)+\overline{g^-(\sigma_1)}}{2}=0. \tag{43}$$

Ecuația de mai sus se aduce la forma canonică punînd în evidență partea caracteristică. Scriem pentru aceasta nucleul integralei sub forma :

$$\frac{\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)-\alpha(\sigma_1)}+\frac{\overline{\alpha'(\sigma)}}{\overline{\alpha(\sigma)}-\overline{\alpha(\sigma_1)}}\,\frac{1}{\sigma^2}=\frac{1}{\sigma-\sigma_1}+\frac{\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)-\alpha(\sigma_1)}-$$

$$-\frac{1}{\sigma-\sigma_1}+\frac{1}{\sigma^2(\sigma-\sigma_1)}+\frac{\overline{\alpha'(\sigma)}}{\overline{\alpha(\sigma)}-\overline{\alpha(\sigma_1)}}\,\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma^2(\sigma-\sigma_1)}.$$

Făcînd notațiile

$$N(\sigma,\sigma_1)=\frac{\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)-\alpha(\sigma_1)}+\frac{\overline{\alpha'(\sigma)}}{\overline{\alpha(\sigma)}-\overline{\alpha(\sigma_1)}}\,\frac{1}{\sigma^2},$$

$$N_1(\sigma,\sigma_1)=\frac{\alpha'(\sigma)}{\alpha(\sigma)-\alpha(\sigma_1)}-\frac{1}{\sigma-\sigma_1},$$

$$N_2(\sigma,\sigma_1)=\frac{\overline{\alpha'(\sigma)}}{\overline{\alpha(\sigma)}-\overline{\alpha(\sigma_1)}}\,\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma^2(\sigma-\sigma_1)},$$

din care se vede că N_1 și N_2 sînt nuclee slab polare, nucleul $N(\sigma,\sigma_1)$ devine

$$N(\sigma,\sigma_1)=N_1(\sigma,\sigma_1)+N_2(\sigma,\sigma_1)-\frac{\sigma+\sigma_1}{\sigma^2\sigma_1^2}+\left(1+\frac{1}{\sigma^2}\right)\frac{1}{\sigma-\sigma_1},$$

iar forma canonică a ecuației este

$$B\varphi^-(\sigma_1) + \frac{A}{2\pi i}\left(1 + \frac{1}{\sigma_1^2}\right)\int_C \varphi^-(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma - \sigma_1} +$$

$$+ \frac{A}{2\pi i}\int_C \varphi^-(\sigma)\left[N_1 + N_2 - \frac{\sigma + \sigma_1}{\sigma_1^2\sigma^2}\right]d\sigma - \mathrm{Re}\ g^-(\sigma_1) = 0,$$

căreia i se pot aplica metodele generale de integrare. Funcția $\varphi^-(\sigma_1)$, fiind determinată de ecuația de mai sus, se poate deduce ușor funcția $\Psi^-(\sigma_1)$ conjugata armonică a sa prin formula (41). Cunoscîndu-se expresia lui $\Phi^-(\tau)$ se deduce imediat expresia lui $\Phi^+(\tau)$ folosind condiția la limită (37) și cu aceasta problema este rezolvată.

Primită la redacție la 15 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. N. Cristea, *Hidraulica subterană*, Edit. tehnică, București, 1956.
2. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Edit. Academiei, București, 1966.
3. N. I. Mushelișvili, *Singulearnîie integralnîie uravnenia*, Fizmatiz, 1962, Ediția a II-a.
4. N. A. Gusein-Zadé, *Osobenosti dvijenia jidcosti v neodnorodnom plaste*, Moscova, 1965.
5. F. D. Gahov, *Kraevîie zadaci. Gostehisdat*, Moscova, 1963, Ediția a II-a.
6. C. Iacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Edit. Academiei, București, 1959.

DEZLOCUIREA PLANĂ NEGRAVITAȚIONALĂ A DOUĂ FLUIDE NEMISCIBILE ÎNTR-UN MEDIU POROS (I)

de ION SETEANU

Institutul de mecanică a fluidelor al Academiei Republicii Socialiste România

532

Se studiază procesul de dezlocuire a țițeiului de către apă cu sondele de injecție și de extracție așezate într-un mod arbitrar. Se presupune procesul hidrodinamic bidimensional, considerîndu-se efectul capilarității ca o perturbație. Se obține un tip special de ecuație integrală avantajos pentru calculele aproximative, indicîndu-se metoda de determinare a frontului de dezlocuire. Se studiază separat domeniul mărginit de frontiere impermeabile, cu două sonde.

1. Introducere. Studiul procesului de dezlocuire a fluidelor nemiscibile prezintă un interes deosebit pentru practica exploatării petroliere. Printr-o așezare judicioasă a sondelor de injecție și extracție se poate ajunge la o mărire sensibilă a cantității de țiței extras dintr-un zăcămînt.

Sistemele unidimensionale au constituit obiectul unor cercetări de mare amploare, obținîndu-se, fie prin metode numerice, fie pe cale analitică în cazuri simplificate, soluții care dau o imagine destul de amănunțită a procesului fizic studiat.

În cazul sistemelor bidimensionale, încercările sînt mult mai puțin numeroase, datorită complexității analitice a ecuațiilor procesului, pe de-o parte, iar pe de altă parte datorită faptului că, în cea mai mare parte, nu se cunosc coeficienții ecuațiilor decît sub forma unor curbe experimentale care se schimbă de la caz la caz.

Dintre cercetările care au abordat acest domeniu pot fi citate lucrarea lui D. A. Efros [1], care admite că liniile de curent nu se schimbă în timpul procesului de dezlocuire, precum și lucrarea lui L. R. Kern [2], care extinde în anumite limite soluția mișcării unidimensionale la un proces bidimensional. În general, în lucrările care studiază pe cale analitică procesul de dezlocuire se încearcă folosirea soluțiilor unidimensionale în cazul bidimensional, fie admițînd tubul de curent ca un sistem unidimensional, fie folosind simetria particulară a sistemului concret studiat. O încercare de soluționare pe cale numerică a problemei a fost efectuată în lucrarea [3] atît pentru modelul stratificat, cît și pentru modelul „five-spot".

În lucrarea de față se prezintă un procedeu de studiu analitic aproximativ al fenomenului de dezlocuire a două fluide nemiscibile, bidimensional și neglijînd efectul gravitației. Efectul capilarității este considerat ca o perturbație și se calculează în a doua aproximație. În partea a doua a lucrării se vor prezenta rezultatele numerice ale aplicării acestei metode la modelul „five-spot".

2. Formulele fundamentale. Se studiază fenomenul de dezlocuire a petrolului de către apă. Mediul poros rezervor se consideră omogen și izotrop, avînd umectabilitatea preferențială față de apă. Se neglijează compresibilitatea ambelor fluide. Procesul de dezlocuire se efectuează sub forma unei mișcări plane, într-un plan orizontal, fără a se ține seamă de influența gravitației.

Ecuațiile generale ale mișcării, luînd în considerare capilaritatea, au forma [4]

$$\boldsymbol{v}_a = -k_a \cdot \nabla p_a; \quad \boldsymbol{v}_t = -k_t \cdot \nabla p_t,$$

$$\nabla \boldsymbol{v} = 0; \quad \boldsymbol{v}_a + \boldsymbol{v}_t = \boldsymbol{v},$$

$$m \frac{\partial s_a}{\partial t} + \nabla \boldsymbol{v}_a = 0; \quad s_a + s_t = 1,$$

$$p_t - p_a = P_c(s). \tag{1}$$

În aceste formule s-au folosit notațiile:

$\boldsymbol{v}_a$, p_a, s_a — viteza, presiunea și saturația fazei de apă (umectantă);
$\boldsymbol{v}_t$, p_t, s_t — viteza, presiunea și saturația fazei de țiței;
$\boldsymbol{v}$ — viteza rezultantă a amestecului bifazic;
k_a, k_t — permeabilitățile mediului poros față de cele două faze;
m — porozitatea efectivă a mediului poros.

Se mai folosesc relațiile:

$$k_a = k \frac{k_{ra}}{\mu_a}; \qquad k_t = k \frac{k_{rt}}{\mu_t}, \tag{2}$$

unde

k reprezintă permeabilitatea absolută a mediului poros;
k_{ra}, k_{rt} — permeabilitățile relative;
μ_a, μ_t — viscozitățile dinamice ale celor două faze.

Introducerea permeabilităților relative este justificată, întrucît cercetările experimentale [5] au arătat că, pentru fluide nemiscibile, depind între anumite limite doar de saturație.

Se mai notează pentru simplificare

$$s_a = s; \quad s_t = 1 - s,$$

$$p_a = p; \quad p_t = p + P_c(s). \tag{3}$$

Cu (3), sistemul (1) devine :

$$\boldsymbol{v} = -(k_a + k_t)\cdot\nabla p - k_t\cdot\nabla P_c(s),$$

$$\nabla\boldsymbol{v} = 0,$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla\boldsymbol{v}_a = 0,$$

$$\boldsymbol{v}_a = -k_a\cdot\nabla p. \tag{4}$$

Prima ecuație a sistemului (4) se poate scrie de asemenea :

$$\boldsymbol{v} = -(k_a + k_t)\,\nabla\left[p + \int \frac{k_t}{k_a + k_t} P_c'(s)\,\mathrm{d}s\right]. \tag{5}$$

Scoțînd pe ∇p din prima ecuație și folosind celelalte ecuații, se obține o nouă formă a ecuației pentru saturație

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\cdot\left(\frac{k_a}{k_a + k_t}\right) + \nabla\cdot\left[\frac{k_a k_t}{k_a + k_t}\cdot\nabla P_c(s)\right] = 0. \tag{6}$$

Dacă se elimină presiunea din (5), se obține o altă formă a sistemului (4)

$$\nabla\times\left[\frac{\boldsymbol{v}}{k_a + k_t}\right] = 0,$$

$$\nabla\boldsymbol{v} = 0,$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\cdot\left(\frac{k_a}{k_a + k_t}\right) + \nabla\cdot\left[\frac{k_a k_t}{k_a + k_t}\cdot\nabla P_c(s)\right] = 0. \tag{7}$$

Calculele se pot simplifica întrucîtva prin introducerea funcției de curent ψ :

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \mathbf{j}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{8}$$

care satisface identic a doua ecuație a sistemului (7). Sistemul inițial devine, prin urmare,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k_a + k_t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{k_a + k_t}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) = 0, \tag{9}$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + \left(\frac{k_a}{k_a + k_t}\right)'\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \Delta\left[\int\frac{k_a k_t}{k_a + k_t}P_c'(s)\,\mathrm{d}s\right] = 0.$$

Se introduc notațiile simplificatoare

$$\frac{1}{k_a + k_t} = \frac{\mu_t}{k}a(s); \quad \left(\frac{k_a}{k_a + k_t}\right)' = b(s),$$

$$\int_0^s \frac{k_a k_t}{k_a + k_t}P_c'(s)\,\mathrm{d}s = \frac{k}{\mu_a}p_*(s),$$

care se mai pot scrie, folosind (2),

$$a(s) = \frac{1}{\frac{\mu_t}{\mu_a} k_{ra} + k_{rt}} \qquad b(s) = \frac{\mu_t}{\mu_a} \frac{k'_{ra} k_{rt} - k_{ra} k'_{rt}}{\left(\frac{\mu_t}{\mu_a} k_{ra} + k_{rt}\right)^2}. \tag{10}$$

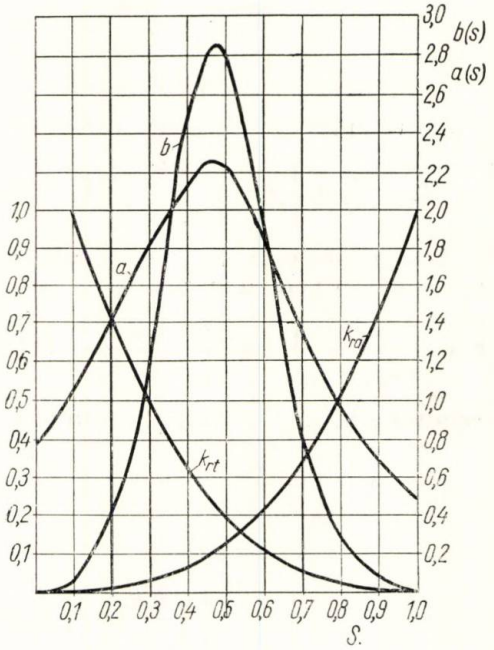


Fig. 1

Funcţiile k_{ra}, k_{rt}, $a(s)$, $b(s)$ nu se cunosc decît prin curbele obţinute experimental. Una dintre formele posibile este indicată în figura 1.

Cu notaţiile alese, sistemul (9) se scrie :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(s)\frac{\partial \psi}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[a(s)\frac{\partial \psi}{\partial y}\right] = 0,$$

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + b(s)\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial s}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \frac{k}{\mu_a}\Delta p_c(s) = 0. \tag{11}$$

Sistemul (11) este completat cu condiţiile pe frontierele impermeabile care impun ca acestea să fie linii de curent ($\psi = \text{const}$), cu condiţiile iniţiale care dau distribuţia de saturaţie la momentul iniţial şi cu condiţiile din vecinătatea sondei. Dacă se consideră originea sistemului polar de coordonate în sonda studiată, se poate scrie pentru imediata ei vecinătate :

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \ldots, \qquad \int_0^{2\pi} r v_r \, d\theta = q,$$

$$\psi = \frac{q}{2\pi}\theta + \ldots, \tag{12}$$

unde s-au neglijat termenii de ordin superior de micime.

Presiunea se poate calcula după rezolvarea problemei, presupunînd că i se cunoaște mărimea într-un punct $M(p_0)$

$$p - p_0 = -\int \frac{a(s)\,\mathbf{v}(\mathbf{r})}{k}\,\mathrm{d}\vec{r} - \int \frac{k}{\mu_a}\,\frac{p_c'(s)}{k_a(s)}\,\mathrm{d}\mathbf{r}\cdot\nabla s, \tag{13}$$

unde integrarea se face pe o curbă care unește punctul M cu punctul curent.

3. Ecuația integrală a problemei. Prima ecuație a sistemului (11), presupunînd pe $a(s)$ cunoscut, definește o funcție a-analitică, dacă folosim terminologia lui G. N. Polojii [6]. Un procedeu de rezolvare prin aproximații succesive este indicat de M. Brousse [7] prin generalizarea unei metode a lui Picard, căutînd soluția dezvoltată după un parametru mic. Metoda este foarte generală, iar convergența rapidă. Condițiile în care se poate ajunge la o ecuație de tip Fredholm cu nucleul iterat au fost analizate de L. Lichtenstein [8]. Procedeul de calcul este însă foarte laborios.

În cazul particular al funcțiilor a-analitice, se poate indica un procedeu prin care se ajunge direct la o ecuație integrală de o formă aparte, foarte comodă pentru calcule.

Ecuația care se studiază se scrie dezvoltat :

$$\Delta\psi = -\nabla(\ln a)\cdot\nabla\psi. \tag{14}$$

Presupunînd membrul drept cunoscut și folosind soluția problemei lui Dirichlet pentru o ecuație de tip Poisson, se poate transforma (14) într-o ecuație integrală liniară cu nucleu slab polar :

$$\psi = \psi_0(x, y) + \frac{1}{2\pi}\iint G(x, y; \xi, \eta)\,\nabla(\ln a)\cdot\nabla\psi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{15}$$

unde ψ_0 este o funcție armonică care satisface condițiile la limită, iar $G(x, y; \xi, \eta)$ este funcția lui Green a problemei lui Dirichlet pentru domeniul fizic studiat.

Se aplică o identitate generalizată a lui Green

$$\frac{\rho^n}{n!}\,G\cdot\nabla\rho\cdot\nabla\psi = \nabla\left[G\cdot\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\nabla\psi\right] - \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\,\nabla G\cdot\nabla\psi - G\cdot\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\,\Delta\psi\cdot$$

S-a notat mai sus

$$\rho = \ln a \qquad \Delta\psi = -\nabla\rho\cdot\nabla\psi.$$

Introducînd expresia laplacianului în identitatea de mai sus, se obține

$$\left[\frac{\rho^n}{n!} - \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\right]G\cdot\nabla\rho\cdot\nabla\psi = \nabla\left[\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\cdot G\cdot\nabla\psi\right] - \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\,\nabla G\cdot\nabla\psi.$$

Se sumează pentru n variind între 0 și N :

$$\left[1 - \frac{\rho^{N+1}}{(N+1)!}\right]G\cdot\nabla\rho\cdot\nabla\psi = \nabla\left[G\cdot\nabla\psi\cdot\sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\right] -$$

$$-\nabla G\cdot\nabla\psi\sum_{n=0}^{N}\frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!}\cdot$$

Dacă se presupune ρ mărginit şi se face ca N să tindă la infinit, se obţine

$$G\cdot\nabla\rho\cdot\nabla\psi = \nabla[(e^{\rho}-1)\,G\cdot\nabla\psi] - (e^{\rho}-1)\,\nabla G\cdot\nabla\psi.$$

Înlocuind din nou expresia lui ρ în funcţie de a, rezultă

$$G\cdot\nabla(\ln a)\cdot\nabla\psi = \nabla[(a-1)\,G\cdot\nabla\psi] - (a-1)\,\nabla G\cdot\nabla\psi. \qquad (16)$$

Folosind formula (16), forma generală a soluţiei (15), aplicînd teorema lui Gauss, devine

$$\psi = \psi_0(x, y) + \frac{1}{2\pi}\oint (a-1)\,G\cdot\nabla\psi\cdot d\mathbf{r} + \frac{1}{2\pi}\iint (1-a)\,\nabla G\cdot\nabla\psi\, d\xi\, d\eta.$$

Întrucît funcţia lui Green a problemei lui Dirichlet satisface condiţia la limită omogenă se obţine în definitiv

$$\psi = \psi_0(x, y) + \frac{1}{2\pi}\iint (1-a)\,\nabla G\cdot\nabla\psi\, d\xi\, d\eta. \qquad (17)$$

În continuare, se introduce funcţia lui Green, armonic conjugată, H, legată de G prin condiţiile Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial G}{\partial\xi} = \frac{\partial H}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial G}{\partial\eta} = -\frac{\partial H}{\partial\xi}.$$

Cu ajutorul ei se poate scrie

$$\nabla G\cdot\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial H}{\partial\eta} - \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial H}{\partial\xi} = \frac{D(\psi, H)}{D(\xi, \eta)}.$$

Folosind formula schimbării de variabilă din teoria integralei duble

$$\frac{D(\psi, H)}{D(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta = d\psi\, dH,$$

se obţine în cele din urmă forma finală a soluţiei, foarte comodă pentru calculul aproximativ

$$\psi = \psi_0(x, y) + \frac{1}{2\pi}\iint (1-a)\, d\psi\, dH. \qquad (18)$$

Unul dintre avantajele ecuaţiei (18) constă în absenţa nucleului singular. Soluţia se determină prin aproximaţii succesive, luînd ca primă aproximaţie funcţia ψ_0 şi recalculînd la fiecare pas funcţia $a(s)$.

4. Sistemul caracteristic. În a doua ecuaţie din (11), ultimul termen exprimă efectul forţelor capilare care tind să egalizeze curbura medie a suprafeţei de contact. Forţele de presiune au tendinţa de a produce o variaţie bruscă a saturaţiei pe frontul de dezlocuire, pe cînd forţele capilare tind la egalizarea saturaţiilor şi la crearea, în locul frontului, a unei zone în care saturaţia să varieze treptat. În spatele frontului, gradientul saturaţiei este mic şi de aceea nu este prea mare nici efectul forţelor capilare [9].

Cercetările experimentale [10] pentru sistemul liniar au arătat că, dacă lungimea sistemului este destul de mare, zona în care saturația variază mult poate fi considerată neglijabilă în raport cu sistemul. Deci efectul forțelor capilare nu este apreciabil. În consecință, pentru ușurința calculului, el poate fi considerat o perturbație și va fi calculat într-o a doua aproximație, folosind datele primei aproximații [11].

Se va studia în primul rînd problema dezlocuirii necapilare a țițeiului de către apă. Ecuația obținută prin omiterea presiunii capilare este cvasiliniară și de ordinul unu. Sistemul caracteristic al lui Cauchy se scrie :

$$\frac{dt}{m} = \frac{dx}{b(s)\frac{\partial \psi}{\partial y}} = \frac{dy}{-b(s)\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{ds}{0}. \tag{19}$$

Soluțiile acestui sistem de ecuații diferențiale ordinare constituie caracteristicile ecuației cvasiliniare cu derivate parțiale. Suprafața integrală este generată de caracteristicile care pornesc din punctele care la momentul inițial sînt situate pe curbele izosaturație.

Pentru a obține soluția problemei dezlocuirii bidimensionale necapilare, se poate folosi un procedeu de integrare aproximativă iterativă în timp a ecuațiilor sistemului (11), admițînd că variația în timp a parametrilor sistemului se produce după intervale de timp bine determinate, în care parametrii sînt staționari.

În aceste condiții se pot scrie direct două integrale ale sistemului (19) :

$$s = \text{const},$$

$$\psi(x, y, t) = \text{const}. \tag{20}$$

Relațiile (20) arată că, în sistemul de coordonate $Oxyt$, caracteristica este o curbă strîmbă în spațiu, conținută în suprafața $\psi(x, y, t) = \text{const}$. De-a lungul ei saturația are o valoare constantă precizată prin distribuția saturației la momentul inițial (fig. 2).

5. Sistemul din două sonde. Se presupune că sistemul este compus din două sonde, de injecție și de extracție, situate pe frontiera impermeabilă a zăcămîntului (fig. 3).

Se reprezintă cu ajutorul unei transformări conforme domeniul de curgere pe semiplanul superior astfel încît sonda de injecție să fie situată în origine, iar sonda de extracție în punctul de la infinit. Fie funcția de transformare conformă

$$z = f(Z). \tag{21}$$

Funcția de curent $\psi_0(X, Y)$ a primei aproximații a ecuației (17) este aceea a unei surse plasate în origine. Funcția de curent reală are încă adăugate aproximațiile următoare date de ecuația (18). Păstrînd prima aproximație [1] și introducînd funcția de potențial φ, se poate scrie sub altă formă a doua ecuație din (11)

$$m\frac{\partial s}{\partial t} + b(s)\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial s}{\partial y}\right) + \frac{k}{\mu_a}\left(\frac{\partial^2 p_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_c}{\partial y^2}\right) = 0,$$

care, după transformarea conformă, devine

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+\left[b(s)\left(\frac{\partial s}{\partial X}\frac{\partial \varphi}{\partial X}+\frac{\partial s}{\partial Y}\frac{\partial \varphi}{\partial Y}\right)+\frac{k}{\mu_a}\left(\frac{\partial^2 p_c}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 p_c}{\partial Y^2}\right)\right]\frac{1}{|f'(Z)|^2}=0. \quad (22)$$

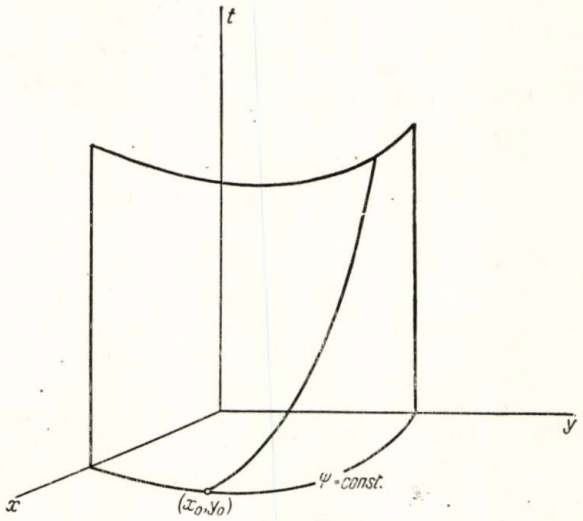


Fig. 2

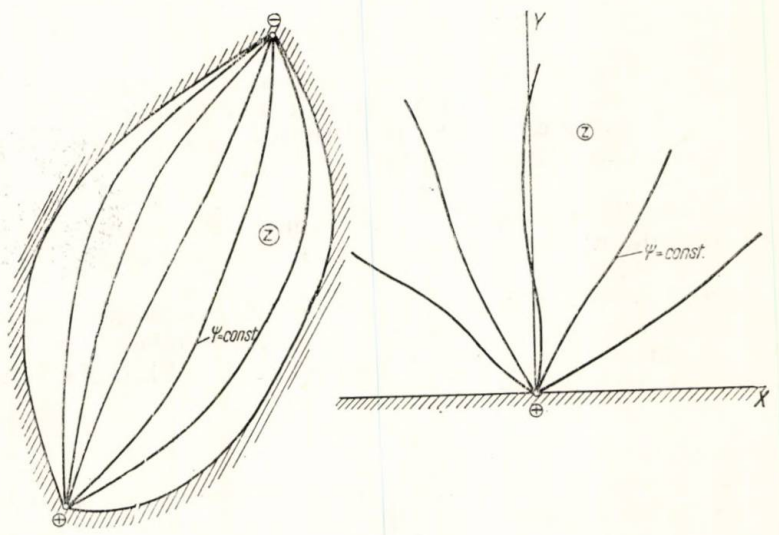


Fig. 3

În noul sistem de coordonate funcția de potențial are expresia

$$\varphi=\frac{q}{2\pi}\ln\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right). \quad (23)$$

Ecuaţia (22) va avea deci următoarea formă :

$$m\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{q}{2\pi}\frac{b(s)}{X^2+Y^2}\left|\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right|^2\left(X\frac{\partial s}{\partial X}+Y\frac{\partial s}{\partial Y}\right)+\frac{k}{\mu_a}\left|\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right|^2\Delta p_c(s)=0. \tag{24}$$

În planul Z caracteristicile sînt curbe plane conţinute în planele meridiane

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}=\text{const.} \tag{25}$$

În planul meridian sînt date de ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}t}{m}=\frac{\mathrm{d}X}{\dfrac{q}{2\pi}\dfrac{Xb(s)}{X^2+Y^2}\left|\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z}\right|^2}. \tag{26}$$

Pe curba caracteristică se poate scrie parametric :

$$X=R\cos\theta,\qquad Y=R\sin\theta.$$

Prin integrare, se obţine

$$\frac{q}{2\pi}b(s)\cdot t=\int\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z}\right|^2 R\,\mathrm{d}R+\text{const}, \tag{27}$$

care arată comportarea curbei caracteristice în planul meridian $\theta=\text{const}$, iar punctul ei de intersecţie cu planul $t=0$ este dat prin cunoaşterea distribuţiei iniţiale de saturaţie $R_0=R(s)$. Se pot scrie deci ecuaţiile curbelor caracteristice :

$$\begin{aligned} b(s)\cdot T&=W(R,\ \theta)-W(R_0,\ \theta),\\ X&=R\cos\theta;\quad Y=R\sin\theta,\\ S&=\text{const};\qquad \theta=\text{const}, \end{aligned} \tag{28}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

unde

$$W(R,\ \theta)-W(R_0,\ \theta)=\int_{R_0}^{R}\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}Z}\right|^2 R\mathrm{d}R,$$

$$T=\frac{q}{2\pi}t. \tag{29}$$

Caracteristicile sînt curbe plane în sistemul $OXYT$, deşi sînt curbe strîmbe în general în sistemul $Oxyt$. Făcînd în fiecare plan meridian, $\theta=\text{const}$, transformarea

$$W=W(R,\ \theta), \tag{30}$$

se obţin caracteristicile sub forma unei reţele de drepte al cărei parametru este saturaţia

$$W=W_0(s)+b(s)\cdot T. \tag{31}$$

Deoarece $b(s)$ are aspectul indicat în figura 1, rezultă că panta dreptelor caracteristice nu are o variaţie monotonă cu s, deci în cazul general dreptele caracteristice se vor intersecta, ceea ce atrage după sine neuniformitatea soluţiei. Această neuniformitate este lipsită de sens fizic şi, pentru

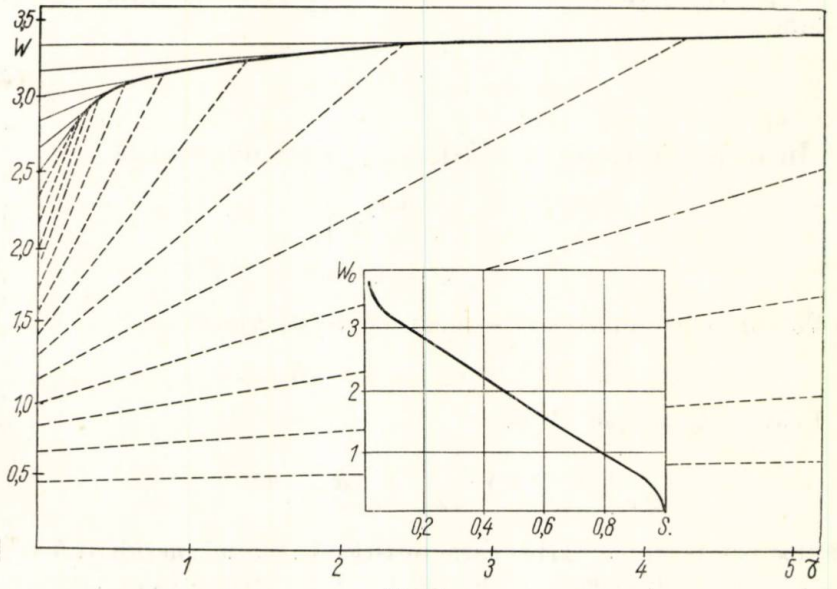


Fig. 4

a o înlătura, se face ipoteza că în punctul unde caracteristicile se intersectează pentru prima oară, apare o discontinuitate a saturaţiei. Locul geometric al punctelor de discontinuitate la un moment dat formează frontul de dezlocuire [9]. Fenomenul este analog cu apariţia undei de şoc în aerodinamica vitezelor mari şi este o consecinţă a neglijării efectului forţelor capilare. Din punct de vedere fizic nu apare un salt brusc al saturaţiei, ci o zonă în care aceasta variază rapid. Această zonă se poate calcula în a doua aproximaţie cînd se consideră efectul capilarităţii ca o perturbaţie.

Domeniul de existenţă al funcţiei $b(s)$ este compus din două subdomenii de monotonie cu frontiera comună în punctul pentru care funcţia $b(s)$ are valoarea maximă (fig. 1). Subdomeniul în care $b(s)$ este monoton crescătoare corespunde unor caracteristici a căror pantă este crescătoare şi care deci nu se pot intersecta. Caracteristicile din al doilea subdomeniu au panta monoton descrescătoare şi se taie între ele după curba înfăşurătoare. Este evident geometric că fiecare caracteristică din primul subdomeniu se taie mai întîi cu o caracteristică din al doilea subdomeniu în punctul de intersecţie cu înfăşurătoarea. De asemenea, este evident că primul punct de discontinuitate a saturaţiei coincide cu vîrful înfăşurătoarei. În acest fel se poate da un sens analitic univoc noţiunii de front de dezlocuire.

Deoarece parametrul dreptelor caracteristice este saturația s, forma parametrică a ecuațiilor înfășurătoarei se obține din (31)

$$W = W_0(s) + b(s)\, T,$$

$$T = -\frac{W_0'(s)}{b'(s)}. \tag{32}$$

Cunoscînd rețeaua de drepte caracteristice care se taie după linia de dezlocuire, se poate construi spectrul liniilor de saturație constantă pentru diferite momente T care prezintă un interes deosebit în practica exploatării petroliere.

Cunoașterea liniilor izosaturație permite determinarea funcției $1 - a(s)$ care apare în ecuația integrală (18), în fiecare punct al domeniului fizic. Deoarece corespondența dintre planul fizic și planul $O\psi H$ este determinată pentru oricare aproximație cu ajutorul aproximației anterioare, se va putea determina funcția $1 - a(s)$ în oricare punct al planului $O\psi H$, deci se poate construi o aproximație de orice ordin. Totuși, construirea aproximației de ordinul doi este suficientă.

Procedeul de calcul indicat în prezenta lucrare a fost aplicat la cazul dezlocuirii țițeiului de către apă printr-o rețea plană dublu periodică de sonde de injecție și extracție (procedeul „five-spot"). Rezultatele calculului se vor prezenta în partea a doua a acestei lucrări.

Primită la redacție la 14 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. A. Efros, *Issledovaniia filtrații neodnorodnîh sistem*, Gostoptehizdat, Leningrad, 1963.
2. L. R. Kern, *Displacement mechanism in multi-well system*, Transactions AIME, *195* (1952).
3. J. Douglas Jr., D. W. Peaceman, H. H. Rachford Jr., *A method for calculating multi-dimensional imiscible displacement*, Transactions AIME, *216* (1959).
4. A. E. Scheidegger, *The Physics of Flow through Porous Media*, University of Toronto Press, 1960.
5. D. A. Efros, V. P. Onoprienko, *Modelirovanie lineinogo vitesnenia nefti vodoi*, Trudî VNII, *10* (1958).
6. G. N. Polojii, *O (p, q) analiticeschih funcții complecsnogo peremennogo i necotorîh ih primeneniah.* În culegerea: *Issledovaniia po sovremennîm problemam teorii funcții complecsnogo peremennogo*, GIFL, Moscova, 1960.
7. M. Brousse, *Sur une résolution explicite du problème de Dirichlet pour l'équation elliptique la plus générale*, Journ. d. math. pures et appl., **XLIV**, *3*, 1965.
8. L. Lichtenstein, *Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen*, Math. Zeitschr., *20* (1924).
9. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Edit. Academiei, București, 1966.
10. L. A. Rapoport, *Scaling laws for use in design and operation of water-oil flow models*, Transaction AIME, *204* (1955).
11. B. le Fur, *Influence de la capillarité et de la gravité sur le déplacement non miscible unidimensionnel dans un milieu poreux*, Journal de Mécanique, **I**, *2* (1962).

ASUPRA EFECTULUI DE POMPAJ ELECTROMAGNETIC ÎN LUBRIFICAȚIA CU GAZE

de V. N. CONSTANTINESCU și FL. DIMOFTE
nstitutul de mecanică a fluidelo · al Academiei Republicii Socialiste România

621.89 ; 538.6 : 533

În lucrarea de față se analizează un efect de pompaj al cîmpurilor electromagnetice în lubrificația cu gaze, presupunînd că gazul lubrifiant posedă o conductibilitate electrică. Prin acest efect se caută realizarea unui film portant de gaz fără a recurge la alimentarea sub presiune.
Rezultatele obținute sînt ilustrate prin aplicarea la un lagăr în trepte de alungire infinită.

După cum s-a arătat în unele lucrări anterioare [1]-[4], în ipoteza că gazul lubrifiant posedă o conductibilitate electrică, există diferite posibilități de a îmbunătăți caracteristicile funcționale ale lagărului, cu ajutorul unor cîmpuri electromagnetice exterioare. Exemplele tratate se referă la tipuri uzuale de lagăre și la sisteme obișnuite de lubrificație : cu efect autoportant sau prin alimentare cu presiune din exterior.

În cele ce urmează ne propunem să examinăm posibilitățile care există de a produce un film portant de gaz între două suprafețe imobile fără a recurge la alimentarea sub presiune. După cum se va arăta, acest lucru este posibil fie folosind efectul de apropiere și de depărtare al suprafețelor (folosit și în cazul lubrificației cu gaze obișnuite), fie, în sfîrșit, folosind numai efectul de pompaj, care se poate obține cu ajutorul unor cîmpuri magnetice exterioare tangențiale și al unui cîmp electric transversal.

Astfel, să considerăm mai întîi cazul unui lagăr avînd ambele suprafețe perfect izolate și în ipoteza existenței unui cîmp magnetic transversal B_y. Ecuația presiunilor are atunci forma [1], [2]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2}-1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2}-1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right]=$$

$$= \rho (V_{2y} - V_{1y}) - \frac{\rho}{2}\left[(V_{2x} - V_{1x})\frac{\partial h}{\partial x} + (V_{2z} - V_{1z})\frac{\partial h}{\partial z}\right] +$$

$$+ \frac{h}{2}\left[\frac{\partial [\rho (V_{2x} + V_{1x})]}{\partial x} + \frac{\partial [\rho (V_{2z} + V_{1z})]}{\partial z}\right] + h\frac{\partial \rho}{\partial t}, \qquad (1)$$

în care s-a notat cu $M_y = hB_y\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ numărul Hartmann corespunzător cîmpului magnetic B_y, cu ρ densitatea fluidului lubrifiant, cu h grosimea stratului de lubrifiant, cu p presiunea, cu V_x, V_y, V_z componentele vitezelor după cele trei axe, cu σ conductibilitatea electrică și cu μ viscozitatea absolută a fluidului.

Să admitem că suprafețele sînt imobile în plan tangențial și că există o mișcare numai după axa y, normală la acestea. În aceste condiții $V_{1x} = V_{2x} = V_{1y} = V_{1z} = V_{2z} = 0$, $V_{2y} = h$, iar ecuația (1) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right] =$$

$$= \rho\dot{h} + h\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} \qquad (2)$$

sau, sub formă adimensională și în ipoteza că evoluția gazului este izotermă,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left[\bar{h}^3\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\bar{p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}\right] + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\bar{h}^3\frac{1}{M_y^2}\left(\frac{M_y}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y}{2} - 1\right)\bar{p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\right] =$$

$$= L\frac{\partial \bar{p}\bar{h}}{\partial \bar{t}}, \qquad (3)$$

$$\text{unde } L = \frac{\mu l^2}{p_a h_m^2 t_0}.$$

Ecuația (3) are o structură foarte asemănătoare ecuației presiunilor în regim staționar în cazul cînd una din suprafețe se deplasează cu o viteză V[2]. Singura deosebire este că în locul numărului Λ apare acum numărul adimensional L. În consecință, ca și pentru cazul menționat [2], influența cîmpului magnetic constă aproximativ în amplificarea numărului L în raportul

$$\frac{1}{6}\frac{M_y^{*2}}{\frac{M_y^*}{2}\operatorname{cth}\frac{M_y^*}{2} - 1} \geqslant 1, \qquad (4)$$

M_y^* fiind o valoare medie pentru M_y. Raportul de mai sus (4) tinde către unitate cînd $M_y^* \to 0$ și devine egal cu M_y^* cînd $M_y^* \to \infty$.

Rezultă deci că această situație, cîmp magnetic transversal și suprafețe perfect izolate, ar prezenta interes la valori mari ale numărului Hartmann și pentru un parametru L suficient de mic. Într-adevăr, cînd $L \to \infty$,

influența termenului $\frac{\partial(\overline{p}\overline{h})}{\partial\overline{t}}$ devine predominantă, iar presiunile tind către valorile asimptotice $ph = \text{const}$. În consecință, influența cîmpului magnetic scade pe măsură ce numărul L crește, devenind neglijabilă la valori L mari.

Să considerăm acum cazul existenței unui cîmp magnetic tangențial $B_z(M_z)$ combinat cu un cîmp electric transversal Φ_y (curent normal de suprafețe, acestea jucînd rolul unor electrozi) [1], [2]. În această situație, ecuația diferențială a presiunilor se poate scrie [3], [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\mu}\rho\frac{1}{12+M_z^2}\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{12\mu}\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right]=h\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho(V_{2y}-V_{1y})-$$

$$-\rho\left[V_{2x}\frac{\partial h}{\partial x}+V_{2z}\frac{\partial h}{\partial z}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{M_y^2}{12+M_y^2}\frac{\Phi_y}{B_z}\rho\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[6\rho h\frac{V_{1x}+V_{2x}}{12+M_z^2}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho h}{2}(V_{1z}+V_{2z})\right] \tag{5}$$

și, presupunînd în continuare că $V_{1x}=V_{2x}=V_{1y}=V_{1z}=V_{2z}=0$ și $V_{2y}=h$, ecuația presiunilor (5) devine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\mu}\rho\frac{1}{12+M_z^2}\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{12\mu}\rho\frac{\partial p}{\partial z}\right]=h\frac{\partial\rho}{\partial t}+\rho\dot{h}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{M_z^2}{12+M_z^2}\frac{\Phi_y}{B_z}\rho\right]. \tag{6}$$

De data aceasta, $M_z=h_{B_{z0}}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ este numărul Hartmann corespunzător cîmpului magnetic B_{z0}. Dacă considerăm evoluția gazului izotermă și definim un parametru $N'=\Phi_y\sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$, de dimensiunile unei viteze, ecuația (6) se mai poate pune sub forma

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{h^3}{\mu}\frac{1}{12+M_z^2}p\frac{\partial p}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{h^3}{12\mu}p\frac{\partial p}{\partial z}\right]=\frac{\partial(ph)}{\partial t}-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{N'M_z}{12+M_z^2}\rho h\right). \tag{7}$$

Dintre posibilitățile existente cu aceste condiții electromagnetice, să analizăm cazul mai interesant al unui regim staționar cu ambele suprafețe imobile. Fie în plus, pentru simplificare, $h=\text{const}$ (suprafețe imobile). Transcriind ecuația (7) în coordonate adimensionale, obținem

$$\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left[\frac{\overline{h}^3}{12+M_z^2}\overline{p}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}}\right]+\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left[\overline{h}^3\overline{p}\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{z}}\right]=\Lambda_{N'}\frac{\partial}{\partial\overline{x}}\left[\frac{M_z}{12+M_z^2}\overline{p}\overline{h}\right]; \tag{8}$$

se constată că această ecuație are o formă foarte asemănătoare cu ecuația obișnuită a presiunilor în cazul lubrificării cu gaze a două suprafețe para-

lele, avînd, una din ele, o viteză V [5], unde, în locul numărului obişnuit λ definit în funcţie de viteze, apare

$$\Lambda_{N'} = \frac{\mu N' l}{p_a h_m^2}. \tag{9}$$

În consecinţă, există un efect de pompaj pur electromagnetic, în care N' joacă rolul vitezei relative dintre suprafeţe.

Posibilităţile acestui sistem de pompaj pot fi evaluate calitativ examinînd soluţia-limită care se deduce pentru $\Lambda_{N'} \to \infty$. Rezultă analog cazului obişnuit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{M_z}{12 + M_z^2}\,\overline{p}\,\overline{h}\right) \to 0 \tag{10}$$

sau, considerînd $\overline{p} \to 1$ pentru o valoare $\overline{h} = \overline{h}_1$, rezultă

$$\overline{p} = \frac{12 + M_z^2}{12 + M_{z1}^2}\,\frac{M_{z_1}}{M_z}\,\frac{\overline{h}_1}{\overline{h}} = \frac{12 + M_{z1}^2\,\dfrac{\overline{h}^2}{\overline{h}_1^2}}{12 + M_{z_1}^2}\,\frac{\overline{h}_1^2}{\overline{h}^2}, \tag{11}$$

$$\text{deoarece } M_z = M_{z_1}\,\frac{\overline{h}}{\overline{h}_1}.$$

Se constată că $\overline{p} \to 1$ dacă M_{z1} are valori mari. Dacă însă M_{z1} are valori relativ reduse (de exemplu de ordinul unităţii), atunci $\overline{p} \sim \overline{h}_1^2/\overline{h}^2$ faţă de $\overline{p} \sim \overline{h}_1/\overline{h}$ în cazul obişnuit.

Se constată că acest sistem de lubrificaţie — crearea presiunilor în stratul de lubrifiant prin efect pur electromagnetic, suprafeţele stînd pe loc — oferă posibilităţi foarte interesante, cu condiţia obţinerii unor valori suficient de mari pentru parametrul $\Lambda_{N'}$.

Pentru a fixa ideile, vom analiza cazul unui lagăr de alungire infinită, ecuaţia diferenţială a presiunilor devenind

$$\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left[\frac{\overline{h}^3}{12 + M_z^2}\,\overline{p}\,\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}\right] = \Lambda_{N'}\,\frac{\partial}{\partial \overline{x}}\left[\frac{M_z}{12 + M_z^2}\,\overline{p}\,\overline{h}\right]. \tag{12}$$

Fie, în plus, un lagăr în trepte cu $h = \text{const}$ pe porţiuni (fig. 1).

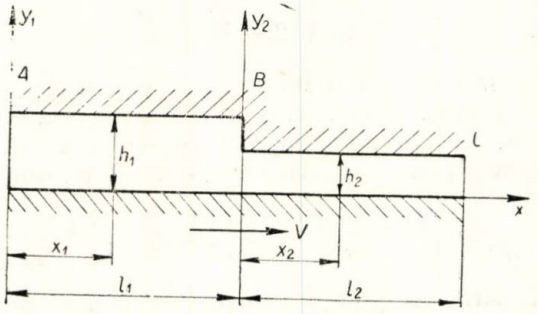


Fig. 1. — Lagăr în trepte (notaţii).

Soluțiile ecuației (12) vor fi de forma

$$\begin{aligned} &\overline{p} + c_1 \ln (\overline{p} - c_1) = \Lambda^*_{N'} \overline{x} + c_2 \qquad \text{pentru } \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} > 0, \\ &\overline{p} + c_1 \ln (c_1 - \overline{p}) = \Lambda^*_{N'} \overline{x} + c_2 \qquad \text{pentru } \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} > 0, \end{aligned} \tag{13}$$

unde $\Lambda^*_{N'} = \Lambda_{N'} . M_z$.

Pe cele două porțiuni cu $h = h_1$, $h = h_2$ se deduce distribuția presiunilor sub forma

$$\begin{aligned} &\overline{p} + c_1 \ln(\overline{p} - c_1) = \Lambda^*_{N'} \overline{x}_1 + c_2, \\ &\overline{p} + c_3 \ln(c_3 - \overline{p}) = \Lambda^*_{N'} \overline{x}_2 = c_4. \end{aligned} \tag{14}$$

Constantele c_1, c_2, c_3, c_4 și presiunea $\overline{p}_s$ în dreptul saltului se determină cu ajutorul condițiilor la limită ($\overline{p} = 1$ pentru $\overline{x}_1 = 0$, $\overline{x}_2 = 1$; $\overline{p} = \overline{p}_s$ pentru $\overline{x}_1 = 1$ și $\overline{x}_2 = 0$) și al condiției de conservare a debitului masic $\mathcal{M}_{x1} = \mathcal{M}_{x2}$. Se obține astfel pentru constante următorul sistem de ecuații :

$$\begin{aligned} &1 + c_1 \ln (1 - c_1) = c_2, \\ &p_s + c_1 \ln (\overline{p}_s - c_1) = \Lambda^*_{N'_1} + c_2 \\ &\overline{p}_s + c_3 \ln (c_3 - \overline{p}_s) = c_4 \\ &1 + c_3 \ln (c_3 - 1) = \Lambda^{!*}_{N'_2} + c_4, \\ &c_3 = c_1 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \frac{12 + M^2_{z_2}}{12 + M^2_{z_2}}, \end{aligned} \tag{15}$$

În figura 2 s-au reprezentat unele rezultate deduse cu ajutorul soluției de mai sus. Astfel, s-au trasat distribuțiile de presiuni la diferite rapoarte h_1/h_2 (2), (4), (9), considerînd $l_1/l_2 = 1$, și pentru un număr Hartmann $M_{z1} = 1$ (raportat la prima porțiune a lagărului). Distribuțiile de presiuni au fost calculate la diferite valori ale parametrului $\Lambda^*_{N'_1}$.

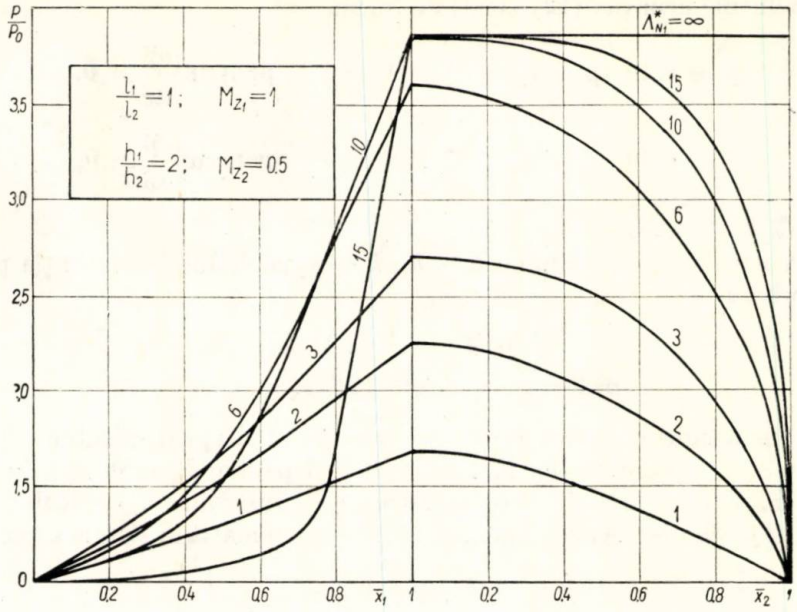
Variația coeficientului de încărcare ζ, funcție, de parametrul $\Lambda^*_{N'_1}$, pentru diferite valori ale raportului h_1/h_2 (2), (4), (9), este prezentată în figurile 3.

Se constată că, în aceste condiții, presiunile obținute în lagăr sînt suficient de mari, rezultînd posibilități apreciabile de încărcare a acestuia.

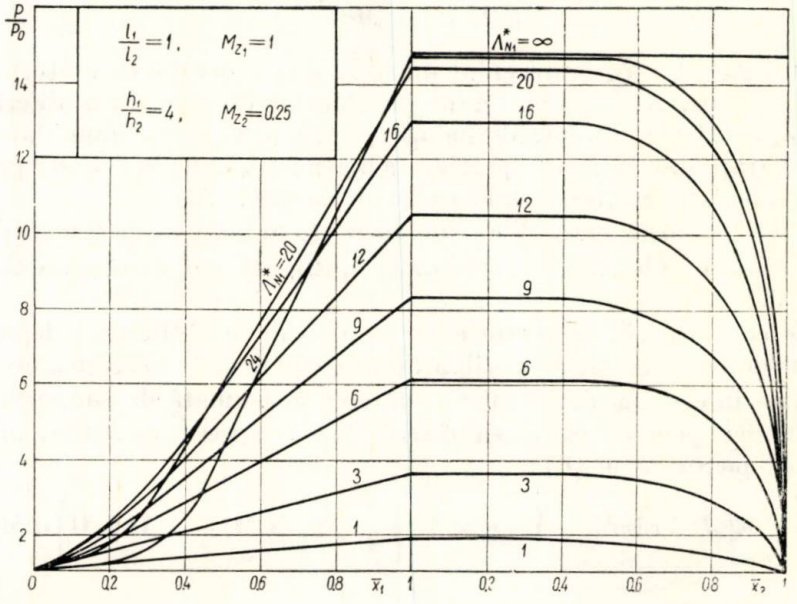
Este interesant de evaluat și puterea consumată de cîmpurile electromagnetice pentru realizarea distribuției de presiuni. Astfel, această putere se poate scrie [6] :

$$W = \int_v E^j J^j \, dx dy dz = \int_v (\triangle \times \mathbf{H}) \left[\mu_e \nu_H (\nabla \times \mathbf{H}) - \mu_e \mathbf{U} \times \mathbf{H} \right] dx dy dz, \tag{16}$$

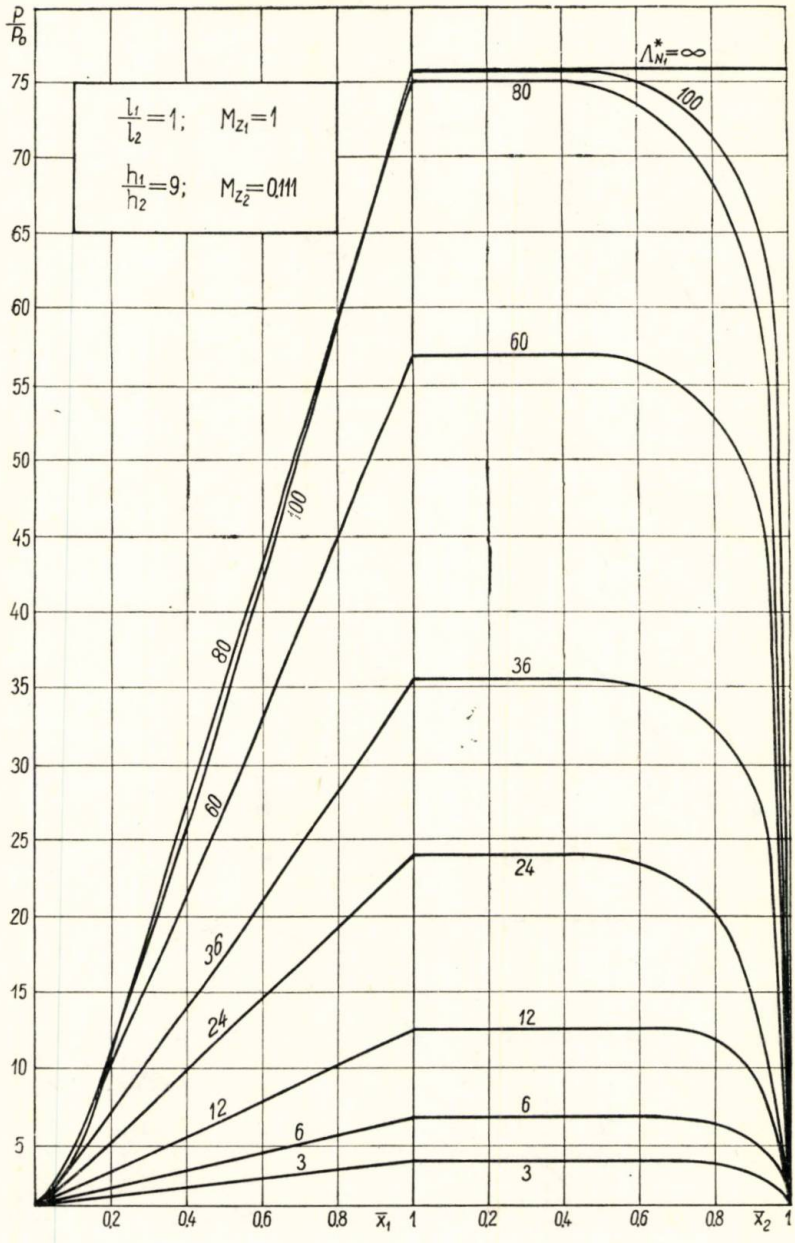
unde μ_e este coeficientul de permeabilitate magnetică, $\mathbf{H}$ cîmpul magnetic,


$\frac{p}{p_0}$
$\frac{l_1}{l_2}=1$; $M_{z_1}=1$
$\frac{h_1}{h_2}=2$; $M_{z_2}=0.5$
$\Lambda^*_{N_1}=\infty$
15
10
6
3
2
1
10
15
6
3
2
1
0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
0,2
0,4
0,6
0,8
$\bar{x}_1$
1
$\bar{x}_2$

2 a


$\frac{p}{p_0}$
$\frac{l_1}{l_2}=1$, $M_{z_1}=1$
$\frac{h_1}{h_2}=4$, $M_{z_2}=0.25$
$\Lambda^*_{N_1}=\infty$
20
16
12
9
6
3
1
$\Lambda^*_{N_1}=20$
16
12
9
6
3
1
24
0
2
4
6
8
10
12
14
0,2
0,4
0,6
0,8
$\bar{x}_1$
1
$\bar{x}_2$

2 b



2 c

Fig. 2. — Distribuția de presiuni într-un lagăr în trepte cu $\frac{l_1}{l_2}=1$, $M_{z_1}=1$, pentru diferite rapoarte $\frac{h_1}{h_2}$.

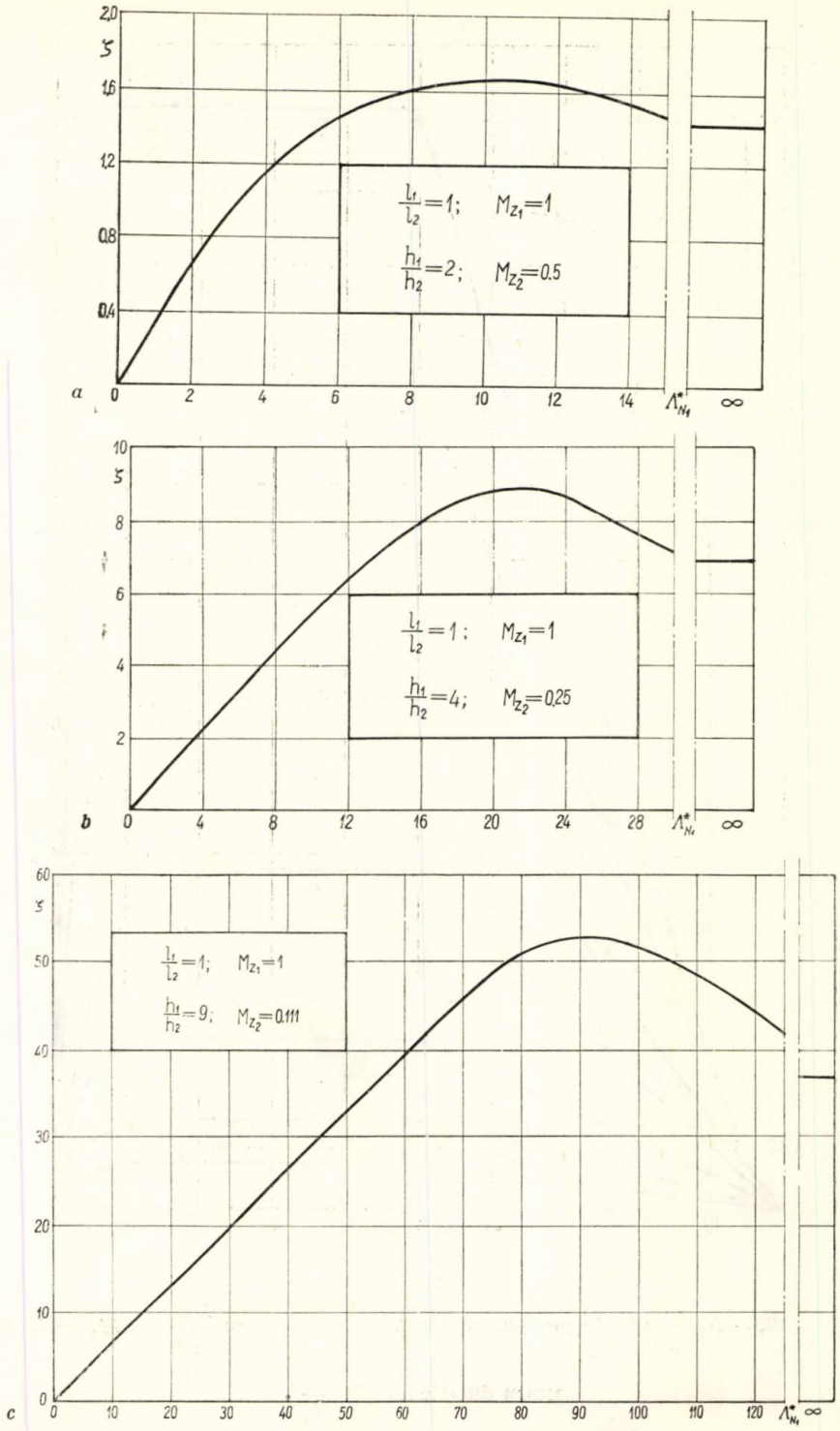


Fig. 3. — Coeficientul de încărcare ζ în cazul unui lagăr în trepte cu $\frac{l_1}{l_2}=1$, $M_{z_1}=1$, pentru diferite rapoarte h_1/h_2.

iar $\nu_H = \dfrac{1}{\sigma \mu_e}$ și, avînd în vedere condițiile de funcționare în cazul problemei studiate, relația (16) devine

$$W = \int_v E_y J_y \, dx \, dy \, dz. \tag{17}$$

Se poate defini un coeficient de putere

$$C'_w = \frac{W}{p_a h_1 N'}, \tag{18}$$

expresia acestuia rezultînd, în cazul de față, sub forma

$$C'_w = 12 \, \Lambda_{N'_1} \left[\frac{1}{12 + M_{z_1}^2} + \frac{l_2}{l_1} \frac{h_1}{h_2} \frac{1}{12 + M_{z_2}^2} \right] + \\ + \left[\frac{M_{z_1}}{12 + M_{z_1}^2} - \frac{h_2}{h_1} \frac{M_{z_2}}{12 + M_{z_2}^2} \right] \frac{p_s - p_a}{p_a}. \tag{19}$$

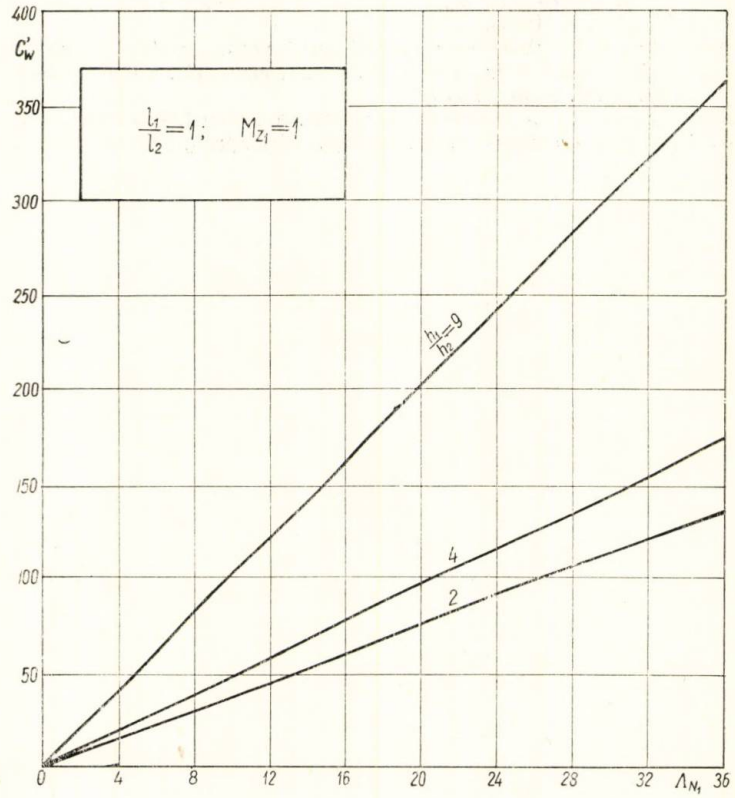


Fig. 4. — Coeficientul de putere consumată în cazul unui lagăr în trepte cu $\dfrac{l_1}{l_2} = 1$, $M_{z_1} = 1$, pentru diferite rapoarte h_1/h_2.

Relaţia (19) a permis trasarea variaţiei coeficientului de putere C'_w (fig. 4) funcţie de $\Lambda_{N'_1} = \dfrac{\mu N' l_1}{p_a h_1^2}$ pentru diferite valori ale raportului h_1/h_2. Se constată că C'_w este aproximativ proporţional cu Λ_{N_1}.

Rezultatele prezentate mai sus arată o nouă posibilitate de utilizare a lubrificaţiei magneto-gazo-dinamice, care poate înlocui alimentarea cu presiune a lagărelor, efectul de pompaj fiind suficient de puternic pentru a obţine o capacitate de încărcare chiar mai mare decît în cazul lagărelor obişnuite.

Primită la redacţie la 30 mai 1968

BIBLIOGRAFIE

1. V. N. CONSTANTINESCU, *Asupra lubrificaţiei magneto-gazo-dinamice*, St. cerc. mec. apl., *4* (1966); Rév. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl. *4* (1966).
2. — *On the Possibilities of Magnetogazodynamic Lubrification*, ASME Trans. J. of Lubrification Technology, July 1967.
3. V. N. CONSTANTINESCU şi FL. DIMOFTE, *Asupra influenţei unor cîmpuri magnetice şi electrice în lubrificaţia cu gaze*, St. cercet. mec. apl., *6* (1967); Rév. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., *6* (1967).
4. FL. DIMOFTE, *Asupra influenţei unor cîmpuri electrice transversale şi cîmpuri magnetice tangenţiale în lubrificaţia cu gaze*, St. cercet. mec. apl., *2* (1968); Rév. Roum. Sci. Techn.—Méc. Appl., *2* (1968).
5. V. N. CONSTANTINESCU, *Lubrificaţia cu gaze*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1965.
6. S. I. PAI, *Magnetogasodynamics and Plasma Dynamics*, Springer Verlag, Wien, 1962.

APLICAREA APROXIMAȚIILOR DE ORDIN SUPERIOR DIN TEORIA PERTURBAȚIILOR LA CALCULUL PERIOADEI OSCILAȚIILOR

de R. CHALÉAT, M. N. OGUZTÖRELI și D. MANGERON

Institut Polytechnique et Université de Besançon, France.
Department of Mathematics. University of Alberta, Edmonton, Alberta. Canada.
Institutul politehnic Iași. Provizoriu, în calitate de „Visiting Professor" la Department of Mathematics, University of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada.

531.3 :517.9

Se expune, sprijinindu-se pe o serie de rezultate proprii, prezentate la cîteva dintre congresele recente de mecanică aplicată, după o trecere prealabilă în revistă a rezultatelor referitoare la stabilirea aproximațiilor de ordin superior din teoria perturbațiilor, calculul perioadei oscilațiilor pentru unele oscilatoare neliniare, dîndu-se aproximații de ordin superior.

I. INTRODUCERE

1. Într-un șir de lucrări recente proprii [9], [10] am dezvoltat *metoda ecuațiilor integrale*, a cărei esență constă în traducerea diferitelor sisteme diferențiale sau integro-diferențiale în ecuații integrale echivalente și aplicarea în consecință, în cadrul determinării soluțiilor prin aproximații succesive, a formulelor de cubatură convenabile.

În ceea ce urmează se va aplica, situîndu-ne pe punctul de vedere dezvoltat în [4]—[6], aproximarea de ordin superior din teoria perturbațiilor în vederea calculului perioadei oscilațiilor.

Teoria perturbațiilor dă, de regulă, perioada unui oscilator supus la mici forțe perturbatoare și schematizat prin ecuația

$$\theta'' + \omega_0^2\theta = \lambda\omega_0^2 f(\theta, \theta'), \tag{1}$$

în care λ este un coeficient mic față de unitate, cu ajutorul formulei

$$T = T_0\left[1 + \frac{\lambda}{2\pi\theta_0}\int_0^{2\pi} f(\theta_0\cos\varphi, -\omega_0\theta_0\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi\right] + 0(\lambda^2). \tag{2}$$

În această expresie $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ este perioada neperturbată, θ_0 este amplitudinea oscilaţiilor, iar θ şi θ' sînt înlocuite prin primele aproximaţii :

$$\theta = \theta_0 \cos \varphi, \quad \theta' = -\omega_0 \theta_0 \sin \varphi.$$

Expresia (2) nu corespunde decît la prima aproximaţie. Ea comportă o eroare sistematică de ordinul lui λ^2, micimea lui λ fiind aceea care dozează intensitatea funcţiei perturbatoare $\lambda \omega_0^2 f(\theta, \theta')$ în raport cu forţa de rapel $\omega_0^2 \theta$. Această expresie nu dă, prin urmare, perturbaţia perioadei dacă atare perturbaţie este de un ordin egal sau mai mare decît λ^2. Acest fapt se prezintă atunci cînd funcţia perturbatoare este o funcţie pară de elongaţia θ sau o funcţie impară de viteza θ'. În astfel de cazuri este necesar să se calculeze perioada cel puţin într-a doua aproximaţie.

2. Într-un număr de lucrări proprii, iniţiate separat şi continuate apoi în colaborare [1]—[4], referitoare la teoria aproximaţiilor în studiul mişcărilor perturbate ale oscilatorilor, am stabilit, într-o lucrare publicată în această revistă şi tradusă recent, în urma unei selecţii riguroase, de către redacţia revistei „Mecanica", consacrată traducerii în limba rusă a unor lucrări publicate în alte ţări de pe glob, un nou procedeu de aproximare a soluţiilor problemelor diferenţiale neliniare [5]. Totodată, un număr de rezultate referitoare la aproximaţii de ordin superior în domeniul problematicii mecanicii neliniare a vibraţiilor a fost prezentat la cîteva congrese recente de mecanică aplicată.

3. În studiul soluţiilor ecuaţiei (1) vom alege drept moment iniţial momentul în care oscilatorul este lăsat fără viteza iniţială, avînd elongaţie pozitivă y. În lipsa forţelor perturbatoare vom avea, prin urmare

$$\theta = \theta_0 = y \cos \alpha, \quad \theta' = \theta_0' = -\omega y \sin \alpha, \quad \alpha = \omega t. \tag{3}$$

În prezenţa forţelor perturbatoare ($\lambda \neq 0$) vom pune, în cazul celei de-a n-a aproximaţii,

$$\theta = Y_n \cos \varphi_n, \quad \theta' = -\omega\, Y_n \sin \varphi_n, \quad \varphi_n = \alpha + x_n, \tag{4}$$

în care Y_n şi x_n sînt funcţii de timp şi, în consecinţă, de $\alpha = \omega t$. Fie $\overline{Y}_n$ şi $\overline{x}_n$ valorile lor la finele unei perioade complete. Perturbaţia relativă este dată în cea de-a n-a aproximaţie prin

$$\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0} = -\frac{\overline{x}_n}{2\pi}. \tag{5}$$

În prima aproximaţie avem

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta Y_1}{y} = -\dfrac{\lambda}{y}\displaystyle\int_0^{\alpha} F(\alpha') \sin \alpha' \mathrm{d}\alpha', \text{ unde s-a pus } \Delta Y_1 = Y_1 - y,\ F(\alpha) = F(\theta_0, \theta_0'), \\ x_1 = -\dfrac{\lambda}{y}\displaystyle\int_0^{\alpha} F(\alpha') \cos \alpha' \mathrm{d}\alpha', \quad 0 < \alpha' < \alpha, \\ \overline{x}_1 = -\dfrac{\lambda}{y}\displaystyle\int_0^{2\pi} F(\alpha) \cos \alpha \mathrm{d}\alpha + 0(\lambda^2). \end{cases} \tag{6}$$

În a doua aproximație avem

$$\bar{x}_2 = \bar{x}_1 - \frac{\lambda}{y}\int_0^{2\pi} \frac{\Delta Y_1(\alpha)}{y}(p_0 y - 2F\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha - \\ - \frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^{2\pi} F^2 \mathrm{d}\alpha + 0(\lambda^3), \tag{7}$$

unde s-a introdus notația $p_0 = \dfrac{\partial f(\theta_0, \theta_0')}{\partial \theta_0}$ și perturbația relativă de amplitudine instantanee $\Delta Y_1/y$ este dată de prima din șirul de formule (6).

În a treia aproximație avem

$$\bar{x}_3 = \bar{x}_2 + \frac{\lambda}{y}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2 F(2\pi) - \frac{\lambda^3}{y^3}\int_0^{2\pi} F^3\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha - \\ - \frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1}{y}(3yp_0\cos\alpha - 4F)\,\mathrm{d}\alpha - \frac{\lambda}{2y}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\Delta Y_1}{y}\right)^2 [y^2(x_0\cos\alpha + \\ + \omega s_0 \sin\alpha + 2\omega^2 t_0\cos\alpha) - 4(y p_0 - 2F\cos\alpha)]\,\mathrm{d}\alpha - \\ - \frac{\lambda^2}{y^2}\int_0^{2\pi}(yp_0 - 2F\cos\alpha)\int_0^{\alpha}\frac{\Delta Y_1(\alpha')}{y}\omega y q_0(\alpha')\,\mathrm{d}\alpha'\mathrm{d}\alpha + 0(\lambda^4), \tag{8}$$

unde s-au introdus următoarele notații :

$$v_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}, \quad s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_0\,\partial\theta_0'}, \quad t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial\theta_0'^2}, \quad q_0 = \frac{\partial f}{\partial\theta_0'}.$$

În această expresie $\bar{x}_2$ este dat prin (7), $\Delta\bar{Y}_1 = \Delta Y_1(2\pi)$ și $\dfrac{\Delta Y_1}{y}$ este dat prin prima formulă din șirul de formule (6).

Ajunge să substituim x_2 sau x_3 în (5) pentru a obține perturbația relativă a perioadei în a doua sau a treia aproximație.

II. PRIMA APLICAȚIE : Perioada pendulului circular

4. Fie

$$A\varphi'' = -Mg\,a\sin\varphi$$

ecuația diferențială a mișcării pendulului circular considerat. Punînd $\omega^2 = Mg\,a/A$, $\varphi = \sqrt{\lambda}\,\theta$ și desfășurînd în serie de puteri pe sin φ, se obține

$$\theta'' + \omega^2\theta = \omega^2\left[\lambda\frac{\theta^3}{3!} - \lambda^2\frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right].$$

Avem, prin urmare,

$$f(\theta, \theta') = \frac{\theta^3}{3!} - \lambda\frac{\theta^5}{5!} \text{ și } F(\alpha) = f(\theta_0, \theta_0') = \frac{y^3}{3}\left(\cos^3\alpha - \lambda y^2\frac{\cos^5\alpha}{20}\right).$$

De aici se deduce, ţinînd seama de ultima ecuaţie din (7),

$$\bar{x}_1 = -\pi\frac{\lambda}{8}y^2\left(1-\frac{\lambda y^2}{24}\right).$$

Avem apoi

$$\frac{\Delta Y_1}{y} = -\frac{\lambda y^2}{24}(1-\cos^2\alpha) + 0\,(\lambda^2),$$

de unde se obţine pentru prima integrală din membrul al doilea din (8):

$$\int_0^{2\pi}\frac{\Delta Y_1}{y}(p_0 y - 2F\cos\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = -\frac{23}{24}\,\frac{1}{192}\,\pi\lambda y^5.$$

În fine, ultima integrală din (8) are drept valoare

$$\int_0^{2\pi} F^2\,\mathrm{d}\alpha = \frac{5}{288}\,\pi y^6.$$

Se deduce

$$\bar{x}_2 = -\lambda\frac{\pi}{8}y^2 + \frac{\lambda^2\pi y^4}{192} - \frac{5\pi\lambda^2 y^4}{288} + \frac{23\pi\lambda^2 y^4}{192\cdot 24} =$$

$$= -\frac{\lambda\pi y^2}{8} - \frac{11\,\pi\lambda^2 y^4}{16\cdot 96} + 0(y^6)$$

şi

$$T = T_0\left(1 + \lambda\frac{y^2}{16} + \frac{11}{3{\cdot}072}\lambda^2 y^4\right) + 0(\lambda^3).$$

Revenind la variabila φ şi notînd prin $\varphi_0 = \sqrt{\lambda}y$ amplitudinea oscilaţiilor pendulului, avem, în definitiv,

$$T = T_0\left[1 + \left(\frac{\varphi_0}{4}\right)^2 + \frac{11}{12}\left(\frac{\varphi_0}{4}\right)^4\right] + 0\,(\varphi_0^6).$$

Regăsim astfel în a doua aproximaţie primii termeni din paranteza din formula referitoare la prima aplicaţie din capitolul al II-lea al lucrării noastre [5]. Dacă am fi păşit la calculul celei de-a treia aproximaţii, determinînd în prealabil în mod explicit x_3, am fi obţinut cu precizie formula menţionată. Este evident însă că procedeul poate fi continuat cu un grad de aproximaţie dorit. Renunţăm însă aici la acest lucru.

III. A DOUA APLICAŢIE: Funcţia perturbatoare este proporţională cu o putere întreagă a elongaţiei

5. Fie $f(\theta, \theta') = \theta^n$ în care n este un număr întreg. Formulele (6) şi (9) dau, pentru perioada T, următoarele rezultate:
pentru $n = 2\ p$:

$$T = T_0\left[1 + \lambda^2 H y^{4p-2} - \lambda^3 H\,\frac{4p-2}{2p+1}\,y^{6p-3}\right] + 0(\lambda^4),$$

în care s-a pus $H = 2p\dfrac{4p+1}{(2p+1)^2}\dfrac{C_{4p}^{2p}}{2^{4p}}$;

pentru $\eta = 2p-1$:

$$T = T_0\left\{1 + \lambda K_2 y^{2p-2} - \lambda^2\frac{y^{4p-4}}{P}[(p-1)\,K_2 - (2p-1)\,K_4] + \right.$$

$$+ \lambda^3\frac{y^{6p-6}}{2p^2}[(p-1)(p-2)\,K_2 - 2\,(2p-1)(2p-2)K_4 +$$

$$\left. + (3p-1)\,(3p-2)\,K_6]\right\} + 0(\lambda^4),$$

în care s-a pus $K_{2n} = C_{2np}^{np}/2^{2np}$.

Se constată uşor că aceste rezultate sînt identice cu cele obţinute prin metoda directă, diferită de cea din prezenta lucrare, expusă în capitolul al VI-lea al lucrării noastre [8], deja citată.

6. Dezvoltările obţinute în [8] par să fie mai uşor de utilizat decît rezultatele teoriei perturbaţiilor. Într-adevăr, integralele care intervin acolo se calculează, şi au fost efectiv calculate, o dată pentru totdeauna. Ajunge, prin urmare, să substituim în locul coeficienţilor a_i şi b_i valorile lor. În schimb, teoria perturbaţiilor este mai generală. Ea nu numai că ne dă expresia perioadei în funcţie de amplitudine, ci dă, de asemenea, şi expresia perturbaţiei amplitudinii şi legea de mişcare.

Primită la redacţie la 7 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. D. Mangeron, *Integral Equations Method in Nonlinear Mechanics.* Proc. IUTAM Conf. Nonlinear Mechanics, Acad. Sci. Ucrain. SSR, Kiev, 1961, Vol. I, Analytical Methods, 347–350.
2. R. Chaléat, *Seconde approximation de la perturbation d'amplitude d'un oscillateur quasi-linéaire.* Ann. Franç. Chronométrie, 1950, 123–136.
3. D. Mangeron, *Neue graphisch-analytische Methoden zum Studium der nichtlinearen Mechanik.* Abh. DAW, Berlin, 1965, 1, Klasse für Math., Physik u. Technik, 76–90.
4. R. Chaléat, *Troisième approximation de la perturbation d'amplitude des oscillateurs.* C. R. Acad. Sci., Paris, 1963, **256**, 1908–1910; 3575–3577.
5. D. Mangeron, R. Chaléat, *Approximations d'ordre supérieur dans l'étude des mouvements perturbés des oscillateurs.* Rev. Roum. Sci. Techn., — Méc. appl., 1965, **10**, *4*, 791–825. Tradus în limba rusă în revista Mehanika, 1966, *5*, 3–31.
6. D. Mangeron, R. Chaléat, M. N. Oguztöreli, *Higher Order Approximations in the Study of the Disturbed Motion of Oscillators.* Canadian Congress of Applied Mechanics. Centennial Year, 1967, Scientific Program, 26.
7. Tamura Hideyuki, *Higher approximation on nonlinear steady oscillations.* Proc. 14th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., Kyoto, 1964. Tokio, 1965, 205–213.
8. R. Chaléat, M. N. Oguztöreli, D. Mangeron, *Analyse numérique des petites oscillations en fonction de leur amplitude.* Rev. Roum. des Sci. Techn., série Méc. Appl., 1968, 13, *4*, 685–707.
9. M. N. Oguztöreli, D. Mangeron, *Some problems concerned with Nonlinear Mechanics.* Proc. XI th Congress on Theoretical and Applied Mechanics. New Delhi, Dec. 1967, Abstracts of Papers.
10. D. Mangeron, *Mecanica Vibraţiilor*, în volumul *Fundamentele Mecanicii*, de Z. Gabos, D. Mangeron, şi I. Stan, Ed. Academiei, Bucureşti, 1962.

ASUPRA DIMENSIONĂRII SEGMENȚILOR DE PISTON

de G. BĂRĂNESCU
membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
RODICA MANIȚIU și C. DOBRE
Institutul politehnic „Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

621.4 :539.4

În lucrare se cercetează problema determinării grosimii radiale a segmentului autoelastic de piston cu repartiția variabilă a presiunii pe circumferință.
Se analizează diferite metode de montaj al segmentului pe piston, stabilindu-se criterii de alegere a metodei optime de montaj.

1. INTRODUCERE

Dimensionarea unui segment de piston de secțiune dreptunghiulară revine la stabilirea înălțimii h și a grosimii radiale a, diametrul fibrei exterioare a segmentului montat în cilindru fiind o dată a problemei.

Înălțimea segmentului se determină din condiții funcționale, cum sînt cantitatea de căldură care trebuie schimbată de segment, evitarea pulsației segmentului etc.

Grosimea radială a segmentului rezultă din considerente funcționale și de rezistență.

Astfel, în scopul modificării cît mai lente a presiunii dintre segment și cilindru datorită micșorării prin uzură a grosimii radiale, este avantajos ca aceasta să aibă o valoare cît mai mare. Creșterea grosimii radiale mărește însă pericolul pulsației segmentului; în consecință, satisfacerea cerințelor funcționale principale este asigurată de cea mai mare grosime radială la care segmentul nu pulsează.

Din punctul de vedere al solicitărilor mecanice ce apar în segment atît în funcționare, cît și la montarea pe piston, solicitări care depind și de grosimea radială, este necesar să se îndeplinească următoarele condiții:

— solicitările maxime realizate la segmentul montat în cilindru să fie cît mai mici, pentru diminuarea efectului relaxării materialului;

— solicitările maxime care apar la montarea segmentului pe piston să nu depășească rezistența admisibilă a materialului.

Cînd comportarea materialului segmentului la întindere este diferită de comportarea la compresiune — cum este cazul fontelor —, trebuie cercetate acele eforturi la care materialul are o rezistenţă mai mică.

În lucrare se analizează problema determinării grosimii radiale pentru un segment autoelastic de piston în baza considerentelor expuse mai sus, socotind cunoscută cea mai mare grosime radială posibilă. Se cercetează diferite metode de montaj al segmentului pe piston, evidenţiindu-se modul în care acestea reuşesc să realizeze cerinţele impuse.

Segmentul este presupus de presiune variabilă pe contur, repartiţia presiunii avînd loc după o lege oarecare.

2. STABILIREA SOLICITĂRILOR CARE APAR ÎN SEGMENTUL MONTAT ÎN CILINDRU

Segmentul montat în cilindru îşi modifică raza de curbură de la valoarea sa în stare liberă la valoarea razei cilindrului, sub acţiunea momentului încovoietor produs de presiunea care acţionează segmentul. În figura 1 s-au reprezentat fibrele medii ale segmentului în aceste două situaţii.

Se consideră pe fibra medie de rază r_m a segmentului montat în cilindru un punct S a cărui rază OS face cu axa BA unghiul φ. Notînd cu p_ψ presiunea exercitată asupra fibrei medii a segmentului într-o secţiune a

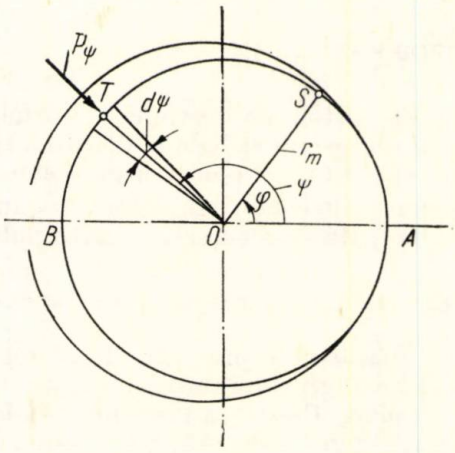


Fig. 1. — Modificarea formei libere a segmentului la montarea sa în cilindru.

cărei rază OT face cu axa BA unghiul ψ, momentul încovoietor şi forţa normală în secţiunea φ au expresiile

$$M_\varphi = -hr_m^2 \int_\varphi^\pi p_\psi \sin(\psi - \varphi)\, d\psi, \tag{1}$$

$$N_\varphi = -hr_m \int_\varphi^\pi p_\psi \sin(\psi - \varphi)\, d\psi. \tag{2}$$

Momentul încovoietor este considerat pozitiv cînd măreşte raza de curbură, iar forţa normală este socotită pozitivă cînd solicită la întindere secţiunea în care acţionează.

În cazul cel mai general, legea de distribuție a presiunii pe conturul fibrei medii a segmentului se poate exprima cu ajutorul seriilor trigonometrice de forma

$$p_\psi = p_m + p_1 \cos\psi + p_2 \cos 2\psi + \ldots + p_n \cos n\psi + \ldots + \\ + c_1 \sin\psi + c_2 \sin 2\psi + \ldots + c_n \sin n\psi + \ldots,$$

unde p_m este valoarea medie a acestei presiuni, iar $p_1, p_2 \ldots$ și $c_1, c_2 \ldots$ sînt constante.

Datorită simetriei încărcării segmentului față de axa AB, funcția p_ψ trebuie să fie pară, condiție ce se realizează în cazul $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = \ldots = 0$.

Sub acțiunea forțelor datorite presiunii de pe contur, segmentul se găsește în echilibru, deci rezultanta proiecțiilor acestor forțe pe axa AB trebuie să fie nulă, condiție ce se realizează în cazul $p_1 = 0$; condiția de echilibru pe normala la axa AB este îndeplinită datorită simetriei încărcării.

Variația presiunii pe contur poate fi deci pusă sub forma

$$p_\psi = p_m (1 + b_2 \cos 2\psi + b_3 \cos 3\psi + \ldots + b_n \cos n\psi + \ldots). \qquad (3)$$

Înlocuind expresia (3) în formulele (1) și (2), se obține, după integrare și gruparea termenilor,

$$M_\varphi = - p_m h r_m^2 \left(X + \sum_{n=2}^{\infty} Y_n \right), \qquad (4)$$

$$N_\varphi = - p_m h r_m \left(X + \sum_{n=2}^{\infty} Y_n \right), \qquad (5)$$

unde

$$X = 1 + \cos\varphi,$$

și

$$Y_n = - \frac{b_n}{n^2 - 1} [(-1)^n \cos\varphi + \cos n\varphi].$$

Din cercetarea formulelor (4) și (5) rezultă :

— în orice secțiune, momentul încovoietor și forța normală sînt negative. Într-adevăr, deoarece în orice secțiune presiunea p_ψ exercitată asupra fibrei medii este pozitivă, momentul încovoietor tinde să micșoreze raza de curbură, este deci negativ. Din (4) rezultă în această situație $\left(X + \sum_{n=2}^{\infty} Y_n \right) > 0$, condiție care, înlocuită în (5), duce la concluzia $N_\varphi < 0$;

— momentul încovoietor și forța normală au aceeași variație; valorile lor maxime se realizează în secțiunea pentru care expresia $X + \sum_{n=2}^{\infty} Y_n$ are cea mai mare valoare, ceea ce se întîmplă la $\varphi = 0$. Aceste valori sînt

$$M_{\max} = - \beta p_m h r_m^2,$$

$$N_{\max} = - \beta p_m h r_m,$$

unde $$\beta = 2 - \sum_{q=1}^{\infty} \frac{2b_{2q}}{4q^2 - 1}.$$

Eforturile unitare care apar în fibrele extreme ale segmentului considerat ca o bară curbă de secțiune dreptunghiulară cu diametrul exterior D au expresiile [2]

$$\sigma_{int} = \frac{N_\varphi}{ah} + \frac{6\,M_\varphi\,(D-a)}{a^2\,h\,(D-2a)} - \frac{2M_\varphi}{ah\,(D-2a)}, \tag{6}$$

$$\sigma_{ext} = \frac{N_\varphi}{ah} - \frac{6M_\varphi\,(D-a)}{a^2 h\,D} - \frac{2M_\varphi}{ah\,D}. \tag{7}$$

Introducînd în formulele (6) și (7) condiția $M_\varphi = N_\varphi\, r_m$, care rezultă din formulele (4) și (5), și ținînd seama de egalitatea

$$r_m = \frac{D-a}{2}, \tag{8}$$

se constată că eforturile unitare de întindere se realizează în fibra exterioară ; cel mai mare efort de întindere se produce în secțiunea opusă deschiderii și are expresia

$$\sigma_{ext_{cil}} = \frac{\beta}{2}\, p_m \left(1 - \frac{a}{D}\right)\left[3\left(\frac{D}{a} - 1\right)^2 - 1\right]. \tag{9}$$

Indicele *cil* arată că efortul de întindere se referă la segmentul montat în cilindru.

3. STABILIREA SOLICITĂRILOR CARE APAR ÎN SEGMENT LA MONTAJ

În timpul montajului, segmentul este acționat de forțele de deschidere, care îl deformează, permițînd trecerea sa peste piston. Mărimea solicitărilor care apar în acest caz în fibrele segmentului depinde de modul de aplicare a forțelor, precum și de mărimea acestora.

În tabela 1 sînt prezentate schematic metode uzuale de montaj a segmentului.

Pentru determinarea solicitărilor produse de forțele de deschidere în fibrele extreme ale unei secțiuni oarecare, precizată de unghiul φ, se folosesc tot formulele (6) și (7), în care M_φ și N_φ reprezintă momentul încovoietor și forța normală produse de aceste forțe în secțiunea considerată. În coloanele (3) și (4) din tabela 1 sînt prezentate expresiile acestor mărimi pentru fiecare dintre metodele de montaj considerate. Cercetînd variația lor, se constată că ele trec simultan prin valorile maxime și aceste valori sînt de același semn. De exemplu, în cazul de montaj a), momentul încovoietor și forța normală sînt maxime pentru $\varphi = 0$, în cazul b) pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$, în cazul c) pentru valoarea lui φ, care face maximă expresia

$$\sin\varphi + t\cos\varphi,$$

adică pentru $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{t}$. În cazul d) se constată că cele mai mari valori pentru M_φ și N_φ se ating în intervalul $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ pentru $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{t}$, iar în cazul e) M_φ și N_φ trec prin maxim pentru $\varphi = 0$.

Cercetînd variaţia eforturilor unitare, după introducerea în formulele (6) şi (7) a expresiilor corespunzătoare pentru M_φ şi N_φ se constată că secţiunea cea mai solicitată în orice fibră este aceea în care M_φ şi N_φ trec simultan prin maxim; folosind valorile acestora, se obţin expresiile eforturilor unitare maxime ce se realizează în fibrele extreme; eforturile de întindere se produc în fibra interioară; ele au expresiile din coloana (5); indicele p arată că efortul unitar se referă la segmentul ce se montează pe piston.

Coloanele (6) şi (7) cuprind expresiile deformaţiei segmentului, determinate cum se arată în continuare.

4. DEFORMAŢIA SEGMENTULUI

Studiul deformaţiei segmentului se impune din următoarele consideren̦te: efortul unitar maxim ce se realizează la segmentul montat în ilindru depinde, la o lege dată de repartiţie a presiunii, numai de grosimea radială a, în timp ce efortul unitar maxim care apare în timpul montării depinde de grosimea radială, dar şi de mărimea forţelor de deschidere, aşa cum se poate vedea cercetînd structura formulelor din coloana (5) a tabelei 1.

Pentru a preciza mărimea solicitărilor care apar la montarea pe piston, trebuie cunoscute în prealabil forţele de deschidere; aceasta se realizează punînd condiţia ca, sub acţiunea lor, segmentul să sufere o deformaţie care să permită montarea.

4.1. DEFORMAŢIA SEGMENTULUI SUB ACŢIUNEA FORŢELOR DATORITĂ PRESIUNII

Pentru barele cu rază mare de curbură, se cunoaşte din teoria barelor curbe ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate [2] — [4]

$$u_\varphi + \frac{\mathrm{d}^2 u_\varphi}{\mathrm{d}\varphi^2} = \frac{\mathfrak{M}_\varphi r_m^2}{EI}, \tag{10}$$

în care u_φ reprezintă deformaţia fibrei medii pe direcţia razei, iar $\mathfrak{M}_\varphi$ momentul încovoietor care produce deformaţia în secţiunea considerată. Starea iniţială a barei curbe se consideră circulară, raza fibrei medii fiind r_m. Deformaţia radială este socotită pozitivă cînd raza de curbură creşte.

Prin integrarea ecuaţiei (10), se obţine

$$u_\varphi = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \sin\varphi\int\frac{\mathfrak{M}_\varphi r_m^2}{EI}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \cos\varphi\int\frac{\mathfrak{M}_\varphi r_m^2}{EI}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi, \tag{11}$$

unde A şi B reprezintă constante de integrare ce se determină din condiţiile de limită.

În cazul unui segment autoelastic, $\mathfrak{M}_\varphi$ este un moment încovoietor fictiv care ar duce segmentul de la forma circulară de rază egală cu raza cilindrului la forma pe care o are în realitate segmentul liber.

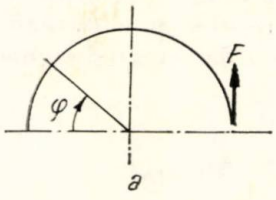
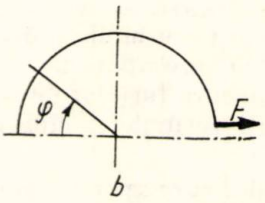
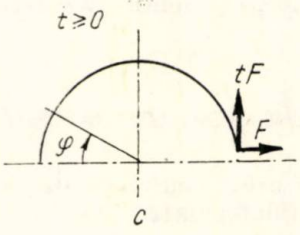
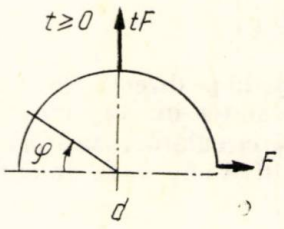
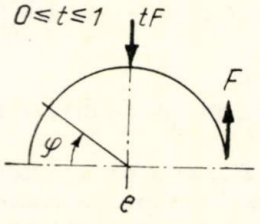
Met. montaj		M_φ	N_φ
(1)	(2)	(3)	(4)
a		$F r_m (1 + \cos \varphi)$	$F \cos \varphi$
b		$F r_m \sin \varphi$	$F \sin \varphi$
c		$Fr_m [\sin \varphi + + t(1+\cos\varphi)]$	$F(\sin \varphi + t \cos\varphi)$
d $0 \leq \varphi \leq \pi/2$		$F r_m (\sin \varphi + t \cos \varphi)$	$F(\sin \varphi + t \cos\varphi)$
d $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$		$F r_m \sin \varphi$	$F \sin \varphi$
e $0 \leq \varphi \leq \pi/2$		$F r_m [(1 + \cos \varphi) - - t \cos \varphi]$	$F \cos \varphi (1 - t)$
e $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$		$F r_m (1 + \cos \varphi)$	$F \cos \varphi$

Tabela 1

σ_{int_p}	u_φ	$\Delta d_{\mathrm{m}_{F\varphi}}$
(5)	(6)	(7)
$\frac{F}{h(D-2a)}\left[6\left(\frac{D}{a}-1\right)^2-\frac{D}{a}\right]$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left(1-\cos\varphi+\frac{\varphi\sin\varphi}{2}\right)$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left(2+\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)$
$\frac{F}{h(D-2a)}\left[3\left(\frac{D}{a}-1\right)^2-1\right]$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\,\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{2}$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left[\sin\varphi+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\varphi\right]$
$\frac{F}{h(D-2a)}\left\{\sqrt{1+t^2}\left[3\left(\frac{D}{a}-1\right)^2-1\right]+t\left[\left[3\left(\frac{D}{a}-1\right)^2-\left(\frac{D}{a}-1\right)\right]\right]\right\}$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left[\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{2}+t\left(1-\cos\varphi+\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right)\right]$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left\{\left[\sin\varphi+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\varphi\right]+t\left(2+\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)\right\}$
$\frac{F}{h(D-2a)}\sqrt{1+t^2}\times\left[3\left(\frac{D}{a}-1\right)^2-1\right]$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left(\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{2}+t\frac{\varphi\sin\varphi}{2}\right)$ $\frac{Fr_m^3}{EI}\,\frac{\sin\varphi-\varphi\cos\varphi}{2}$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left[\sin\varphi+\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\cos\varphi+t\frac{\varphi\sin\varphi}{2}\right]$
$\frac{F}{h(D-2a)}\left\{6\left(\frac{D}{a}-1\right)^2-\frac{D}{a}-t\left[3\left(\frac{D}{a}-1\right)^2-1\right]\right\}$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left[1-\cos\varphi+(1-t)\frac{\varphi\sin\varphi}{2}\right]$ $\frac{Fr_m^3}{EI}\left(1-\cos\varphi+\frac{\varphi\sin\varphi}{2}\right)$	$\frac{Fr_m^3}{EI}\left(2+\frac{\pi}{2}\sin\varphi-t\frac{\varphi\sin\varphi}{2}\right)$

Din această condiție și ținînd seama de sensul acestui moment, rezultă evident egalitatea $\mathfrak{M}_\varphi = -M_\varphi$, care, introdusă în (11), duce la

$$u_\varphi = A\cos\varphi + B\sin\varphi - \sin\varphi\int\frac{M_\varphi r_m^2}{EI}\cos\varphi\,d\varphi + \cos\varphi\int\frac{M_\varphi r_m^2}{EI}\sin\varphi\,d\varphi. \tag{12}$$

Folosind pentru M_φ expresia (4), termenul al treilea al formulei (12) devine, după efectuarea integrării,

$$\sin\varphi\int\frac{M_\varphi r_m^2}{EI}\cos\varphi\,d\varphi = -\frac{p_m h r_m^4}{EI}\sin\varphi\left\{\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\varphi}{2} - \right. \tag{13}$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n^2-1}\left[\frac{\sin(n-1)\varphi}{2(n-1)} + \frac{\sin(n+1)\varphi}{2(n+1)} + (-1)^n\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\right]\right\}.$$

Dezvoltînd analog cel de-al patrulea termen al formulei (12), se obține

$$\cos\varphi\int\frac{M_\varphi r_m^2}{EI}\sin\varphi\,d\varphi = -\frac{p_m h r_m^4}{EI}\cos\varphi\left\{-\cos\varphi + \frac{\sin^2\varphi}{2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n^2-1}\left[-\frac{\cos(n+1)\varphi}{2(n+1)} + \frac{\cos(n-1)\varphi}{2(n-1)} + (-1)^n\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]\right\}. \tag{14}$$

Înlocuind expresiile (13) și (14) în (12), rezultă

$$u_\varphi = A\cos\varphi + B\sin\varphi + \frac{p_m h r_m^4}{EI}\left\{1 + \frac{\varphi}{2}\sin\varphi + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n^2-1}\left[\frac{\cos n\varphi}{n^2-1} - (-1)^n\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\right]\right\}.$$

Condițiile de limită pentru stabilirea constantelor de integrare A și B sînt

$\varphi = 0$, $u_\varphi = u_0$, condiție ce precizează valoarea deplasării radiale în secțiunea opusă deschiderii;

$\varphi = 0$, $\dot{u}_\varphi = 0$, condiție care arată că fibra medie deformată admite la $\varphi = 0$ o tangentă perpendiculară pe axa ce trece prin deschidere. Cu aceste condiții se obține

$$A = u_0 - \frac{p_m h r_m^4}{EI}\left(1 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n^2-1}\cdot\frac{1}{n^2-1}\right),$$

$$B = 0,$$

iar deformația radială devine

$$u_\varphi = u_0\cos\varphi + \frac{p_m h r_m^4}{EI}\left\{1 - \cos\varphi + \frac{\varphi}{2}\sin\varphi + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n^2-1}\left[\frac{\cos n\varphi}{n^2-1} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (-1)^n\frac{\varphi}{2}\sin\varphi - \frac{\cos\varphi}{n^2-1}\right]\right\}. \tag{15}$$

Variaţia diametrului mediu pe direcţia φ se obţine sumînd cele două deformaţii radiale pe această direcţie (fig. 2); ţinînd seama că deformaţia segmentului este simetrică, se poate scrie.

$$\Delta d_{m_{p\varphi}} = u_\varphi + u_{\pi-\varphi}. \tag{16}$$

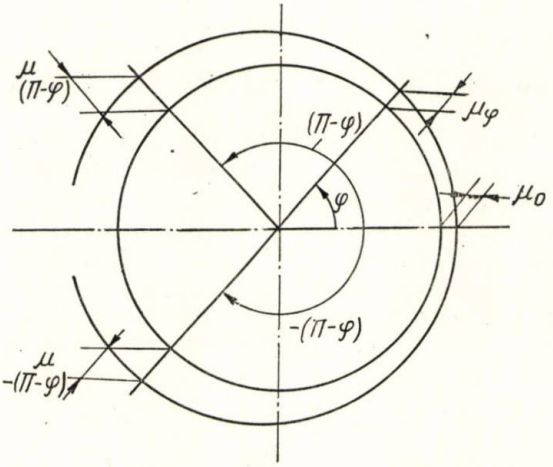


Fig. 2. — Deformaţia radială a segmentului.

Efectuînd în formula (15) înlocuirea $\varphi \to \pi - \varphi$, rezultă expresia

$$u_{\pi-\varphi} = -u_0 \cos\varphi + \frac{p_m h r_m^4}{EI}\left\{1 + \cos\varphi \frac{\pi-\varphi}{2}\sin\varphi + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{b_n}{n^2-1}\left[\frac{(-1)^n \cos\varphi}{n^2-1} - (-1)^n \frac{\pi-\varphi}{2}\sin\varphi + \frac{\cos\varphi}{n^2-1}\right]\right\}. \tag{17}$$

Cu formulele (15) şi (17), expresia (16) devine, după gruparea convenabilă a termenilor,

$$\Delta d_{m_{p\varphi}} = \frac{p_m h r_m^4}{EI}\left\{2 + \frac{\pi}{2}\sin\varphi\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{b_n}{n^2-1}\right] + \right.$$
$$\left. + 2\sum_{q=1}^{\infty} \frac{b_{2q}}{(4q^2-1)^2}\cos 2q\varphi\right\}. \tag{18}$$

4.2. DEFORMAŢIA SEGMENTULUI SUB ACŢIUNEA FORŢELOR DE DESCHIDERE

Expresia deformaţiei radiale produse de forţele de deschidere într-o secţiune φ se stabileşte tot cu formula (11), în care $\mathfrak{M}_\varphi$ reprezintă momentul încovoietor produs de aceste forţe în secţiunea considerată; el are expresiile din coloana a treia din tabela 1. Constantele A şi B se determină din aceleaşi condiţii de limită. Expresiile deformaţiilor u_φ, pentru metodele uzuale de montaj al segmentului, sînt trecute în coloana a şasea din tabela 1, iar în coloana a şaptea se prezintă expresiile variaţiei diametrului mediu, $\Delta d_{m_{F\varphi}}$, obţinute prin sumarea deplasărilor radiale u_φ şi $u_{\pi-\varphi}$.

În cazurile d) și e), pentru care expresia momentului încovoietor este diferită pe intervalele $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, u_φ are expresii diferite pe aceste intervale; la stabilirea expresiei $\Delta d_{m_{F\varphi}}$ se ține seama că expresiile u_φ și $u_{\pi-\varphi}$ au o structură diferită, deoarece, atunci cînd φ aparține intervalului $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, $(\pi - \varphi)$ se găsește în intervalul $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$; u_φ și $u_{\pi-\varphi}$ se determină folosind expresiile valabile pe intervalele pe care se găsesc argumentele respective.

Deformația radială produsă de forțele de deschidere a fost determinată considerînd că în stare inițială segmentul este circular, condiție în baza căreia este valabilă ecuația (10). În realitate, cînd la capetele segmentului acționează forțele de deschidere, segmentul se găsește în stare liberă, fibra medie avînd o formă ce diferă de forma circulară, în funcție de legea de repartiție a presiunii. Deoarece deplasările radiale produse de forțele datorite presiunii sînt mici în comparație cu cele produse de forțele de deschidere, erorile introduse de modul de calcul expus mai sus sînt neglijabile.

4.3. DEFORMAȚIA TOTALĂ A SEGMENTULUI

După cum s-a arătat, pentru determinarea forțelor de deschidere se impune realizarea unei deformații care să permită montarea segmentului pe piston.

Se consideră drept stare inițială segmentul montat în cilindru, diametrul fibrei medii fiind $(D - a)$; starea finală corespunde segmentului „deschis" în măsură suficientă pentru a trece peste capul pistonului; forma sa în această situație este a unei curbe oarecare, cu diametre ale fibrei medii variind după o anumită lege; pentru cea mai mică deschidere care permite trecerea segmentului peste capul pistonului există însă cel puțin o secțiune în care se realizează contactul dintre fibra interioară a segmentului și capul pistonului. În această secțiune, precizată prin unghiul φ_0, diametrul fibrei medii este $(D+a)$, iar deformația totală a segmentului, considerată față de starea inițială, este minimă și egală cu $(D + a) - (D - a) = 2a$.

Într-o secțiune oarecare, deformația totală a segmentului este suma dintre deformația produsă de forțele datorite presiunii, care aduc segmentul la starea liberă și cea produsă de forțele de deschidere, care deformează în continuare segmentul pînă la trecerea sa peste piston; se poate scrie deci inegalitatea

$$\Delta d_{m_{p\varphi}}(\varphi, a) + \Delta d_{m_{F\varphi}}(F, \varphi, a) \geqslant 2a.$$

În primul membru, deformația produsă de forțele datorite presiunii are expresia (18), iar cea produsă la montarea segmentului pe piston are expresia din coloana a șaptea din tabela 1, corespunzătoare cazului de montaj considerat. Avînd în vedere aceste expresii, se poate scrie la limită

$$\frac{p_m h r_m^4}{EI} k_1 + \frac{F r_m^3}{EI} k_2 = 2a, \tag{19}$$

unde k_1 și k_2 reprezintă coeficienți numerici obținuți prin calculul expresiilor transcendente din formulele deformațiilor parțiale pentru secțiunea φ_0; din analiza deformației segmentului rezultă $\varphi_0 = 0$.

Din (19) se obține pentru forța de deschidere expresia

$$F = h\left[\frac{4}{3}\frac{E}{k_2}\frac{a^4}{(D-a)^3} - \frac{p_m}{2}\frac{k_1}{k_2}(D-a)\right]. \tag{20}$$

5. ALEGEREA METODEI DE MONTAJ ȘI PRECIZAREA GROSIMII RADIALE

Din cercetarea expresiei (9) a efortului maxim de întindere la segmentul montat în cilindru, precum și a efortului maxim de întindere ce apare la montaj și a cărui expresie este precizată de formulele din coloana a cincea din tabela 1 și de relația (20), se constată următoarele :

Prin creșterea raportului $\frac{D}{a}$, solicitările la segmentul montat în cilindru cresc, iar cele realizate la montarea pe piston scad, pentru toate metodele de montaj (fig. 3).

În cazul metodelor c), d) și e) eforturile de întindere sînt reprezentate prin cîte o familie de curbe al căror parametru este t; la valoarea minimă a

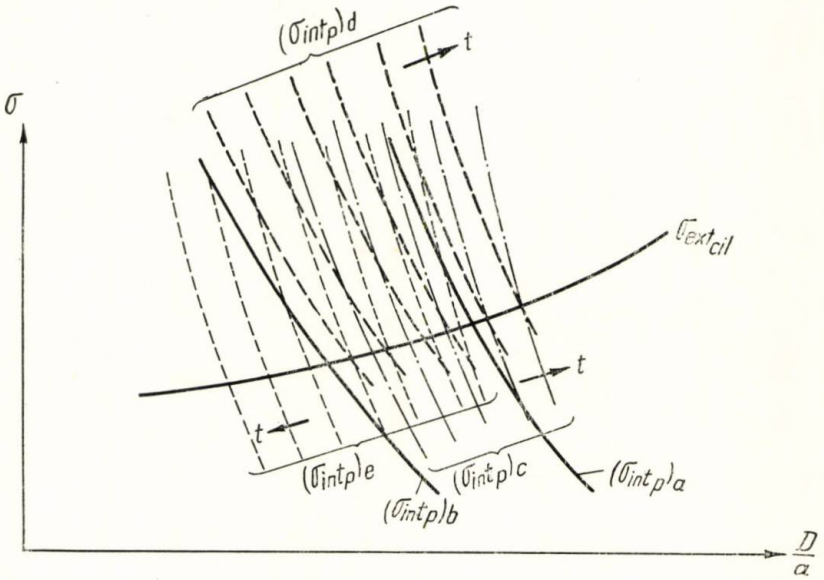


Fig. 3. — Variația eforturilor unitare la introducerea segmentului în cilindru și la montarea segmentului pe piston.

acestuia $t = 0$, curbele de variație a eforturilor unitare pentru metodele c) și d) se suprapun peste curba corespunzătoare metodei b), iar în cazul e) curba de variație este identică cu cea din cazul a) ; o dată cu creșterea valorii parametrului, curbele din familiile $(\sigma_{int\,p})_c$ și $(\sigma_{int\,p})_d$ se deplasează spre dreapta, iar cele din familia $(\sigma_{int\,p})_e$ spre stînga.

În funcție de poziția pe care curbele trasate în figura 3 o au față de valoarea $\left(\frac{D}{a}\right)_{opt}$ ce corespunde cerințelor funcționale principale, se pot prezenta următoarele situații :

1. Raportul $\left(\frac{D}{a}\right)_{opt}$ este mai mic decît cel corespunzător punctului A determinat de intersecția dintre ordonata egală cu rezistența admisibilă

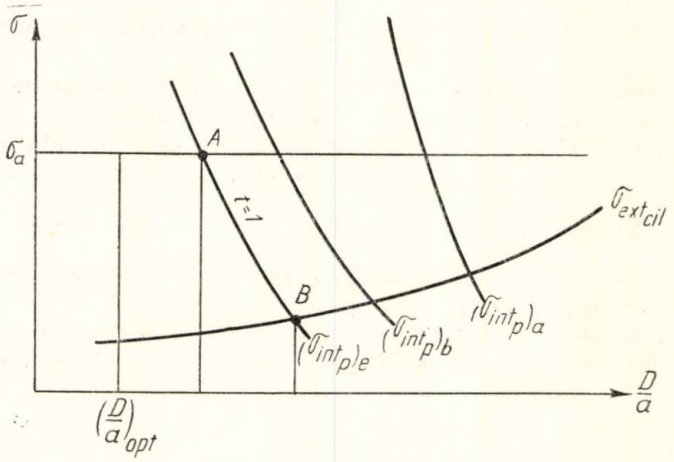


Fig. 4. — Diagramă de calcul.

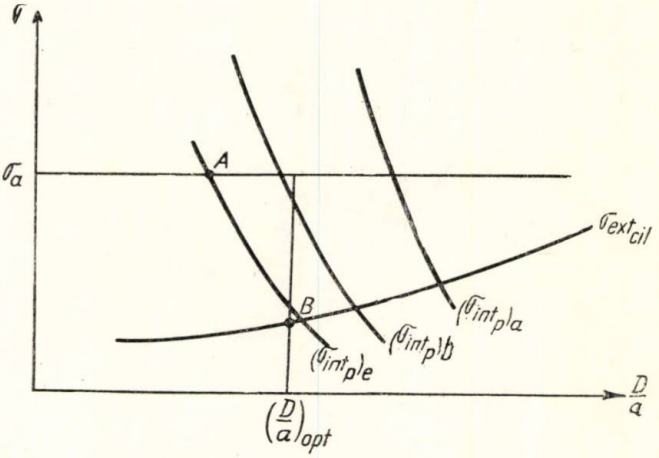


Fig. 5. — Diagramă de calcul.

σ_a și curba pentru $t = 1$ din familia $(\sigma_{int\,p})_e$ (fig. 4). În această situație nici una dintre metodele de montaj nu poate asigura grosimea radială optimă ; valoarea cea mai apropiată de cea optimă corespunde punctului A și se realizează prin metoda de montaj e) pentru $t = 1$; ea solicită materialul la limita admisibilă.

2. Raportul $\left(\frac{D}{a}\right)_{opt}$ este mai mare decît cel corespunzător punctului A (fig. 5). În acest caz, segmentul poate fi dimensionat la grosimea radială optimă ; pentru montare se pot folosi acele metode la care curba de variație a eforturilor unitare intersectează abscisa $\left(\frac{D}{a}\right)_{opt}$ la valori mai mici sau cel mult egale cu σ_a. Dacă metodele de montaj astfel alese permit toate realizarea controlată a deschiderii segmentului la montare, neexistînd pericolul depășirii eforturilor determinate prin calcul, se va prefera metoda de montaj e) cu $t = 1$ pentru care aceste eforturi au valoarea cea mai mică. Cînd controlul deschiderii este sigur numai la unele metode de montaj, alegerea metodei optime se va face dintre acestea, după criteriul solicitării minime la montare.

6. CONCLUZII

Metoda descrisă de dimensionare a segmentului autoelastic de piston are un caracter de generalitate ; ea permite abordarea calculului indiferent de legea de repartiție a presiunii pe circumferința segmentului.

Concluziile rezultate din analiza metodelor de montaj arată că, din punctul de vedere al solicitărilor la montarea segmentului pe piston, cea mai avantajoasă este metoda e) pentru $t = 1$. La alegerea metodei de montaj trebuie însă avută în vedere și posibilitatea controlului deschiderii segmentului ; de aceea sînt de preferat metodele care realizează această posibilitate chiar dacă solicitările materialului la montaj cresc.

Primită la redacție la 19 aprilie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Arnold H., *Berechnung und praktische Verwendung von offenen, ebenen Ringfedern, konstanter und inkonstanter Stärke*, Dissertationsreferat.
2. Buzdugan Gh., *Rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1964.
3. English C., *Kolbenringe*, Springer Verlag, Wien, 1958.
4. Ghințburg B., *Teoria i rasciot porșnevîh kaleț*, Moscva, 1945.
5. * * * *Segmenți pentru pistoane*, Edit. tehnică, București, 1959.
6. Tolstov G. P., *Serii Fourier*, Edit. tehnică, București, 1955.

STUDII

LEGILE DE VARIAȚIE A PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT ÎN CAZUL ÎMBINĂRILOR PRIN MANDRINARE LISĂ SOLICITATE AXIAL LA ÎNTINDERE SAU COMPRESIUNE (I)

de A. PAVEL
Institutul de petrol, gaze și geologie, București

621.88 : 539.4

Se prezintă o metodă analitică de calcul a presiunii instantanee de contact, elaborată pentru îmbinările prin mandrinare lisă folosite în cazul schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activității industriale.
După ce se precizează ipotezele de calcul, pornindu-se de la condițiile de echilibru și de la condițiile de compatibilitate a deformațiilor radiale, se procedează la stabilirea ecuațiilor diferențiale ale presiunii instantanee de contact pentru îmbinarea prin mandrinare lisă în placa tubulară a țevilor cu perete subțire sau cu perete gros, studiindu-se separat stările de eforturi plane și spațiale în cazul solicitării axiale la întindere sau la compresiune.

INTRODUCERE

Îmbinarea prin mandrinare este tipul de asamblare nedemontabilă folosit pe scară largă în construcția de utilaje pentru industriile petrolieră prelucrătoare, chimică, petrochimică, energetică etc., care, în cazul aparaturii tubulare, are ca scop realizarea unei legături etanșe și rezistente între țevile fasciculelor tubulare și corpurile locașurilor, de obicei cilindrice, din plăcile tubulare în care acestea se fixează.

Mandrinarea constă de fapt în lărgirea la rece (evazarea) a capetelor țevilor în locașurile din plăcile tubulare, procesul cuprinzînd următoarele două faze principale :

— lărgirea preliminară a țevii, pînă cînd aceasta vine în contact cu suprafața locașului (epuizarea jocului δ dintre țeavă și locaș, fig. 1*a*);

— lărgirea suplimentară a țevii prin deformarea ei plastică (remanentă), concomitent cu o deformare elastică a locașului.

Materialul țevii, fiind deformat plastic, umple toate spațiile dintre țeavă și locaș, asigurînd etanșeitatea necesară.

Prin încetarea mandrinării, presiunea de mandrinare dispărînd, pereții locașului, fiind deformați elastic, tind să revină în poziția inițială (fig. 1*a*);

această tendință este însă anulată de țeava deformată remanent (fig. 1*b*, *c*, *d*), ceea ce conduce la apariția unor eforturi radiale, care provoacă un fretaj al țevii în locaș, asigurîndu-se astfel rezistența necesară îmbinării.

Rezultă deci că, pentru a obține o îmbinare prin mandrinare etanșă și rezistentă, de bună calitate, este necesar ca limita de curgere σ_{ct} a materialului țevii să fie mai mică decît limita de curgere σ_{cp} a materialului plăcii tubulare ($\sigma_{ct} < \sigma_{cp}$).

Practica de mai multe decenii a realizării tehnologice — de cele mai multe ori în mod empiric — și a exploatării îmbinărilor prin mandrinare a demonstrat că rezistența și etanșeitatea acestui tip de îmbinare depind de o întreagă serie de factori, printre care cei mai importanți sînt următorii [23] : gradul de mandrinare*) sau cuplul motor*) folosit la antrenarea dornului dispozitivului de mandrinare ; caracteristicile fizico-mecanice ale materialelor țevilor și plăcilor tubulare ; starea suprafețelor de contact ; prezența și mărimea capetelor (răsfrînte sau nu) de țeavă petrecute în afara plăcii (fig. 1 *a*, *b*) ; tipul îmbinării prin mandrinare (fig. 1) ; viteza

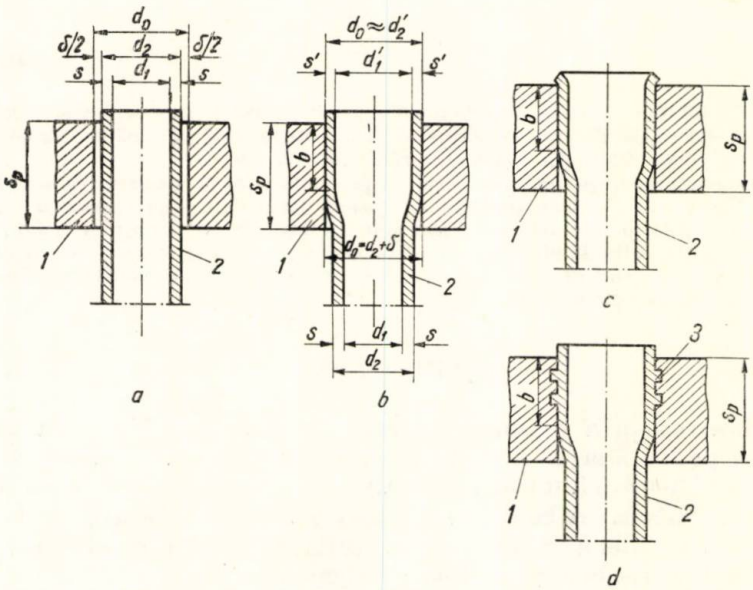


Fig. 1. — Tipuri de îmbinare prin mandrinare :

a — țeavă nemandrinată ; *b* — mandrinare lisă în locașuri cilindrice, fără răsfrîngerea capătului (capetelor) țevii ; *c* — mandrinare lisă în locașuri cilindrice, cu răsfrîngerea capătului (capetelor) țevii ; *d* — mandrinare (cu sau fără răsfrîngerea capătului sau a capetelor țevilor) în locașuri cilindrice cu renuri. 1 — placă tubulară ; 2 — țeavă ; 3 — renuri.

și procedeul de mandrinare (prin rostogolire, cu acționare pneumatică sau electrică ; prin tragere, cu acționare pneumatică sau hidraulică etc.) ; numărul rolelor de mandrinare (și de răsfrîngere) etc.

Metodele de calcul la rezistență și etanșeitate elaborate pînă în pre-

*) Indicatori calitativi ai îmbinărilor prin mandrinare [26].

zent pentru îmbinările prin mandrinare pot fi împărțite, în general, în următoarele două grupe :

— metode bazate în principal pe date experimentale acumulate de-a lungul unei îndelungate perioade de realizări empirice [1]-[15]; în majoritate, așa cum rezultă din studiul [23], aceste metode nu sînt suficient de bine fundamentate din punct de vedere teoretic ;

— metode analitice, bazate pe particularizări ale teoriei elasticității [16], [17] sau ale teoriei plasticității [18]-[22] (problema plană) ; aceste metode au fost numai parțial și în cazuri cu totul particulare verificate experimental, sînt foarte complicate și, din această cauză, au un domeniu restrîns de aplicare și valabilitate.

În țara noastră, problema calculului îmbinărilor prin mandrinare nu a fost abordată pînă în prezent, deși ponderea acestor îmbinări în construcția de aparatură tubulară pentru industriile petrolieră prelucrătoare, chimică, petrochimică, energetică etc. este foarte mare, iar dificultățile ridicate de cerințele calitative impuse acestor îmbinări sînt deosebit de însemnate [23].

În cele ce urmează se va prezenta o metodă analitică de calcul a presiunii instantanee de contact, elaborată special pentru îmbinările prin mandrinare lisă folosite în cazul schimbătoarelor de căldură destinate diferitelor ramuri ale activității industriale.

IPOTEZE DE CALCUL

1. Îmbinarea prin mandrinare dintre țevi și placa tubulară se consideră ca fiind o *îmbinare prin frecare* între două piese tubulare (fig. 2). Grosimea m' a piesei tubulare exterioare (decupate din placa tubulară) se presupune egală (din motive de rigiditate la mandrinare) cu jumătate din lățimea minimă admisibilă (egală cu cel puțin 6 mm [23]) m a punții dintre două țevi alăturate (fig. 2).

2. În exploatare, deci după încheierea operațiilor de mandrinare și punerea sub sarcină a îmbinărilor prin mandrinare, se consideră că modul de lucru al celor două elemente (piese tubulare) componente ale îmbinării corespunde unui sistem elastic, în calculele ce urmează avîndu-se în vedere numai deformațiile elastice ale acestui sistem care apar în timpul funcționării. Rezultă, așadar, că eforturile unitare din îmbinare nu trebuie să depășească în nici un caz limita de curgere a materialelor din care se confecționează elementele îmbinării pentru ca metoda ce va fi prezentată să poată fi aplicată. Se va avea în vedere că $\sigma_{ct} < \sigma_{cp}$.

3. Atîta vreme cît îmbinarea prin mandrinare nu se găsește sub sarcină, deci nu transmite și nu preia nici un fel de efort (dar operația de mandrinare a fost terminată), se presupune că presiunea de contact p_0 între cele două elemente (piese tubulare) ale îmbinării este constantă și uniform distribuită pe toată întinderea suprafețelor de contact. În momentul cînd îmbinarea prin mandrinare se încarcă cu o forță axială de întindere Q_1 sau de compresiune Q_2 (fig. 3), se presupune că presiunea de contact p_0 se redistribuie pe suprafața de contact dintre elementele îmbinării și devine p (respectiv p_1 și p_2), valoare care variază în lungul axei îmbinării și care se denumește presiune instantanee de contact.

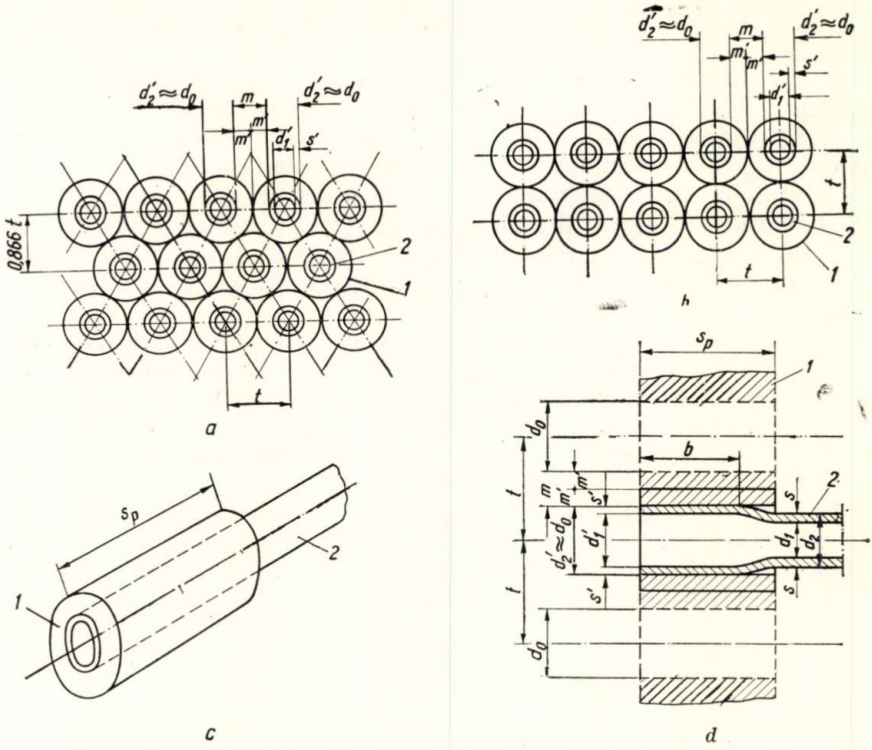


Fig. 2. — Îmbinarea prin mandrinare lisă privită ca o „îmbinare prin frecare" între două piese tubulare :

a — repartiția triunghiulară a țevilor; *b* — repartiția pătratică a țevilor; *c* — piese tubulare îmbinate prin frecare: *d* — secțiune longitudinală prin îmbinare. 1 — placa tubulară sau piesa tubulară exterioară, decupată din placa tubulară; 2 — țevile mandrinate sau piesa tubulară interioară.

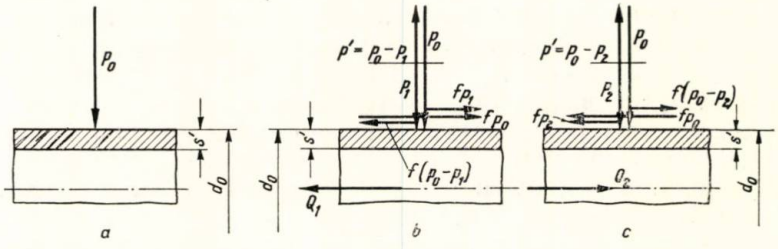


Fig. 3. — Schema redistribuirii presiunii de contact p_0 :

a — îmbinarea prin mandrinare nu preia și nu transmite nici un fel de efort; *b* — îmbinarea prin mandrinare preia o forță axială de întindere; *c* — îmbinarea prin mandrinare preia o forță axială de compresiune. *Observație.* S-a considerat — pentru simplificare — numai un element (țeava) al îmbinării prin mandrinare.

4. Se consideră că în domeniul deformațiilor elastice țeava este suficient de rigidă, astfel că nu există pericolul pierderii stabilității ei nici în direcție radială, și nici în direcție axială.

5. Se consideră [23] de asemenea că placa tubulară este infinit rigidă.

6. Se vor considera, separat, şi se vor studia următoarele două cazuri de solicitare a îmbinărilor prin mandrinare : solicitarea axială la întindere (indice 1) şi solicitarea axială la compresiune (indice 2). Studiul se va face, pentru fiecare caz în parte, considerînd atît mandrinarea ţevilor cu perete subţire $\left(\beta = \frac{}{d_1} < 1{,}1\right)$, cît şi mandrinarea ţevilor cu perete gros $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} \geqslant 1{,}1\right)$. În acest din urmă caz va fi luată în consideraţie întîi starea de eforturi unitare plană şi apoi starea de eforturi unitare spaţială.

7. Eforturile unitare σ_p şi σ_t (valori maxime) se consideră uniform distribuite pe grosimile m' şi s' ale celor două elemente (piese tubulare) ale îmbinării prin mandrinare lisă.

STABILIREA ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE ALE PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT p

Pentru a stabili ecuaţiile diferenţiale ale presiunii instantanee de contact p (respectiv p_1 şi p_2), se face apel la condiţiile de echilibru şi la condiţiile de compatibilitate a deformaţiilor radiale, scrise pentru un element inelar dx (fig. 4) al îmbinării prin mandrinare.

Totodată se consideră că eforturile unitare tangenţiale pe suprafaţa de contact τ şi presiunea de contact p sînt corelate între ele prin legea lui Coulomb :

$$\tau = f \cdot p. \tag{1}$$

a) CONDIŢII DE ECHILIBRU PENTRU ELEMENTUL INELAR dx (fig. 4)

Considerînd că elementul inelar dx este decupat dintr-o îmbinare prin mandrinare lisă solicitată la întindere (fig. 4*a*), condiţiile de echilibru, rezultate din ecuaţiile de proiecţii pe axa x (fig. 4*a*, *d*), vor fi

— pentru placa tubulară :

$$\sigma_p \cdot m' \cdot (2r_0 + m') - (\sigma_p + d\sigma_p) \cdot m' \cdot (2r_0 + m') + \tau \cdot 2r_0\, dx = 0; \tag{2}$$

— pentru ţevi :

$$(\sigma_t + d\sigma_t) s' \cdot (2r_0 - s') - \sigma_t \cdot s' \cdot (2r_0 - s') - \tau \cdot 2r_0\, dx = 0. \tag{3}$$

Dacă se are în vedere legea lui Coulomb (1), atunci din ecuaţiile de echilibru (2) şi (3) rezultă

— pentru placa tubulară :

$$\frac{d\sigma_p}{dx} = \frac{2r_0}{2r_0 + m'} \cdot \frac{f}{m'} \cdot p \; ; \tag{4}$$

— pentru ţevi :

$$\frac{d\sigma_t}{dx} = \frac{2r_0}{2r_0 - s'} \cdot \frac{f}{s'} \cdot p. \tag{5}$$

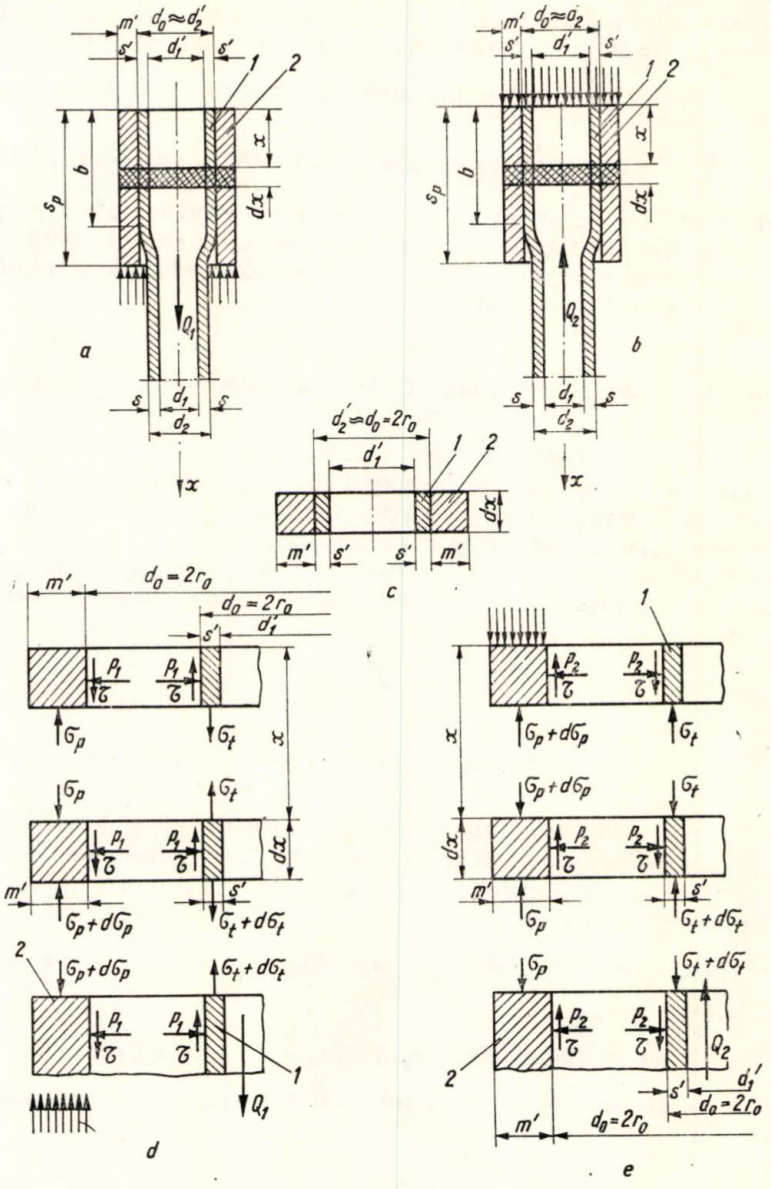


Fig. 4. — Schema de calcul a îmbinărilor prin mandrinare lisă :

a — solicitarea la întindere a îmbinărilor prin mandrinare; *b* — solicitarea la compresiune a îmbinărilor prin mandrinare; *c* — element inelar dx al îmbinărilor prin mandrinare; *d* — echilibrul elementului inelar dx în cazul solicitării la întindere; *e* — echilibrul elementului inelar dx în cazul solicitării la compresiune.

1 — țevile mandrinate sau piesa tubulară interioară; 2 — placa tubulară sau piesa tubulară exterioară, decupată din placa tubulară.

Considerînd acum că elementul inelar dx este decupat dintr-o îmbinare prin mandrinare lisă solicitată la compresiune (fig. 4*b*), condiţiile de echilibru, rezultate de asemenea din ecuaţiile de proiecţii pe axa x (fig. 4*b*, *e*), vor fi

— pentru placa tubulară :

$$(\sigma_p + d\sigma_p)(2r_0 + m')\cdot m' - \sigma_p(2r_0 + m')\cdot m' - \tau\, 2r_0\cdot dx = 0; \qquad (6)$$

— pentru ţevi :

$$\sigma_t(2r_0 - s')\cdot s' - (\sigma_t + d\sigma_t)(2r_0 - s')\cdot s' + \tau\, 2r_0\cdot dx = 0. \qquad (7)$$

Nu este greu de observat că, dacă se are în vedere legea lui Coulomb (1), din ecuaţiile de echilibru (6) şi (7) rezultă de asemenea ecuaţiile diferenţiale (4) şi (5).

Aşadar, ecuaţiile diferenţiale (4) şi (5), reprezentînd condiţiile de echilibru în forma lor generală, sînt valabile atît pentru îmbinările prin mandrinare lisă solicitate la întindere, cît şi pentru cele solicitate la compresiune.

Observaţie. Dacă Q este forţa de smulgere — prin tragere sau prin împingere — din îmbinarea prin mandrinare şi dacă se consideră că eforturile unitare σ_p şi σ_t sînt uniform distribuite pe grosimea celor două elemente (piese tubulare) ale îmbinării prin mandrinare, atunci se poate scrie :

$$\sigma_p = \frac{Q}{\pi\cdot(2r_0 + m')\cdot m'}; \qquad (a)$$

$$\sigma_t = \frac{Q}{\pi\cdot(2r_0 - s')\cdot s'}, \qquad (b)$$

în urma derivării în raport cu x rezultînd

$$\frac{d\sigma_p}{dx} = \frac{1}{\pi\cdot(2r_0 + m')\cdot m'}\cdot\frac{dQ}{dx},$$

$$\frac{d\sigma_t}{dx} = \frac{1}{\pi\cdot(2r_0 - s')\cdot s'}\cdot\frac{dQ}{dx}. \qquad (d)$$

Avînd în vedere expresia evidentă (fig. 4) a forţei de smulgere Q

$$Q = 2\pi r_0 f\int_0^b p\, dx \qquad (e)$$

şi derivînd-o în raport cu x, după substituirea în (c) şi (d), se obţine

$$\frac{d\sigma_p}{dx} = \frac{2r_0}{2r_0 + m'}\cdot\frac{f}{m'}\cdot p, \qquad (f)$$

$$\frac{d\sigma_t}{dx} = \frac{2r_0}{2r_0 - s'}\cdot\frac{f}{s'}\cdot p. \qquad (g)$$

După cum se observă, au fost obţinute din nou, bineînţeles pe altă cale, condiţiile de echilibru (4) şi (5).

b) CONDIȚII DE COMPATIBILITATE A DEFORMAȚIILOR RADIALE PENTRU ELEMENTUL INELAR dx (fig. 4)

Forma generală a condițiilor de compatibilitate a deformațiilor radiale pentru elementul inelar dx este următoarea :

$$\varepsilon_p = \varepsilon_t, \tag{8}$$

unde

ε_p reprezintă deformația (elastică) specifică radială totală pentru placa tubulară ;

ε_t — deformația (elastică) specifică radială totală pentru țeavă.

Pentru determinarea deformațiilor (elastice) specifice radiale ε_p și ε_t se va folosi legea lui Hooke generalizată, problema plană sau problema spațială.

c) ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT ÎN CAZUL MANDRINĂRII LISE A ȚEVILOR CU PERETE SUBȚIRE $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} < 1{,}1\right)$

1. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la întindere* (fig. 4 *a*, *c*, *d*). În cazul țevilor cu perete subțire, eforturile unitare radiale, fiind foarte mici față de cele axiale și inelare, se vor neglija și se va avea deci în vedere legea lui Hooke generalizată scrisă pentru problema plană

$$\varepsilon_y^{*}) = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}. \tag{9}$$

Pentru țeavă, în cazul de față rezultă (fig. 5 *a*)

$$\begin{aligned} D_{mt} &= d_0 - s' = 2r_0 - s', \\ R_{mt} &= r_0 - \frac{s'}{2}, \\ \sigma_y &= -\sigma_{t_1}^{p'} = +\frac{p' D_{mt}}{2s'} = \frac{p' R_{mt}}{s'}, \\ \sigma_x &= \sigma_{t_1}, \\ E &= E_t. \end{aligned} \tag{10}$$

Avînd în vedere că presiunea instantanee de contact p_1 scade față de p_0 cu valoarea $p' = p - p_1$, ultima contribuind la apariția și dezvoltarea deformațiilor specifice ε_{t_1}, în urma substituirii expresiilor (10) în ecuația

*) Semnificația notațiilor din această formulă conform [24], p. 318.

(9), se obține

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{p_0 - p_1}{E_t} \cdot \frac{r_0 - \frac{s'}{2}}{s'} - \mu \frac{\sigma_{t_1}}{E_t}. \tag{11}$$

Pentru placa tubulară, în cazul de față rezultă (fig. 5*b*)

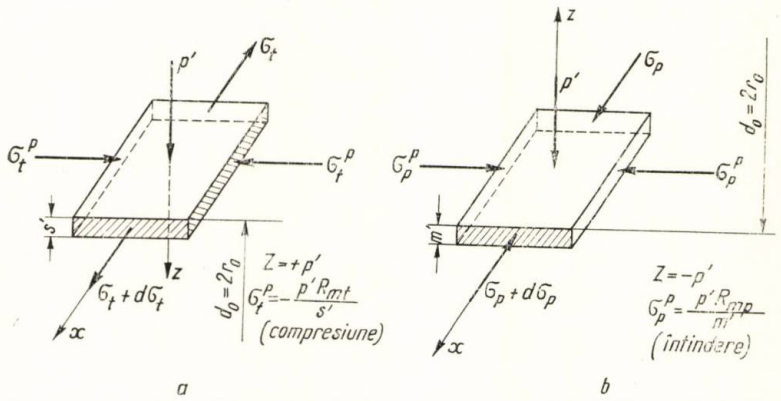


Fig. 5. — Schema de calcul a eforturilor unitare și a deformațiilor specifice radiale pentru elementele unei îmbinări prin mandrinare solicitate la întindere:
a — țeavă; *b* — placă tubulară.

$$D_{mp} = d_0 + m' = 2r_0 + m',$$

$$R_{mp} = r_0 + \frac{m'}{2},$$

$$\sigma_y = -\sigma_{p_1}^{p'} = -\frac{p' D_{mp}}{2m'} = -\frac{p' R_{mp}}{m'}, \tag{12}$$

$$\sigma_x = -\sigma_{p_1},$$

$$E = E_p.$$

Introducînd expresiile (12) în ecuația (9) și ținînd cont că presiunea instantanee de contact p_1 scade și în acest caz față de p_0, deci $p' = p_0 - p_1$, se obține

$$\varepsilon_{p_1} = -\frac{p_0 - p_1}{E_p} \cdot \frac{r_0 + \frac{m'}{2}}{m'} + \mu \frac{\sigma_{p_1}}{E_p}. \tag{13}$$

Scriind acum condiția de compatibilitate a deformațiilor radiale (8) și derivînd-o în raport cu x, rezultă

$$\frac{r_0 + \frac{m'}{2}}{m' E_p} \cdot \frac{dp_1}{dx} + \frac{\mu}{E_p} \cdot \frac{d\sigma_{p_1}}{dx} + \frac{r_0 - \frac{s'}{2}}{s' E_t} \cdot \frac{dp_1}{dx} + \frac{\mu}{E_t} \cdot \frac{d\sigma_{t_1}}{dx} = 0, \tag{14}$$

de unde, dacă se ține seama de condițiile de echilibru (4) și (5), se obține următoarea ecuație diferențială a presiunii instantanee de contact în cazul solicitării la întindere a îmbinărilor prin mandrinare lisă a țevilor cu perete subțire :

$$\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}x} + \frac{k_1}{r_0} \cdot p_1 = 0, \tag{15}$$

în care

$$k_1 = \mu f \frac{s' E_t \left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right) + m' E_p \left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)}{\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\left[s' E_t \left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) + m' E_p \left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\right]}. \tag{16}$$

Notînd

$$\frac{s' E_t}{m' E_p} = \frac{1}{\psi}, \text{ adică } \frac{m' E_p}{s' E_t} = \psi, \tag{17}$$

formula (16) capătă următoarea formă :

$$k_1 = \mu f \frac{\psi\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) + \left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right) + \left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\right]}. \tag{18}$$

Pentru $s' \ll 2r_0 = d_0$ și $m' \ll 2r_0 = d_0$, rezultă

$$\frac{s'}{2r_0} = \frac{s'}{d_0} \ll 1,$$

$$\frac{m'}{2r_0} = \frac{m'}{d_0} \ll 1$$

și deci în mod aproximativ se poate considera

$$1 - \frac{s'}{2r_0} \approx 1,$$

$$1 + \frac{m'}{2r_0} \approx 1.$$

În acest caz formula (18) devine

$$k_1 \approx \mu f, \tag{19}$$

iar ecuațiile de echilibru (4) și (5) pot fi scrise sub următoarea formă aproximativă :

— pentru placa tubulară :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{p_1}}{\mathrm{d}x} = \frac{f}{m'} \cdot p_1; \tag{4'}$$

— pentru țevi :

$$\frac{d\sigma_{t_1}}{dx} = \frac{f}{s'} \cdot p_1 \cdot \tag{5'}$$

Dacă placa tubulară și țeava se confecționează din materiale avînd același modul de elasticitate longitudinal E, atunci

$$E_p = E_t = E,$$

expresia de calcul (17) a factorului ψ fiind pentru acest caz

$$\psi = \frac{m'}{s'} \cdot \tag{20}$$

Nu este greu de observat din expresia (18) că, în acest din urmă caz, coeficientul k_1 va fi

$$k_1 = \mu f \frac{s'\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right) + m'\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)}{\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\left[s'\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) + m'\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\right]} \cdot \tag{21}$$

Considerînd formula de calcul pentru coeficientul k_1 (19), ecuația diferențială (15) capătă forma

$$\frac{dp_1}{dx} + \frac{\mu f}{r_0} p_1 = 0. \tag{22}$$

Este interesant de remarcat că ecuația diferențială (22) — un caz particular al ecuației diferențiale (15) — a fost obținută de asemenea în lucrarea [16]. De observat însă că în această din urmă lucrare nu se fac nici un fel de precizări în legătură cu domeniul de valabilitate și gradul de precizie al acestei ecuații diferențiale, ea fiind considerată general valabilă.

2. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la compresiune* (fig. 4*b*, *c*, *e*). Pentru țeavă, în acest caz rezultă (fig. 3*c*)

$$\begin{aligned} D_{mt} &= 2r_0 - s', \\ p' &= p_0 - p_2, \\ \sigma_y &= -\sigma_{t_2}^{p'} = +\frac{(p_0 - p_2)\left(r_0 - \frac{s'}{2}\right)}{s'}, \\ \sigma_x &= -\sigma_{t_2} \cdot \end{aligned} \tag{23}$$

Introducînd expresiile (23) în ecuația (9), se obține

$$\varepsilon_{t_2} = \frac{p_0 - p_2}{E_t} \cdot \frac{r_0 - \frac{s'}{2}}{s'} + \mu \frac{\sigma_{t_2}}{E_t} \cdot \tag{24}$$

Pentru placa tubulară, în acest caz rezultă (fig. 3*c*)

$$\begin{aligned} D_{mp} &= 2r_0 + m', \\ p' &= p_0 - p_2, \\ \sigma_y &= -\sigma_{p_2}^{p'} = -\frac{(p_0 - p_2)\left(r_0 + \frac{m'}{2}\right)}{m'}, \\ \sigma_x &= -\sigma_{p_2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Introducînd expresiile (25) în ecuaţia (9), se obţine

$$\varepsilon_{p_2} = -\frac{p_0 - p_2}{E_p} \cdot \frac{r_0 + \frac{m'}{2}}{m'} + \mu \frac{\sigma_{p_2}}{E_p}. \tag{26}$$

Se scrie condiţia de compatibilitate a deformaţiilor radiale (8) şi se derivează în raport cu x, rezultînd

$$\frac{r_0 + \frac{m'}{2}}{m' E_p} \cdot \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}x} + \frac{\mu}{E_p} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma_{p_2}}{\mathrm{d}x} + \frac{r_0 - \frac{s'}{2}}{s' E_t} \cdot \frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mu}{E_t} \cdot \frac{\mathrm{d}\sigma_{t_2}}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{27}$$

Dacă se ţine cont de condiţiile de echilibru (4) şi (5), atunci din (27) se obţine următoarea ecuaţie diferenţială a presiunii instantanee de contact în cazul solicitării la compresiune a îmbinărilor prin mandrinare lisă a ţevilor cu perete subţire :

$$\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}x} - \frac{k_2}{r_0} p_2 = 0, \tag{28}$$

în care

$$k_2 = \mu f \frac{m' E_p \left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) - s' E_t \left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\left[s' E_t \left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) + m' E_p \left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\right]} \tag{29}$$

sau, dacă se are în vedere notaţia (17),

$$k_2 = \mu f \frac{\psi\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) - \left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right) + \left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\right]}. \tag{30}$$

Pentru $s' << 2r_0 = d_0$ şi $m' << 2r_0 = d_0$, formula (30) devine

$$k_2 \approx \mu f \frac{\psi - 1}{\psi + 1}, \tag{31}$$

iar pentru $s' \to 0$ şi $m' \to 0$ rezultă

$$\psi = \frac{E_p}{E_t}, \tag{32}$$

$$k_2 = \mu f \frac{E_p - E_t}{E_p + E_t}. \tag{33}$$

Pentru îmbinările prin mandrinare avînd $E_p = E_t = E$, din expresia (30) rezultă pentru coeficientul k_2 următoarea formulă de calcul :

$$k_2 = \mu f \frac{m'\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) - s'\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)}{\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\left[s'\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) + m'\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\right]}, \tag{34}$$

în care factorul ψ este cel dat de formula (20).

Considerînd formula de calcul (31), ecuaţia diferenţială (28) capătă forma :

$$\frac{dp_2}{dx} - \frac{\mu f}{r_0} \cdot \frac{\psi - 1}{\psi + 1} \cdot p_2 = 0. \tag{35}$$

De remarcat că ecuaţia diferenţială (35) — un caz particular al ecuaţiei diferenţiale (28) — a fost obţinută de asemenea în lucrarea [16]. Fără a intra în analiza unor neconcordanţe existente în această lucrare, trebuie observat numai că lucrarea [16] nu cuprinde nici un fel de precizări cu privire la domeniul de valabilitate şi gradul de precizie al ecuaţiei diferenţiale (35), ea fiind considerată general valabilă.

OBSERVAŢII

1) Pentru a pune în evidenţă gradul de precizie al formulelor aproximative (19) şi (31), s-a întocmit tabela 1. După cum se vede din această tabelă, în cazul aparatelor de schimb.

Tabela 1

Valori ale mărimilor $1 - \frac{s'}{2r_0}$ şi $1 + \frac{m'}{2r_0}$ *)

$d_0 = 2r_0$ mm	s' mm	$\frac{s'}{2r_0}$	$1 - \frac{s'}{2r_0}$	$d_0 = 2r_0$ mm	m' mm	$\frac{m'}{2r_0}$	$1 + \frac{m'}{2r_0}$
25	2,0	0,08	0,92	25	2,5	0,10	1,10
	2,5	0,10	0,90		3,0	0,12	1,12
	3,0	0,12	0,88		3,5	0,14	1,14
					4,0	0,16	1,16
					4,5	0,18	1,18
					5,0	0,20	1,20

*) Dimensiunile din tabelă sînt întîlnite frecvent în construcţia de aparate de schimb de căldură destinate ndustriei petroliere prelucrătoare şi petrochimice.

de căldură folosite curent în industria petrolieră prelucrătoare şi petrochimică, formulele (19) şi (31) corespund numai unor situaţii cu totul particulare. În consecinţă, se recomandă ca aceste formule să fie folosite numai în cazurile respective.

2) Factorul ψ este denumit în lucrarea [16] „maleabilitate relativă a ţevii".

3) În ce priveşte coeficientul de frecare f, cercetările experimentale efectuate de autorii lucrării [16] pe modele de îmbinare prin mandrinare lisă au arătat că valorile sale sînt în general cuprinse în intervalul $f = 0{,}4 - 0{,}5$, ceea ce corespunde datelor menţionate şi în alte lucrări de specialitate [22].

4) Între coeficienţii k_1 şi k_2, în cazul general al problemei de faţă se pot scrie următoarele relaţii de legătură :

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\psi\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) + \left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)}{\psi\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right) - \left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)},$$

$$k_1 - k_2 = \frac{2\mu f}{\left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right) + \left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\right]}, \tag{I}$$

$$k_1 + k_2 = \frac{2\mu f \psi}{\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right)\left[\psi\left(1 - \frac{s'}{2r_0}\right) + \left(1 + \frac{m'}{2r_0}\right)\right]},$$

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} = \psi \frac{2r_0 + m'}{2r_0 - s'}.$$

În cazul particular cînd $\frac{s'}{2r_0} << 1$ şi $\frac{m'}{2r_0} << 1$, rezultă

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\psi + 1}{\psi - 1},$$

$$k_1 - k_2 = \frac{2\mu f}{\psi + 1},$$

$$k_1 + k_2 = \frac{2\mu f \psi}{\psi + 1}, \tag{II}$$

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} = \psi.$$

În cazul cînd $E_p = E_t = E$, se obține

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{m'\left(1+\frac{m'}{2r_0}\right) + s'\left(1-\frac{s'}{2r_0}\right)}{m'\left(1+\frac{m'}{2r_0}\right) - s'\left(1-\frac{s'}{2r_0}\right)},$$

$$k_1 - k_2 = \frac{2\mu f s'}{\left(1+\frac{m'}{2r_0}\right)\left[s'\left(1+\frac{m'}{2r_0}\right) + m'\left(1-\frac{s'}{2r_0}\right)\right]}, \qquad \text{(III)}$$

$$k_1 + k_2 = \frac{2\mu f m'}{\left(1-\frac{s'}{2r_0}\right)\left[s'\left(1+\frac{m'}{2r_0}\right) + m'\left(1-\frac{s'}{2r_0}\right)\right]},$$

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} = \frac{m'}{s'} \cdot \frac{2r_0 + m'}{2r_0 - s'}.$$

[d) ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT ÎN CAZUL MANDRINĂRII LISE A ȚEVILOR CU PEREȚE GROS $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} \geqslant 1{,}1\right)$, STAREA DE EFORTURI FIIND PLANĂ

Pentru o țeavă cu perete gros solicitată numai la o presiune interioară p' eforturile unitare se calculează cu formulele cunoscute *) :

— la fața interioară

$$\sigma_{tg\,i} = p' \frac{\beta^2 + 1}{\beta^2 - 1}, \qquad \sigma_{r\,i} = -p'; \qquad \text{(36a)}$$

— la fața exterioară

$$\sigma_{tg\,e} = p' \frac{2}{\beta^2 - 1}, \qquad \sigma_{r\,e} = 0. \qquad \text{(36 b)}$$

Dacă țeava cu perete gros este solicitată numai la o presiune exterioară p', atunci formulele de calcul pentru eforturile unitare, de asemenea cunoscute*), sînt :

— la fața interioară

$$\sigma_{tg\,i} = -p' \frac{2\beta^2}{\beta^2 - 1}, \qquad \sigma_{r\,i} = 0; \qquad \text{(37 a)}$$

*) Semnificația notațiilor din aceste formule conform [24], p. 488.

— la fața exterioară

$$\sigma_{tg\,e} = -\,p'\,\frac{\beta^2+1}{\beta^2-1}, \qquad \sigma_{r\,e} = -\,p'. \tag{37b}$$

Neglijînd efortul unitar normal radial $\sigma_z = \sigma_r$ față de efortul unitar normal circumferențial σ_{tg} (numit și efort unitar normal inelar sau „tangențial") și de cel longitudinal (numit și efort unitar axial) σ_{ax}*), evident, se va putea considera că starea de eforturi este plană, deci formula (9) își păstrează valabilitatea.

1. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la întindere* (fig. 4*a*, *c*, *d*). Pentru țeavă, care este solicitată la presiunea exterioară p', rezultă în acest caz (fig. 5*a*)

$$p' = p_0 - p_1, \qquad \beta_t = \frac{1}{1-\dfrac{s'}{r_0}}, \qquad \sigma_y = -\,\sigma_{t_1}^{p'} = -\,\sigma_{tg\,e} = +\,p'\,\frac{\beta_t^2+1}{\beta_t^2-1}, \qquad \sigma_x = \sigma_{t_1}. \tag{38}$$

Introducînd în ecuația (9), se obține

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{1}{E_t}\left[(p_0 - p_1)\,\frac{\beta_t^2+1}{\beta_t^2-1} - \mu\,\sigma_{t_1}\right]. \tag{39}$$

Pentru placa tubulară, care este solicitată la presiunea interioară p', rezultă în acest caz (fig. 5*b*)

$$p' = p_0 - p_1, \qquad \beta_p = 1 + \frac{m'}{r_0}, \qquad \sigma_y = -\,\sigma_{p_1}^{p'} = -\,\sigma_{tg\,i} = -\,p'\,\frac{\beta_p^2+1}{\beta_p^2-1}, \qquad \sigma_x = -\,\sigma_{p_1}. \tag{40}$$

Introducînd în ecuația (9), se obține

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{1}{E_p}\left[-\,(p_0 - p_1)\,\frac{\beta_p^2+1}{\beta_p^2-1} + \mu\,\sigma_{p_1}\right]. \tag{41}$$

*) Acest efort unitar rezultă din condițiile de echilibru (4) și (5).

Trecînd la scrierea condiţiei de compatibilitate a deformaţiilor radiale (8) şi derivînd în raport cu x, se obţine următoarea ecuaţie :

$$\frac{1}{E_p}\cdot\frac{\beta_p^2+1}{\beta_p^2-1}\cdot\frac{dp_1}{dx}+\frac{\mu}{E_p}\cdot\frac{d\sigma_{p_1}}{dx}+\frac{1}{E_t}\cdot\frac{\beta_t^2+1}{\beta_t^2-1}\cdot\frac{dp_1}{dx}+\frac{\mu}{E_t}\cdot\frac{d\sigma_{t_1}}{dx}=0. \tag{42}$$

Ţinînd cont că

$$m'=r_0(\beta_p-1),$$

$$s'=r_0\left(1-\frac{1}{\beta_t}\right),$$

condiţiile de echilibru (4) şi (5) se scriu sub următoarea formă :

$$\frac{d\sigma_{p_1}}{dx}=\frac{2f}{r_0(\beta_p^2-1)}p_1, \tag{43}$$

$$\frac{d\sigma_{t_1}}{dx}=\frac{2\beta_t^2 f}{r_0(\beta_t^2-1)}p_1. \tag{44}$$

Luînd în consideraţie condiţiile de echilibru scrise sub forma (43) şi (44), din (42) se obţine următoarea ecuaţie diferenţială a presiunii instantanee de contact în cazul solicitării la întindere a îmbinărilor prin mandrinare lisă a ţevilor cu perete gros (starea de eforturi fiind plană) :

$$\frac{dp_1}{dx}+\frac{k_1}{r_0}p_1=0, \tag{45}$$

în care

$$k_1=2\mu f\frac{E_t(\beta_t^2-1)+E_p\beta_t^2(\beta_p^2-1)}{E_t(\beta_t^2-1)(\beta_p^2+1)+E_p(\beta_p^2-1)(\beta_t^2+1)}. \tag{46}$$

După cum se constată, ca formă, ecuaţia diferenţială (45) este identică cu ecuaţia diferenţială (15). Diferă numai valorile coeficienţilor k_1 (vezi formulele 46 şi 16).

Notînd

$$\frac{E_p(\beta_p^2-1)}{E_t(\beta_t^2-1)}=\psi, \tag{47}$$

pentru coeficientul k_1 se obţine în acest caz următoarea formulă de calcul :

$$k_1=2\mu f\frac{1+\psi\beta_t^2}{(\beta_p^2+1)+\psi(\beta_t^2+1)}. \tag{48}$$

Pentru $\beta_t\to 1$ şi $\beta_p\to 1$ (îmbinarea prin mandrinare lisă a ţevilor cu perete foarte subţire), expresiile de calcul (47) şi (48) se reduc la expresiile (32) şi, respectiv, (19), iar ecuaţiile de echilibru (43) şi (44) se reduc la formele aproximative (4') şi (5').

Pentru $E_p = E_t = E$, relaţiile (47) şi (48) devin :

$$\psi = \frac{\beta_p^2 - 1}{\beta_t^2 - 1}, \tag{49}$$

$$k_1 = 2\,\mu f\,\frac{\beta_t^2(\beta_p^2 - 1) + (\beta_t^2 - 1)}{(\beta_p^2 + 1)(\beta_t^2 - 1) + (\beta_p^2 - 1)(\beta_t^2 + 1)}. \tag{50}$$

2. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la compresiune* (fig. 4*b*, *c*, *e*). Pentru ţeavă, în acest caz rezultă (fig. 3*c*)

$$\sigma_y = -\,\sigma_{t_2}^{p'} = +(p_0 - p_2)\,\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1},$$
$$\sigma_x = -\,\sigma_{t_2}, \tag{51}$$

iar pentru placa tubulară corespunde (fig. 3 *c*)

$$\sigma_y = -\,\sigma_{p_2}^{p'} = -\,(p_0 - p_2)\,\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1},$$
$$\sigma_x = -\,\sigma_{p_2}. \tag{52}$$

Introducînd expresiile (51) şi (52) în ecuaţia (9) şi efectuînd calculele, se obţine, respectiv, pentru ţeavă şi pentru placa tubulară

$$\varepsilon_{t_2} = \frac{1}{E_t}\left[(p_0 - p_2)\,\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1} + \mu\,\sigma_{t_2}\right], \tag{53}$$

$$\varepsilon_{p_2} = \frac{1}{E_p}\left[-\,(p_0 - p_2)\,\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1} + \mu\sigma_{p_2}\right]. \tag{54}$$

Expresiile (53) şi (54) permit scrierea condiţiei de compatibilitate a deformaţiilor radiale (8) ; după derivarea în raport cu x a acestei condiţii rezultă următoarea ecuaţie :

$$\frac{1}{E_p}\cdot\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1}\cdot\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}x} + \frac{\mu}{E_p}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma_{p_2}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{E_t}\cdot\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1}\cdot\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}x} - \frac{\mu}{E_t}\cdot\frac{\mathrm{d}\sigma_{t_2}}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{55}$$

Considerînd condiţiile de echilibru (43) şi (44), din (55) se obţine următoarea ecuaţie diferenţială a presiunii instantanee de contact în cazul solicitării la compresiune a îmbinărilor prin mandrinare lisă a ţevilor cu perete gros (starea de eforturi fiind plană) :

$$\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}x} - \frac{k_2}{r_0}\,p_2 = 0, \tag{56}$$

în care

$$k_2 = 2\mu f\,\frac{E_p\beta_t^2(\beta_p^2 - 1) - E_t(\beta_t^2 - 1)}{E_t(\beta_t^2 - 1)(\beta_p^2 + 1) + E_p(\beta_p^2 - 1)(\beta_t^2 + 1)}, \tag{57}$$

sau, dacă se are în vedere notaţia (47),

$$k_2 = 2\mu f\,\frac{\psi\beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2 + 1) + (\beta_p^2 + 1)}. \tag{58}$$

Ca formă, ecuația diferențială (56) este identică cu ecuația diferențială (28); diferă numai valorile coeficienților k_2 (vezi formulele 29, 30 și, respectiv, 57 și 58).

Pentru $\beta_t \to 1$ și $\beta_p \to 1$ (îmbinarea prin mandrinare lisă a țevilor cu perete foarte subțire), expresiile de calcul (57) și (58) se reduc la expresia (33).

Pentru $E_p = E_t = E$, relațiile (57) și (58) devin :

$$k_2 = 2\mu f \frac{\beta_t^2(\beta_p^2 - 1) - (\beta_t^2 - 1)}{(\beta_p^2 + 1)(\beta_t^2 - 1) + (\beta_p^2 - 1)(\beta_t^2 + 1)}. \tag{59}$$

OBSERVAȚIE

Între coeficienții k_1 și k_2, în cazul problemei de față se pot scrie următoarele relații de legătură :

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\psi\beta_t^2 + 1}{\psi\beta_t^2 - 1}, \tag{60}$$

$$k_1 - k_2 = \frac{4\mu f}{(\beta_p^2 + 1) + \psi(\beta_t^2 + 1)}, \tag{61}$$

$$k_1 + k_2 = \frac{4\mu f \psi\beta_t^2}{(\beta_p^2 + 1) + \psi(\beta_t^2 + 1)}, \tag{62}$$

$$\frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} = \psi\beta_t^2. \tag{63}$$

e) ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE PRESIUNII INSTANTANEE DE CONTACT ÎN CAZUL MANDRINĂRII LISE A ȚEVILOR CU PERETE GROS $\left(\beta = \frac{d_2}{d_1} \geqslant 1{,}1\right)$, STAREA DE EFORTURI FIIND SPAȚIALĂ

În acest caz efortul unitar normal radial $\sigma_z = \sigma_r$ nu se mai neglijează, valorile sale fiind cele corespunzătoare formulelor (36) și (37). Starea de eforturi fiind în acest caz spațială, se va avea în vedere legea lui Hooke generalizată scrisă pentru problema spațială, și anume

$$\varepsilon_y {}^{*)} = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]. \tag{64}$$

1. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la întindere* (fig. 4*a*, *c*, *d*). Pentru țeavă, care este solicitată la presiunea exterioară $p' = (p_0 - p_1)$, rezultă în acest caz (fig. 5*a*)

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\sigma_{t_1}^{p'} = -\sigma_{tg\,e} = +(p_0 - p_1)\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1}, \\ \sigma_x &= \sigma_{t_1}, \\ \sigma_z &= -\sigma_{rt_1}^{p'} = +(p_0 - p_1), \end{aligned} \tag{65}$$

*) Semnificația notațiilor din această formulă conform [24], p. 318.

iar pentru placa tubulară, care este solicitată la presiunea interioară $p' = (p_0 - p_1)$, rezultă în acest caz (fig. 5*b*)

$$\sigma_y = -\sigma^{p'}_{p_1} = -\sigma_{tg\,i} = -(p_0 - p_1)\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1},$$
$$\sigma_x = -\sigma_{p_1}, \tag{66}$$
$$\sigma_z = -\sigma^{p'}_{rp_1} = +(p_0 - p_1).$$

Introducînd expresiile (65) şi (66) în ecuaţia (64) şi efectuînd calculele, se obţine, respectiv, pentru ţeavă şi pentru placa tubulară

$$\varepsilon_{t_1} = \frac{1}{E_t}\left[(p_0 - p_1)\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1} - \mu(p_0 - p_1) - \mu\sigma_{t_1}\right], \tag{67}$$

$$\varepsilon_{p_1} = \frac{1}{E_p}\left[-(p_0 - p_1)\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1} - \mu(p_0 - p_1) + \mu\sigma_{p_1}\right]. \tag{68}$$

Scriind condiţia de compatibilitate a deformaţiilor radiale (8) şi derivînd în raport cu x, se obţine următoarea ecuaţie :

$$\frac{1}{E_p}\cdot\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1}\cdot\frac{dp_1}{dx} + \frac{\mu}{E_p}\cdot\frac{dp_1}{dx} + \frac{\mu}{E_p}\cdot\frac{d\sigma_{p_1}}{dx} +$$
$$+\frac{1}{E_t}\cdot\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1}\cdot\frac{dp_1}{dx} - \frac{\mu}{E_t}\cdot\frac{dp_1}{dx} + \frac{\mu}{E_t}\cdot\frac{d\sigma_{t_1}}{dx} = 0. \tag{69}$$

Luînd în consideraţie condiţiile de echilibru (43) şi (44), din (69) se obţine următoarea ecuaţie diferenţială a presiunii instantanee de contact în cazul solicitării la întindere a îmbinărilor prin mandrinare lisă a ţevilor cu perete gros (starea de eforturi fiind spaţială) :

$$\frac{dp_1}{dx} + \frac{k_1}{r_0}\cdot p_1 = 0, \tag{70}$$

în care

$$k_1 = 2\mu f\,\frac{E_t(\beta_t^2 - 1) + E_p\,\beta_t^2(\beta_p^2 - 1)}{E_t(\beta_t^2 - 1)(\beta_p^2 + 1) + E_p(\beta_p^2 - 1)(\beta_t^2 + 1) - \mu(\beta_p^2 - 1)(\beta_t^2 - 1)(E_p - E_t)},$$

sau, dacă se are în vedere notaţia (47), (71)

$$k_1 = 2\mu f\,\frac{1 + \psi\beta_t^2}{(\beta_p^2 + 1) + \psi(\beta_t^2 + 1) - \mu\dfrac{E_p - E_t}{E_t}(\beta_p^2 - 1)}. \tag{72}$$

După cum se constată, ca formă, ecuaţia diferenţială (70) este identică cu ecuaţiile diferenţiale (15) şi (45) ; diferă numai valorile coeficienţilor k_1 (vezi formulele 16, 46, 48, 71 şi 72).

Interesant de remarcat că pentru $\sigma_z = \sigma_r^p \approx 0$ (neglijabil), termenul în μ de la numitorul relaţiilor (71) şi (72) dispare, coeficientul k_1 căpătînd expresia cunoscută (46) sau, respectiv, (48).

Pentru $\beta_t \to 1$ şi $\beta_p \to 1$ (îmbinarea prin mandrinare lisă a ţevilor cu perete foarte subţire), expresiile de calcul (71) şi (72) se reduc la expresia (19).

Pentru $E_p = E_t = E$, aceleaşi expresii de calcul (71) şi (72) se reduc la expresia (50), indiferent care sînt valorile factorilor β_p şi β_t. Rezultă de aici următoarea concluzie importantă : dacă placa tubulară şi ţeava se confecţionează din materiale avînd acelaşi modul de elasticitate longitudinal E, efectul eforturilor unitare normale radiale σ_r^p dispare complet, îmbinarea prin mandrinare lisă comportîndu-se ca şi cum starea de eforturi ar fi plană, şi nu spaţială.

2. *Îmbinări prin mandrinare lisă solicitate la compresiune* (fig. 4*b*, *c*, *e*). Pentru ţeavă, în acest caz rezultă (fig. 3*c*)

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\sigma_{p_2}^{p'} = +(p_0 - p_2)\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1}, \\ \sigma_x &= -\sigma_{t_2}, \\ \sigma_z &= -\sigma_{t_2}^{p'} = +(p_0 - p_2), \end{aligned} \tag{73}$$

iar pentru placa tubulară corespunde (fig. 3*c*)

$$\begin{aligned} \sigma_y &= -\sigma_{p_2}^{p'} = -(p_0 - p_2)\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1}, \\ \sigma_x &= -\sigma_{p_2}, \\ \sigma_z &= -\sigma_{rp_2}^{p'} = +(p_0 - p_2). \end{aligned} \tag{74}$$

Introducînd aceste valori în ecuaţia (64), după efectuarea calculelor auxiliare se obţine, respectiv, pentru ţeavă şi pentru placa tubulară,

$$\varepsilon_{t_2} = \frac{1}{E_t}\left[(p_0 - p_2)\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1} - \mu(p_0 - p_2) + \mu\sigma_{t_2}\right], \tag{75}$$

$$\varepsilon_{p_2} = \frac{1}{E_p}\left[-(p_0 - p_2)\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1} - \mu(p_0 - p_2) + \mu\sigma_{p_2}\right]. \tag{76}$$

Se poate acum scrie şi pentru acest caz condiţia de compatibilitate a deformaţiilor radiale (8), din care, în urma derivării în raport cu x, se obţine următoarea ecuaţie :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{E_p}\cdot\frac{\beta_p^2 + 1}{\beta_p^2 - 1}\cdot\frac{dp_2}{dx} + \frac{\mu}{E_p}\cdot\frac{dp_2}{dx} + \frac{\mu}{E_p}\cdot\frac{d\sigma_{p_2}}{dx} + \\ &+\frac{1}{E_t}\cdot\frac{\beta_t^2 + 1}{\beta_t^2 - 1}\cdot\frac{dp_2}{dx} - \frac{\mu}{E_t}\cdot\frac{dp_2}{dx} - \frac{\mu}{E_t}\cdot\frac{d\sigma_{t_2}}{dx} = 0. \end{aligned} \tag{77}$$

Considerînd condiţiile de echilibru (43) şi (44), din ecuaţia (77) se obţine următoarea ecuaţie diferenţială a presiunii instantanee de contact în cazul solicitării la compresiune a îmbinărilor prin mandrinare lisă a ţevilor cu perete gros (starea de eforturi fiind spaţială) :

$$\frac{dp_2}{dx} - \frac{k_2}{r_0}\cdot p_2 = 0, \tag{78}$$

în care

$$k_2 = 2\mu f \frac{E_p \beta_t^2(\beta_p^2 - 1) - E_t(\beta_t^2 - 1)}{E_t(\beta_t^2 - 1)(\beta_p^2 + 1) + E_p(\beta_p^2 - 1)(\beta_t^2 + 1) - \mu(\beta_p^2 - 1)(\beta_t^2 - 1)(E_p - E_t)}, \tag{79}$$

sau, dacă se are în vedere notația (47),

$$k_2 = 2\mu f \frac{\psi \beta_t^2 - 1}{\psi(\beta_t^2 + 1) + (\beta_p^2 + 1) - \mu \cdot \frac{E_p - E_t}{E_t}(\beta_p^2 - 1)}. \tag{80}$$

Se constată că ecuația diferențială (78), ca formă, este identică cu ecuațiile diferențiale (28) și (56); diferă și în acest caz numai valorile coeficienților k_2 (vezi formulele 29, 30, 57, 58, 79 și 80).

Nu este lipsit de importanță să se observe că, pentru $\sigma_z = \sigma_r^p \approx 0$ (neglijabil), termenul în μ de la numitorul relațiilor (79) și (80) dispare și în acest caz, astfel că expresia de calcul a coeficientului k_2 se reduce la formula (57) sau, respectiv, (58).

Pentru $\beta_t \to 1$ și $\beta_p \to 1$ (îmbinarea prin mandrinare lisă a țevilor cu perete foarte subțire), expresiile de calcul (79) și (80) se reduc la expresia (33).

Pentru $E_p = E_t = E$, indiferent de valoarea factorilor β_p și β_t, expresiile de calcul (79) și (80) se reduc la expresia (59). Rezultă deci și în acest caz că, dacă placa tubulară și țeava se confecționează din materiale având același modul de elasticitate longitudinal E, efectul eforturilor unitare normale radiale σ_r^p dispare complet, îmbinarea prin mandrinare lisă comportîndu-se ca și cum starea de eforturi ar fi plană, și nu spațială *).

Primită la redacție la 7 martie 1966.

*) N. R. — Partea a doua a lucrării va fi publicată în St. Cerc. Mec. Apl. Nr. 1, 1969.

DETERMINAREA ULTIMEI ARTICULAȚII PLASTICE A UNEI STRUCTURI ALCĂTUITE DIN BARE DREPTE ȘI SOLICITATE DOMINANT LA ÎNCOVOIERE

de S. RĂUTU și V. CHIROIU
Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România

539.4

Se prezintă o metodă simplă de determinare a ultimei articulații plastice pentru o structură oarecare solicitate dominant la încovoiere. Pornind de la faptul că ultimei articulații plastice îi corespunde o deplasare generalizată maximă, se arată că energia potențială a sistemului datorită sarcinii unitare, corespunzătoare deplasării respective, este maximă.

1. Energia potențială a unei structuri alcătuite din bare drepte și solicitate dominant la încovoiere este

$$W = \frac{1}{2}\int \frac{M_p^2}{EI}\,\mathrm{d}s.$$

Dacă sarcina exterioară este funcție de un singur parametru, diagrama de momente devine

$$M_p = P\,m_p$$

unde m_p este diagrama obținută pentru $P = 1$.

În acest caz energia potențială va avea expresia

$$W = \frac{1}{2}P\int \frac{M_p\,m_p}{EI}\,\mathrm{d}s.$$

Se poate demonstra că integrala $\int \frac{M_p\,m_p}{EI}\,\mathrm{d}s$ reprezintă deplasarea generalizată pe direcția p [1]

$$\Delta_{pp} = \int \frac{M_p\,m_p}{EI}\,\mathrm{d}s = \int \frac{M_p\,m_p^0}{EI}\,\mathrm{d}s,$$

unde m_p^0 este diagrama obținută pe un sistem de bază static determinat oarecare, obținut din sistemul static nedeterminat prin îndepărtarea unui număr de legături.

În această lucrare se caută a se determina ultima articulație plastică pornind de la teorema dată de Sydmons și Neal [2], care demonstrează că ultima articulație plastică este aceea căreia îi corespunde o energie potențială maximă.

Presupunînd că se cunoaște mecanismul de rupere [3], deci punctele în care apar articulațiile plastice, ultima articulație plastică se determină din condiția de maxim a energiei potențiale.

Notînd cu k punctul de apariție a ultimei articulații plastice, se știe că, în momentul atingerii sarcinii de rupere, această articulație plastică nu s-a deschis, deci deplasarea relativă a secțiunilor este nulă.

Pentru determinarea energiei potențiale maxime este suficient ca deplasarea Δ_{pp} să fie maximă.

În consecință, Sydmons și Neal propun calculul deplasării pentru fiecare articulație considerată ca ultima, iar aceea căreia îi corespunde o deplasare maximă va fi ultima articulație plastică.

În lucrare se pornește inițial de la relația

$$| \Delta_{pp}^{(k)} | > | \Delta_{pp}^{(j)} |, \tag{1.1}$$

care reprezintă faptul că deplasarea pe direcția p în ipoteza că în articulația k deplasarea relativă a secțiunilor este nulă (articulația k reprezentînd ultima articulație plastică) este mai mare în modul decît deplasarea pe direcția p în ipoteza că în articulația j deplasarea relativă a secțiunilor este nulă.

Se demonstrează apoi că nu este necesar să se calculeze deplasările $\Delta_{pp}^{(j)}$, ci numai interioarele

$$\int \frac{m_p^{(j)2}}{EI} \mathrm{d}s,$$

care reprezintă energia potențială de deformație datorită unei sarcini egale cu unitatea pe sistemul de bază și, printr-o comparare a acestora, se va obține direct ultima articulație plastică din condiția ca integrala să fie maximă.

În anumite cazuri, calculul interioarei nu este necesar; din simpla comparare vizuală a diagramelor $m_p^{(j)}$ se poate deduce imediat care este ultima articulație plastică.

În cele ce urmează se arată că, pornind de la faptul că spațiul momentelor încovoietoare este un spațiu Hilbert, se pune în evidență o anumită relație cu ajutorul căreia se demonstrează că ultimei articulații plastice îi corespunde o energie potențială unitară maximă.

2. Mulțimea momentelor încovoietoare $\{M\}$ produse într-o secțiune oarecare de diverse sarcini este un spațiu liniar real față de adunarea și înmulțirea obișnuită.

Luînd pentru $M \in \{M\}$ norma

$$\| M \| = | M |,$$

spațiul liniar al momentelor încovoietoare $\{M\}$ devine un spațiu liniar normat.

Să arătăm în continuare că spațiul liniar normat al momentelor încovoietoare $\{M\}$ este un spațiu Banach.

Într-adevăr, fie $\{M_n\}_{n \in N}$ un șir Cauchy de elemente din $\{M\}$.

Deci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $r_\varepsilon \in N$ așa că

$$\| M_n - M_m \| < \varepsilon \qquad \text{dacă } n, m > r_\varepsilon.$$

Deci

$$| M_n - M_m | < \varepsilon \qquad \text{dacă } n, m > r_\varepsilon.$$

Pentru orice $i \in N$ se obține

$$| M_{ni} - M_{mi} | < \varepsilon \qquad \text{dacă } n, m > r_\varepsilon, \tag{2.1}$$

astfel că există

$$M_i = \lim_i M_{ni},$$

unde M_i reprezintă momentele finale în secțiunea i în momentul ruperii structurii.

Se consideră șirul

$$M = \{M_i\}_{i \in N}.$$

Din (2.1) rezultă că, trecînd la limită în raport cu m pentru n fix, se obține

$$| M_{ni} - M_i | \leqslant \varepsilon \qquad \text{dacă } n > r_\varepsilon. \tag{2.2}$$

De aici rezultă că $M_n - M \in \{M\}$

(pentru $n > r_\varepsilon$) și, cum

$$M = (M - M_n) + M_n,$$

se deduce $M \in \{M\}$.

În același timp, (2.2) arată că

$$\| M_n - M \| \leqslant \varepsilon \qquad \text{dacă } n > r_\varepsilon,$$

adică $M_n \to M$, unde M este diagrama finală de rupere a structurii.

Deci spațiul $\{M\}$ este complet. Spațiul momentelor încovoietoare $\{M\}$ este Hilbert dacă luăm

$$\| M \| = \sqrt{< M, M >}$$

cu

$$< M_1 M_2 > = M_1 M_2.$$

În spațiul Hilbert astfel definit se introduce operatorul U definit sub forma

$$U(M) = \int \frac{M}{EI}\, ds.$$

Se arată că acest operator este autoadjunct și pozitiv.

Într-adevăr, definind produsul scalar sub forma

$$< U(M),\ m > = \int \frac{M\,m}{EI}\, ds,$$

unde m este momentul încovoietor produs de o sarcină egală cu unitatea, se observă că avem

$$< U(M),\ m > = < U(m),\ M >$$

și

$$< U(M),\ M > = \int \frac{M^2}{EI}\, ds \geqslant 0.$$

Produsul scalar $< U(M),\ M >$ reprezintă energia potențială de deformație în cazul încovoierii pure, cantitate întotdeauna pozitivă.

În acest caz avem îndeplinită inegalitatea lui Cauchy-Buniacovski generalizată

$$| < U(M),\ m > | \leqslant \sqrt{< U(M),\ M >} \cdot \sqrt{< U(m),\ m >}$$

sau

$$\left| \int \frac{M\,m}{EI}\, ds \right| \leqslant \sqrt{\int \frac{M^2}{EI}\, ds} \cdot \sqrt{\int \frac{m^2}{EI}\, ds},$$

de unde se obține o relație care va fi utilizată în cele ce urmează

$$| \Delta_i | \leqslant 2 \sqrt{W} \cdot \sqrt{w}, \tag{2.3}$$

unde W este energia potențială de deformație datorită sarcinilor date și w este energia potențială de deformație datorită unei sarcini egale cu unitatea.

S-a obținut astfel că deplasarea Δ_i este mai mică sau egală în modul decît dublul produsului dintre rădăcina pătrată a energiei potențiale de deformație datorită sarcinilor date și rădăcina pătrată a energiei potențiale datorită unei sarcini egale cu unitatea.

3. În cele ce urmează se demonstrează că, avînd

$$| \Delta_i^{(k)} | > | \Delta_j^{(j)} |,$$

unde

$$\left|\Delta_i^{(k)}\right| = \left|\int \frac{M\, m_{i_0}^{(k)}}{EI}\, ds\right| \leqslant \sqrt{\int \frac{M^2}{EI}\, ds} \cdot \sqrt{\int \frac{m_{i_0}^{(k)2}}{EI}\, ds},$$

$$\left|\Delta_i^{(j)}\right| = \left|\int \frac{M\, m_{i_0}^{(j)}}{EI}\, ds\right| \leqslant \sqrt{\int \frac{M^2}{EI}\, ds} \cdot \sqrt{\int \frac{m_{i_0}^{(j)2}}{EI}\, ds},$$

se obține

$$\int \frac{m_{i_0}^{(k)2}}{EI}\, ds > \int \frac{m_{i_0}^{(j)2}}{EI}\, ds.$$

Într-adevăr, din inegalitățile

$$\left|\int \frac{M\, m_{i_0}^{(k)}}{EI}\, ds\right| \leqslant \int \frac{m_{i_0}^{(k)}}{EI}\, ds,$$

$$\left|\int \frac{M\, m_{i_0}^{(j)}}{EI}\, ds\right| \leqslant \int \frac{m_{i_0}^{(j)}}{EI}\, ds,$$

conform teoremei mediei

$$\left|\int \frac{M\, m_{i_0}^{(k)}}{EI}\, ds\right| = k \left|\int \frac{m_{i_0}^{(k)}}{EI}\, ds\right|,$$

$$\left|\int \frac{M\, m_{i_0}^{(j)}}{EI}\, ds\right| = k \left|\int \frac{m_{i_0}^{(j)}}{EI}\, ds\right|,$$

cu

$$0 \leqslant k \leqslant M_{pi},$$

se obține

$$\int \frac{m_{i_0}^{2(k)}}{EI}\, ds \geqslant \int \frac{m_{i_0}^{2(j)}}{EI}\, ds,$$

4. *Exemplul 1.* Să determniăm ultima articulație plastică pentru cadrul din figura 1 *a*, știind că mecanismul de rupere corespunde apariției articulațiilor plastice în puuctele 1, 2, 4 și 5. Pentru aceasta considerăm următoarele cazuri. Presupunem că ultima articulație plastică apare în :

I. Secțiunea 1. În acest caz, deplasarea elastică se obține pe sistemul static determinat, obținut prin înlăturarea articulației plastice din punctul 1.

Se obține diagrama de momente care este arătată în figura 1 *b* și energia unitară :

$$w^{(1)} = \frac{125}{3\,EI}.$$

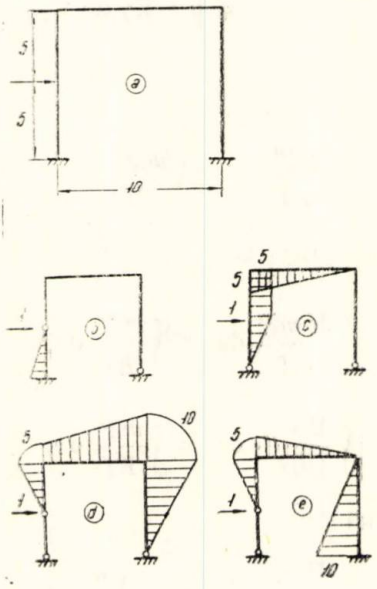


Fig. 1

II. Secțiunea 2 (fig. 1 *c*); se obține

$$w^{(2)} = \frac{625}{3\,EI}.$$

III. Secțiunea 4 (fig. 1 *d*); se obține

$$w^{(3)} = \frac{2875}{3\,EI}.$$

IV. Secțiunea 5 (fig. 1 *e*); se obține

$$w^{(4)} = \frac{1375}{3\,EI}.$$

Rezultă că ultima articulație plastică apare în secțiunea 4.

Exemplul 2. Să determinăm ultima articulație plastică pentru grinda dublu încastrată, solicitată de o sarcină concentrată în mijlocul

deschiderii. Dacă ultima articulație plastică apare în cîmp, energia unitară w devine

$$w^{(1)} = \frac{l^3}{48\,EI}.$$

Dacă ultima articulație plastică apare în reazem, obținem

$$w^{(2)} = \frac{l^3}{48\,EI}.$$

Prin urmare, articulațiile plastice apar simultan în structură.

Cunoscînd ultima articulație plastică, se pot calcula ușor deplasările structurii în momentul ruperii și, în particular, mărimea deformațiilor plastice în dreptul fiecărei articulații.

De asemenea este posibil să se efectueze mai simplu calculul biografic.

Primită la redacție la 5 martie, 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Alexandru Gheorghiu, *Statica construcțiilor*, vol. 2, Edit. tehnică, București, 1965.
2. P. S. Symmons, B. G. Neal, *The interpretations of failure loads in the plastic theory of continuous beams and frames*, J. Aero. Sci. *I* (1952).
3. Massonet, M. A. Save, *Calcul plastique des constructions*, vol. 1. *Structures dépendant d'un paramètre*, Bruxelles, 1967.

CONTRIBUȚII LA STABILIREA FUNCȚIILOR REOLOGICE PENTRU PĂMÎNTURI PUTERNIC COMPRESIBILE NESATURATE

de AL. VAICUM
Centrul de mecanică a solidelor al Academiei Republicii Socialiste România

641.1

În lucrare se arată că neglijarea în calcul a proprietăților reologice ale pămînturilor și a naturii cîmpului de deformații conduce la diferențe apreciabile între rezultatele teoretice și cele măsurate. În acest scop se prezintă un model reologic nou și i se determină funcția reologică și diagramele de fluaj și de relaxare, care exprimă mai fidel fenomenul fizic.

Creșterea continuă a volumului de construcții și considerente de ordin economic și social cer de multe ori amplasarea unor obiective importante industriale sau social-culturale pe terenuri compresibile. Deși au fost elaborate un număr mare de metode de calcul al tasărilor probabile, de multe ori rezultatele sînt nesatisfăcătoare.

Studiile teoretice și comparative efectuate în Republica Socialistă România și în alte țări au arătat că diferențele dintre valorile tasărilor măsurate și cele calculate pot ajunge, uneori, pînă la 5—600%. Dacă de cele mai multe ori valorile teoretice sînt mai mari decît cele măsurate, deci construcția are o siguranță sporită la deformații, la pămînturile puternic compresibile, după cum arată ultimele studii efectuate în Republica Socialistă România, valorile calculate sînt de multe ori mai optimiste decît cele reale, în special la fundațiile continue, ceea ce poate da naștere în timpul exploatării la tasări neuniforme inadmisibile care să necesite ulterior consolidări costisitoare sau chiar să conducă la renunțarea exploatării construcției.

Cauza principală este diferența care există între pămîntul natural și cel schematizat introdus în calcul, prin aplicarea unor ipoteze simplificatoare destul de aproximative sau neluarea în considerare a unor proprietăți cu efecte importante.

De aceea este necesar să fie reconsiderate unele ipoteze și găsite scheme noi de calcul, care să țină seama în mai mare măsură de proprietățile reale ale pămînturilor și de modul lor de deformare. În acest sens, deoarece pămînturile sînt medii disperse, avînd legăturile dintre particule mult

mai puţin rezistente şi cu o variaţie continuă în timpul deformării, este necesar ca schemele noi de calcul să pornească de la analiza acestor elemente (legături) şi, cu modelul matematic cel mai adecvat existent, să se caute a se urmări fenomenul fizic. În viitor, se va căuta a se îmbunătăţi continuu modelul matematic utilizat care să ţină seama şi de neomogenitatea, anizotropia şi lipsa de continuitate a pămînturilor.

În acest mod se vor putea pune în evidenţă proprietăţile reologice ale pămînturilor, care au fost neglijate în majoritatea metodelor actuale de calcul, deşi ele au o influenţă remarcabilă asupra valorii tasărilor.

Astfel, în figura 1 se arată modul de dezvoltare a tasărilor în timp la un bloc de locuinţe amplasat pe un masiv de pămînt puternic compresibil în zona liceului Şincai şi unde se observă că, la terminarea încărcării radierului, tasările măsurate erau de aproximativ 85 mm, iar după 26 de luni, cînd s-a considerat că masivul s-a stabilizat, valoarea tasărilor a ajuns la 145 mm, deci aproape s-a dublat, iar la alte repere diferenţele sînt şi mai mari (4).

De aceea se va căuta ca, cu ajutorul unei analize microreologice a structurii pămînturilor, să se stabilească funcţiile reologice respective pe baza cărora să se poată evalua tasările totale în mod mai apropiat de valorile reale.

În studiul reologic al pămînturilor se desprind două tendinţe contradictorii : pe de o parte se caută a se exprima sub o formă matematică cît

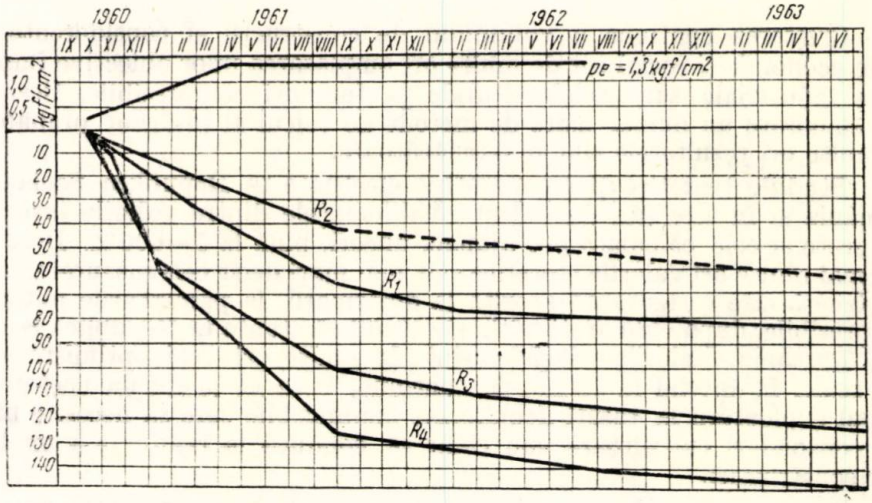


Fig. 1

mai fidel fenomenul fizic intim, iar pe de altă parte a fi schematizat prin utilizarea modelelor mecanice structurale, care să nu cuprindă un număr prea mare de parametri în vederea utilizării în practică a metodei. De aceea trebuie ca modelul structural să fie astfel ales ca să reproducă esenţa fenomenului fizic şi a proprietăţilor materialului.

Diversitatea legăturilor dintre particulele de pămînt le putem sintetiza în patru grupe : elastice, rigide, plastice şi vîscoase.

Deoarece calculul tasărilor se face în stadiul de exploatare a masivului de pămînt, se consideră că nu apar suprafețe sau zone plastice pronunțate, iar pămîntul cu legături rigide nu prezintă tasări importante. De aceea se va considera pămînturile că au numai legături vîscoase și elastice. De asemenea se face ipoteza că pămînturile sînt medii bolțmaniene, adică suprapunerea mai multor acțiuni asupra aceluiași masiv de pămînt produce efecte aditive, deci posedă o vîsco-elasticitate liniară.

Această ipoteză simplificatoare este valabilă la pămînturi pentru valori mai reduse ale încărcărilor, abateri mai importante constatîndu-se numai într-o fază de deformare mai apropiată de rupere.

Ca model mecanic structural, pentru un corp numai cu legături elastice, se va considera un resort (fig. 2), iar pentru legături vîscoase un amortizor (fig. 3).

Din punct de vedere al comportării lor reologice, pămînturile le vom împărți în trei categorii : nesaturate, saturate cu nivelul apei la aceeași înălțime ca și terenul și saturate cu nivelul apei deasupra terenului. Fiecare dintre aceste categorii le împărțim în : pămînturi cu schelet rigido-elastic și fără schelet.

Fig. 2

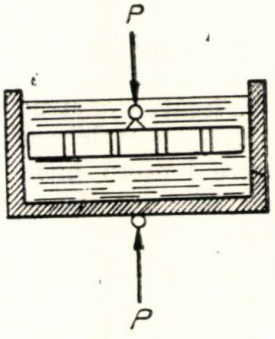


Fig. 3

Evaluarea tasărilor probabile constă în a determina în masivul de pămînt cîmpul de deformații care apare, produs de un cîmp de tensiuni rezultat din aplicarea încărcărilor.

Starea de deformații a sistemului de particule se poate reprezenta printr-o matrice simetrică, numită *tensorul deformațiilor* și care este mărimea de bază în cinematica reologică

$$e_{rs} = \begin{Vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{Vmatrix} . \qquad (1)$$

Componentele elementare ale tensorului e_{xx}, e_{yy} și e_{zz} reprezintă deformații specifice liniare, iar celelalte componente elementare reprezintă rotiri specifice.

În mod asemănător, starea de tensiuni într-un punct al masivului este reprezentată prin *tensorul tensiunilor*, care este mărimea de bază în dinamica reologică,

$$p_{rs} = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Vmatrix} . \tag{2}$$

Componentele p_{xx}, p_{yy} și p_{zz} sînt normale, iar celelalte sînt tangențiale.

Pentru materiale cu proprietăți reologice, cum sînt pămînturile, în relațiile matematice care exprimă modul lor de comportare sub acțiunea încărcărilor trebuie să intervină și parametrul timp t. Acest parametru nu intervine însă direct, ci prin intermediul derivatelor celor doi tensori amintiți ($\dot{e}_{rs}$ și $\dot{p}_{rs}$) și care reprezintă vitezele de deformare și de variație ale tensiunilor în masivul de pămînt.

Relația care leagă cei patru parametri se numește *ecuație reologică de stare* sau *funcție reologică*.

$$F(p_{rs}, e_{rs}, \dot{p}_{rs}, \dot{e}_{rs}) = 0 . \tag{3}$$

Fiecărui fel de pămînt îi corespunde o formă diferită a funcției reologice, dar, pentru a nu apărea dificultăți teoretice excesive, se va căuta, în raport de natura legăturilor structurale și de variația lor în timpul procesului de deformare, să se stabilească numai cîteva forme specifice.

Fiecare dintre tensorii menționați se poate descompune în două componente principale : una sferică și alta deviatorică.

Componenta sferică a tensorului — tensiune va produce în masivul de pămînt numai deformații de volum, iar cea deviatorică deformații de formă sau distorsiuni

$$p_{rs} = p_v + p_0, \tag{4}$$

unde p_v reprezintă componenta sferică, iar p_0 — componenta deviatorică.

Una dintre cauzele importante ale neconcordanțelor metodelor actuale de calcul al tasărilor probabile este aceea că se consideră că există o proporționalitate directă între tensorii tensiunilor și ai deformațiilor, ceea ce nu concordă cu realitatea. Natura cîmpului de deformații produs într-un masiv de pămînt solicitat de un radier este mult diferită de cazul unei solicitări printr-o fundație continuă și de aceea nu poate fi utilizată aceeași relație de calcul. Dar se pot găsi relații de proporționalitate între componentele de aceeași natură a tensorilor. De aceea, pentru fiecare pămînt, se vor scrie două funcții reologice (una sferică și alta deviatorică) urmînd ca aplicarea lor să se facă în raport de natura cîmpului de deformații care apare în masivul încărcat.

Într-o primă aproximație se vor considera coeficienții ecuațiilor reologice ca mărimi constante.

Pentru legăturile elastice se consideră valabile relațiile lui Hooke

$$\left.\begin{aligned} p_v &= \alpha \cdot e_v \\ p_0 &= \beta \cdot e_0 \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

iar pentru legăturile vîscoase se consideră că tensiunile sînt proporționale cu viteza de deformare (Newton)

$$\left.\begin{aligned} p_v &= A\,\dot{e}_v \\ p_0 &= B\,\dot{e}_0 \end{aligned}\right\}, \tag{6}$$

Cu aceste elemente, se va căuta să se determine funcțiile reologice plecînd de la analiza microreologică a procesului de deformare, după ce mai întîi se va găsi un model mecanic structural ce reflectă cît mai fidel modul de comportare a masivului de pămînt sub acțiunea încărcărilor.

Vom analiza mai întîi pămînturile puternic compresibile alcătuite din argile prăfoase sau prafuri argilo-nisipoase, de multe ori avînd un caracter mîlos de natură aluvionară și care să aibă, datorită sarcinii geologice sau a încărcărilor anterioare, o parte din particule legate, formînd un schelet cu o comportare rigidă-elastică. Aceste legături, de la o anumită valoare a tensiunilor, se distrug în mod progresiv. Astfel de pămînturi se găsesc pe suprafețe întinse în țara noastră (Bărăgan, Lunca Dunării, în București în zona B-dul Mărășești — Șincai etc.).

Structura acestor pămînturi este arătată în figura 4 și se observă că în golurile scheletului elastic există un material de umplutură format în cea mai mare parte din particule de aceeași natură, dar nelegate între ele și într-o stare afînată. Pămîntul se consideră că nu are apă în exces în pori.

Între particulele scheletului există numai legături elastice-sfărîmicioase și, în modelul mecanic structural, ele vor fi concretizate printr-un resort cu anumite caracteristici elastice în funcție de rigiditatea legăturilor.

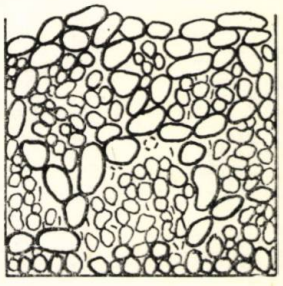


Fig. 4

Între particulele materialului de umplutură există în starea inițială, înainte de încărcare, numai legături vîscoase, datorită peliculelor de apă adsorbită din jurul particulelor și distanței dintre ele. În modelul mecanic acestea vor fi reprezentate printr-un amortizor. Pe măsura încărcării masivului, particulele din materialul de umplutură se apropie, forțele de contact devin mult mai puternice și apar și forțe elastice între acestea.

În prima etapă de încărcare (înainte de începerea distrugerii parțiale a scheletului), tensiuni vor apărea numai în particulele scheletului, deoarece materialul de umplutură nu ocupă complet spațiul dintre particulele scheletului, iar starea lui este atît de afînată, că practic nu preia nimic din încărcare.

Pe măsură ce încărcările cresc, încep să se distrugă o parte din legăturile scheletului rigid-elastic, deformațiile capătă valori mai mari și apar tensiuni și în particulele materialului de umplutură. Valoarea tensiunilor în particulele scheletului este mai mare decît în cele ale materialului de umplutură, deoarece legăturile sînt mult mai rigide. Valoarea deformațiilor este însă aceeași în cele două feluri de particule, deoarece sub toată talpa de fundație se găsesc repartizate multe particule legate, care nu permit decît o tasare uniformă a fundației. În modelul mecanic acest mod de comportare se concretizează printr-o legare în paralel. Cu timpul se continuă încărcarea, de asemenea și distrugerea legăturilor dintre particulele scheletului, iar deplasările dintre particulele de umplutură cresc, ceea ce produce ruperea unor legături vîscoase, dar prin apropierea acestor particule apar alte legături elastice mai stabile care înlocuiesc pe cele vîscoase ce au fost rupte. Valoarea tensiunii în legăturile vîscoase ce se rup și în cele elastice care le iau locul este aceeași în momentul înlocuirii, dar valoarea deformațiilor este diferită, avînd în vedere rigiditatea mult mai mare a noilor legături elastice care apar. Aceasta înseamnă că legăturile vîscoase sînt legate în serie cu cele elastice noi, care le iau locul.

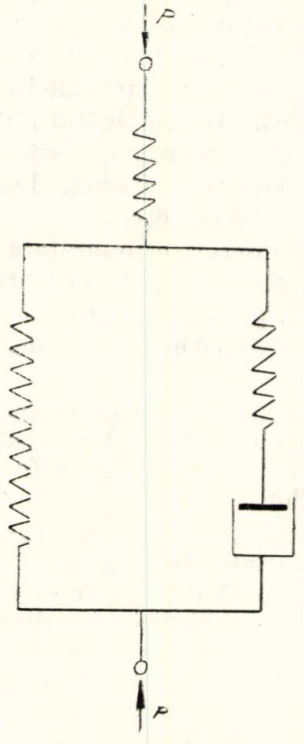


Fig. 5

Deci modelul mecanic ce va reprezenta modul de deformare a acestor pămînturi este format din două corpuri legate în serie : corpul nr. 1 este un resort, iar corpul 2 este un complex elasto-visco-elastic alcătuit din două ramuri, un resort și un complex Maxwell (fig. 5). Valoarea tenso-

rului tensiunilor va fi aceeași în cele două corpuri, deci și valoarea componentelor lui (e_v și e_0).

Dar tensorul deformațiilor este diferit în cele două corpuri și vom nota componentele lui cu e_{v1}, e_{01} în corpul 1 și cu e_{v2}, e_{02} în corpul 2 (elasto-vîsco-elastic), iar suma lor va fi egală cu tensorul deformațiilor al întregului model, deci

$$\left.\begin{aligned} e_v &= e_{v1} + e_{v2} \\ e_0 &= e_{01} + e_{02} \end{aligned}\right\}. \tag{7}$$

Ținînd seama de aceste considerații, pentru corpul 1 sînt valabile relațiile lui Hooke pentru legătura dintre componentele tensorului tensiunilor și al deformațiilor

$$\left.\begin{aligned} p_v &= \alpha_0 \cdot e_{v1} \\ p_0 &= \beta_0 \quad e_{01} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

În complexul elasto-vîsco-elastic (corpul 2), tensorul tensiunilor va fi diferit în cele două ramuri, dar suma lor este egală cu a tensorului tensiunilor al întregului model, deci

$$\left.\begin{aligned} p_v &= p_{v1} + p_{v2} \\ p_0 &= p_{01} + p_{02} \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

iar tensorul deformațiilor va fi același în cele două ramuri, deci și componentele lui, adică e_{v2} și e_{02}.

În ramura din dreapta însă, componentele tensorului deformațiilor vor diferi în cele două elemente ale corpului Maxwell, dar suma lor va fi egală cu componenta ramurii, adică

$$\left.\begin{aligned} e_{v2} &= e_{v3} + e_{v4} \\ e_{02} &= e_{03} + e_{04} \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Ținînd seama de considerațiile de mai sus și făcînd înlocuirile respective, se obțin funcțiile reologice pentru cele două componente ale modelului structural și care vor constitui relații de calcul pentru deformațiile masivului de pămînt nesaturat puternic compresibil. Astfel, pentru componenta sferică, rezultă

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_2}\dot{e}_v + \frac{\alpha_1}{A}e_v = \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{\alpha_0 A}p_v + \frac{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_0 \alpha_2}\dot{p}_v. \tag{11}$$

Coeficienții reologici α_0, α_1, α_2 și A sînt caracteristice ale materialului și trebuie determinați experimental.

Pentru componenta deviatorică va rezulta o funcție reologică asemănătoare, dar cu alți coeficienți reologici, specifici unui cîmp de deformații deviatoric

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\dot{e}_0 + \frac{\beta_1}{B}e_0 = \frac{\beta_0 + \beta_1}{\beta_0 B}p_0 + \frac{\beta_0 + \beta_1 + \beta_2}{\beta_0 \beta_2}\dot{p}_0. \tag{12}$$

Pe baza funcţiilor reologice obţinute cu ajutorul analizei microreologice a fenomenului, se va căuta a se arăta modul de variaţie a deformaţiilor şi a tensiunilor în timp şi totodată diagramele obţinute se vor compara cu cele experimentale pentru corpurile reale cu legături asemănătoare.

Astfel, se determină ecuaţia curbei de fluaj luînd în considerare componentele deviatorice. Din relaţia (12), considerînd $p_0 = p_0^0 = \text{const}$, rezultă

$$\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\dot{e}_0 + \frac{\beta_1}{B}e_0 = \frac{\beta_0 + \beta_1}{\beta_0 B}p_0^0. \tag{13}$$

Dacă se notează

$$K = \frac{\beta_2}{B(\beta_1 + \beta_2)},$$

atunci ecuaţia (13) ia forma

$$\dot{e}_0 + \beta_1 k e_0 = \frac{K(\beta_0 + \beta_1)}{\beta_0}p_0^0. \tag{14}$$

Se integrează această ecuaţie şi rezultă

$$f(t) = e_0 = p_0^0\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right) - \frac{p_0^0}{e^{kt}}\left(1 + \frac{\beta_1}{\beta_0} - \frac{1}{\beta_0}\right) \tag{15}$$

şi, înlocuind $p_0^0 = \beta_0 e_0^0$, se obţine ecuaţia curbei de fluaj

$$f(t) = e_0 = [e_0^0]\left[(\beta_0 + \beta_1) - \frac{\beta_0 + \beta_1 - 1}{e^{kt}}\right], \tag{16}$$

cînd $t = 0$, $f(t) = e_0^0$, (17)

cînd $t = \infty$, rezultă

$$f(t) = [e_0^0]\,[\beta_0 + \beta_1]. \tag{18}$$

Deci, dacă încărcăm brusc un astfel de masiv cu p_0^0, apare o elasticitate instantanee e_0^0 datorită legăturilor elastice dintre particulele cimentate ce formează scheletul structurii, iar ulterior, menţinînd încărcarea constantă, urmează perioada de fluaj, în care deformaţiile se dezvoltă conform relaţiei (16); după o anumită perioadă de timp, în care legăturile vîscoase dintre particule au fost înlocuite cu legături duble elastice şi în care s-a terminat consolidarea masivului, valoarea deformaţiilor a devenit

$$e_0 = e_0^0(\beta_0 + \beta_1). \tag{19}$$

Această valoare este mai mare decît e_0^0 deoarece suma celor doi coeficienţi $(\beta_0 + \beta_1)$ este mai mare decît unitatea. Diagrama de fluaj al acestui pămînt este reprezentată în figura 6. O curbă asemănătoare s-a obţinut experimental pentru betoanele tinere, care posedă de asemenea legături elastice şi vîsco-elastice (fig. 7).

Se analizează de asemenea fenomenul de relaxare la aceste pământuri. Se consideră că, la un moment dat, $t = 0$, datorită încărcărilor anterioare, masivul are o anumită deformaţie e_0^0, care se menţine în continuare constantă, se urmăreşte variaţia tensiunii în timp.

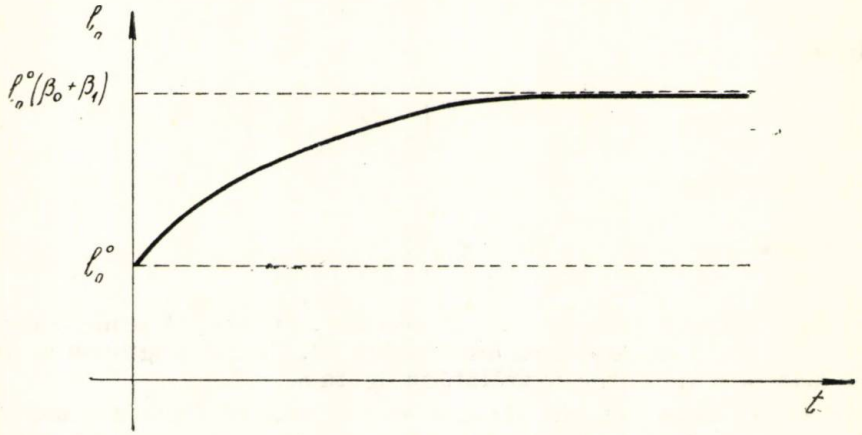


Fig. 6

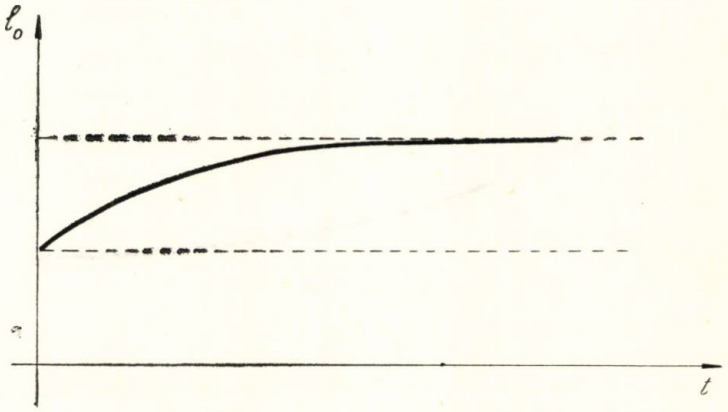


Fig. 7

În acest caz valoarea vitezei de deformare va fi nulă, $e_0 = 0$, iar relaţia (12) devine

$$\frac{\beta_0 + \beta_1}{\beta_0 B} p_0 + \frac{\beta_0 + \beta_1 + \beta_2}{\beta_0 \beta_2} \dot{p}_0 = \frac{\beta_1}{B} e_0^0. \tag{20}$$

Dacă se notează

$$R = \frac{\beta_2}{B(\beta_0 + \beta_1 + \beta_2)},$$

se obține ecuația diferențială a relaxării

$$\dot{p}_0 + (\beta_0 + \beta_1)\, R \cdot p_0 = \beta_0 \cdot \beta_1 \cdot R \cdot e_0^0. \tag{21}$$

Integrînd ecuația de mai sus, considerîndu-se la

$$t = 0 \text{ că } p_0 = p_0^0,$$

se obține

$$r(t) = p_0 = [p_0^0]\left[\frac{\beta_1}{\beta_0 + \beta_1} - \left(\frac{\beta_1}{\beta_0 + \beta_1} - 1\right) e^{-(\beta_0 + \beta_1) R \cdot t}\right], \tag{22}$$

unde, la $t = 0$, $p_0 = p_0^0$,

iar la $t = \infty$ $\quad p_0 = p_0^0 \cdot \dfrac{\beta_1}{\beta_0 + \beta_1} < p_0^0.$ (23)

Deci, datorită fenomenului de relaxare, cu timpul scade valoarea tensiunii de la p_0^0 la cantitatea din relația (23). Forma diagramei de relaxare a acestor pămînturi este arătată în figura 8.

Prin utilizarea relațiilor de mai sus se poate găsi valoarea deformațiilor finale ale pămînturilor nesaturate puternic compresibile, cu condiția de a se determina experimental coeficienții reologici.

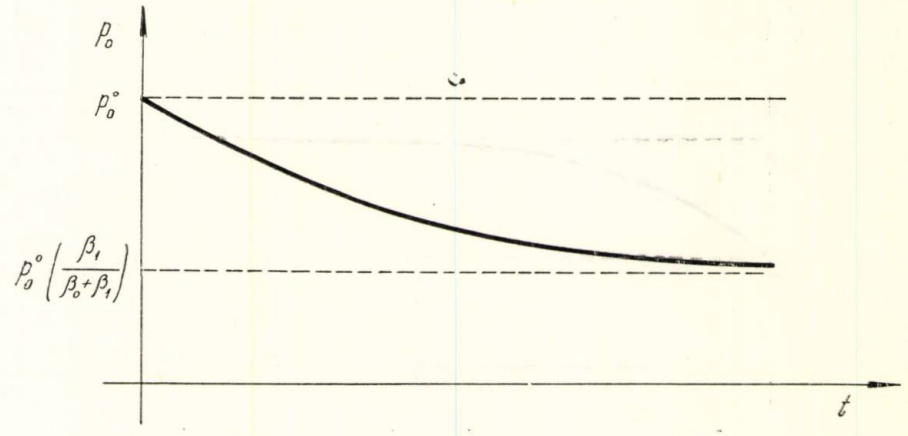


Fig. 8

Între acești coeficienți se găsesc însă relații de legătură și pot fi exprimați cu ajutorul modulului lui Young și a coeficientului lui Poisson sau în funcție de coeficienții lui Lamé, la care se adaugă coeficienții de viscozitate ai lui Newton, sau să se determine experimental direct.

Desigur, modelul prezentat ar putea suferi unele îmbunătățiri pentru a-l apropia și mai mult de fenomenul real, îmbunătățiri ce ar rezulta pe baza unor studii experimentale, dar trebuie remarcat că, prin sporirea elementelor la modelul structural ales, apar dificultăți teoretice ce pot face schema de calcul dificil de aplicat în proiectare.

Trebuie precizat că modelul mecanic structural prezentat se aplică numai pentru etapa de încărcare cînd în masivul de pămînt nu au apărut suprafețe de lunecare sau zone plastice, adică numai în stadiul de exploatare. Pentru etapa de rupere, modelul actual trebuie completat cu legături plastice, legate în serie cu acest model sau, dacă se consideră că apar legături plastice și în timpul exploatării, legăturile corespunzătoare trebuie legate în paralel cu complexul elasto-vîsco-elastic, ceea ce însă dă naștere la unele dificultăți teoretice, fără a se putea încă preciza dacă rezultatele obținute justifică aceste complicații.

Modelul prezentat s-a considerat că se aplică pămînturilor puternic compresibile, dar el este valabil pentru orice categorie de pămînturi cu schelet rigid-elastic și nesaturat cu apă, schimbîndu-se numai valoarea coeficienților reologici.

Primită la redacție la 13 iunie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bjerrum, *Engineering geology of norwegian normally — consolidated marime clays as related to settlements of buildings*, Norwegian geotechnical institute, 71, Oslo, 1967.
2. A. Migliacci, *Soluzioni asintotiche di sistemi di equazioni integrali di Volterra relative a strutture iperstatiche con comportamento viscoso*, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milano, 1963.
3. W. Nowacki, *Théorie du fluage*, Eyrolles, Paris, 1965.
4. * * * St. cerc., — INCERC, *Fundații, zidării, pereți, 1* (1966).

DIADA INTERPRETATĂ CA DIPOL ŞI CVADRIPOL CINEMATIC

de CHR. PELECUDI
Centrul de mecanică a solidelor
al Academiei Republicii Socialiste România

621.01 : 531.1

Lucrarea prezintă diada ca grupă determinată capabilă să transmită informaţii de mişcare, viteze, acceleraţii, de la polii de intrare — cuplele exterioare — la polii de ieşire arbitrari ai elementelor.

Sînt redate matricele de transmisie ale vitezelor, atît în metoda elementelor a coordonatelor rectangulare, cît şi în metoda contururilor a coordonatelor polare. Se prezintă matricele rezultante pentru aşezările în paralel, legarea în serie, legarea mixtă, legarea inversă a diadelor, în formarea mecanismelor complexe.

Diada este grupa elementară ($M = 0$), formată cu două elemente şi trei cuple inferioare, dintre care una este interioară între elemente şi două sînt exterioare, potenţiale, cu ajutorul cărora se leagă, conform construcţiei generale a mecanismelor, de elementele cu mişcări cunoscute ale unui mecanism simplu, pentru a forma un mecanism complex.

În interpretarea grupelor elementare ca multipoli cinematici pasivi [1], [2], cele două cuple exterioare ale diadei constituie doi poli de intrare a mişcării (a, b). Ea apare astfel ca un dipol cinematic, mişcările elementelor sale fiind complet determinate de parametrii cinematici ai polilor de intrare (fig. 1). Dacă mişcarea este redată mai departe prin doi poli de ieşire a mişcării (A, B), diada este interpretată ca un cvadripol cinematic (fig. 2). Semnalele de mişcare transmise, fie că se referă la poziţii, viteze sau acceleraţii, sînt corespunzătoare polilor, adică, sub formă vectorială, două pentru intrare ($\bar{r}_a$, $\bar{r}_b$, $\bar{v}_a$, $\bar{v}_b$, $\bar{a}_a$, $\bar{a}_b$) şi două pentru ieşire ($\bar{r}_A$, $\bar{r}_B$, $\bar{v}_A$, $\bar{v}_B$, $\bar{a}_A$, $\bar{a}_B$). Din cauza aspectului plan al problemei, numărul semnalelor scalare este dublu (x_1 y_1, x_2 y_2 etc. şi X_1 Y_1, X_2 Y_2 etc.), dar, dacă se utilizează valorile relative ale semnalelor, numărul lor nu se schimbă (Δx, Δy; ΔX, ΔY etc.).

Deoarece legăturile vitezelor sînt exprimate, pentru o poziţie a mecanismului, prin relaţii liniare, se utilizează, ca element de evidenţiere al transmisiei mişcării, matricea de transmisie a vitezelor. Ea are avantajul compunerii simple pentru diverse conexiuni ale multipolilor [1], [2], este necesară în determinarea poziţiilor prin aproximaţii succesive şi ajută la

determinarea acceleraţiilor. Calculele încep cu funcţiile de transmisie ale poziţiilor (ordinul zero), care pot fi scrise sau prin metoda elementelor, întrebuinţînd coordonatele carteziene, sau, mai simplu, prin metoda contururilor pe baza coordonatelor polare. În prima fază se rezolvă funcţiile de transmisie pentru elementele şi punctele interne diadei împreună cu

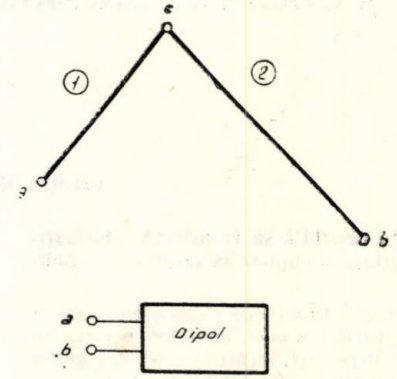


Fig. 1

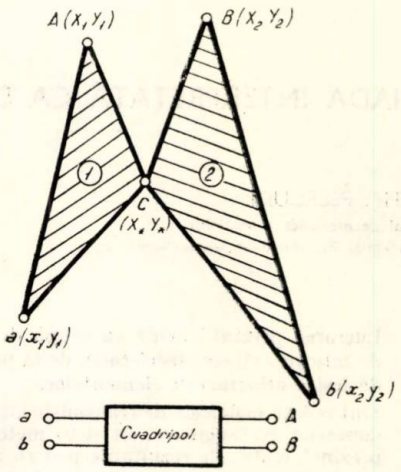


Fig. 2

polii de intrare, adică pentru dipolul cinematic, iar apoi se adaugă funcţiile de transmisie care se referă la polii de ieşire, respectiv pentru cvadripolul cinematic.

1) Astfel, prin *metoda elementelor*, vom avea la dipolul cinematic (fig. 1) următoarele funcţii de poziţii :

$$\begin{aligned} f_1^*(x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, X_*\, Y_*) &= (X_* - x_1)^2 + (Y_* - y_1)^2 - l_{ac}^2 = 0, \\ y_1^*(x_1\, y_1\, x_2\, y_2\, X_*\, Y_*) &= (X_* - x_2)^2 + (Y_* - y_2)^2 - l_{bc}^2 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Derivînd aceste funcţii stelate în raport cu timpul, se poate scrie matriceal

$$|i|\,|v| + |I|\,|V^*| = 0, \tag{2}$$

unde

$$|v| = \left|\begin{matrix} v_{x_1} \\ v_{y_1} \\ \hline v_{x_2} \\ v_{y_2} \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} v_1 \\ \hline v_2 \end{matrix}\right|; \quad |V^*| = \left|\begin{matrix} V_{x_*} \\ \hline Y_{Y_*} \end{matrix}\right|, \tag{3}$$

$$-|i| = \left|\begin{array}{cc|cc} X_* - x_1 & Y_* - y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_* - x_2 & Y_* - y_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} i_{11} & i_{12} \end{array}\right|, \tag{4}$$

$$|I| = \left|\begin{array}{cc} X_* - x_1 & Y_* - y_1 \\ X_* - x_2 & Y_* - y_2 \end{array}\right|. \tag{5}$$

Apoi ecuația matriceală a vitezelor interne diadei se poate pune sub forma

$$|V^*| = |M^*|\,|v|, \tag{6}$$

n care matricea de transmisie a vitezei dipolului este

$$|M^*| = -|I|^{-1} \cdot |i| = |I|^{-1} \cdot \left|\begin{array}{c|c} i_{11} & i_{12} \end{array}\right| \tag{7}$$

sau

$$|M^*| = \frac{1}{D} \left|\begin{array}{c|c|c|c} \begin{array}{c}(X_*-x_1)\times\\(Y_*-y_2)\end{array} & \begin{array}{c}(Y_*-y_1)\times\\(Y_*-y_2)\end{array} & \begin{array}{c}-(X_*-x_2)\times\\(Y_*-y_1)\end{array} & \begin{array}{c}-(Y_*-y_2)\times\\(Y_*-y_1)\end{array} \\ \hline \begin{array}{c}-(X_*-x_1)\times\\(X_*-x_2)\end{array} & \begin{array}{c}-(Y_*-y_1)\times\\(X_*-x_2)\end{array} & \begin{array}{c}(X_*-x_2)\times\\(X_*-x_1)\end{array} & \begin{array}{c}(Y_*-y_2)\times\\(X_*-x_1)\end{array} \end{array}\right|, \tag{8}$$

cu

$$D = (X_* - x_1)\,(Y_* - y_2) - (X_* - x_2)\,(Y_* - y_1). \tag{9}$$

La cvadripolul cinematic (fig. 2), prin aceeași metodă, se adaugă funcțiile de poziții :

$$\begin{aligned} f_1(x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,X_*\,Y_*\,X_1\,Y_1\,X_2\,Y_2) &= (X_1 - X_*)^2 + (Y_1 - Y_*)^2 - l_{CA}^2 = 0, \\ g_1(x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,X_*\,Y_*\,X_1\,Y_1\,X_2\,Y_2) &= (X_1 - x_1)^2 + (Y_1 - y_1)^2 - l_{aA}^2 = 0, \\ f_2(x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,X_*\,Y_*\,X_1\,Y_1\,X_2\,Y_2) &= (X_2 - X_*)^2 + (Y_2 - Y_*)^2 - l_{CB}^2 = 0, \\ g_2(x_1\,y_1\,x_2\,y_2\,X_*\,Y_*\,X_1\,Y_1\,X_2\,Y_2) &= (X_2 - x_2)^2 + (Y_2 - y_2)^2 - l_{bB}^2 = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Pentru aceste funcții, derivatele în raport cu timpul iau forma matriceală

$$|j|\,|v| + |I^*|\,|V^*| + |J|\,|V| = 0, \tag{11}$$

unde

$$-|j| = \left|\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ X_1 - x_1 & Y_1 - y_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_2 - x_2 & Y_2 - y_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} j_{11} & 0 \\ \hline 0 & j_{22} \end{array}\right|, \tag{12}$$

$$-|I^*| = \left|\begin{array}{cc} X_1 - X_* & Y_1 - Y_* \\ 0 & 0 \\ \hline X_2 - X_* & Y_2 - Y_* \\ 0 & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} I^*_{11} \\ \hline I^*_{21} \end{array}\right|, \tag{13}$$

$$|J| = \left|\begin{array}{cc|cc} X_1 - X_* & Y_1 - Y_* & 0 & 0 \\ X_1 - x_1 & Y_1 - y_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & X_2 - X_* & Y_2 - Y_* \\ 0 & 0 & X_2 - x_2 & Y_2 - y_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} J_{11} & 0 \\ \hline 0 & J_{22} \end{array}\right|. \tag{14}$$

cu

$$|V| = \left|\begin{array}{c} V_{x_1} \\ V_{y_1} \\ \hline V_{x_2} \\ V_{y_2} \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c} V_1 \\ \hline V_2 \end{array}\right|. \tag{15}$$

Relaţiile (2) şi (11) iau formele :

— pentru dipol

$$\left|\begin{array}{c|c} i_{11} & i_{12} \end{array}\right| \cdot \left|\begin{array}{c} v_1 \\ \hline v_2 \end{array}\right| = |I|\,|V^*|, \tag{16}$$

— pentru cvadripol

$$\left|\begin{array}{c|c} j_{11} & 0 \\ \hline 0 & j_{22} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} v_1 \\ \hline v_2 \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c} I^*_{11} \\ \hline I^*_{21} \end{array}\right| \left|V^*\right| = \left|\begin{array}{c|c} J_{11} & 0 \\ \hline 0 & J_{22} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} V_1 \\ \hline V_2 \end{array}\right|, \tag{17}$$

care se mai pot scrie împreună astfel :

$$\left|\begin{array}{c} i \\ \hline j \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} \\ v \\ \\ \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -I^* & J \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} V_* \\ \hline V \end{array}\right| \tag{18}$$

sau

$$\left|\begin{array}{cc} i_{11} & i_{12} \\ j_{11} & 0 \\ 0 & j_{22} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} v_1 \\ \hline v_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|cc} I & 0 & 0 \\ \hline -I_{11}^* & J_{11} & 0 \\ -I_{21}^* & 0 & J_{22} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} V_* \\ \hline V_1 \\ V_2 \end{array}\right| . \tag{19}$$

Eliminînd vitezele interne $|V^*|$ între (16) și (17) avem :

$$\left|\begin{array}{c|c} J_{11} & 0 \\ \hline 0 & J_{22} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} V_1 \\ \hline V_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} j_{11} + I_{11}^* \, I^{-1} \, i_{11} & I_{11}^* \, I^{-1} \, i_{12} \\ \hline I_{21}^* \, I^{-1} \, i_{11} & j_{22} + I_{21}^* \, I^{-1} \, i_{12} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} v_1 \\ \hline v_2 \end{array}\right| , \tag{20}$$

de unde ecuația matriceală a vitezelor externe ale cvadripolului ia forma

$$|V| = |M| \, |v|, \tag{21}$$

$$\left|\begin{array}{c} V_1 \\ \hline V_2 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|c} m_{11} & m_{12} \\ \hline m_{21} & m_{22} \end{array}\right| \left|\begin{array}{c} v_1 \\ \hline v_2 \end{array}\right| , \tag{22}$$

cu matricea de transmisie a vitezelor cvadripolului, de la polii de intrare la polii de ieșire, este

$$|M| = \left|\begin{array}{c|c} J_{11}^{-1} (j_{11} + I_{11}^* \, I^{-1} \, i_{11}) & J_{11}^{-1} \, I_{11}^* \, I^{-1} \, i_{12} \\ \hline J_{22}^{-1} \, I_{21}^* \, I^{-1} \, i_{11} & J_{22}^{-1} (j_{22} + I_{21}^* \, I^{-1} \, i_{12}) \end{array}\right| . \tag{23}$$

Aceste matrice se pot reduce în cazuri particulare, ca de exemplu — dacă unul din polii de intrare este fix, respectiv $v_2 = 0$ ($v_{x_2} = v_{y_2} = 0$), avem

$$|V_1| = |m_{11}| \, v_1| \text{ și } |V_2| = |m_{21}| \, v_1| ; \tag{24}$$

— dacă există un singur pol de ieșire, adică

$$|V_1| = |m_{11}| \, |v_1| + |m_{12}| \, |v_2| \tag{25}$$

sau

$$|V_2| = |m_{21}| \, |v_1| + |m_{22}| \, |v_2|.$$

Uneori ele pot avea forme mai simple dacă în locul funcţiilor de poziţii g (sau f) se consideră funcţiile $h = f - g$, obţinute ca diferenţa funcţiilor f şi g. Funcţiile pătratice g (sau f) sînt înlocuite cu funcţiile liniare h, care desigur sînt mai uşor de utilizat la determinarea poziţiilor. Astfel

$$\begin{aligned} h_1^* = f_1^* - g_1^* &= 2(x_2 - x_1) X_* + 2(y_2 - y_1) Y_* + \\ &+ (x_1^2 + y_1^2 - l_{aC}^2) - (x_2^2 + y_2^2 - l_{bC}^2) = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} h_1 = f_1 - g_1 &= 2(x_1 - X_*) X_1 + 2(y_1 - Y_*) Y_1 + \\ &+ (X_*^2 + Y_*^2 - l_{CA}^2) - (x_1^2 + y_1^2 - l_{aA}^2) = 0, \\ h_2 = f_2 - g_2 &= 2(x_2 - X_*) X_2 + 2(y_2 - Y_*) Y_2 + \\ &+ (X_*^2 + Y_*^2 - l_{CB}^2) - (x_2^2 + y_2^2 - l_{bB}^2) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

În cazul unei aplicaţii la mecanismul patrulater articulat, diada are la polul de intrare a coordonatele $x_1 = r\cos\varphi$ şi $y_1 = r\sin\varphi$, iar la polul de intrare b coordonatele fixe $x_2 = k$ şi $y_2 = 0$. Rezultă

$$\begin{aligned} &v_{x_1} = -r\omega\sin\varphi\,;\ v_{y_1} = r\omega\cos\varphi\,;\ v_{x_2} = v_{y_2} = 0, \\ &h_1^* = 2(k - r\cos\varphi) X_* - 2r\sin\varphi\, Y_* + (r^2 - l_1^2) - (k^2 - l_2^2) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Funcţia h_1^* împreună cu una din funcţiile f_1^* sau g_1^* determină, prin rezolvarea unor ecuaţii pătratice, coordonatele $X_* = X_*(\varphi)$ şi $Y_* = Y_*(\varphi)$ în raport cu unghiul manivelei φ. Alte determinări se pot face pe cale grafică sau cu ajutorul aproximaţiilor succesive. În acelaşi fel se pot determina coordonatele polilor de ieşire $X_1 = X_1(\varphi)$, $Y_1 = Y_1(\varphi)$ sau $X_2 = X_2(\varphi)$, $Y_2 = Y_2(\varphi)$, care apoi pot fi întrebuinţate la determinarea matricelor de transmisie.

2) În *metoda contururilor*, polii de intrare şi de ieşire sînt poziţionaţi prin vectorii complecşi $z_a = r_a\, e^{i\varphi_a}$ şi $z_b = r_b\, e^{i\varphi_b}$ sau $Z_A = R_A\, e^{i\Phi_A}$ şi $Z_B = R_B\, e^{i\Phi_B}$ iar contururile sînt $OaCb$ pentru dipol şi în plus $OACB$ pentru cvadripol. Se pot lua însă valorile relative ale parametrilor cinematici, ceea ce ar corespunde cu ataşarea a două elemente legate printr-o cuplă de translaţie, atît pentru polii de intrare, cît şi pentru cei de ieşire, schematizate prin vectorii complecşi $z_i = r_i\, e^{i\varphi_i}$ şi $Z_e = R_e\, e^{i\Phi_e}$, ceea ce reduce calculele (fig. 3).

Funcţiile de transmisie ale poziţiilor sînt :

$$\begin{aligned} f_1^*(r_i\ \varphi_i\ R_1\ \Phi_1\ R_2\ \Phi_2) &= r_i\cos\varphi_i + R_1\cos\Phi_1 + R_2\cos\Phi_2 = 0, \\ g_1^*(r_i\ \varphi_i\ R_1\ \Phi_1\ R_2\ \Phi_2) &= r_i\sin\varphi_i + R_1\sin\Phi_1 + R_2\sin\Phi_2 = 0, \\ f_1(r_1\ \varphi_1\ r_2\ \varphi_2\ R_e\ \Phi_e) &= r_1\cos\varphi_1 + r_2\cos\varphi_2 + R_e\cos\Phi_e = 0, \\ g_1(r_1\ \varphi_1\ r_2\ \varphi_2\ R_e\ \Phi_e) &= r_1\sin\varphi_1 + r_2\sin\varphi_2 + R_e\sin\Phi_e = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Păstrînd aceleaşi notaţii pentru matricele de viteze, indiferent că elementele lor sînt viteze liniare sau unghiulare, din primele două ecuaţii, avem

$$|i|\,|v| + |I|\,|V^*| = 0, \tag{30}$$

cu

$$|i| = \begin{vmatrix} \cos\varphi_i & -r_i \sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & r_i \cos\varphi_i \end{vmatrix}; \quad |v| = \begin{vmatrix} v_i \\ \omega_i \end{vmatrix}, \tag{31}$$

$$|I| = \begin{vmatrix} -R_1 \sin\Phi_1 & -R_2 \sin\Phi_2 \\ R_1 \cos\Phi_1 & R_2 \cos\Phi_2 \end{vmatrix}, \quad |V^*| = \begin{vmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \end{vmatrix}. \tag{32}$$

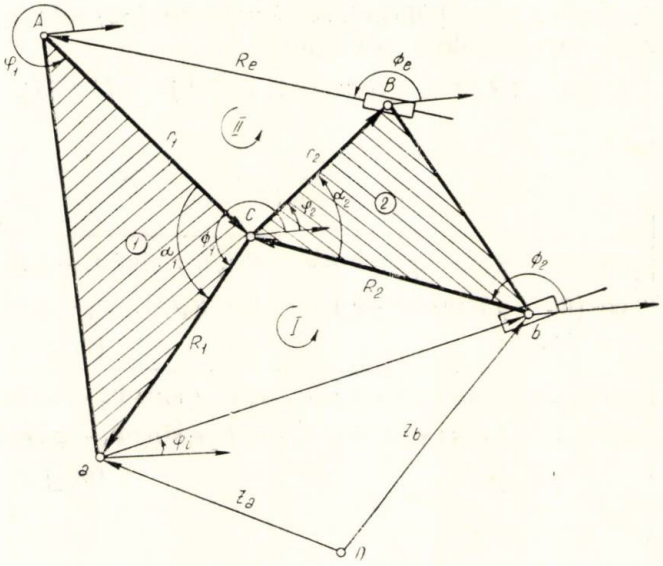


Fig. 3

Apoi, din ultimele două ecuaţii se obţine matriceal

$$|I^*|\,|V^*| + |J|\,|V| = 0, \tag{33}$$

cu

$$|I^*| = \begin{vmatrix} -r_1 \sin\varphi_1 & -r_2 \sin\varphi_2 \\ r_1 \cos\varphi_1 & r_2 \cos\varphi_2 \end{vmatrix}, \tag{34}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \cos\Phi_e & -R_e \sin\Phi_e \\ \sin\Phi_e & R_e \cos\Phi_e \end{vmatrix}, \quad |V| = \begin{vmatrix} V_e \\ \Omega_e \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Dacă ecuaţiile matriceale ale dipolului sînt la fel în cele două metode (2), (30), ecuaţia matriceală a cvadripolului este mai simplă în metoda contururilor (33) decît în metoda elementelor (11). Pe de altă parte, şi matricele sînt mai simple.

Întrucît $|V^*| = |M^*|\,|v|$, se deduce din (30) matricea de transmisie a vitezelor interne dipolului

$$|M^*| = -|I|^{-1} \cdot |i|, \tag{36}$$

$$|M^*| = \frac{1}{R_1 R_2 \sin(\Phi_2 - \Phi_1)} \begin{vmatrix} -R_2 \cos(\Phi_2 - \varphi_i) & -R_2 r_i \sin(\Phi_2 - \varphi_i) \\ (m_{11}^*) & (m_{12}^*) \\ R_1 \cos(\Phi_1 - \varphi_i) & R_1 r_i \sin(\Phi_1 - \varphi_i) \\ (m_{21}^*) & (m_{22}^*) \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Apoi, deoarece $|V| = |M||v|$, se găsește din (33) matricea de transmisie a vitezelor externe ale cvadripolului

$$|M| = -|J|^{-1} \cdot |I^*| \cdot |M^*| = |J|^{-1} \cdot |I^*| \cdot |I|^{-1} \cdot |i|, \quad (38)$$

adică

$$|M| = \frac{-1}{R_e R_1 R_2 \sin(\Phi_2 - \Phi_1)} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} R_e r_1 R_2 \cos(\Phi_2 - \varphi_i) \sin(\varphi_1 - \Phi_e) - & R_e r_1 R_2 r_i \sin(\Phi_2 - \varphi_i) \sin(\varphi_1 - \Phi_e) - \\ - R_e r_2 R_1 \cos(\Phi_1 - \varphi_i) \sin(\varphi_2 - \Phi_e) & - R_e r_2 R_1 r_i \sin(\Phi_1 - \varphi_i) \sin(\varphi_2 - \Phi_e) \\ (m_{11}) & (m_{12}) \\ -r_1 R_2 \cos(\Phi_2 - \varphi_i) \cos(\varphi_1 - \Phi_e) + & -r_1 R_2 r_i \sin(\Phi_2 - \varphi_i) \cos(\varphi_1 - \Phi_e) + \\ + r_2 R_1 \cos(\Phi_1 - \varphi_i) \cos(\varphi_2 - \Phi_e) & + r_2 R_1 r_i \sin(\Phi_1 - \varphi_i) \cos(\varphi_2 - \Phi_e) \\ (m_{21}) & (m_{22}) \end{vmatrix} \quad (39)$$

și deci

$$\begin{aligned} V_e &= m_{11} v_i + m_{12} \omega_i, \\ \Omega_e &= m_{21} v_i + m_{22} \omega_i. \end{aligned} \quad (40)$$

Ținînd seama de ecuațiile de poziții (29), elementele matricelor de transmisie se pot reduce. Astfel, scăzînd în interiorul liniilor trigonometrice argumentele Φ_1 sau Φ_2, ceea ce corespunde înmulțirii ecuației complexe de poziție cu $e^{-i\Phi_1}$ sau $e^{-i\Phi_2}$, respectiv proiectarea sa pe axele rotite cu Φ_1 sau Φ_2, pentru ecuațiile dipolului f_1^* și g_1^*, se găsește

$$\begin{aligned} &r_i \cos(\varphi_i - \Phi_1) + R_1 + R_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1) = 0, \\ &r_i \cos(\varphi_i - \Phi_2) + R_1 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) + R_2 = 0, \\ &r_i \sin(\varphi_i - \Phi_1) + R_2 \sin(\Phi_2 - \Phi_1) = 0, \\ &r_i \sin(\varphi_i - \Phi_2) + R_1 \sin(\Phi_1 - \Phi_2) = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Matricea de transmisie a dipolului capătă forma

$$|M^*| = \begin{vmatrix} -\dfrac{\cos(\Phi_2 - \varphi_i)}{R_1 \sin(\Phi_2 - \Phi_1)} & 1 \\ \dfrac{\cos(\Phi_1 - \varphi_i)}{R_2 \sin(\Phi_2 - \Phi_1)} & 1 \end{vmatrix}, \quad (42)$$

adică

$$\Omega_1 = -\frac{\cos(\Phi_2 - \varphi_i)}{R_1 \sin(\Phi_2 - \Phi_1)} v_i + \omega_i,$$

$$\Omega_2 = \frac{\cos(\Phi_1 - \varphi_i)}{R_2 \sin(\Phi_2 - \Phi_1)} v_i + \omega_i.$$

Procedînd la fel cu ecuaţiile cvadripolului f şi g faţă de argumentele φ_1 şi φ_2, avem

$$\begin{aligned} &r_1 + r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + R_e \cos(\Phi_e - \varphi_1) = 0, \\ &r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + R_e \sin(\Phi_e - \varphi_1) = 0, \\ &r_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + r_2 + R_e \cos(\Phi_e - \varphi_2) = 0, \\ &r_1 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + R_e \sin(\Phi_e - \varphi_2) = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

Matricea de transmisie a cvadripolului devine

$$|M| = \begin{vmatrix} \dfrac{r_i r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{R_e R_1 R_2 \sin(\Phi_2 - \Phi_1)} & 0 \\ \dfrac{R_e^2(R_2^2 - R_1^2) - r_i^2(r_2^2 - r_1^2)}{2 R_e^2 r_i R_1 R_2 \sin(\Phi_2 - \Phi_1)} & 1 \end{vmatrix} \tag{44}$$

şi deci

$$\begin{aligned} V_e &= m_{11} v_i; & m_{12} &= 0, \\ \Omega_e &= m_{21} v_i + \omega_i; & m_{22} &= 1. \end{aligned} \tag{45}$$

Dacă $V_i = 0$, diada apare ca un rigid, avînd o mişcare de rotaţie $\Omega_e = \omega_i$ ($V_e = 0$) peste care se suprapun translaţiile în lungul axelor de coordonate. Pentru $\omega_i = 0$, diada împreună cu completarea ei (fig. 3) apare ca un mecanism bielă-manivelă, la care, între punctele A şi B ale manivelei şi bielei, viteza liniară şi viteza unghiulară depind numai de viteza pietrei de culisă, adică $V_e = m_{11} v_i$ şi $\Omega_e = m_{21} v_i$.

Dacă braţele diadei sînt două cîte două egale, $r_1 = r_2$ şi $R_1 = R_2$, rezultă $m_{21} = 0$, astfel că $\Omega_e = \omega_i$, viteza unghiulară de intrare este egală cu viteza unghiulară de ieşire.

Conform figurii, între unghiurile diadei există relaţiile

$$\begin{aligned} \Phi_2 + \alpha_2 - \varphi_2 &= 180°, \\ \varphi_1 - \Phi_1 + \alpha_1 &= 180° \end{aligned} \tag{46}$$

şi deci

$$\Phi_2 - \Phi_1 + (\alpha_1 + \alpha_2) = 360° + (\varphi_2 - \varphi_1), \tag{47}$$

iar cosinusurile diferențelor s-au scos din ecuațiile de poziții (contururile triunghiulare)

$$R_e^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2\, r_1 r_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$
$$r_i^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2\, R_1 R_2 \cos(\Phi_2 - \Phi_1). \tag{48}$$

Dacă $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi$, adică în momentul cînd laturile AC și BC sînt suprapuse, avem $m_{11} = 0$ și deci $V_e = 0$. Invers, cînd $\Phi_1 = \Phi_2 + K\pi$, adică pentru laturile aC și bC suprapuse, avem $m_{11} = 0$, și trebuie ca $v_i = 0$.

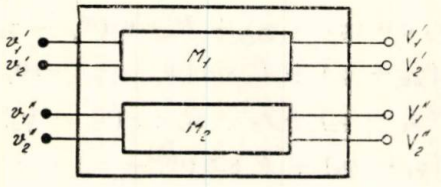


Fig. 4

3) La așezarea în paralel a două diade (fig. 4), ele sînt independente una de alta, astfel că matricea rezultată [1] apare ca o matrice diagonală compusă

$$|M| = \left|\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & M_2 \end{array}\right|. \tag{49}$$

Legarea în serie a două diade (fig. 5) corespunde amplificării mecanismului. Prin metoda contururilor avem

$$|M| = |M_2|\,|M_1|, \tag{50}$$

cu

$$|M_1| = \left|\begin{array}{c|c} m'_{11} & 0 \\ \hline m'_{21} & 1 \end{array}\right|; \quad |M_2| = \left|\begin{array}{c|c} m''_{11} & 0 \\ \hline m''_{21} & 1 \end{array}\right|,$$

deci

$$|M| = \left|\begin{array}{c|c} m'_{11}\, m''_{11} & 0 \\ \hline m'_{11}\, m''_{21} + m'_{21} & 1 \end{array}\right|. \tag{51}$$

Matricea rezultantă își menține forma care caracterizează diada.

Legarea mixtă a două diade (fig. 6) corespunde lungirii mecanismului. Prin metoda elementelor se obține

$$\begin{aligned} |V_1'| &= |m_{11}'|\,|v_1'| + |m_{12}'|\,|v_2'|; \quad |V_1''| = |m_{11}''|\,|v_1''| + |m_{12}''|\,|v_2''|, \\ |V_2'| &= |m_{21}'|\,|v_1'| + |m_{22}'|\,|v_2'|; \quad |V_2''| = |m_{21}''|\,|v_1''| + |m_{22}''|\,|v_2''|, \end{aligned} \tag{52}$$

dar

$$|v_1''| = |V_2'|$$

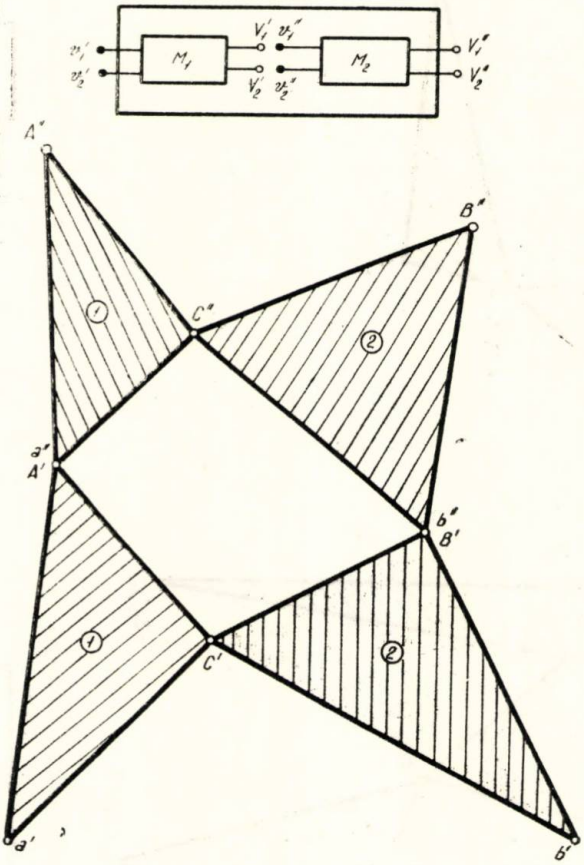


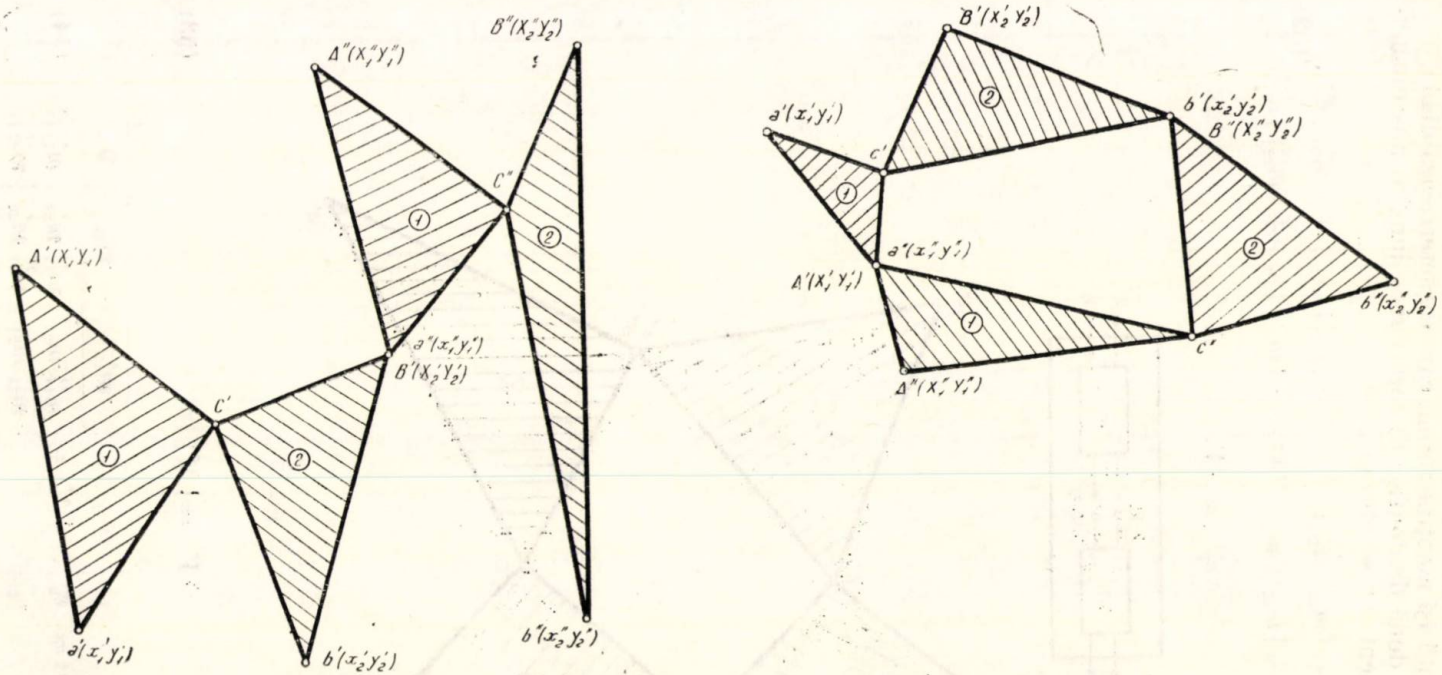
Fig. 5

și deci

$$|V| = |M|\,|v| \tag{53}$$

cu

$$|V| = \begin{vmatrix} V_1' \\ V_1'' \\ V_2'' \end{vmatrix}; \quad |v| = \begin{vmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_2'' \end{vmatrix}; \quad |M| = \left|\begin{array}{cc|c} m_{11}' & m_{12}' & 0 \\ \hline m_{11}'' & m_{11}'' & m_{12}'' \\ m_{21}'' & m_{21}'' & m_{22}'' \end{array}\right| \cdot \tag{54}$$


A''(X''1 Y''1)
B''(X''2 Y''2)
C''
A'(X'1 Y'1)
a'(x'1 y'1)
C'
B'(X'2 Y'2)
a''(x''1 y''1)
b'(x'2 y'2)
b''(x''2 y''2)
B'(x'2 y'2)
a'(x'1 y'1)
b'(x'2 y'2)
B''(X''2 y''2)
C'
a''(x''1 y''1)
A'(X'1 Y'1)
b''(x''2 y''2)
A''(X''1 Y''1)

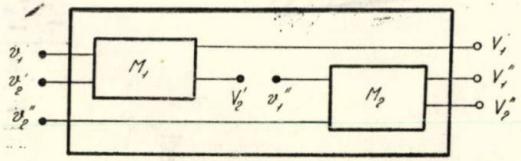

M1
M2

Fig. 6

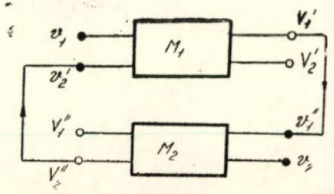

M1
M2

Fig. 7

Legarea inversă (fig. 7) a două diade conduce la o tetradă. Prima diadă are intrările a' b' şi ieşirile $A'B'$, iar a doua diadă are intrările a'' b'' şi ieşirile A'' B'', dar se leagă ieşirea A' cu intrarea a'' şi ieşirea B'' cu intrarea b'. Rezultă tetrada cu intrările $a'b''$ şi ieşirile A'' B'. Utilizînd relaţiile (52), cu condiţiile $|V_1'| = |v_1''|$ şi $|V_2''| = |v_2'|$, vom avea

$$|V| = \begin{vmatrix} V_2' \\ V_1'' \end{vmatrix}; \quad |v| = \begin{vmatrix} v_1' \\ v_2'' \end{vmatrix}; \quad |V| = |M|\,|v|, \tag{55}$$

$$\begin{aligned} |v_1''| &= |1 - m_{12}' m_{21}''|^{-1} [|m_{11}'|\,|v_1'| + |m_{12}'|\,|m_{22}''|\,|v_2''|], \\ |v_2'| &= |1 - m_{21}'' m_{12}'|^{-1} [|m_{21}''|\,|m_{11}'|\,|v_1'| + |m_{22}''|\,|v_2''|] \end{aligned} \tag{56}$$

şi

$$|M| = \begin{vmatrix} m_{21}' + \\ +m_{22}'(1 - m_{21}'' m_{12}')^{-1} m_{21}'' m_{11}' & m_{22}'(1 - m_{21}'' m_{12}')^{-1} m_{22}'' \\ m_{11}''(1 - m_{12}' m_{21}'')^{-1} m_{11}' & m_{12}'' + \\ & +m_{11}''(1 - m_{12}' m_{21}'')^{-1} m_{12}' m_{22}'' \end{vmatrix}. \tag{57}$$

Se pot face în continuare alte combinaţii de conexiuni repetate, care conduc la matrice şi la structuri complexe de mecanisme.

Primită la redacţie la 4 aprilie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1967.
2. — *Multipoli cinematici cu elemente rigide*, St. cerc. mec. apl., nr. 2 (1968).
3. — *Metoda contururilor în sinteza numerică şi structurală a lanţurilor cinematice*, St. cerc. mec. apl., nr. 3 (1967).

MECANISME PENTRU TRASAREA PROFILELOR CU BORD DE FUGĂ ROTUNJIT

de D. TUTUNARU
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

621.01 : 533

Autorul realizează cîteva mecanisme noi cu ajutorul cărora se construiește pe cale mecanică profilul Carafoli, care are aplicații largi în aerodinamică și hidraulică. Totodată se stabilește o metodă generală și mecanisme de bază cu care se pot forma și alte mecanisme pentru trasarea atît a profilelor cu bord de fugă rotunjit, cît și a profilului cu bord de fugă ascuțit.

§ 1. CONSIDERAȚII INTRODUCTIVE

Un profil aerodinamic, situat în planul $z = x + iy$, poate fi reprezentat conform pe un cerc (K) din planul $\zeta = \xi + i\,\eta$ (fig. 1) prin funcția de transformare

$$z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta} + \frac{q_2}{\zeta^2} + \ldots + \frac{q_n}{\zeta^n} + \cdots \tag{1}$$

în forma sa generală, dată de Bieberbach [1].

Această funcție este perfect determinată dacă facem ca un punct determinat pe cerc să corespundă unui punct de pe profil, observînd că punctele de la infinit ale planurilor z și ζ corespund.

Să ne mărginim deocamdată la primii doi termeni din membrul al doilea al transformării (1). Ne propunem să realizăm, în acest caz, anumite mecanisme cu ajutorul cărora să putem trasa un profil obținut din cercul (K) prin transformarea lui Jukovski,

$$z = \zeta + \frac{q^2}{\zeta}, \tag{2}$$

pentru care vom impune condiția ca bordul de fugă al profilului să corespundă punctului B de pe cerc, corespunzător vitezei nule.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 6, P. 1307–1317, BUCUREȘTI, 1968

Deoarece pentru trasarea profilelor cu bordul de fugă ascuțit (profile Jukovski) au fost realizate diferite mecanisme, mai mult sau mai puțin simple [2]-[5], vom căuta să realizăm mecanisme noi care să traseze profile de formă mai generală, avînd bordul de fugă rotunjit, din care, de altfel, prin trecere la limită, se obțin și profilele cu bord de fugă ascuțit, ca niște cazuri particulare.

Vom remarca, pe de altă parte, că profilele cu bord de fugă rotunjit, denumite de Milne-Thomson [6] *profile Carafoli*, au o gamă largă de aplicații practice la aripă, la elici aeriene, dar mai ales la paletajul turbomașinilor, ceea ce a determinat studierea lor atît din punct de vedere teoretic, cît și experimental de către diverși cercetători [7] -[10].

Pentru trasarea acestor profile, cu ajutorul transformării de forma (2), se dau următorii parametri geometrici și aerodinamici [11]:

(c) — coarda profilului,
(f) — săgeata relativă,
(ε_m) — grosimea maximă relativă,
(k) — gradul de rotunjire

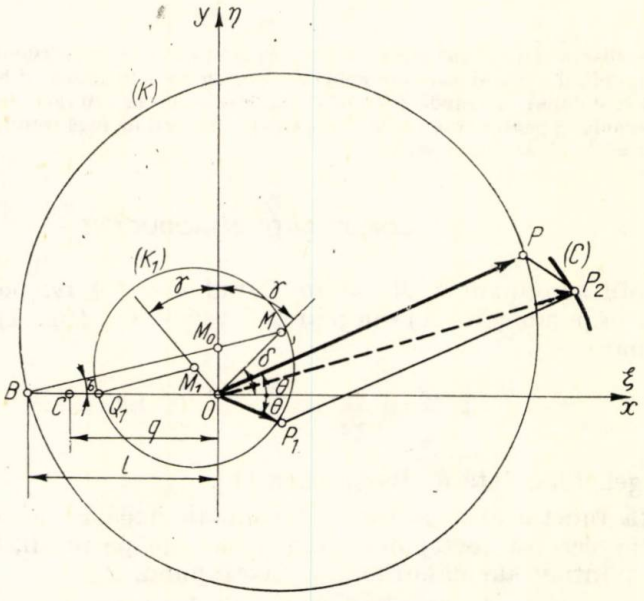


Fig. 1

Cu aceste date se determină q din (2), fiind aproximativ egal cu

$$q \approx \frac{c}{4}, \tag{3}$$

și se fixează punctul C (fig. 1) în care se anulează derivata funcției de transformare

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)(\ )_c = 1 - \frac{q^2}{\zeta_c^2} = 0, \quad \xi_c = -q. \tag{4}$$

Pentru trasarea cercului de bază (K), este suficient să cunoaştem punctul B, care corespunde bordului de fugă al profilului, şi centrul cercului. Pentru a fixa punctul B, se obţine

$$\zeta_B = -l = -q(1+k). \tag{5}$$

Pentru determinarea centrului M al cercului de bază, se ia mai întîi punctul M_0 astfel ca

$$\overline{OM}_0 = fl \tag{6}$$

şi apoi, pe prelungirea segmentului $\overline{BM}_0$, se ia punctul M astfel ca

$$\overline{M_0M} = \mu l, \tag{7}$$

μ fiind dat de sistemul de ecuaţii

$$\varepsilon_m = (1+\cos\theta_m)\sin\theta_m + k\sin\theta_m, \tag{8}$$

$$\mu(\cos\theta_m + \cos 2\theta_m) + k\cos\theta_m = 0, \tag{9}$$

unde θ_m este argumentul punctului de pe cercul de bază care corespunde punctului de pe profil unde grosimea este maximă.

În sfîrşit, se calculează unghiul de portanţă nulă τ, care, în cazul unei transformări cu numai doi termeni, nu este un parametru independent, ci este legat de săgeata relativă f prin relaţia

$$\operatorname{tg}\tau \approx f. \tag{10}$$

§. 2. TRASAREA PROFILULUI (METODA TREFFTZ)

Pentru trasarea profilului este convenabil să se facă mai întîi o transformare conformă a cercului K, dată de relaţia

$$\zeta_1 = \frac{q^2}{\zeta} = \xi_1 + i\,\eta_1, \tag{11}$$

care reprezintă o inversiune, însoţită de o simetrie.

Dacă notăm cu a raza şi $\zeta_M = me^{i\delta}$, ecuaţia cercului K se va scrie sub forma

$$(\xi - m\cos\delta)^2 + (\eta - m\sin\delta)^2 = a^2. \tag{12}$$

Ţinînd seama de (11), după calcule simple, din ecuaţia (12) rezultă [11]:

$$\left(\xi_1 - \frac{q^2}{a^2-m^2}\,m\cos\delta\right)^2 + \left(\eta_1 - \frac{q^2}{a^2-m^2}\,m\sin\delta\right)^2 = \frac{q^4a^2}{(a^2-m^2)^2}, \tag{13}$$

adică s-a obţinut ecuaţia unui cerc K_1, transformatul cercului K, prin relaţia (11).

Cercul K_1 trece prin punctul Q_1, transformatul punctului B, de a fixa

$$\zeta_{Q_1} = -l(1 - 2K), \tag{14}$$

şi are centrul în punctul M_1, situat la intersecţia paralelei duse prin Q_1 la $\overline{BM}$, cu simetrica lui OM faţă de axa $O\eta$ (fig. 1).

Pentru orice punct P de pe cercul K corespunde un punct P_1 pe cercul K_1, situat pe simetrica dreptei OP faţă de axa Ox, astfel încît

$$\zeta_{P_1} = \frac{q^2}{\zeta_P} \tag{15}$$

sau :

$$\bar{r}.\bar{r}_1 = q^2. \tag{16}$$

În consecinţă, punctul P_2 de pe profilul (C) este transformatul punctului P de pe cercul de bază şi se obţine adunînd segmentele orientate $\bar{r} = \overline{OP}$ şi $\bar{r}_1 = \overline{OP_1}$ după regula paralelogramului. Tocmai această operaţie trebuie să o execute mecanismele de trasare.

§ 3. MECANISME PENTRU TRASAREA PROFILULUI CARAFOLI

Înainte de a trece la sinteza mecanismelor care interesează, se observă că, pe baza metodei Trefftz, rezultă cîteva construcţii grafice care vor folosi la rezolvarea mai simplă a problemei (fig. 2).

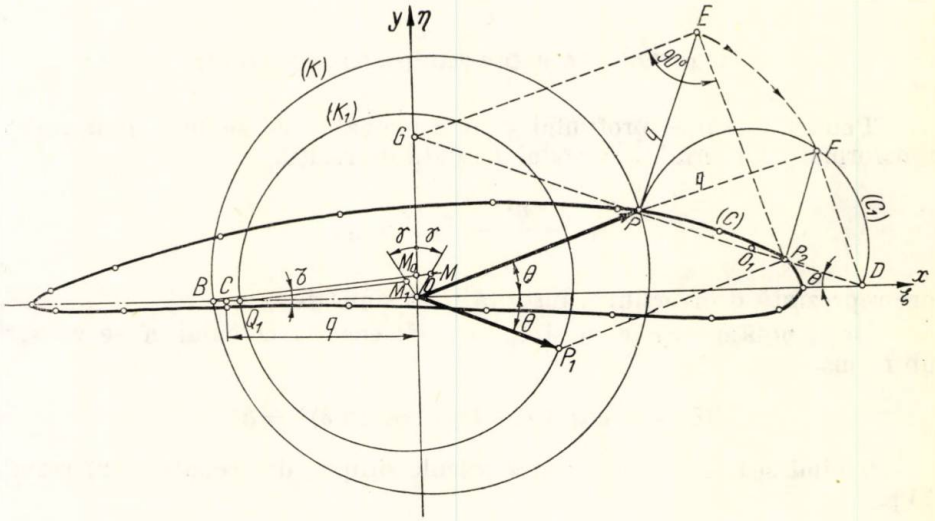


Fig. 2

Din egalitatea argumentelor faţă de axa Ox, se poate duce prin punctul P o paralelă la $\overline{OP_1}$ care intersectează axele de coordonate în punctele G şi D. S-a format astfel triunghiul OPD, ale cărui laturi OP =

$= PD$, iar punctul P este mijlocul ipotenuzei triunghiului dreptunghic DOG, realizîndu-se o condiție fundamentală, $OP = PG = PD$, pe baza căreia punctul G va descrie riguros o mișcare rectiliniară după axa Oy cînd D se mișcă după Ox.

O altă proprietate geometrică importantă rezultă pe baza formulei (16), scrisă sub forma

$$\overline{PD}.\ \overline{PP_2} = q^2, \tag{17}$$

deoarece $\bar{r} = \overline{OP} = \overline{PD}$ și $\bar{r}_1 = \overline{OP_1} = \overline{PP_2}$.

Pe baza acestei relații, se determină grafic segmentul $\overline{PP_2}$ și deci un punct P_2 al profilului (C), cunoscîndu-se PD și q (punctului C îi corespunde $\zeta_C = -q$).

În acest scop, se duce un cerc (C_1) cu centrul O_1 și care are diametrul egal cu PD, iar prin extremitatea acestui diametru, în punctul P, se duce o perpendiculară $PE = q$ și se rabate punctul E pînă intersectează cercul (C_1) în punctul F. Perpendiculara coborîtă din F pe diametrul PD determină punctul P_2 al profilului (C).

Ținînd seama de triunghiul dreptunghic PFD, cu o catetă $PF = q$, rezultă imediat formula (17).

Punctul P_2 se mai obține construind triunghiul dreptunghic GEP_2 cu înălțimea egală cu q, în care se poate scrie

$$\overline{GP}.\ \overline{PP_2} = q^2 \tag{18}$$

sau

$$\overline{PD}.\ \overline{PP_2} = q^2,$$

deoarece

$$\overline{GP} = \overline{PD}.$$

Pentru formarea unor mecanisme cu ajutorul cărora să se traseze profilul Carafoli, se ia ca mecanism de bază pantograful reprezentat în figura 3 și unele variante ale acestuia.

Acest pantograf este format din patru bare, la care s-au luat $GH = HD = l$ și $PR = PS = \frac{l}{2}$, iar articulațiile R și S s-au plasat la $l/2$.

Pantograful este legat, prin intermediul articulațiilor D și G, la cuplele de translație (culisori) care se mișcă de-a lungul axelor de coordonate Ox și Oy, și în P la manivela MP egală cu raza cercului generator (K).

Punctul P determină, în orice poziție a lanțului cinematic, mijlocul segmentului DG și realizează condiția fundamentală $OP = PD = PG$.

Punctul P fiind obținut cu mecanismul de bază, determinarea punctului P_2 ce aparține profilului (C) se face cu ajutorul unor lanțuri cinematice corespunzătoare, legate la mecanismul de bază.

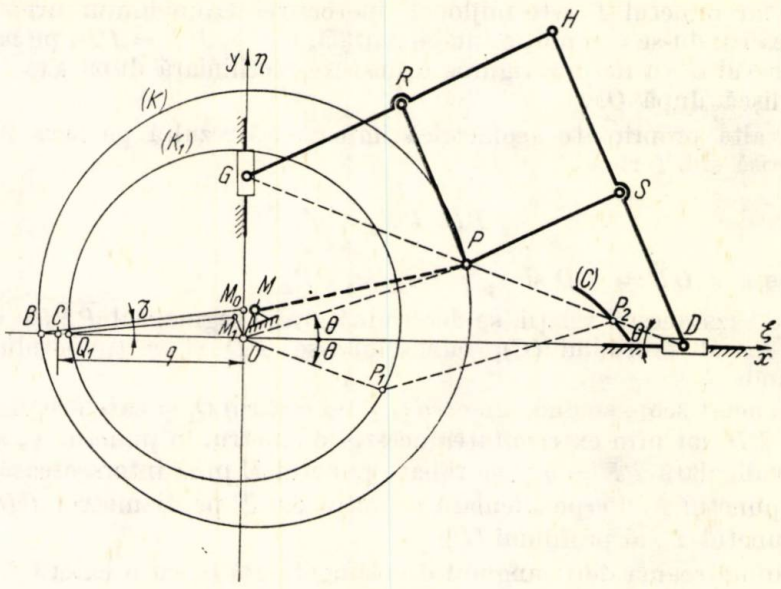


Fig. 3

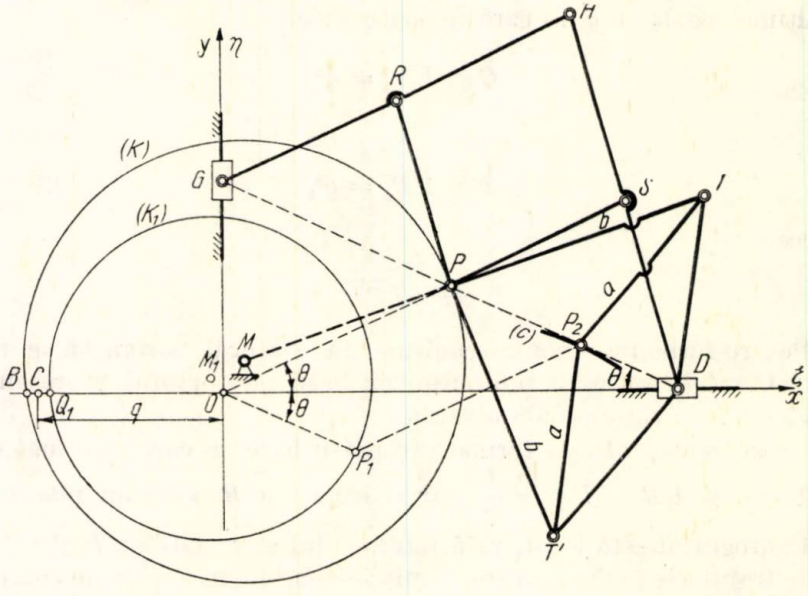


Fig. 4

În figura 4, s-a legat între punctele P și D un inversor pozitiv Peaucellier la care s-au luat $DT = TP_2 = P_2T' = DT' = a$ și $PT = PT' = b$.

Determinarea lui b, dacă se ia arbitrar mărimea a și invers, se face pe baza formulei inversoarelor Peaucellier, adică

$$b^2 - a^2 = q^2 = \text{const.} \tag{19}$$

Termenul q, diferit de zero, este un număr oarecare şi poate avea valoarea $OC = q$.

În aceste condiţii, formula (18) se poate scrie

$$DP.\ PP_2 = b^2 - a^2 = q^2 = \text{const.} \tag{20}$$

Luîndu-se ca pol punctul P, în timp ce acesta descrie cercul (K) cu centrul în M, prin rotirea elementului MP, se obţine prin inversiune profilul (C) Carafoli descris de punctul P_2.

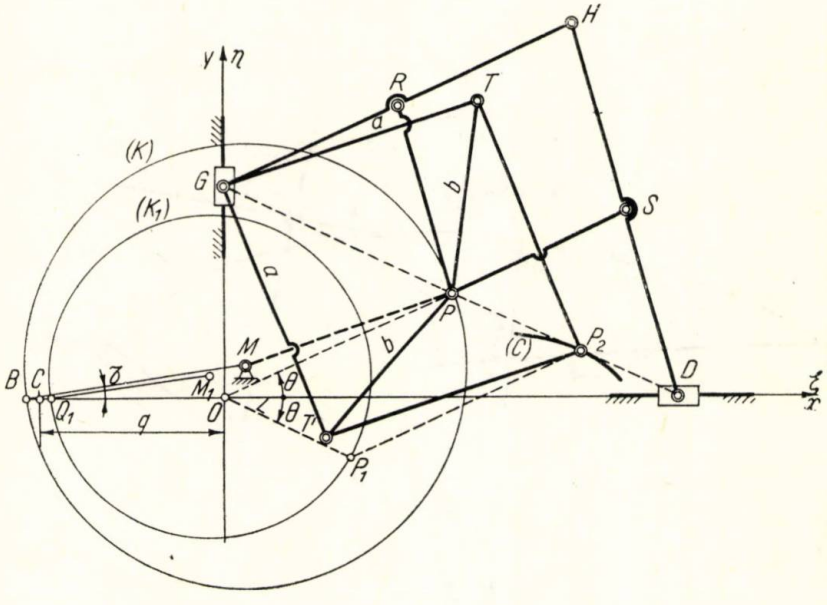


Fig. 5

În figura 5 s-a legat între punctele G şi P un inversor negativ Peaucellier la care s-au luat $GT = TP_2 = P_2T' = GT' = a$ şi $PT = PT' = b$.

În acest caz, formulele (18) şi (19) se pot scrie sub forma

$$a^2 - b^2 = GP.\ PP_2 = PD.\ PP_2 = q^2 = \text{const.} \tag{21}$$

În felul acesta, luîndu-se ca pol punctul P, punctul P_2 descrie curba (C), care este profilul Carafoli.

Prin modificări structurale convenabile aduse mecanismelor precedente, s-a obţinut mecanismul reprezentat în figura 6.

Mecanismul de bază $GHT'DTH'$ este format din două patrulatere isoscele egale $GHPH'$ şi $DTPT'$, la care s-au luat $GH = GH' = DT = DT' = a$ şi $HT' = TH' = 2b$.

Punctul P s-a articulat la mijlocul barelor HT' şi TH', astfel că egalitatea celor două patrulatere isoscele articulate $GHPH'$ şi $DTPT'$ se menţine în orice poziţie a mecanismului, iar din egalitatea diagonalelor GP şi PD rezultă condiţia fundamentală $OP = PD = PG$.

Adăugînd elementele $TP_2 = P_2T' = a$ şi legînd această diadă între punctele T şi T', s-a format inversorul pozitiv Peaucellier $PTDT'P_2$.

Dimensiunile acestui inversor se stabilesc pe baza formulei (20), astfel că punctul P_2 descrie profilul (C) Carafoli.

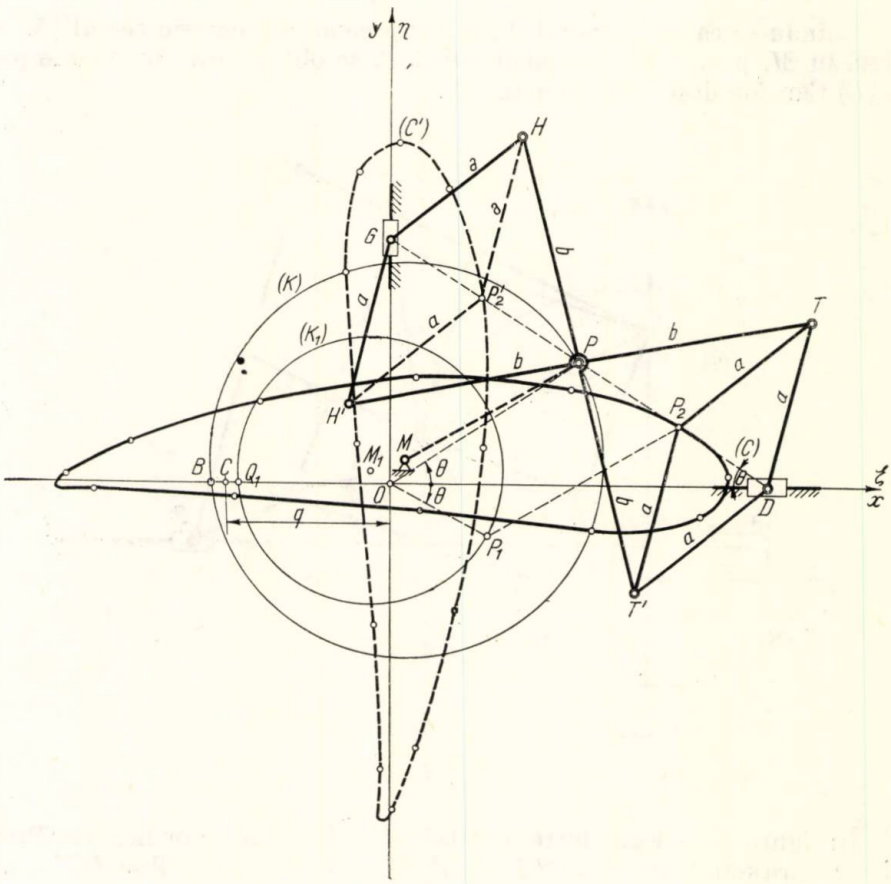


Fig. 6

Dacă se formează un inversor pozitiv între punctele G şi P, punctul P_2' descrie profilul (C') Carafoli aşezat pe axa Oy.

În figura 7 s-a reprezentat un mecanism pentru construirea profilului (C) Carafoli, la care mecanismul de bază $GRSDS'R'$ este format tot din două patrulatere isoscele egale, $GRPR'$ şi $DSPS'$.

S-au luat următoarele dimensiuni: $GR = GR' = DS = DS' = a$ şi $RS = R'S' = 2\,b$.

Punctul P este articulat la mijlocul barelor RS şi $R'S'$ şi, datorită egalităţii patrulaterelor isoscele articulate $GRPR'$ şi $DSPS'$, se realizează condiţia fundamentală $OP = PD = PG$.

Adăugînd elementele $RP_2 = R'P_2 = a$, s-a format inversorul negativ Peaucellier, articulat în punctele G şi P. Calcularea acestui inversor

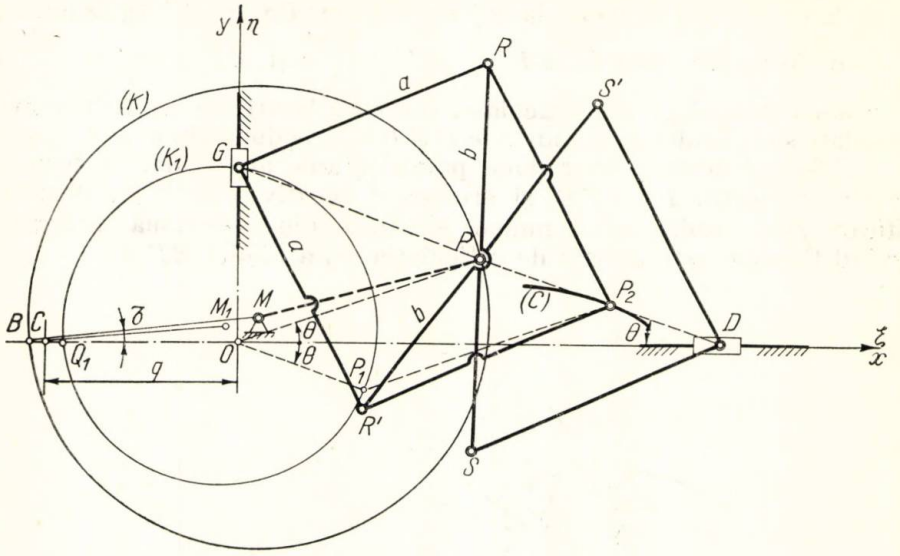


Fig. 7

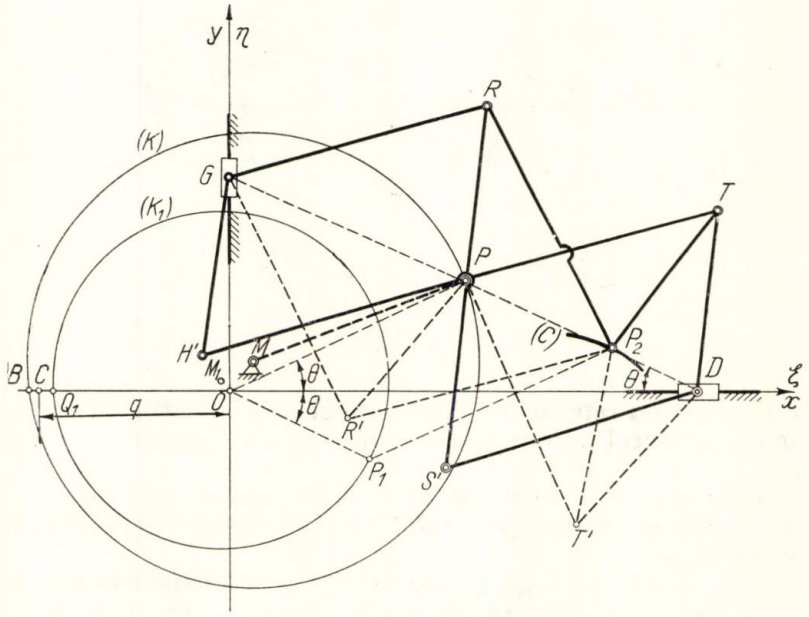


Fig. 8

se face pe baza formulei (21), astfel că punctul P_2 descrie profilul (C) Carafoli.

În figura 8 s-a reprezentat un mecanism pentru trasarea profilului Carafoli, la care condiția fundamentală $OP = PD = PG$ este realizată de mecanismul de bază format din paralelogramele articulate egale $DTPS'$ și $GH'PR$.

Punctul P s-a articulat la mijlocul barelor RS' și TH', egale între ele, și care formează laturile $RP = PS' = \frac{RS'}{2}$ și $TP = PH' = \frac{TH'}{2}$ ale celor două paralelograme articulate. Celelalte laturi ale paralelogramelor articulate se articulează în punctele D și G la cele două cuple de translație.

Folosind laturile celor două paralelograme articulate, se formează inversorul pozitiv $PTDT'P_2$ și inversorul negativ $PRGR'P_2$. Prin simplificare structurală, luînd numai jumătate din cele două inversoare, profilul Carafoli este descris de articulația P_2 a diadei RP_2T.

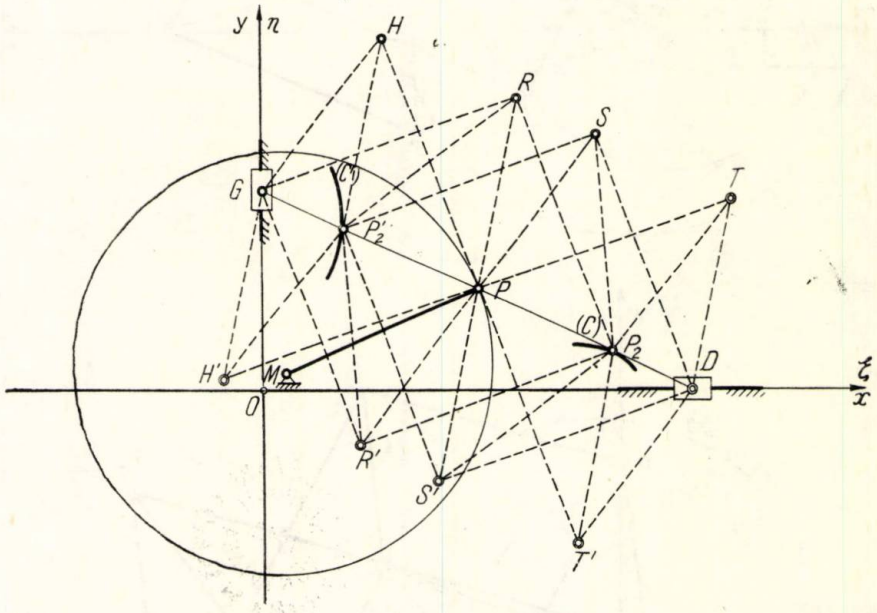


Fig. 9

În figura 9 s-a reprezentat o schemă generală pentru formarea mecanismelor, cu ajutorul cărora se trasează, pe cale mecanică, profilele (C) și (C').

Pe baza acestei scheme, se proiectează mecanismul cel mai bun și care îndeplinește condițiile optime din punct de vedere structural, funcțional și al preciziei.

În cele de mai sus s-au reprezentat cîteva mecanisme noi realizate pentru construirea exactă a profilului Carafoli și, totodată, s-au dat construcții și scheme geometrice pe baza cărora s-a putut stabili o metodă generală pe baza căreia se pot forma și alte mecanisme.

La profilul Jukovski, cu bordul de fugă ascuțit, parametrul q corespunde punctului B și, ca urmare, acest profil se trasează cu aceleași mecanisme descrise mai sus, dimensionate în raport cu valoarea lui q corespunzător punctului B ($\zeta_B = -q$).

Primită la redacție la 9 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. L. Bieberbach, *Über die konforme Abbildung nahezukreisförmingen Bereiche*, Sitzungberichte der Bayr. Akad. d. Wiss, 1924, p. 181.
2. G. Barrillon, *Sur un appareil mécanique servant au tracé des champs hydrodynamique*, CRAS de Paris, **182**, 571 (1926).
3. P. Dupont, M. Girault, *Quelques problèmes relatifs au profils Jukowski*, Bulletin Technique nr. 22, Service Technique de l'Aèronautique, p. 1294.
4. M. Léglise, *Un appareil traçant les profils Jukowski*, l'Aéronautique *10*, 50 (1928).
5. J. A. Gerşogorin, *Mehanizm dlia postroenie funkţii* $\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^2}{z}\right)$, Izv. L.T.I. **II**, 1928 şi Z.F.M. *21*, 391 (1930).
6. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Aerodinamics*, (fourth edition) St. Martin's Press, New York, 1966, p. 111.
7. N. L. Ghosh, H. K. Chatterjee, *Resistance in potential flow with circulation (II)*, Proceeding of the National Institute of Sciences of India, **26**, A, *6* (1960).
8. O. Popa, *Reţele de profile Carafoli*, Studii cerc. ştiinţe tehnice Timişoara, **VII**, *3—4* (1960).
9. — *Caracteristicile hidrodinamice ale reţelelor de profile Carafoli MHTC—04—04—10*, St. cerc. ştiinţe tehnice, Timişoara, **IX** (1962).
10. E. S. Burka, *Investigations aérodynamiques de profil MHT—C—04—04—10, type Carafoli*, Rév. Roum. Sci. Techn., Mécanique Appliquée, **12**, *2* (1967).
11. E. Carafoli, *Aerodinamica*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1951.

METODĂ GENERALĂ PRIVIND CALCULUL PARAMETRILOR DIAGRAMELOR DE VITEZE ALE ASCENSOARELOR

de P. C. ŢEPELUŞ
Institutul de petrol, gaze
şi geologie, Bucureşti

621.87

În prezenta lucrare se expune o nouă metodă generală de calcul al parametrilor diagramelor de viteze în funcţie de parametrii generali adimensionali ai ascensoarelor electrice. Totodată, se prezintă formulele pentru calculul parametrilor diagramei-program de viteze cu variaţia vitezei de forma integralei, care se recomandă de utilizat în viitor.

INTRODUCERE

În lucrare se prezintă o nouă metodă generală pentru calculul parametrilor diferitelor diagrame de viteze realizate la ascensoarele electrice amplasate în clădiri şi la acelea amplasate în puţurile miniere (instalaţii de extracţie), prevăzute cu colivii şi schipuri (ultimele, în cazul utilizării de mecanisme speciale de descărcare a lor). Din punctul de vedere al tipurilor constructive realizate şi al dinamicii lor, aceste două feluri de ascensoare nu se deosebesc în esenţă. Ascensoarele din clădiri transportă sarcini la înălţimi între 3 şi 200 m, iar cele din instalaţiile de extracţie deservesc puţurile miniere cu distanţă între orizonturi între 8 şi 10 m, ajungînd pînă la peste 1000 m.

Deosebirile dintre aceste două feluri de ascensoare sînt urmarea adaptării de soluţii constructive asemănătoare la condiţiile lor naturale de amplasare şi la sarcini de transport de mărimi diferite, precum şi la asigurarea unor regimuri speciale de funcţionare. Aceste deosebiri nu afectează metoda de calcul al parametrilor cinematicii şi dinamicii lor. Ascensoarele, în raport cu înălţimea de ridicat şi natura sarcinilor, realizează o gamă variată de diagrame de viteze cu patru, trei şi două perioade, ultimele întîlnindu-se mai rar, numai în cazul cînd sînt impuse de procesul tehnologic.

1. SUCCINTĂ PREZENTARE A NOII METODE DE CALCUL AL PARAMETRILOR DIAGRAMEI DE VITEZE

Pentru calculul parametrilor diagramelor de viteze, în majoritatea țărilor se folosesc adesea formulele din mecanica clasică și, prin tatonare, se caută valorile lor preferabile. Unele formule sau metode de calcul al parametrilor diagramelor de viteze au fost elaborate de diferiți autori și, din analiza lor, reies următoarele constatări mai importante :

a) Metodele se bazează pe principiul calculului individual al fiecărei instalații, iar formulele de calcul al parametrilor diagramei de viteze nu sînt deduse direct în funcție de parametrii generali adimensionali ai ascensoarelor, factorul de viteză α și constanta regimului dinamic c, cu toate că acești parametri au fost cunoscuți. Totodată, precizarea valorilor optimale ale lui α și c din punct de vedere tehnic și economic permite folosirea în proiectarea și tipizarea ascensoarelor a unor principii și criterii, dintre care menționăm principiul similitudinii și criteriile de optimizare și economice adecvate de compararea a diferitelor tipuri de ascensoare cu diferite sisteme de acționare. În acest scop ar fi fost indicată existența unei relații optimale între α și c, relație care n-a fost elaborată pînă în prezent.

b) Metoda pentru calculul parametrilor diagramelor de viteze ale instalațiilor de extracție miniere elaborată de G. M. Elancik [4] prevede determinarea vitezei maxime V în funcție de factorul α prin intermediul unei noi constante cinetice E, introdusă de autor, fără însă să utilizeze vreo relație analitică între α și c. Metoda sa se pretează, îndeosebi, la ascensoarele acționate cu motor asincron. Contribuția sa valoroasă constă în faptul că, pentru prima dată, a introdus coeficienții cinetici adimensionali ε_1 și ν_1 pentru legile de mișcare pe care le-a analizat în raport cu viteza maximă V și cu accelerația inițială a_1. Formulele pentru calculul parametrilor unor diagrame de viteze utilizate în exploatarea instalațiilor de extracție miniere au fost elaborate și de G. B. Davîdov [14], fără însă ca ele să întrunească condițiile unei metode de calcul, și autorul nu a prezentat soluții în problemele sus-menționate. Tot pentru calculul parametrilor diagramelor de viteze ale instalațiilor de extracție miniere a prezentat formule și F. N. Șliarski [10] formule care nu au nici o legătură cu factorul de viteză α și, după cum însuși autorul a precizat, care nu pot asigura un calcul precis al parametrilor decît în anumite cazuri [4], [10], [12].

În noua metodă care se propune, formulele de calcul al parametrilor diagramelor de viteze sînt elaborate în funcție de factorul de viteză, care reprezintă criteriul de similitudine cinetic al ascensoarelor. În acest scop s-a dovedit oportună introducerea coeficienților cinetici globali adimensionali de timp τ_i și ai drumului parcurs τ_h. În componența lor intră coeficienții cinetici ε_i și ν_i, precum și τ, coeficientul de formă*) al diagramei de viteze. De asemenea, în expresia lor intră raportul dintre duratele de timp ale perioadelor tranzitorii de bază, notat prin simbolul β_i, care marchează posibilitatea de asimetrie a diagramelor de viteze. În vederea soluționării deficienței sus-amintite din metoda lui G. M. Elancik, au fost deduse de autor formulele pentru calculul coeficienților ε_i și ν_i în funcție de accelerația finală a_{1f}.

*) Mai concret asupra coeficientului τ se va reveni în paragraful 3.

Sub această formă, formulele elaborate au permis folosirea directă a unei relații funcționale de legătură între cinematica și dinamica instalației, concretizată prin relația optimală dintre α*) și c care, în cazul ascensoarelor, are următoarea expresie [15], [18]:

$$\alpha = 1 + x c = 1 + (1 - 1{,}15)\, c, \tag{1}$$

unde

$$\alpha = \frac{V}{\frac{H}{T}} = \frac{V}{V_{med}} \text{ — factorul de viteză *),} \tag{2}$$

$$c = \mu \frac{H}{T^2} = \frac{\mu V^2}{\alpha^2 H} \text{ — constanta regimului dinamic *),} \tag{3}$$

$$V = \frac{H}{T} = \alpha \sqrt{\frac{c}{\mu} H} \text{ — viteza maximă, m/s,} \tag{4}$$

$$\mu = \frac{m}{Q} \text{ — factorul de masă care reprezintă raportul dintre masele } m \text{ reduse la periferia organului de înfășurare și sarcina utilă } Q \text{ static neechilibrată } \frac{s^2}{m}; \tag{5}$$

Q — sarcina static neechilibrată, kgf,
H — înălțimea de transport, m,
T — durata unei curse, s.

Întrucît relațiile (1), (3) și (5) aparțin studiului dinamicii ascensoarelor, deducția lor nu se va prezenta. Ca urmare a concepției adoptate și a celor relatate mai sus, a rezultat o metodă generală și unitară pentru calculul parametrilor diagramelor de viteze, metodă care, operînd cu formule mai simple, facilitează sensibil interpretarea fenomenelor ce au loc. În exemplificarea metodei de calcul, dintre tipurile de diagrame de viteze analizate în lucrare, se vor folosi numai cele frecvent utilizate, precum și aceea care se propune.

2. COEFICIENȚII CINETICI AI DIAGRAMELOR DE VITEZE

O examinare mai atentă a formulelor de calcul care stabilesc relațiile de bază dintre parametrii t, V, H și a diferitelor diagrame de viteze cu diferite legi de mișcare în perioadele tranzitorii, ne arată că aceste relații se deosebesc numai prin valoarea unor coeficienți cinetici care au o expresie de calcul și o valoare bine determinată pentru o lege de mișcare dată.

*) Factorul de viteză α a fost introdus de V. G. Makarov și constanta c de M. M. Fedorov, iar în lucrare se folosește formula lui c dată de G. M. Elanțik [4]. Deducerea relației (1), elaborată de autor, se prezintă în lucrarea [12], varianta ei pentru $x = 1$ recomandîndu-se pentru ascensoarele din clădiri, iar aceea cînd $x = 1{,}15$ pentru instalațiile de extracție cu contragreutate.

În acest sens se exemplifică două diagrame de viteze, la una viteza variind după o lege oarecare reprezentată printr-o curbă convexă (fig. 1*a*) și la cealaltă printr-o curbă concavă (fig. 1 *b*). Timpul t_0 în cazul mișcării uniform accelerate cu accelerația finală a_{1f} se poate calcula după formula

$$t_0 = \frac{V}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{V}{a_{1f}}. \tag{6}$$

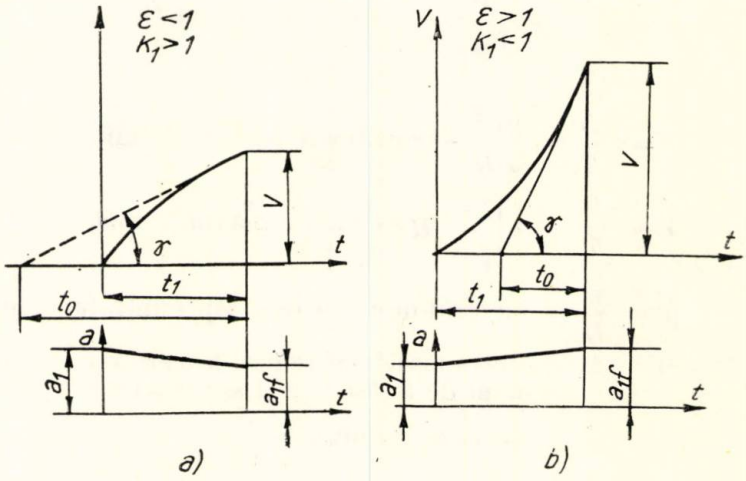


Fig. 1. — Diagrama de viteze :
a) cu accelerația inițială descrescătoare,
b) cu accelerația inițială a_1 crescătoare.

Din figura 1 reiese că

$$\varepsilon_1' = \frac{t_1}{t_0} \quad \text{sau} \quad t_1 = \varepsilon_1' t_0. \tag{7}$$

Din relațiile (6) și (7) rezultă următoarea expresie :

$$t_1 = \varepsilon_1' \frac{V}{a_{1f}}. \tag{8}$$

Durata perioadei t_1 este aceeași, fie că utilizăm accelerația inițială a_1, fie că utilizăm pe cea finală a_{1f} și de aceea putem scrie :

$$\frac{t_1}{t_1} = \frac{\varepsilon_1' \dfrac{V}{a_{1f}}}{\varepsilon_1 \dfrac{V}{a_1}} = \frac{a_1}{a_{1f}} - \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_1} = k_1 \frac{\varepsilon_1'}{\varepsilon_1} \tag{9}$$

sau

$$\varepsilon_1' = k \quad \varepsilon_1, \tag{9a}$$

în care

$$k_1 = \frac{a_1}{a_{1f}} = \frac{1}{k}, \qquad k = \frac{a_{1f}}{a_1}. \tag{10}$$

Avînd în vedere expresiile (2), (8), (9) şi (10), se obţin următoarele variante ale formulei generale de calcul al timpului t_1:

$$t_1 = \varepsilon_1' \frac{V}{a_{1f}} = \varepsilon_1 \frac{kV}{a_1} = \frac{\varepsilon_1'}{\tau} \frac{\alpha - 1}{\alpha} T = \tau_t \frac{\alpha - 1}{\alpha} T \, s, \tag{11}$$

unde

τ este coeficientul de formă al diagramei de viteză *) [15],

τ_t — coeficientul cinetic global de timp *)[15],

ε_1' — reprezintă un coeficient adimensional care depinde de legea de variaţie a vitezei şi se caracterizează prin raportul dintre valoarea timpului t_0, care ar fi avut loc în cazul mişcării uniform accelerate, şi timpul t_1, care este necesar în cazul legii de mişcare studiată, astfel ca în ambele cazuri viteza maximă V să atingă aceeaşi valoare. Potrivit celor de mai sus şi din figura 1 rezultă că în cazul mişcării uniform accelerate $\varepsilon_1' = \varepsilon_1 = 1$, cînd viteza variază după o curbă concavă $\varepsilon_1' < 1$ ($\varepsilon_1 > 1$), şi în cazul variaţiei ei după o curbă convexă $\varepsilon_1' > 1$ ($\varepsilon_1 < 1$). Concretizarea expresiei (10) se poate exemplifica prin deducerea formulelor de calcul al coeficientului ε_1' pentru legile de mişcare analizate. În cazul cînd avem o mişcare neuniformă, cu variaţia liniară a acceleraţiei conform figurii 1, legile de variaţie ale acceleraţiei şi vitezei se pot exprima prin următoarele relaţii:

$$a = \frac{dv}{dt} = a_{1f} + \frac{a_{1f}(k_1 - 1)}{t_1} t = a_{1f} + \frac{a_1}{t_1}(1 - k)t, \tag{12}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = V - \int_0^t \left[a_{1f} + \frac{a_{1f}(k_1 - 1)t}{t_1} \right] dt = V - \left[a_{1f} t + \frac{a_{1f}(k_1 - 1)}{2 t_1} t^2 \right]. \tag{13}$$

Considerînd, conform expresiei (13), că mişcarea are loc în sens invers, viteza va avea valoarea zero pentru momentul $t = t_1$ şi, ca urmare, se obţine expresia de mai jos:

$$V = \frac{1 + k_1}{2} a_{1f} t_1 = a_{1f} \frac{(1 + k)}{2k} t_1 = \frac{1 + k}{2} a_1 t_1. \tag{14}$$

Din expresia (14) reies următoarele variante ale formulei de calcul al duratei timpului t_1:

$$t_1 = \frac{2}{1 + k_1} \frac{V}{a_{1f}} = \frac{2k}{1 + k} \frac{V}{a_{1f}} = \varepsilon_1' \frac{V}{a_{1f}} = \frac{2}{1 + k} \frac{V}{a_1} = \varepsilon_1 \frac{V}{a_1} = \tau_t \frac{\alpha - 1}{\alpha} T, \tag{15}$$

în care:

$$\varepsilon_1' = \frac{2}{1 + k_1} k_1, \qquad \varepsilon_1 = \frac{2}{1 + k} = \varepsilon_1' k_1. \tag{16}$$

*) Expresiile concrete de calcul al acestor coeficienţi se prezintă în § 3.

În mod analog se poate defini coeficientul cinetic pentru drumul parcurs în perioada t_1. Drumul parcurs în perioada t_1 se poate calcula după formula

$$h_1 = \int v \, dt. \tag{17}$$

Legea de variație a vitezei pentru oricare mișcare studiată se poate prezenta sub forma

$$v = V f(t).$$

Avînd în vedere teorema mediei din calculul integral, expresia (17) se poate prezenta sub forma:

$$h_1 = \int_0^{t_1} v \, dt = V \int_0^{t_1} f(t) \, dt = V t_1 \nu_a. \tag{18}$$

Din expresia (18) rezultă că

$$\nu_a = \frac{h_1}{V t_1}. \tag{19}$$

Introducînd în formula (19) valoarea lui t_1 din expresiile (11) și (15), rezultă formula generală de calcul a drumului parcurs în timpul t_1

$$h_1 = \varepsilon_1' \nu_a \frac{V^2}{a_{1f}} = \nu_1' \frac{V^2}{a_{1f}} = \nu_1 \frac{V^2}{a_1} = \frac{\nu_1'}{\tau} (\alpha - 1) H = \tau_h (\alpha - 1) H,$$

ε_1' — ne arată cît din suprafața $V t_1$, care ar fi avut loc în cazul mișcării uniforme cu viteza constantă V, reprezintă deplasarea liniară h_1, care are loc în cazul legii de variație a vitezei analizate. Valoarea lui ν_1' conform figurii 2, cînd mișcarea este uniform accelerată, este egală cu $\frac{1}{2}$. În cazul mișcării neuniforme accelerate va avea valoarea $\nu_1' < \frac{1}{2}\left(\nu_1 > \frac{1}{2}\right)$, iar cînd mișcarea este neuniform încetinită este egală cu $\nu_1' > \frac{1}{2}\left(\nu_1 < \frac{1}{2}\right)$.

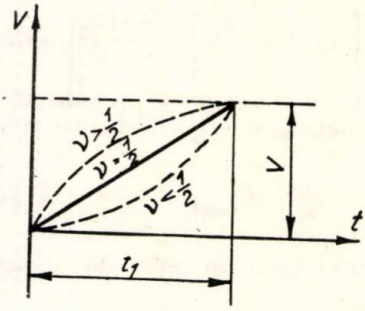


Fig. 2. — Diagrame de viteze și valorile posibile ale coeficientului ν.

Concretizarea formulei (20) pentru felurile de mișcări mai sus analizate se realizează prin dubla integrare a expresiei (12). În urma acestei operații, rezultă următoarele variante ale formulei de calcul al drumului parcurs:

$$h_1 = \frac{2}{3} \frac{2k_1 + 1}{(1+k_1)^2} \frac{V^2}{a_{1f}} = \nu_1' \frac{V^2}{a_{1f}} = \frac{2}{3} \frac{2 + k}{(1 + k)^2} \frac{V^2}{a_1} = \nu_1 \frac{V^2}{a_1} = \frac{\nu_1'}{\tau}(\alpha - 1)H, \tag{21}$$

unde

$$\nu_1' = \frac{2}{3}\frac{2k_1+1}{(1+k_1)^2} = \frac{2}{3}\frac{k(2+k)}{(1+k)^2} = k\,\nu_1 . \tag{22}$$

Modul de utilizare a formulelor (21) şi (22) este acelaşi ca al formulelor (16) şi (17). În cazul mişcării uniform accelerate, unde $k_1 = k = 1$ (fig.3a),

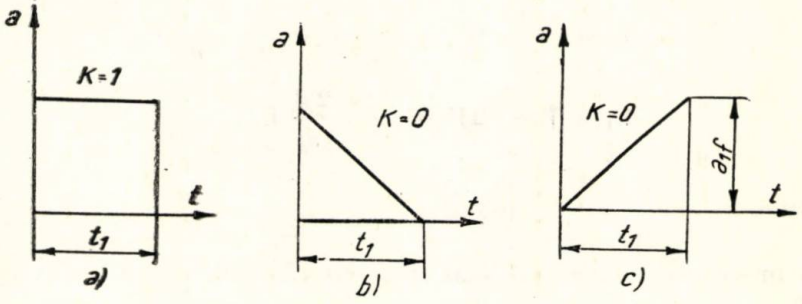


Fig. 3. — Cazuri de variaţie liniare ale acceleraţiei :
a) mişcare uniformă,
b) mişcare neuniform încetinită,
c) mişcare neuniform accelerată.

coeficienţii cinetici, în conformitate cu formulele (16) şi (22), vor avea următoarele valori :

$$\varepsilon_1' = \nu_1 = 1, \quad \nu_1' = \nu_1 = \frac{1}{2}. \tag{23}$$

Cînd variaţia vitezei are loc după o lege parabolică, iar acceleraţia descreşte liniar (fig. 3*b*), ceea ce ar corespunde unei mişcări neuniform încetinite, valoarea coeficienţilor cînd $k = 0$ va fi

$$\varepsilon_1 = 2; \quad \nu_1 = \frac{4}{3}. \tag{24}$$

În cazul mişcării neuniform accelerate şi cînd viteza variază după o lege parabolică (fig. 3*c*), coeficienţii cinetici pentru $k_1 = 0$ vor avea valorile

$$\varepsilon_1' = 2; \quad \nu_1' = \frac{2}{3}. \tag{25}$$

În perioadele tranzitorii, viteza poate varia după o curbă de forma asemănătoare simbolului integralei (fig. 4). Pentru asemenea tip de diagramă de viteză, în literatura de specialitate nu s-au prezentat formule de calcul al parametrilor săi. În conformitate cu formula (4) şi formulele (15), (21) şi (22), reies următoarele expresii :

$$t_1 = \frac{t_{1a}}{1-2d_c} = t_{c1} + t_{1a} + t_{c1} = \frac{2}{1+k_1}\frac{V_c}{a_1} + \frac{V_1}{a_1} + \frac{2}{1+k}\frac{V_c}{a_1}. \tag{26}$$

Din figura 4, de asemenea, rezultă următoarele relații [15]:

$$t_{1a} = t_1(1 - 2d_c) = \frac{1 - 2d_c}{1 - d_c}\frac{V}{a_1}, \tag{27}$$

$$t_c = d_c\, t_1 = \frac{d_c}{1 - 2d_c}\frac{V_1}{a_1} = \frac{d_c}{1 - d_c}\frac{V}{a_1}, \tag{28}$$

$$V_c = \frac{a_1 t_c}{2} = \frac{d_c}{2(1 - d_c)}\, V_1 = \frac{d_c}{2(1 - d_c)}\, V, \tag{29}$$

$$V_1 = V - 2V_c = \frac{1 - 2d_c}{1 - d_c}\, V, \tag{30}$$

în care $d_c = \dfrac{t_c}{t_1}$.

Avînd în vedere relațiile de mai sus, formula (26) a duratei timpului t_1 devine

$$t_1 = \varepsilon_1 \frac{V}{a_1}, \tag{31a}$$

unde

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{d_c}{1 - d_c}\left[\frac{1}{1 + k_1} + \frac{1}{1 + k} - 1\right]. \tag{31b}$$

Cînd $k_1 = k = 0$, ceea ce corespunde curbei vitezei necesare în practică, formula (26) va lua următoarea formă simplificată [15]:

$$t_1 = \frac{1}{1 - d_c}\frac{V}{a_1} = \varepsilon_1 \frac{V}{a_1} = \frac{\varepsilon_1}{\tau}\frac{\alpha - 1}{\alpha}\, T = \tau_h(\alpha - 1)\, T, \tag{32}$$

în care

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1 - d_c}. \tag{33}$$

Drumul parcurs în perioada t_1 (figura 4) potrivit relațiilor (15), (21), (27) — (30) se poate exprima prin formula

$$h_1 = h_{c1} + h_{1a} + (t_{1a} + t_{c1})\, V_c + t_{c1} V_1 + h_{c1} = \nu_1 \frac{V^2}{a_1} = \frac{\nu_1}{\tau}(\alpha - 1)H = \\ = \tau_h(\alpha - 1)\, H, \tag{34}$$

unde

$$\nu_1 = \frac{1}{2(1 - d_c)}\left\{d_c^2\left[\frac{2}{3}\frac{2k_1 + 1}{(1 + k_1)^2} + \frac{2}{3}\frac{2 + k}{(1 + k)^2}\right] + d_c(1 - d_c)\left(1 + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{2}{1 + k}\right) + (1 - 2\, d_c)^2 - d_c^2\left[\frac{4}{1 + k} + 2 - \frac{1}{1 + k_1}\right]\right\}. \tag{35}$$

Cînd $k_1 = k = 0$, formula (34) devine [15]

$$h_1 = \frac{1}{2(1-d_c)} \frac{V^2}{a_1} = \nu_1 \frac{V^2}{a_1} = \frac{\nu_1}{\tau} (\alpha - 1)H = \tau_h (\alpha - 1) H . \qquad (36)$$

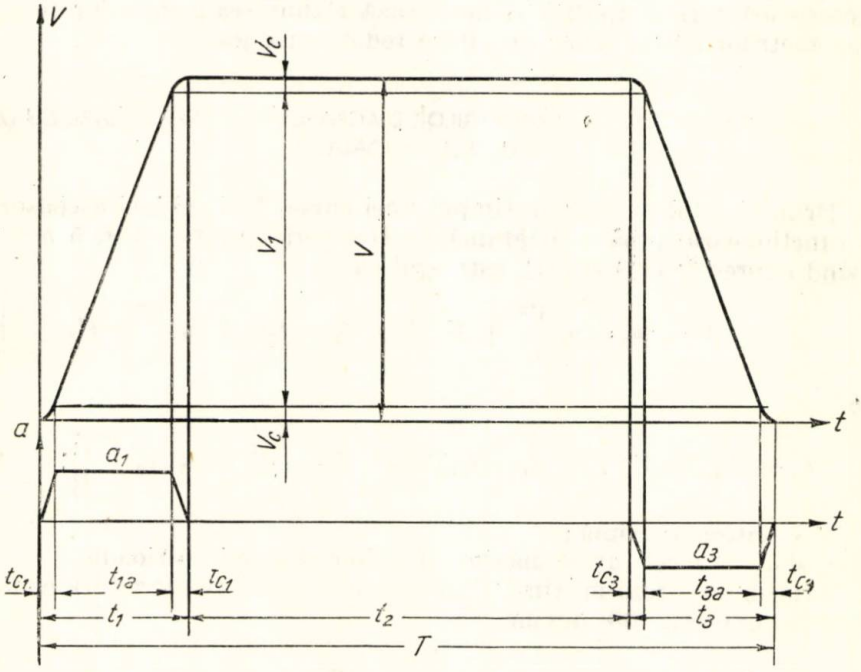


Fig. 4. — Diagrama de viteze liniare cu trei perioade, cu variaţia vitezei de forma integralei.

În cazul cînd se foloseşte valoarea optimă [12], [18] a lui $d_c = 0{,}1$, valabilă pentru ascensoarele electrice, valorile coeficienţilor cinetici în conformitate cu formulele (33) şi (36) sînt [15]

$$\varepsilon_1 = 1{,}1, \quad \nu_1 = 0{,}55. \qquad (37)$$

Din cele de mai sus rezultă că valorile coeficienţilor cinetici la diagramele de viteze cu variaţia liniară sau de forma integralei diferă foarte puţin şi sînt mai mici decît la celelalte tipuri analizate. Exemplificările de mai sus confirmă valabilitatea formulelor (11) şi (21) în cazul utilizării acceleraţiei finale, precum şi faptul că coeficienţii cinetici ε_i, ν_i, τ_i şi τ_h au expresii de calcul şi valori precise pentru o lege de mişcare dată. Valorile coeficienţilor ε_1' şi ν_1' diferă de acelea ale lui ε_1 şi ν_1 numai prin valorile raportului k sau, respectiv, k_1 în funcţie de acceleraţia iniţială sau finală care se foloseşte în calcule, diferenţă care nu depinde de legea de mişcare dată. Formulele (15), (16), (21) şi (22) în funcţie de k_1, atunci cînd valoarea lui k_1 este mai mică decît unitatea, sînt indicate cînd în calcule se foloseşte acceleraţia finală, iar cea iniţială are valoarea zero sau aproape zero. De asemenea, din aceste expresii rezultă că formulele de calcul ale lui ε_1

și ν_1 în funcție de k, deduse prin metoda sa de G. M. Elancik [4], pot fi întrebuințate cînd accelerația inițială este diferită de zero și nu are o valoare apropiată de zero (contrar $k \equiv \infty$), fapt care indică limita de utilizare a acestor relații. Coeficienții cinetici globali, spre deosebire de coeficienții ε_i și ν_i, au aceleași valori indiferent de accelerația folosită în calcule, caracteristică care simplifică și facilitează elaborarea formulelor de calcul al parametrilor diagramelor de viteze redate mai jos.

3. FORMULELE DE CALCUL AL PARAMETRILOR DIAGRAMEI DE VITEZE LINIARE CU DOUĂ SAU TREI PERIOADE

Drumul total parcurs în timpul unei curse T al cabinei ascensorului care funcționează după o diagramă cu trei perioade (fig. 5 *a*, 5 *b* și 5*c*), utilizînd expresiile (11) și (21), este egal cu

$$h_1 + h_2 + h_3 = \nu_1 \frac{V^2}{a_1} + V\,[T - (t_1 + t_3)] + \nu_3 \frac{V^2}{a_3} = H, \qquad (38)$$

unde

$$h_2 = V\,t_2 = V\,[T - (t_1 + t_3)] = V\left[T - \left(\varepsilon_1 \frac{V}{a_1} + \varepsilon_3 \frac{V}{a_3}\right)\right]; \qquad (38a)$$

V — viteza maximă;

a_1 și a_3 — accelerațiile maxime în prima și a treia perioadă.

Exprimînd viteza maximă V în funcție de factorul de viteză conform relației (2), expresia (38) devine

$$\frac{\alpha^2}{a_1}\frac{H}{T^2}\tau_3 - (\alpha - 1) = 0 \qquad \text{sau} \qquad \frac{V^2}{a_1}\tau_3 - VT + H = 0, \qquad (39)$$

în care

$$\tau_3 = \varepsilon_1(1 + \beta_t) - \left(\nu_1 + \frac{\nu_3}{\varepsilon_3}\varepsilon_1\beta_t\right) \text{ — coeficientul de formă al diagramei de viteze,} \qquad (40)$$

$$\beta_t = \frac{t_3}{t_1} = \frac{\varepsilon_3 a_1}{\varepsilon_1 a_3}. \qquad (40a)$$

Din expresia (39), care reprezintă relația fundamentală a cinematicii ascensoarelor care funcționează după diagrame de viteze cu trei perioade, rezultă următoarele formule generale de calcul al accelerațiilor:

$$a_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}\frac{H}{T^2}\tau_3 = \frac{V^2}{VT - H}\tau_3 \ \text{m/s}^2, \qquad (41)$$

$$a_3 = \frac{a_1\,\varepsilon_3}{\beta_t \varepsilon_1}, \quad \text{m/s}^2. \qquad (42)$$

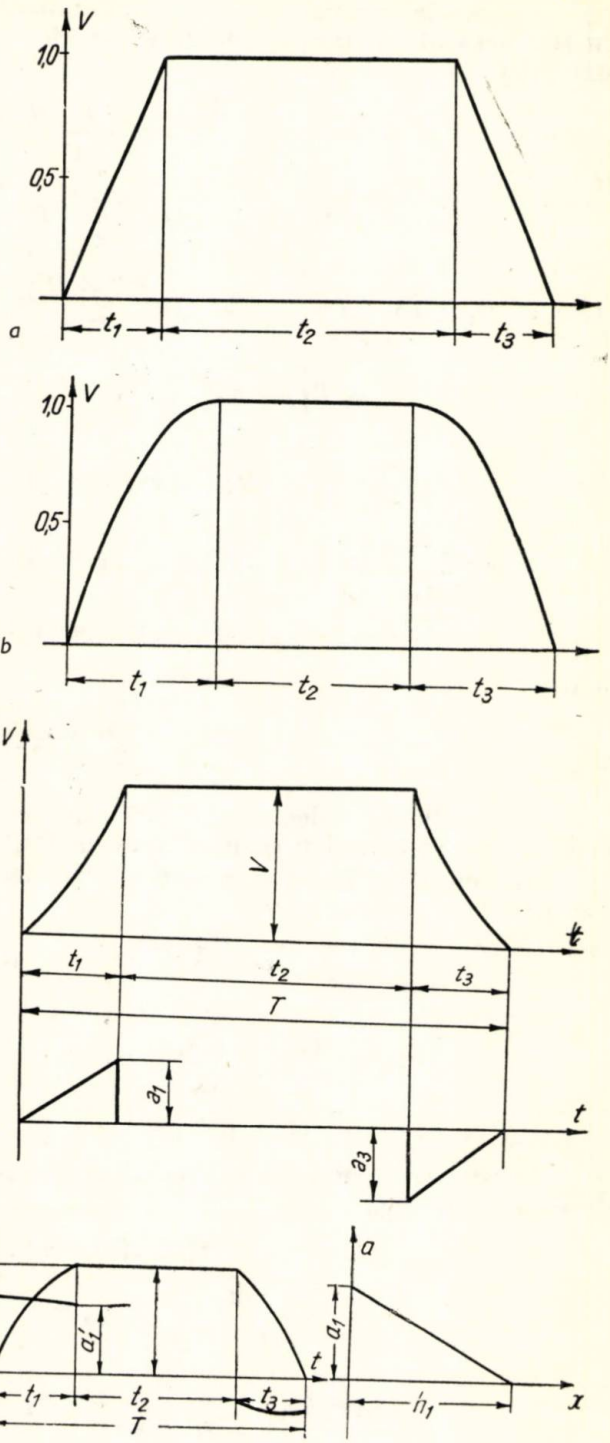


Fig. 5. — Tipuri de diagrame de viteze liniare cu trei perioade :

a) cu variația liniară a vitezei,

b) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială descreşte liniar,

c) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația creşte liniar,

d) cu variația vitezei sinusoidală, iar accelerația descreşte liniar în funcție de drumul parcurs.

Formulele generale de calcul al parametrilor diagramelor de viteze cu trei perioade, avînd în vedere expresiile (11), (21), (39), (41) și (42), sînt [15]:

$$t_1 = \frac{\varepsilon_1}{\tau_3}\,\frac{VT-H}{V} = \tau_t\,\frac{VT-H}{V} = \tau_t\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\,T, \tag{43}$$

$$t_3 = \beta_t\,t_1 = \beta_t\,\tau_t\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\,T, \tag{44}$$

$$t_2 = T-(t_1+t_3) = T-\tau_t\,(1+\beta_t)\,\frac{VT-H}{V} = T\left[1-\tau_t(1+\beta_t)\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\right] =$$

$$= T\left[1-\tau_{t2}\,\frac{\alpha-1}{\alpha}\right], \tag{45}$$

$$h_1 = \frac{\nu_1}{\tau_3}\,(VT-H) = \tau_{h1}\,(VT-H) = \tau_{h1}\,(\alpha-1)H, \tag{46}$$

$$h_3 = \frac{\nu_3\,\varepsilon_1}{\tau_3\,\varepsilon_3}\,\beta_t\,(VT-H) = \beta_t\,\tau_{h3}\,(VT-H) = \beta_t\tau_{h3}(\alpha-1)\,H, \tag{47}$$

$$h_2 = H-\tau_{h2}\,(VT-H) = H\,[1-\tau_{h2}(\alpha-1)], \tag{48}$$

unde

$$h_2 = \nu_1 + \frac{\nu_3\,\varepsilon_1}{\varepsilon_3\,\tau_3}\,\beta_t. \tag{49}$$

Expresiile de calcul al coeficienților cinetici adimensionali τ_3, τ și τ_h se simplifică pentru cazurile frecvent întîlnite în practică, și anume:

a) cînd avem aceleași legi de mișcare în perioadele de accelerare și decelerare ($\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ și $\nu_1 = \nu_3$)

$$\tau_{3a} = (1+\beta_t)\,(\varepsilon_1-\nu_1), \tag{50}$$

$$\tau_t = \frac{\varepsilon_1}{(1+\beta_t)\,(\varepsilon_1-\nu_1)}, \quad \tau_{t2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1-\nu_1}, \tag{51}$$

$$\tau_{h1} = \frac{\nu_1}{(1+\beta_t)(\varepsilon_1-\nu_1)} = \frac{\tau_{h3}}{\beta_t}, \quad \tau_{h2} = \frac{\nu_1}{\varepsilon_1-\nu_1}; \tag{52}$$

b) cînd avem aceleași legi de mișcare în perioadele t_1 și t_3 și diagrama de viteze este simetrică ($\beta_t = 1$)

$$\tau_{3a} = 2(\varepsilon_1-\nu_1), \tag{53}$$

$$\tau_t = \frac{\varepsilon_1}{2(\varepsilon_1-\nu_1)}; \quad \tau_{t2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1-\nu_1}, \tag{54}$$

$$\tau_{h1} = \tau_{h3} = \frac{\nu_1}{2(\varepsilon_1-\nu_1)}, \quad \tau_{h2} = \frac{\nu_1}{\varepsilon_1-\nu_1}. \tag{55}$$

Expresiile de calcul al coeficienților cinetici τ pentru diagramele de viteze analizate în § 2, care au aceleași legi de mișcare în perioadele t_1 și t_3, conform relațiilor (10), (17), (21), (22), (44) și (47) vor fi : a) cînd mișcarea este uniform accelerată ($k_1 = k = 1$), neuniform accelerată și neuniform încetinită

$$\tau_{3a} = (1 + \beta_t)(\varepsilon_1 - \nu_1) = (1 + \beta_t)\left[\frac{2}{1+k} - \frac{2}{3}\frac{2+k}{(1+k)^2}\right] \tag{56a}$$

sau

$$\tau_{3a} = (1 = \beta_t)(\varepsilon_1' - \nu_1') = (1 + \beta_t)\left[\frac{2}{1+k_1} - \frac{2}{3}\frac{2k_1+1}{(1+k_1)^2}\right]; \tag{56b}$$

b) cînd variația vitezei ($k = k_1 = 0$) este de forma integralei (fig.4)

$$\tau_{3a} = (1 + \beta_t)(\varepsilon_1 - \nu_1) = (1 + \beta_t)\left[\frac{1}{1-d_c} - \frac{1}{2(1-d_c)}\right] = \frac{1+\beta_t}{2(1-d_c)}. \tag{57}$$

În cazul cînd accelerația descrește liniar în funcție de drumul parcurs și viteza crește variind sinusoidal (figura 5 *d*), va rezulta următoarea expresie :

$$\tau_{3a} = (1 + \beta_t)(\varepsilon_1 - \nu_1) = \left(\frac{\arccos k}{1-k^2} - \frac{1}{1+k}\right)(1 + \beta_t). \text{ *)}$$

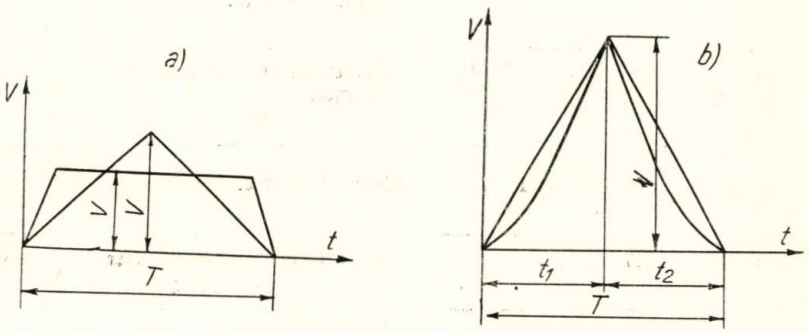


Fig. 6. — Diagrame de viteze :
a) cu două și trei perioade,
b) diagrame de viteze cu două perioade.

În tabela 1 se prezintă valorile coeficientului cinetic τ_3 pentru diagramele de viteze cu trei perioade, frecvent întîlnite în practică, cînd în perioadele t_1 și t_3 avem aceeași lege de mișcare, iar în tabela 2 valorile coeficienților cinetici globali pentru determinarea timpului și a drumului parcurs.

În cazul diagramelor de viteze cu două perioade (fig. 6), drumul total parcurs este egal cu

$$h_1 + h_2 = \nu_1 \frac{V^2}{a_1} + \nu_2 \frac{V^2}{a_2} = H. \tag{58}$$

*) Deducerea expresiilor pentru calculul lui ε_1 și ν_1 sînt prezentate în lucrarea [4].

Tabela 1

k	k_1	β_t	τ_3	Tipul diagramei de viteze cu trei perioade.
1	1	$\neq 1$	$\frac{1}{2}(1+\beta_t)$	Asimetrică, cu variația liniară a vitezei ($\varepsilon_1 = 1{,}0$; $\nu_1 = 0{,}5$).
1	1	1	1	Idem, simetrică.
0	–	$\neq 1$	$\frac{2}{3}(1+\beta_t)$	Asimetrică, cu variația parabolică a vitezei și descreșterea liniară a accelerației inițiale $\left(\varepsilon_1 = 2{,}0;\ \nu_1 = \frac{4}{3}\right)$.
1	–	1	4/3	Idem, simetrică.
–	0	$\neq 1$	$\frac{4}{3}(1+\beta_t)$	Asimetrică, cu variația parabolică a vitezei și creșterea liniară a accelerației inițiale $\left(\varepsilon_1 = 2{,}0;\ \nu_1 = \frac{2}{3}\right)$.
–	0	1	$\frac{8}{3}$	Idem, simetrică.
0	0	$\neq 1$ $d_c = 0{,}1$	$\frac{1+\beta_t}{2(1-d_c)} = \frac{1+\beta_t}{1{,}8}$	Asimetrică, cu variația vitezei de forma integralei ($\varepsilon_1 = 1{,}1$; $\nu_1 = 0{,}55$).
0	0	1 $d_c = 0{,}1$	$\frac{1}{1-d_c} = 1{,}11$	Idem, simetrică.
0	–	$\neq 1$	$0{,}57(1+\beta_t)$	Asimetrică, cu variația vitezei sinusoidală ($\varepsilon_1 = 1{,}57$; $\nu_1 = 1$).
0	–	1	1,14	Idem, simetrică.

După efectuarea transformărilor corespunzătoare, în formula (58) se obțin următoarele variante ale ecuației fundamentale a cinematicii ascensoarelor care funcționează după diagrame de viteze cu două perioade

$$\frac{\alpha^2}{a_1}\frac{H}{T^2}\tau_2 - 1 = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{V^2}{a_1}\tau_2 - H = 0, \tag{59}$$

în care

$$\tau_2 = \nu_1 + \frac{\nu_2}{\varepsilon_2}\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\beta_t, \quad \text{coeficientul de formă al diagramei de viteze,} \tag{60}$$

$$\beta_t = \frac{t_2}{t_1} = \frac{a_1}{a_2}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \tag{61}$$

Tabela 2

k	k_1	β_t	τ_2	Tipul de diagrame de viteze cu două perioade.
1	1	$\neq 1$	$\frac{1}{2}(1+\beta_t)$	Asimetrică, cu variația liniară a vitezei.
1	1	1	1,0	Idem, simetrică.
0	—	$\neq 1$	$\frac{4}{3}(1+\beta_t)$	Asimetrică, cu variația parabolică a vitezei și descreșterea liniară a accelerației inițiale.
0	—	1	$\frac{8}{3}$	Idem, simetrică.
—	0	$\neq 1$	$\frac{2}{3}(1+\beta_t)$	Asimetrică, cu variația parabolică a vitezei și creșterea liniară a accelerației inițiale.
—	0	1	4/3	Idem, simetrică.
0	0	$\neq 1$ $d_c = 0{,}1$	$\frac{1+\beta_t}{1{,}8}$	Asimetrică, cu variația vitezei de forma integralei.
0	0	1 $d_c = 0{,}1$	1,11	Idem, simetrică.
0	—	$\neq 1$	$(1+\beta_t)$	Asimetrică, cu variația vitezei sinusoidală.
0	—	1	2	Idem, simetrică.

Din expresiile (59) reies următoarele formule generale de calcul al accelerațiilor liniare :

$$a_1 = \frac{\alpha^2}{T^2}\tau_2 = \frac{V^2}{H}\tau_2, \quad \text{m/s}^2, \tag{62}$$

$$a_2 = \frac{\varepsilon_2 a_1}{\varepsilon_1 \beta_t}, \quad \text{m/s}^2. \tag{63}$$

Formulele generale de calcul al parametrilor diagramei de viteze cu două perioade, avînd în vedere relațiile (11 și 21), sînt

$$t_1 = \frac{t_2}{\beta_t} = \frac{\varepsilon_1}{\tau_2}\frac{H}{V} = \tau_t \frac{H}{V} = \tau_t \frac{T}{\alpha}, \tag{64}$$

$$h_1 = \frac{\nu_1}{\tau_2} H = \tau_{h1} H, \; h_2 = \frac{\varepsilon_2 V^2}{a_2} = \frac{\nu_2 \varepsilon_1}{\varepsilon_2 \tau_2}\beta_t \frac{V^2}{a_1} = \tau_{h2} H. \tag{65}$$

Formulele generale de calcul al coeficientului cinetic τ_2 și al coeficienților cinetici globali τ_t și τ_h pentru diagrame de viteze cu două perioade sînt

a) cînd avem aceeași lege de mișcare în perioadele t_1 și t_2,

$$\tau_{2a} = \nu_1 (1 + \beta_t), \tag{66}$$

$$\tau_t = \frac{\varepsilon_1}{\nu_1(1 + \beta_t)}, \tag{67}$$

$$\tau_{h1} = \frac{\tau_{h2}}{\beta_t} = \frac{1}{1+\beta_t}; \tag{67a}$$

b) cînd avem aceeași lege de mișcare în perioadele tranzitorii și diagrame simetrice de viteze

$$\tau_{2b} = 2\nu_1, \tag{68}$$

$$\tau_t = \frac{\varepsilon_1}{2\nu_1}, \quad \tau_{h1} = \tau_{h2} = \frac{1}{2}. \tag{69}$$

Formulele pentru calculul coeficientului cinetic τ_2 pentru diagramele de viteze analizate mai sus sînt

a) în cazul mișcării uniform accelerate ($k_1 = k = 1$), neuniform accelerate și neuniform încetinite

$$\tau_{2a} = (1 + \beta_t)\ \nu_1 = \frac{2(1+\beta_t)}{3}\ \frac{2+k}{(1+k)^2} = \frac{2}{3}(1 + \beta_t)\frac{2k_1+1}{(1+k_1)^2} = (1+\beta_t)\nu_1'; \tag{70}$$

b) cînd variația vitezei este de forma integralei

$$\tau_{2a} = (1 + \beta_t)\ \nu_1 = \frac{1 + \beta_t}{2(1-d_c)}. \tag{71}$$

În tabela 3, în conformitate cu formulele de mai sus, se prezintă valorile coeficientului cinetic τ_2 pentru diferite diagrame de viteze cu două perioade cînd în perioadele t_1 și t_2 avem aceeași lege de mișcare iar, în tabela 4 se dau valorile coeficienților cinetici globali τ_t și τ_h.

Durata unei curse a cabinei, după cum reiese din expresiile (33) și (53), se poate calcula după formulele [15], [18] și [19]

a) pentru diagrame de viteze cu trei perioade

$$T = \alpha \sqrt{\frac{H\tau_3}{a_1(\alpha-1)}} = \frac{H}{V} + \frac{V^2}{a_1}\tau_3, \tag{72}$$

b) pentru diagrame de viteze cu două perioade

$$T = \alpha \sqrt{\frac{H\tau_2}{a_1}}. \tag{73}$$

Mărimea lui T, determinată din punct de vedere cinetic prin expresiile de mai sus, este echivalentă cu valoarea ei optimă care rezultă din condițiile impuse de dinamica ascensorului conform relațiilor (1) și (3), și anume

$$T = \sqrt{-\frac{\mu}{c}}\sqrt{H}. \tag{74}$$

Tabela 3

k	k_1	β_t	τ_t	τ_{t2}	τ_{h1}	τ_{h2}	Tipul diagramei de viteze cu trei perioade.
1	1	$\neq 1$	$\frac{2}{1+\beta_t}$	2	$\frac{1}{1+\beta_t}$	1	Asimetrică, cu variația liniară a vitezei.
1	1	1	1	2	1/2	1	Idem, simetrică.
0	—	$\neq 1$	$\frac{3}{1+\beta_t}$	3	$\frac{2}{1+\beta_t}$	2	Asimetrică, cu variația parabolică a vitezei și descreșterea liniară a accelerației inițiale.
0	—	1	$\frac{3}{2}$	3	1	2	Idem, simetrică.
—	0	$\neq 1$	$\frac{3}{2}\,\frac{1}{1+\beta_t}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2(1+\beta_t)}$	$\frac{1}{2}$	Asimetrică, cu variația parabolică a vitezei și creșterea liniară a accelerației inițiale.
—	0	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{4}$	1/2	Idem, simetrică.
0	0	$\neq 1$ $d_c = 0{,}1$	$\frac{2}{1+\beta_t}$	2	$\frac{1}{1+\beta_t}$	1	Asimetrică, cu variația vitezei de forma integralei.
0	0	1 $d_c = 0{,}1$	1	2	$\frac{1}{2}$	1	Idem, simetrică.
0	—	$\neq 1$	$\frac{2{,}76}{(1+\beta_t)}$	2,75	$\frac{1{,}76}{(1+\beta_t)}$	1,76	Asimetrică, cu variația vitezei sinusoidală.
0	—	1	1,38	2,75	0,88	1,76	Idem, simetrică.

În mod asemănător se procedează la alegerea valorii optime a accelerației maxime din condițiile impuse de dinamica instalației, și anume după formulele [15], [18]

a) pentru diagrame de viteze cu trei perioade

$$a_1 = \frac{\alpha^2 c}{\alpha - 1\mu}\ \tau_2 = \frac{(1+xc)^2}{x}\ \frac{\tau_3}{\mu}, \tag{75}$$

b) pentru diagrame de viteze cu două perioade

$$a_1 = \alpha^2 \frac{H}{T^2}\tau_2 = \alpha^2 \frac{c}{\mu}\tau^2 = \frac{(1+xc)^2 c}{\mu}\tau_2. \tag{76}$$

Formulele de mai sus și expresia (1) ne arată că rezolvarea concretă a parametrilor cinetici ai ascensorului este determinată de valoarea optimă a lui c deoarece coeficienții cinetici τ, τ_t și τ_h și parametrii μ și H sînt cunoscuți pentru o instalație dată. Cunoașterea formulelor de calcul și a valorilor

Tabela 4

k	k_1	β_t	τ_t	τ_{h1}	Tipul diagramei de viteze cu două perioade.
1	1	$\neq 1$	$\frac{2}{1+\beta_t}$	$\frac{1}{1+\beta_t}$	Asimetrică, cu variația liniară a vitezei.
1	1	1	1	1/2	Idem, simetrică.
0	—	$\neq 1$	$\frac{3}{2}\ \frac{1}{(1+\beta_t)}$	$\frac{1}{1+\beta_t}$	Asimetrică, cu variația vitezei parabolică și descreșterea liniară a accelerației inițiale.
0	—	1	3/4	$\frac{1}{2}$	Idem, simetrică.
—	0	$\neq 1$	$\frac{3}{1+\beta_t}$	$\frac{1}{1+\beta_t}$	Asimetrică, cu variația parabolică a vitezei și creșterea liniară a accelerației inițiale.
—	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	Idem, simetrică.
0	0	$\neq 1$ $d_c = 0{,}1$	$\frac{2}{1+\beta_t}$	$\frac{1}{1+\beta_t}$	Asimetrică, cu variația vitezei de forma integralei.
0	0	1 $d_c = 0{,}1$	1	1/2	Idem, simetrică
0	—	$\neq 1$	$\frac{\pi}{2(1+\beta_t)}$	$\frac{1}{1+\beta_t}$	Asimetrică. cu vaiația vitezei sinusoidală.
—	0	1	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	Idem, simetrică.

coeficienților cinetici*) τ, τ_t și τ_h facilitează și mai mult calculul parametrilor t, h și a ai diferitelor diagrame de viteze. Modul de determinare a valorii optime a constantei regimului dinamic c, a relației optimale între α și c depășește cadrul lucrării de față și de aceea nu se prezintă.

Spre exemplificarea celor de mai sus, în tabela 5 se prezintă formulele pentru calculul parametrilor diagramelor de viteze analizate în § 1, iar pentru celelalte forme de diagrame de viteze neanalizate în lucrare se pot utiliza formulele generale pentru calculul coeficienților cinetici τ, τ_t și τ_h redate mai sus. Trecerea de la formulele de calcul al parametrilor diagramelor de viteze liniare la formulele pentru calculul parametrilor diagramelor

*) Componența suplimentară a vitezei, datorită elasticității elementelor instalației, se poate determina experimental după analiza armonică a curbelor ridicate, pentru armonicele de bază calculîndu-se asemănător coeficienții cinetici. Se pot efectua și calcule analitice cu scopul de a determina cît mai precis diagrama reală de viteze a vasului. Aceste probleme specifice dinamicii instalației depășesc cadrul tematicii prezentului material și de aceea nu se prezintă.

de viteze unghiulare se efectuează prin aplicarea relațiilor respective cunoscute din mecanica clasică.

În figurile 7 și 8 se prezintă valorile coeficienților de timp și al drumului parcurs în funcție de valorile factorului de viteză direct în raport cu H și T conform formulelor din tabela 5 pentru diagrame de viteze cu trei perioade, fie că sînt simetrice, fie că sînt asimetrice. Curbele din figurile 9 și 10 ne dau valorile coeficienților de timp și al drumului parcurs în perioadele de accelerare și decelerare pentru diferite valori ale factorului de viteză α direct în raport cu H și T pentru diferite diagrame simetrice de viteze cu trei perioade.

4. FORMULELE DE CALCUL AL PARAMETRILOR DIAGRAMELOR DE VITEZE LINIARE CU PATRU PERIOADE

Diagramele de viteze liniare cu patru perioade sînt necesare în cazul acționării ascensorului cu un motor asincron principal și cu altul suplimentar care intră în funcțiune în perioada a patra, cînd are loc autonivelarea cabinei sau coliviei. Regimul de autonivelare începe la o distanță h_a dată față de nivelul de oprire prevăzut cu o viteză v_a și cu o accelerație a_a cunoscute în urma alegerii prealabile a regimului de frînare și a valorilor prescrise elementelor de comandă ale sistemului de acționare electric.

Drumul parcurs în timpul celor patru perioade conform figurii 11 este egal cu

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_a = H. \tag{77}$$

Introducînd în formula (77) expresiile (11), (21) și (38 a), se obține ecuația fundamentală a cinematicii ascensoarelor care funcționează după diagrame de viteze cu patru perioade în următoarele variante :

$$\frac{\alpha^2}{a_1}\frac{H}{T^2}\tau_4 - (\alpha - b_4) = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{V^2}{a_1}\tau_4 - V(T - t_a) + H - h_a = 0. \tag{78}$$

Din expresiile (78) reies formulele generale de calcul al accelerațiilor și al duratei unei curse T

$$a_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha - b_4}\frac{H}{T^2}\tau_4 = \frac{V^2}{VT - b_4 H}\tau_4, \tag{79}$$

$$a_3 = \frac{a_1}{\beta_t}\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\gamma_v, \tag{80}$$

$$T = \alpha\sqrt{\frac{H\tau_4}{s_1(\alpha - b_4)}}, \tag{81}$$

unde

$$t_a = \frac{h''}{V_a} + \frac{V_a}{a_a}.$$

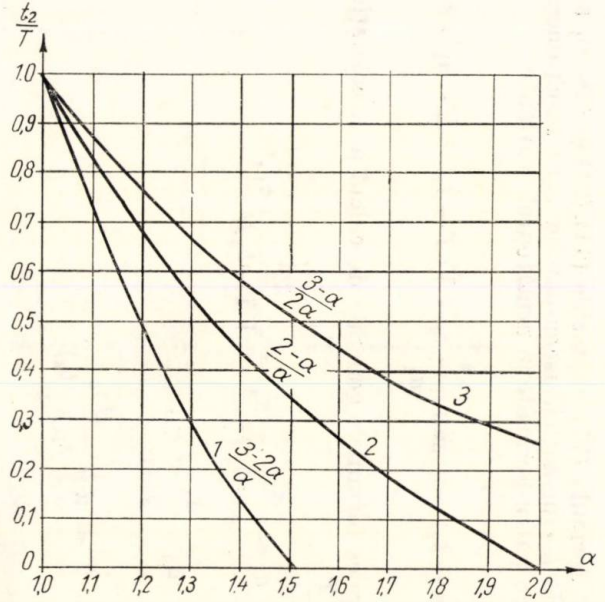


Fig. 7. — Valoarea coeficientului de timp în funcție de factorul de viteză α în perioada de mișcare uniformă t_2 în raport direct față de durata unei curse T pentru diagramele de viteze cu trei perioade :

1) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială descrește liniar, 2) cu variația liniară sau de forma integralei a vitezei, 3) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială crește liniar.

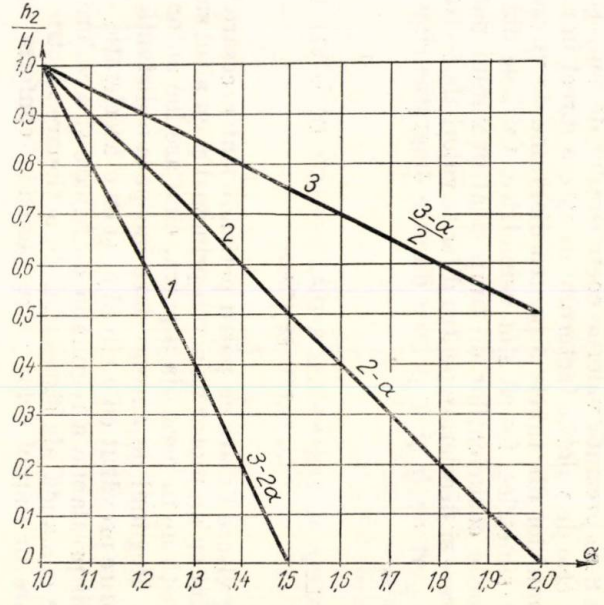


Fig. 8. — Valoarea coeficientului drumului parcurs în funcție de factorul de viteză α în perioada de mișcare uniformă t_2 în raport direct față de înălțimea de transport H pentru diagramele de viteze cu trei perioade :

1) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială descrește liniar, 2) cu variația vitezei liniare sau de forma integralei, 3) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială crește liniar.

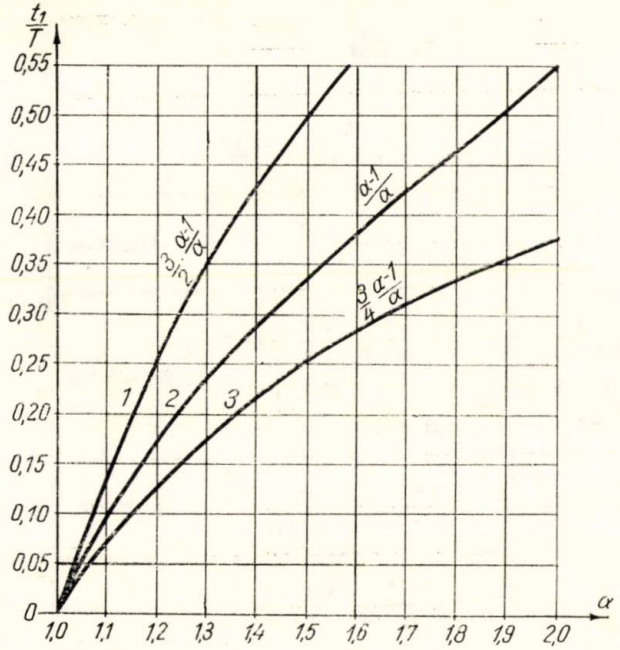


Fig. 9. — Valoarea coeficientului de timp în funcție de factorul de viteză α în perioadele tranzitorii în raport direct față de durata unei curse T penru diagramele simetrice de viteze cu trei perioade :

1) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială descrește liniar, 2) cu variația vitezei liniare sau de forma integralei, 3) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială crește liniar.

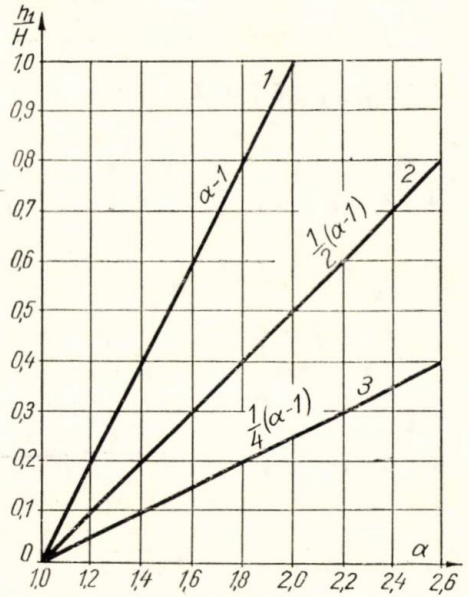


Fig. 10. — Valoarea coeficientului drumului parcurs în funcție de factorul de viteză α în perioadele tranzitorii t_1 și t_3 direct în raport cu înălțimea de transport H pentru diagrame simetrice de viteze cu trei perioade :

1) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială descrește liniar, 2) cu variația vitezei liniare sau de forma integralei, 3) cu variația parabolică a vitezei, iar accelerația inițială crește liniar.

Tabela 5

Diagrame de viteze cu trei perioade

n/n	Parametrii		Viteza variază liniar şi acceleraţie constantă	Viteza variază parabolic şi acceleraţia iniţială a_1 descreşte liniar	Viteza variază parabolic şi acceleraţia iniţială a_1 creşte liniar	Viteza variază după forma integralei $d_c = 0{,}1$
1	t_1	Asimetrică	$\frac{2}{1+\beta_t}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{2}{1+\beta_t}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{3}{1+\beta_t}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{3}{1+\beta_t}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{3}{2(1+\beta_t)}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{3}{2(1+\beta_t)}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{2}{1+\beta_t}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{2}{1+\beta_t}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$
		Simetrică	$\frac{VT-H}{V} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$1{,}5\ \frac{VT-H}{V} = 1{,}5\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{3}{4}\cdot\frac{VT-H}{V} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{VT-H}{V} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$
2	t_3	Asimetrică	$\frac{2\beta_t}{1+\beta_t}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{2}{1+\beta_t}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{3\beta_t}{1+\beta_t}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{3\beta_t}{1+\beta_t}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{3\beta_t}{2(1+\beta_t)}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{3\beta_t}{2(1+\beta_t)}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{2\beta_t}{1+\beta_t}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{2}{1+\beta_t}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$
		Simetrică	$\frac{VT-H}{V} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$1{,}5\ VT-H = 1{,}5\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{3}{4}\ \frac{VT-H}{V} = \frac{3}{4}\ \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$	$\frac{VT-H}{V} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\ T$
	t_2		$T-2\frac{(VT-H)}{V} = \frac{2-\alpha}{\alpha}\ T$	$T-3(VT-H) = \frac{3-2\alpha}{\alpha}\ T$	$T-\frac{3}{2}\ (VT-H) = \frac{3-\alpha}{2\alpha}\ T$	$T=2\frac{(VT-H)}{V} = \frac{2-\alpha}{\alpha}\ T$
3		Asimetrică	$\frac{1}{1+\beta_t}\cdot(VT-H) = \frac{1}{1+\beta_t}\ (\alpha-1)\ H$	$\frac{2}{1+\beta_t}\cdot(VT-H) = \frac{2}{1+\beta_t}\ (\alpha-1)\ H$	$\frac{1}{2(1+\beta_t)}\cdot(VT-H) = \frac{1}{2(1+\beta_t)}\ (\alpha-1)\ H$	$\frac{1}{1+\beta_t}\ (VT-H) = \frac{1}{1+\beta_t}\cdot(\alpha-1)\ H$

	h_1	Simetrică	$\frac{1}{2}(VT-H)=\frac{1}{2}(\alpha-1)H$	$(VT-H)=(\alpha-1)H$	$\frac{1}{4}(VT-H)=\frac{1}{4}(\alpha-1)H$	$\frac{1}{2}(VT-H)=\frac{1}{2}(\alpha-1)H$
4	h_3	Asimetrică	$\frac{\beta_t}{1+\beta_t}(VT-H)=$ $=\frac{\beta_t}{1+\beta_t}(\alpha-1)H$	$\frac{2\beta_t}{1+\beta_t}(VT-H)=$ $=\frac{2\beta_t}{1+\beta_t}(\alpha-1)H$	$\frac{\beta_t}{2(H\beta_t)}(VT-H)=$ $=\frac{\beta_t}{2(1+\beta_t)}(\alpha-1)H$	$\frac{\beta_t}{1+\beta_t}(VT-H)=$ $=\frac{\beta_t}{1+\beta_t}(\alpha-1)H$
		Simetrică	$\frac{1}{2}(VT-H)=$ $=\frac{1}{2}(\alpha-1)H$	$(VT-H)=(\alpha-1)H$	$\frac{1}{4}(VT-H)=$ $=\frac{1}{4}(\alpha-1)H$	$\frac{1}{2}(VT-H)=$ $=\frac{1}{2}(\alpha-1)H$
5	h_2		$2H-VT=$ $=(2-\alpha)H$	$3H-VT=(3-2\alpha)H$	$\frac{3H-VT}{2}=$ $=\frac{(3-\alpha)}{2}H$	$2H-(VT=(2-\alpha)H$
6	a_1	Asimetrică	$\frac{1+\beta_t}{2}\frac{V^2}{VT-H}=$ $=\frac{1+\beta_t}{2}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\frac{H}{T^2}$	$\frac{2}{3}(1+\beta_t)\frac{V^2}{VT-H}=$ $=\frac{2}{3}(1+\beta_t)\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\frac{H}{T^2}$	$\frac{4}{3}(1+\beta_t)\frac{V^2}{VT-H}=$ $=\frac{4}{3}(1+\beta_t)\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\frac{H}{T^2}$	$0{,}55(1+\beta_t)\frac{V^2}{VT-H}=$ $=0{,}55(1+\beta_t)\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\frac{H}{T^2}$
		Simetrică	$\frac{V^2}{VT-H}=$ $=\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\frac{H}{T^2}$	$\frac{4}{3}\frac{V^2}{VT-H}=$ $=\frac{4}{3}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\frac{H}{T^2}$	$\frac{8}{3}\frac{V^2}{VT-H}=$ $=\frac{8}{3}\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\frac{H}{T^2}$	$1{,}1\frac{V^2}{VT-H}=$ $=1{,}1\frac{\alpha^2}{\alpha-1}\frac{H}{T^2}$
7	Soc e	m/s³	∞	∞	$3{,}5\frac{\alpha^3}{(\alpha-1)^2}\frac{H}{T^3}$; ∞	$11\frac{\alpha^3}{(\alpha-1)^2}\frac{H}{T^3}$

Analog, ca în cazurile precedente, se deduc următoarele formule de calcul al parametrilor diagramei de viteze analizate:

$$t_1 = \frac{t_3}{\beta_t} = \varepsilon_1 \frac{V}{a_1} = \frac{\varepsilon_1}{\tau_4} \cdot \frac{VT - b_4 H}{V} = \tau_t \frac{VT - b_4 H}{V} = \tau_t \frac{\alpha - b_4}{\alpha} T, \tag{82}$$

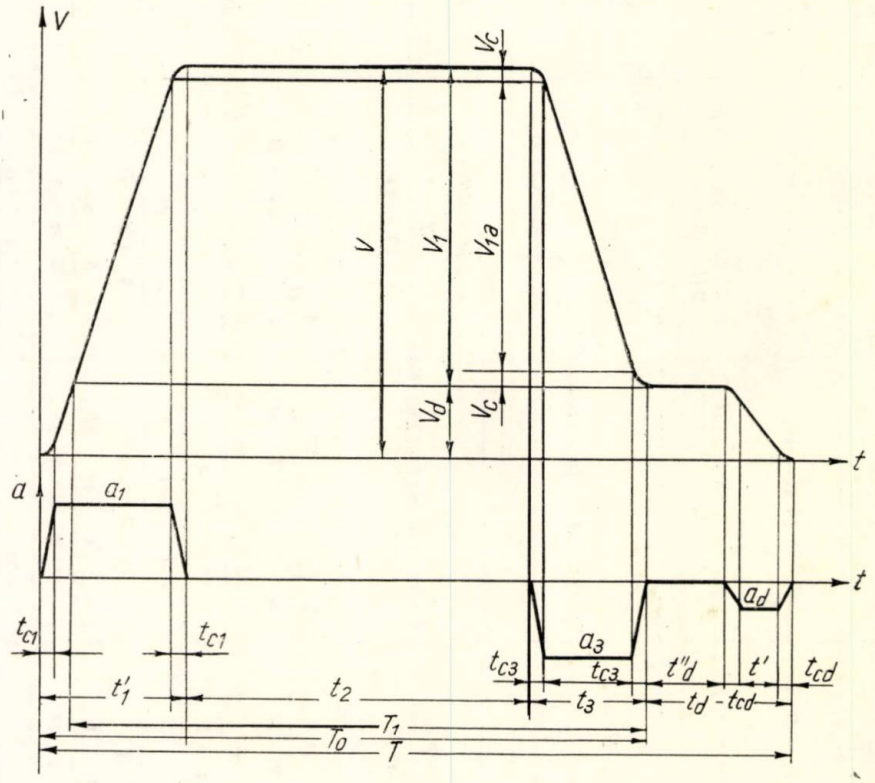


Fig. 11. — Diagrama de viteze cu patru perioade.

$$t_2 = T_0 - (t_1 + t_3) = T\left[\gamma_{T0} - \tau_t(1 + \beta_t)\frac{\alpha - b_4}{\alpha}\right] =$$

$$= \gamma_{T0} T - \tau_t (1 + \beta_t) \frac{VT - b_4 H}{V}, \tag{83}$$

$$h_1 = \nu_1 \frac{V^2}{a_1} = \frac{\nu_1}{\tau_4}(VT - b_4 H) = \tau_{h1}(VT - b_4 H) = \tau_{h1}(\alpha - b_4) H, \tag{84}$$

$$h_3 = \nu_3 \frac{V_1^2}{a_3} + t_3 V_d = \frac{\gamma_r \varepsilon_1}{\varepsilon_3}[\nu_3 + \varepsilon_3 (1 - \gamma_v)]\, \beta_t \frac{V^2}{a_1} = \gamma_{III}\, \beta_t \frac{V^2}{a_1} \tag{85}$$

sau

$$h_3 = \frac{\gamma_{III}}{\tau_4}(VT - b_4H) = \tau_{h3}(VT - b_4H) = \tau_{h3}(\alpha - b_4)H, \tag{85a}$$

$$h_2 = Vt_2 = V\left[T - \varepsilon_1(1 + \beta_t\gamma_v)\frac{V}{a_1} - t_a\right] = VT_0 - \varepsilon_1(1 + \gamma_v\beta_t)\frac{V^2}{a_1} = \tag{86}$$

$$= H[\gamma_{H0} - (\tau_{h1} + \tau_{h3})(VT - b_4H)] = H[\gamma_{H0} - \tau_{h2}(\alpha - b_4)],$$

în care

$$\tau_4 = \frac{\varepsilon_1[1 + \beta_t(1 - \gamma_v - \gamma_1^2)] - \left(\nu_1 + \beta_t\frac{\nu_3}{\varepsilon_3}\varepsilon_1\gamma_v\right)}{\gamma_{T0}} = \frac{\tau_a}{\gamma_{T0}}, \tag{87}$$

$$\beta_t = \frac{t_3}{t_1} = \frac{\varepsilon_3\gamma_v a_1}{\varepsilon_1 a_3}, \quad \gamma_v = \frac{V_1}{V}, \tag{88}$$

$$\gamma_{T0} = \frac{T_0}{T} = \frac{T - t_a}{T} = 1 - \frac{t_a}{T}, \quad \gamma_{H0} = \frac{H_0}{H} = \frac{H - h_a}{H} = 1 - \frac{h_a}{H}, \tag{89}$$

$$b_4 = \frac{\gamma_{H0}}{\gamma_{T0}}. \tag{90}$$

Din cele de mai sus rezultă că viteza v_a, accelerația a_a și drumul h_a influențează valorile parametrilor diagramei de viteze analizate.

5. PROCEDURA DE CALCUL AL PARAMETRILOR DIAGRAMELOR DE VITEZE

După cum este știut, în prealabil se aleg tipul de troliu al ascensorului, reductorul (dacă se utilizează) și sistemul lui de acționare. Acestea ne indică cu ce viteze maxime V putem lucra și care diagramă de viteze este adecvată. Calculul parametrilor se poate face în două variante redate mai jos.

În prima variantă, în prealabil, din condițiile impuse de legea adoptată de variația vitezei, de momentele de mișcare necesare și de utilizarea rațională a capacității de supraîncărcare a motorului, se aleg valorile accelerațiilor a_1 și a_3. Apoi, pe baza formulei (72), se procedează la determinarea valorii duratei unei curse T, care este indicat să fie în concordanță cu condițiile impuse de asigurarea calității transportului. Valoarea vitezei maxime V, aleasă potrivit regimului de lucru prescris instalației, se corelează cu acelea recomandate de diferiți autori [1], [2], [5], [8], [10], [15] elaborate pe baza experienței actuale acumulată în exploatarea ascensoarelor. În urma determinării valorilor lui V și T se calculează valoarea factorului de viteză α. În acest caz se pot utiliza formulele de calcul al parametrilor în funcție de coeficienții cinetici globali sau de coeficienții ε_i și ν_i. Unele calcule de tatonare în această variantă sînt inevitabile.

În a doua variantă de calcul, în conformitate cu tipul de troliu al ascensorului și sistemului lui de acționare ales, conform diagramei de viteze preconizate și regimului de lucru prescris, se determină în prealabil

valoarea optimă a lui c și deci și al lui α. Valoarea optimă*) a lui α și c, care se determină din punct de vedere tehnic și economic, conform principiului similitudinii trebuie să fie aceeași pentru un tip de troliu (monocablu sau multicablu) al ascensorului cu un sistem al lui de acționare

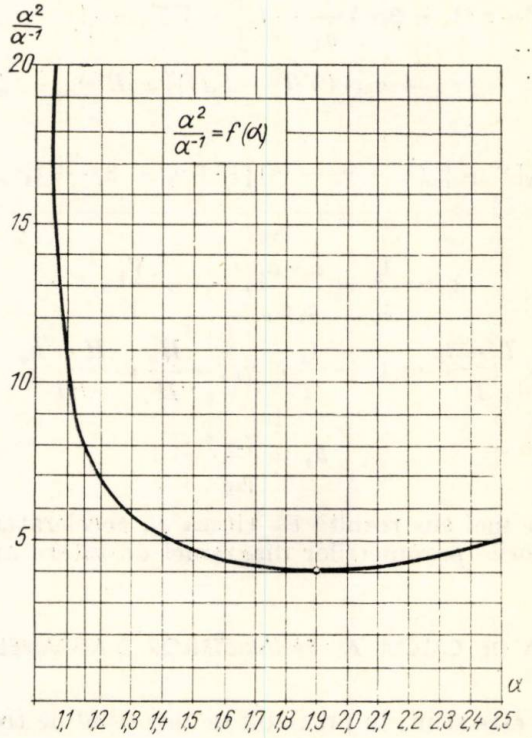


Fig. 12

(motor asincron, motor de curent continuu etc.) indiferent de înălțimea de transport dată și viteza maximă care va rezulta. Formulele de calcul al parametrilor în acest caz sînt cele prezentate în lucrare în §3 și §4, adică în funcție de factorul de viteză.

Din cele relatate mai sus rezultă că în ultima variantă de calcul al parametrilor diagramei de viteze se pun în concordanță toți factorii necesari, teoretici, tehnici și economici. De aceea, această metodă este mai riguroasă, mai precisă și permite o rapiditate mai mare în calcule.

CONCLUZII

1. Coeficientul de formă al diagramei de viteze τ și coeficienții cinetici globali τ_t și τ_h permit să facem aprecieri calitative și determinări cantitative, sintetice, asupra parametrilor diferitelor diagrame de viteze.

2. Noua metodă generală pentru calculul parametrilor diagramelor de viteze permite elaborarea de formule mai simple în care să se realizeze

*) Variația termenului $\frac{\alpha^2}{\alpha-1}$ în funcție de α se prezintă în fig. 12.

o legătură funcțională între parametrii cinematicii și dinamicii instalației prin utilizarea relației optimale între parametrii generali adimensionali ai ascensoarelor α și c.

3. Formulele elaborate pentru calculul parametrilor diagramei de viteze cu variația vitezei de forma integralei, care se recomandă pentru utilizarea în viitor, și precizarea condițiilor cînd ei au valori optime facilitează demonstrarea avantajelor ce se obțin în urma întrebuințării ei în ameliorarea dinamicii ascensoarelor.

4. Calculul parametrilor diferitelor diagrame de viteze pe care le realizează ascensoarele, determinate de înălțimea de ridicat, de natura și mărimea sarcinilor și regimurile de funcționare precise se realizează prin folosirea coeficienților cinetici și a formulelor corespunzătoare prezentate mai sus, precum și prin respectarea prevederilor N.T.S. și de exploatare a acestor instalații.

5. Aplicarea noii metode pentru calculul parametrilor diagramelor de viteze cu două, trei și patru perioade, frecvent uzitate în funcționarea ascensoarelor, precum și la alte diagrame de viteze analizate, confirmă oportunitatea ei, precum și rigurozitatea și înlesnirile ce le aduce în calcule.

Cele relatate în prezenta lucrare sînt valabile și pentru alte instalații asemănătoare ascensoarelor, ca troliuri de foraj, instalații de extracție miniere, cu schipuri, macarale grele din porturi etc., efectuîndu-se de la caz la caz adaptările aferente.

Primită la redacție la 7 martie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. F. A. Anett, *Electric Elevators*, Mc Graw Hill Book Comp., New York, 1935.
2. H. Blashke, *Motorschutz*, V.E.B. Verlag Technik, Berlin, 1954.
3. Ф. И. Вутаев, Ф. Л. Этингер, *Вентильный электропривод*, Госэнергоиздат, 1951.
4. Г. М. Еланчик, *Уравновешение системы рудничного подъема*, Углетехиздат, 1953.
5. Г. К. Корнеев, М. Г. Коротков, И. С. Ноцохей и Б. В. Ждянов, *Лифты*, Машгиз, Москва. 1958.
6. М. М. Федоров, *Избранные труды*, том. I. Изд. АН. У.С.С.Р., 1957.
7. Л. В. Гейллер, *Электропривод в тяжелом машиностроении*, Машгиз, 1959.
8. Victor Crăciunoiu, Dan Popovici, *Ascensoarele electrice*, Edit. tehnică, 1960.
9. G. Taxier, *Ascenseurs et monte-charge*, Eyrolles-Editeur, Paris, 1957.
10. Ф. Н. Шклерский, *физико-механические основы электрического рудничного привода* Углетехниздат, 1952.
11. В. С. Тулин, *Электропривод и автоматика многоканатных рудничных подъемных, машин*, Изд. „Недра" Москва, 1964.
12. P. C. Țepeluș, *Cazurile de determinare precisă prin calcul al parametrilor tahogramelor cu trei perioade*, Revista minelor, *11* (1957).
13. P. C. Țepeluș, *Metodă generală pentru determinarea valorii elementelor de bază a instalațiilor de extracție miniere. Partea electrică*, Revista minelor, *5* (1965).
14. Рудничный подъем, Углетхиздат, 1953.
15. P. C. Țepeluș, *Acționarea electrică și automatica instalațiilor grele de transport pe verticală pînă la înălțimi de 1000 m și capacități pînă la 1000 tone pe oră*. Lucrare de doctorat, Moscova, 1965. Biblioteca centrală universitară, București.
16. Volpi Camillo, *L'ascensore moderno*, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1955.
17. Б. М. Гуткин, *Ионный привод постоянного тока*, Изд. „Энергия", Москва, 1965.
18. Țepeluș P. C., *Considerente privind diagrama optimă de viteze a troliului de foraj acționat electric*, Revista petrol și gaze, *10* (1967).
19. — *Automatizarea instalațiilor multicablu cu un vas prevăzut cu motor de curent continuu alimentat prin convertizoare statice de curent*, Revista minelor, *4* (1967).

CERCETĂRI TEORETICE ASUPRA STABILITĂȚII DINAMICE A PROCESULUI DE PRELUCRARE LA FREZAREA FRONTALĂ

de GH. ZGURĂ și C. ISPAS
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

621.91 : 531

În lucrare se tratează problema stabilității sistemului elastic al mașinii-unelte, considerîndu-l ca un sistem oscilant cu două grade de libertate, corespunzătoare mișcărilor pe direcțiile rigidităților maxime și minime.

Studierea comportării dinamice a mașinilor-unelte, în condițiile necesității creșterii productivității prelucrării, a preciziei dimensionale și de formă, devine din ce în ce mai actuală. Această problemă se pune atît în faza de proiectare a mașinilor-unelte, cît și la construcția și exploatarea acestora, în vederea asigurării condițiilor de stabilitate a mișcărilor relative a sculelor așchietoare în raport cu piesele de prelucrat.

Sistemul tehnologic mașină - unealtă — piesă - sculă este un sistem elastic, care împreună cu procesul de așchiere formează un sistem dinamic închis, caracterizat prin fenomenele de interacțiune între elementele sale. Astfel, considerînd forța de așchiere ca mărime de intrare și deformația

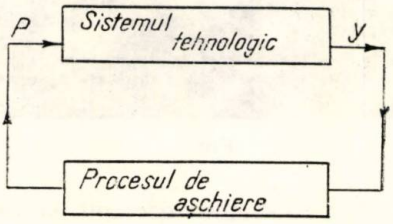


Fig. 1

y ca mărime de ieșire (fig. 1), la apariția deformației se modifică poziția relativă între sculă și piesă, ceea ce atrage după sine modificarea secțiunii așchiei și deci a forței de așchiere. În funcție de modificarea forței de așchiere, va rezulta o variație a deformației y ș.a.m.d. Din punctul de vedere

al fenomenului vibrațiilor care apar la prelucrarea prin așchiere, sistemul tehnologic mașină-unealtă — piesă - sculă constituie un sistem cu mai multe grade de libertate. Studierea comportării dinamice a unui astfel de sistem cu un număr mare de grade de libertate este foarte dificilă și din această cauză se fac anumite simplificări, considerîndu-se sistemul tehnologic cu unul, două sau trei grade de libertate.

Ținînd cont de particularitățile prelucrării la operațiile de frezare frontală, s-a considerat pentru studiu că sistemul are două grade de libertate. În sprijinul acestei afirmații s-a studiat forma traiectoriei mișcării oscilatorii prin înregistrarea acesteia pe peliculă cu ajutorul unui aparat de filmat.

Cercetările experimentale efectuate au arătat că traiectoriile oscilațiilor la prelucrarea prin frezare sînt niște curbe închise avînd aproximativ forma unor elipse alungite (care în multe cazuri pot fi asimilate cu niște drepte). Orientarea acestor elipse se modifică în funcție de rotația frezei în raport cu piesa de prelucrat (fig. 2).

Analizînd cadrele obținute prin filmare, s-a constatat că traiectoria eliptică a oscilațiilor păstrează o poziție relativ constantă în raport cu traiectoria circulară a dintelui sculei așchietoare, axa mare a elipsei fiind înclinată față de tangenta la această traiectorie cu un unghi aproximativ constant α. În același timp, pe baza oscilografierii forței de așchiere s-a constatat că aceasta reprezintă un vector variabil, care, ca și axa mare a traiectoriei eliptice, formează cu tangenta la circumferința descrisă de dintele frezei un unghi aproximativ constant β, mai mare decît α.

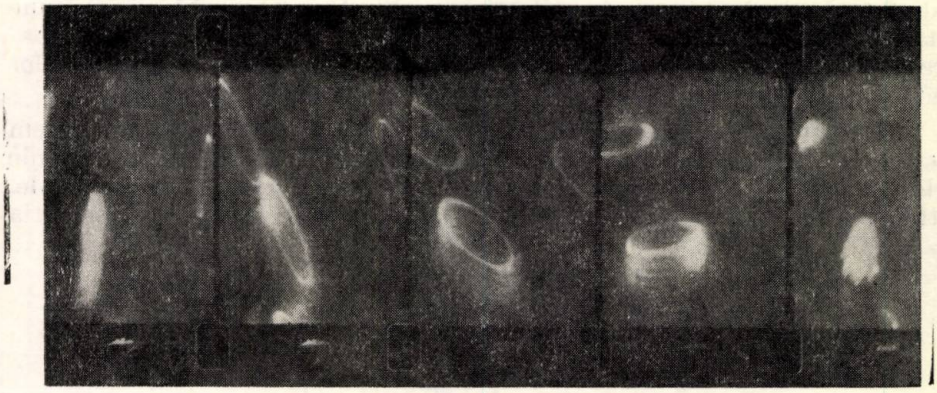


Fig. 2

Pe aceste considerente sistemul oscilant la frezarea frontală poate fi reprezentat ca un sistem cu două grade de libertate, așa cum se arată în figura 3, în care axa corespunde direcției rigidității minime, iar axa ν direcției rigidității maxime.

În schematizarea prezentată sînt folosite două sisteme de referință : un sistem de referință fix *yoz*, raportat la mașina-unealtă (*oy* corespunde direcției avansului longitudinal, iar *oz* direcției avansului vertical), și unul mobil $x'o'y'$, determinat de tangenta și normala la traiectoria dintelui sculei așchietoare.

Studiind mişcarea oscilatorie pe direcţiile principale de rigiditate ξ şi ν, se pot scrie ecuaţiile diferenţiale sub forma

$$\begin{aligned} m\xi'' + h_1 \xi' + k_1 \xi &= P \cos(\beta - \alpha), \\ m\nu'' + h_2 \nu' + k_2 \nu &= P \sin(\beta - \alpha), \end{aligned} \tag{1}$$

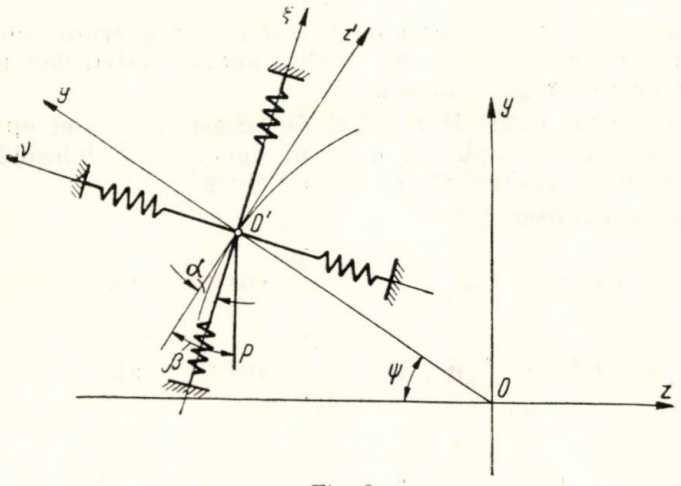


Fig. 3

în care

m reprezintă masa sistemului oscilant,

h_1, h_2 — coeficienţi de amortizare ai sistemului pe direcţiile ξ şi ν,

k_1, k_2 — rigidităţile pe direcţiile principale,

P — forţa de aşchiere,

α — unghiul făcut de direcţia rigidităţii minime cu tangenta la traiectoria dintelui sculei aşchietoare,

β — unghiul făcut de forţa de aşchiere cu axa $o'z'$.

Sub acţiunea forţei P, sistemul tehnologic capătă o deformaţie care se poate exprima în sistemul $y'o'z'$ cu relaţiile

$$\begin{aligned} y' &= \xi \sin \alpha + \nu \cos \alpha, \\ z' &= \xi \cos \alpha - \nu \sin \alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

În cazul considerat, mărimea de ieşire a sistemului dinamic închis este variaţia grosimii aşchiei detaşate de scula aşchietoare măsurată după rază.

Exprimînd mărimea de ieşire în raport cu sistemul de referinţă fix yoz, se obţine

$$y \sin \psi = y' \sin^2 \psi + z' \sin \psi \cos \psi. \tag{3}$$

Folosind relaţiile (2), expresia mărimii la ieşire devine

$$y \sin \psi = \sin^2 \psi (\nu \cos \alpha + \xi \sin \alpha) - \sin \psi \cos \psi (\nu \sin \alpha - \xi \cos \alpha). \tag{4}$$

Cunoscînd mărimea de intrare P și mărimea de ieșire $y \sin \psi$, se poate scrie ecuația funcției de transfer a sistemului dinamic considerat sub forma

$$W = \frac{y \sin \psi}{P}. \tag{5}$$

Cu ajutorul acestei funcții de transfer se pot studia condițiile de stabilitate ale sistemului dinamic închis analog sistemelor întîlnite în teoria sistemelor cu reglare automată.

Pentru a scrie expresia funcției de transfer, folosim expresiile (1) și (4). Pentru aceasta, aplicînd calculul operațional, folosind transformata Laplace a expresiilor (1) și (4), se obține:

a) pentru expresia (1)

$$\begin{aligned} (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)\,\bar{\xi} &= \frac{\bar{P}}{k_1} \cos(\beta - \alpha), \\ (T_1'^2 p^2 + T_2' p + 1)\,\bar{\nu} &= \frac{\bar{P}}{k_2} \sin(\beta - \alpha), \end{aligned} \tag{6}$$

în care

$$T_1^2 = \frac{m}{k_1};\quad T_1'^2 = \frac{m}{k_2};\quad T_2 = \frac{h_1}{k_1};\quad T_2' = \frac{h_2}{k_2}; \tag{7}$$

b) pentru expresia (4)

$$\bar{y} \sin \psi = \sin^2 \psi\,(\bar{\nu} \cos \alpha + \bar{\xi} \sin \alpha) - \sin \psi \cos \psi\,(\bar{\nu} \sin \alpha - \bar{\xi} \cos \alpha). \tag{8}$$

Din expresiile (6) se determină $\bar{\xi}$ și $\bar{\nu}$

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \frac{\bar{P} \cos(\beta - \alpha)}{k_1 (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)}, \\ \bar{\nu} &= \frac{\bar{P} \sin(\beta - \alpha)}{k_2 (T_1'^2 p^2 + T_2' p + 1)}, \end{aligned} \tag{9}$$

care sînt introduse în relația (8), obținîndu-se

$$\begin{aligned} \bar{y} \sin \psi = \sin^2 \psi &\left[\frac{\bar{P} \sin(\beta - \alpha) \cos \alpha}{k_2 (T_1'^2 p^2 + T_2' p + 1)} + \frac{\bar{P} \cos(\beta - \alpha) \sin \alpha}{k_1 (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)}\right] - \\ - \sin \psi \cos \psi &\left[\frac{\bar{P} \sin(\beta - \alpha) \sin \alpha}{k_2 (T_1'^2 p^2 + T_2' p + 1)} - \frac{\bar{P} \cos(\beta - \alpha) \cos \alpha}{k_1 (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Cu aceasta, expresia funcției de transfer devine

$$W = \frac{\bar{y} \sin \psi}{\bar{P}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{k_2 (T_1'^2 p^2 + T_2' p + 1)} + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}{k_1 (T_1^2 p^2 + T_2 p + 1)}, \tag{11}$$

în care

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \sin^2\psi\cos\alpha\sin(\beta-\alpha),\\ \varepsilon_2 &= \sin^2\psi\sin\alpha\cos(\beta-\alpha),\\ \varepsilon_3 &= \sin\psi\cos\psi\sin\alpha\sin(\beta-\alpha),\\ \varepsilon_4 &= \sin\psi\cos\psi\sin\alpha\cos(\beta-\alpha).\end{aligned} \tag{12}$$

Pentru studiul stabilității sistemului dinamic analizat se folosește criteriul Nyquist. Conform acestui principiu, sistemul dinamic închis este stabil atunci cînd caracteristica amplitudine-fază-frecvență a funcției de transfer nu intersectează axa reală în intervalul $[-\infty, -1]$.

Pentru a obține caracteristica amplitudine-fază-frecvență, în relația funcției de transfer (11) se înlocuiește p cu $i\omega$, de unde se obține

$$W = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{k_2(-T_1'^2\omega^2 + i\omega T_2' + 1)} + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_4}{k_1(-T_1^2 i\omega^2 + i\omega T_2 + 1)}. \tag{13}$$

Separînd partea reală de cea imaginară, se obține

$$W = R_e - i I_m, \tag{14}$$

unde

$$\begin{aligned}R_e &= \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)(1 - T_1'^2\omega^2)}{k_2[(1 - T_1'^2\omega^2)^2 + \omega^2 T_2'^2]} + \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_4)(1 - T_1^2\omega^2)}{k_1[(1 - T_1^2\omega^2)^2 + \omega^2 T_2^2]},\\ I_m &= \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\omega T_2'}{k_2[(1 - T_1'^2\omega^2)^2 + \omega^2 T_2'^2]} + \frac{(\varepsilon_2 + \varepsilon_4)\omega T_2}{k_1[(1 - T_1^2\omega^2)^2 + \omega^2 T_2^2]}.\end{aligned} \tag{15}$$

Înlocuind pe ε_1, ε_2, ε_3, ε_4, T_1, T'_1, T_2, T'_2, k_1, k_2 cu valorile lor calculate sau determinate experimental în expresiile (15), se trasează în plan complex caracteristica amplitudine-fază-frecvență a sistemului dinamic dînd valori lui ω de la 0 la ∞.

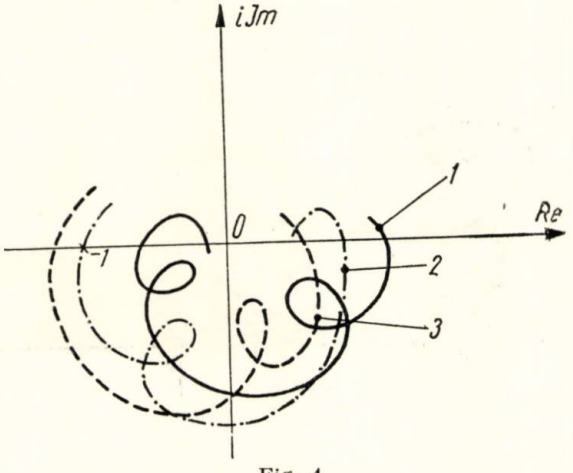


Fig. 4

În urma reprezentării grafice a caracteristicii amplitudine-fază-frecvență în funcție de valorile parametrilor amintiți mai sus, pot fi obținute mai multe situații (fig. 4) :

a) atunci cînd curba caracteristicii trasată intersectează axa reală în intervalul $[-1, +\infty]$, sistemul este stabil (curba 1);

b) cînd curba caracteristicii intersectează axa reală şi în punctul -1, sistemul se află la limita de stabilitate (curba 2);

c) cînd curba intersectează axa reală în intervalul $[-\infty, -1]$, sistemul este nestabil (curba 3).

Analizînd relaţiile 14 şi 15, rezultă că stabilitatea sistemului dinamic considerat depinde de parametrii α, β, ψ, m, k_1, k_2, h_1, h_2 şi va fi asigurată atunci cînd:

$$R_e > -1 \text{ pentru } I_m = 0 \text{ şi } \omega \text{ variind între 0 şi } +\infty.$$

Din această condiţie rezultă că stabilitatea sistemului dinamic studiat va fi mai bine satisfăcută atunci cînd rigidităţile pe direcţiile principale k_1, k_2 vor fi mai mari. De asemenea, o importanţă deosebită o are orientarea direcţiilor principale de rigiditate; atunci cînd unghiul α este mai mic, sistemul este mai stabil, mărimea unghiului α fiind determinată de corelaţia dintre rigiditatea sistemului şi poziţia sculei aşchietoare.

Unghiul β influenţează hotărîtor comportarea sistemului dinamic: cu cît β este mai mic, cu atît stabilitatea sistemului este mai ridicată. Pentru cazul studiat, o importanţă deosebită prezintă modificarea grosimii aşchiei în direcţie radială. Făcînd o analogie între elipsa de inerţie din rezistenţa materialelor şi *elipsa de rigiditate* caracterizată de axele principale ξ şi ν, se pot trage concluzii foarte importante în legătură cu direcţia deformaţiei sistemului considerat sub acţiunea forţei P. Din acest punct de vedere, sistemul se va deforma pe o direcţie perpendiculară pe tangenta la elipsă în punctul de intersecţie al acesteia cu forţa de aşchiere

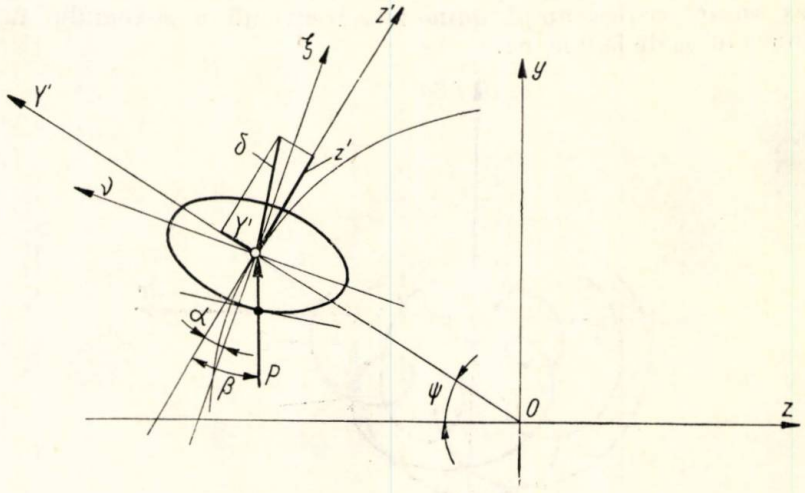


Fig. 5

P (fig. 5). Rezultă deci că această direcţie a deformaţiei sistemului depinde de unghiul β, fiind mai avantajoasă pentru valori mai mici ale acestuia.

Valorile mai mici ale acestui unghi β se asigură atunci cînd componenţa normală a efortului de aşchiere este cît mai mică în raport cu com-

ponenta tangențială, adică unghiul de degajare γ și unghiul de atac principal $\varkappa$ ale sculei așchietoare au valori cît mai mari.

Variația unghiului ψ, așa cum s-a amintit mai sus, conduce la modificarea orientării *elipsei de rigiditate* și a vectorului efortului de așchiere, ceea ce face ca sistemul dinamic să aibă o comportare nestabilă în cursul unei rotații a sculei așchietoare.

Acest lucru poate fi observat pe oscilograma din figura 6, în care sînt reprezentate vibrațiile pe direcția y și z obținute la frezarea frontală a unei piese la care lățimea de frezare B este mai mare decît diametrul frezei (ψ variază de la 0° la 180°). Din acest punct de vedere, prelucrarea este mai stabilă atunci cînd lățimea de frezare este mai mică decît diametrul frezei.

1. V. A. KUDINOV, *Dinamica Stankov*, Mașinostroenie, 1967.
2. GH. ZGURĂ, *Cercetări experimentale asupra vibrațiilor la frezarea frontală*, Construcția de mașini, *6—7* (1966).
3. — *Cercetări teoretice și experimentale privind stabilitatea la vibrații în cazul frezării frontale*, Construcția de mașini, *9* (1966).

INFLUENȚA VIBRAȚIILOR ASUPRA PRECIZIEI DE PRELUCRARE LA STRUNJIRE *)

de PETRE DODOC
Institutul politehnic
„Gheorghe Gheorghiu-Dej", București

681.9 : 621.94

În lucrare se arată că, la strunjirea de finisare cu turații înalte, abaterile de dimensiune, de formă și de poziție, precum și rugozitatea pieselor prelucrate, sînt determinate în primul rînd de fenomene dinamice. Mai departe se prezintă rezultatele cercetărilor teoretice și experimentale privind influența calitativă și cantitativă a diferitelor feluri de vibrații care apar în sistemul „piesă-dispozitiv de prindere a piesei-mașină-unealtă" asupra erorilor de prelucrare și se indică căile pentru micșorarea acestora.

De aproape 30 de ani se știe că, la strunjirea de finisare cu viteze mari și avansuri mici, rugozitatea suprafeței prelucrate este mai mare decît cea determinată de parametrii geometrici și tehnologici (fig. 1) [1]

$\left(R_t = \rho - \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}\right.$ — rugozitatea teoretică,

$\left.R_m$ — rugozitatea măsurată$\right)$.

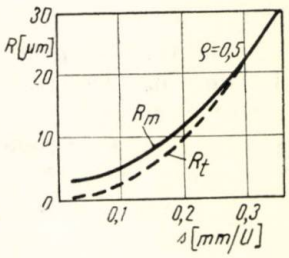


Fig. 1

Cercetări recente [2] — [6] au arătat că această rugozitate *suplimentară* este determinată în primul rînd de fenomene vibratorii.

O cercetare sistematică a cauzelor vibrațiilor, a tipurilor de vibrații care apar la piesă, precum și a mecanismului transmiterii acestor vibrații la suprafața piesei în procesul de așchiere, se găsește în [6] — [9]. În esență este vorba de faptul că, datorită deformațiilor statice și dinamice provocate de diferite cauze, piesa nu se rotește numai în jurul axei sale cu frecvența $f_n = n/60$ Hz, ci axa

*) În cele ce urmează se consideră că o greșeală de prelucrare există atunci cînd abaterea A, adică „deosebirea dintre dimensiunile, forma și poziția, efective sau limită admise, ale unui obiect, și dimensiunile, forma și poziția figurii geometrice a cărei realizare s-a urmărit" (*Lexiconul tehnic-român*, vol. 1), nu este nulă, adică $A \neq 0$.

la rîndul său descrie în acelaşi timp o traiectorie bine determinată. În cazul cel mai frecvent, această traiectorie este rezultanta a două vibraţii, şi anume :

a) o vibraţie circulară forţată de amplitudine A_n şi de frecvenţă $f_n = n/60$ Hz, determinată de forţa centrifugă ;

b) o vibraţie proprie principală de amplitudine A_E (amplitudine mult mai mare decît amplitudinile celorlalte vibraţii în frecvenţa proprie) şi de frecvenţă $f_E > f_n$ care poate fi eliptică, circulară sau de translaţie. Vibraţia în frecvenţa proprie există atît la mersul în gol, cît şi în procesul de aşchiere, indiferent de modul de lăgăruire sau de poziţia arborelui în spaţiu. Ea apare atît la excitaţie prin dezechilibru, cît şi la excitaţii prin şoc sau autoexcitaţii.

Transmiterea traiectoriei axei de rotaţie a piesei, traiectorie care în general este o trocoidă de vibraţii, la suprafaţa piesei în procesul de aşchiere este cauza determinantă a apariţiei greşelilor de prelucrare la strunjirea cu turaţii înalte, chiar şi în cazul cînd prin recepţia statică maşina-unealtă a fost clasată ca fiind cel puţin corespunzătoare.

Folosind metoda elaborată de autor [6], [9], se poate construi rapid şi exact conturul piesei pentru orice traiectorie a axei de rotaţie, adică se pot determina de la început greşelile de prelucrare.

În [9] s-a dovedit deja că pe conturul piesei, în secţiune normală, apar o serie de maxime, al căror număr este dat de raportul dintre frecvenţa proprie principală f_E şi frecvenţa de rotaţie f_n şi a căror înălţime este dată de amplitudinile vibraţiilor proprii, în măsură hotărîtoare de A_E.

După cum s-a stabilit [8], amplitudinea A_E este variabilă ; ea devine maximă la valorile întregi ale raportului frecvenţelor, adică pentru $m_f = 1, 2, 3, \ldots$, şi minimă pentru rapoarte fracţionare ca $m_f = 1{,}5$; $2{,}5$; $3{,}5$; ...

În timp ce greşeala de diametru, greşeala de rotunjime şi excentricităţile dinamice (relativă şi absolută) iau naştere în toate cazurile, *rugozitatea de vibraţii* apare numai la valori fracţionare ale raportului frecvenţelor $m_f = f_E/f_n$. Procesul apariţiei rugozităţii de vibraţii nu se tratează în articolul de faţă.

În cele ce urmează se arată teoretic şi experimental care sînt greşelile de prelucrare care apar la rapoarte întregi ale frecvenţelor menţionate şi cum pot ele să fie micşorate. Rezultatele obţinute sînt valabile însă pentru toate rapoartele m_f.

Parametrii consideraţi au fost :

$m_f = f_E/f_n$ — raportul frecvenţelor,

$m_A = A_E/A_n$ — raportul amplitudinilor,

η — unghiul dintre direcţia vibraţiei proprii şi axa absciselor,

ε — diferenţa de fază a celor două vibraţii.

În funcţie de valorile acestor parametri se modifică traiectoria axei de rotaţie a piesei şi greşelile de prelucrare, după cum urmează :

1. TRAIECTORIA AXEI DE ROTAȚIE A PIESEI ESTE UN CERC

Acest caz apare cînd $m_A = 0$, adică $A_E = 0$ și $0 < A_n \ll d_e$, cînd $A_E \ll A_n$ sau cînd $A_n = 0$ și $A_E \neq 0$.

Figura 2 arată că, dacă $A_E = 0$ și $0 < A_n \ll d_e$, adică traiectoria axei de rotație a piesei este un cerc, conturul piesei este un cerc cu dia-

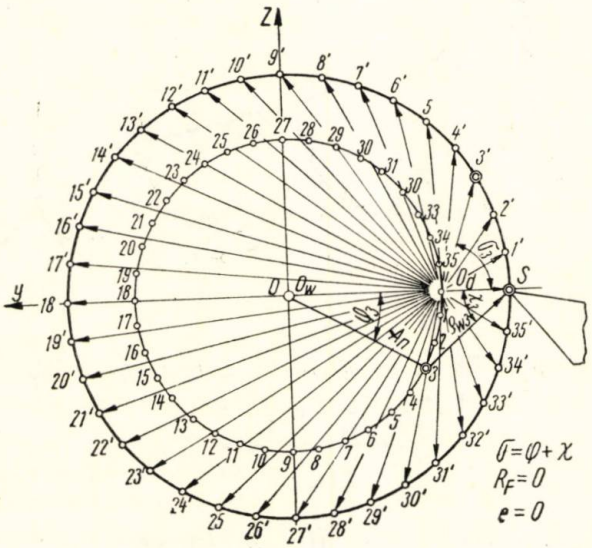


Fig. 2

metrul dorit (reglat) $2\overline{OS} = d_e$, și nu o curbă oarecare, așa cum afirmă de exemplu H. Berthold [10]. În acest caz greșelile de prelucrare sînt nule.

În figurile 2—30, punctele O, O_w și S reprezintă poziția geometric-ideală a axei de rotație a piesei (axa virtuală), axa reală a piesei și respectiv vîrful cuțitului, iar prin conturul piesei se înțelege proiecția traiectoriei vîrfului cuțitului în timpul unei rotații a piesei pe un plan perpendicular pe axa de rotație a acesteia. Pentru înregistrarea acestui contur ar trebui ca palpatorul să fie o bilă cu raza mai mică decît raza vîrfului cuțitului și care să urmărească traiectoria acestuia.

Dacă piesa se prelucrează complet dintr-o strîngere și la aceeași turație, cazul acesta este un caz ideal, care se obține lucrînd cu turații mici sau mărind frecvența proprie a sistemului *piesă-dispozitiv de prindere a piesei-mașină-unealtă*. Mărirea frecvenței proprii trebuie să constituie o problemă de prim ordin la proiectarea mașinilor-unelte. În cazul unei mașini existente, frecvența proprie poate fi mărită atît prin înlocuirea dispozitivelor de prindere grele cu unele mai ușoare (universalele de aceeași mărime, de exemplu diametrul exterior ∅ 250, produse de diferite firme, au greutăți diferite, cît și prin sprijinirea piesei pe un vîrf fix (înarmat cu aliaj dur) sau rotativ de precizie ridicată, chiar și în cazul cînd piesa se consideră rigidă. Folosind ultimul procedeu, numărul maximelor pe conturul piesei se poate dubla, iar amplitudinea vibrației proprii poate scădea la mai puțin de jumătate.

Dacă raportul dintre frecvența proprie principală și frecvența de rotație $m_f = f_E/f_n > 15$, se poate considera că traiectoria axei de rotație a piesei este un cerc sau, la rigiditate variabilă, o elipsă, deoarece ampli-

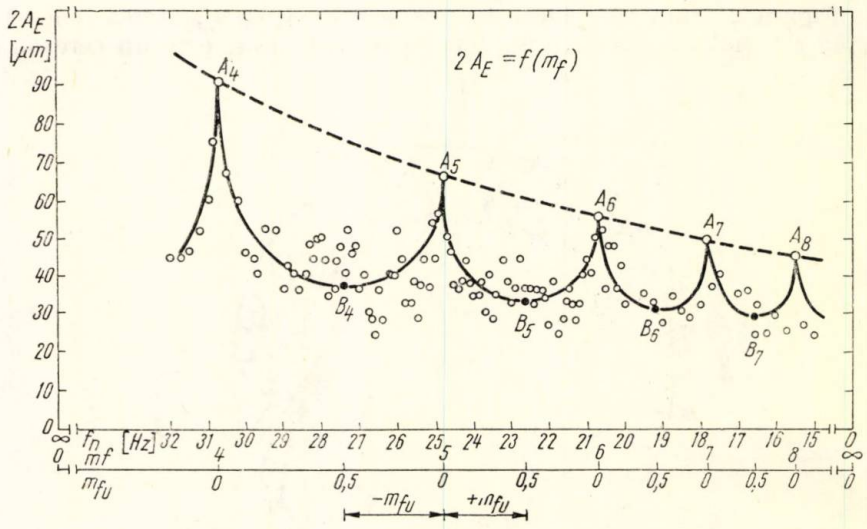


Fig. 3

tudinea A_E scade hiperbolic cu m_f (fig. 3). Punctele $\ldots A_4 \ldots A_8 \ldots$ arată pozițiile de rezonanță care corespund valorilor întregi ale raportului frecvențelor m_f. Pozițiile optime corespund punctelor $\ldots B_4 \ldots B_7 \ldots$, pentru care partea fracționară a raportului frecvențelor este $m_{fz} = 0{,}5$.

Este de menționat faptul extrem de important că, prin variația turației sau a dezechilibrării sistemului (de exemplu schimbarea dispozitivului de prindere a piesei), apare o variație a amplitudinii vibrației forțate (circulară) A_n. Datorită acestui fapt, între suprafața cilindrică de fixare în universal sau o suprafață prelucrată anterior și suprafața cilindrică prelucrată după variația amplitudinii A_n, apare o excentricitate dinamică care reprezintă o greșeală de poziție (cei doi cilindri sînt dezaxați cu diferența amplitudinilor) (fig. 4). Celelalte greșeli sînt nule.

În cazul cînd amplitudinea vibrației forțate $A_n = 0$, iar amplitudinea vibrației proprii $A_E \neq 0$, traiectoria axei de rotație a piesei este tot un cerc cu raza A_E, dar pe conturul piesei apare un număr de maxime egal cu raportul frecvențelor m_f și cu înălțimea $2A_E$ (fig. 5).

Dacă $m_f \geqq 2$, greșelile de prelucrare au următoarele mărimi:

— greșeala de diametru (greșeala de dimensiune) $R_D = 2A_E$,

— greșeala de rotunjime (greșeală de formă) $\begin{cases} R_F = 2A_E, \\ m_f = f_E/f_n, \end{cases}$

— excentricitatea dinamică absolută (greșeală de poziție) $e = A_E$,

— excentricitate dinamică relativă (greșeală de poziție) $0 < e^* < 2A_E$.

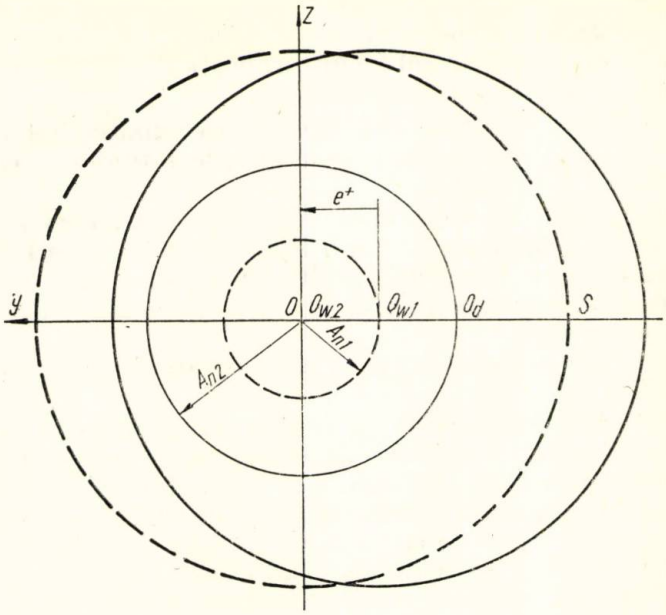


Fig. 4

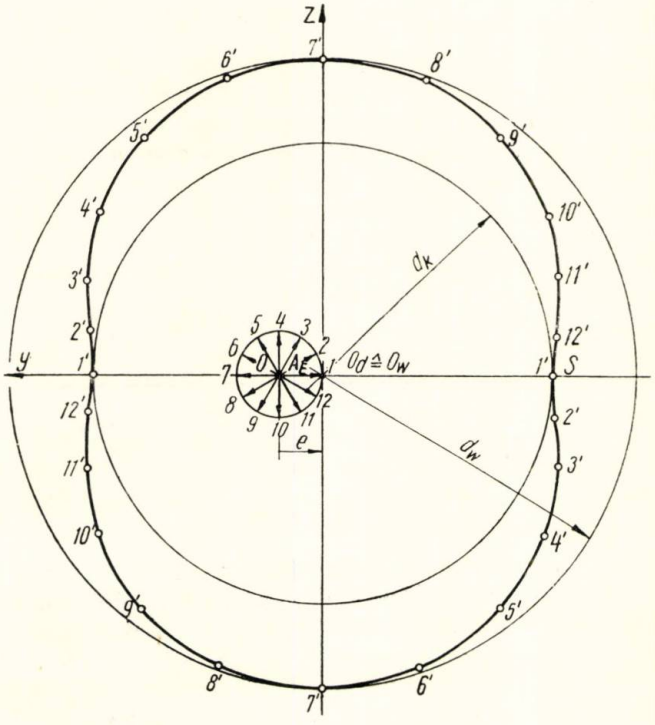


Fig. 5

Greşeala de rotunjime va fi caracterizată mai departe prin mărimile R_F şi m_f; m_f, jucînd un rol hotărîtor, poate fi ales ca parametru principal la recepţia dinamică a maşinilor.

În contrast cu Berthold [10], rezultă că vibraţia forţată de amplitudine A_n nu are influenţă asupra greşelii de rotunjime; ea determină numai o greşeală de poziţie.

Figura 2 arată că, datorită excentricităţii A_n, raza momentană a piesei variază în timpul unei rotaţii. Acest lucru înseamnă că viteza de aşchiere variază şi ea. Din acest motiv, microgeometria suprafeţei prelucrate se modifică corespunzător şi, în plus, aşa cum afirmă unii autori, pot apărea autovibraţii.

Variaţia razei piesei mai are ca efect o variaţie a unghiurilor active ale cuţitului.

De acest fenomen trebuie să se ţină seama la prelucrarea pieselor profilate şi a filetelor de precizie, deoarece, variind unghiul de degajare, variază profilul în timpul unei rotaţii. De aici rezultă că pentru a putea obţine un profil de precizie dimensională şi de formă ridicată trebuie ca amplitudinile A_n şi A_E să fie cît se poate de mici. În primul rînd jocul în lagăre trebuie să fie cît se poate de mic. Piekenbrink [11] a stabilit experimental că prin micşorarea jocului în lagărele axului principal amplitudinea de rezonanţă, greşeala de rotunjime şi rugozitatea scad, în timp ce frecvenţa proprie a sistemului creşte.

2. TRAIECTORIA AXEI DE ROTAŢIE A PIESEI ESTE O HIPOTROCOIDĂ

Cu datele din tabela 1, coloanele 1—4, s-au reprezentat traiectoriile axei de rotaţie a piesei şi contururile corespunzătoare (fig. 9—13). În coloanele 5, 6 şi 7 ale aceleiaşi tabele sînt date excentricităţile dinamice şi greşelile de rotunjime şi de diametru.

Tabela 1

m_f	n_H	m_A	λ	e	R_F	R_D	Fig.
1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	1/2	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	9
2	3	11/14	11/7	A_E	$2A_E$	$2A_E$	10
3	4	1/3	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	11
4	5	1/4	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	12
5	6	1/5	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	13

Pentru $m_f = 1$ şi $m_A > 0$ apare, indiferent de factorul λ, de forma traiectoriei axei de rotaţie a piesei sau de direcţia de vibrare, o piesă al cărei contur este de forma melcului lui Pascal (fig. 6—8).

În acest caz ia naştere o greşeală de rotunjime dată de relaţia $R_F = A_E^2/d_e$.

Avînd în vedere că $m_f = 1$ înseamnă rezonanţă principală şi că acest caz în practică se evită, s-ar părea că consideraţiile de mai sus sînt fără

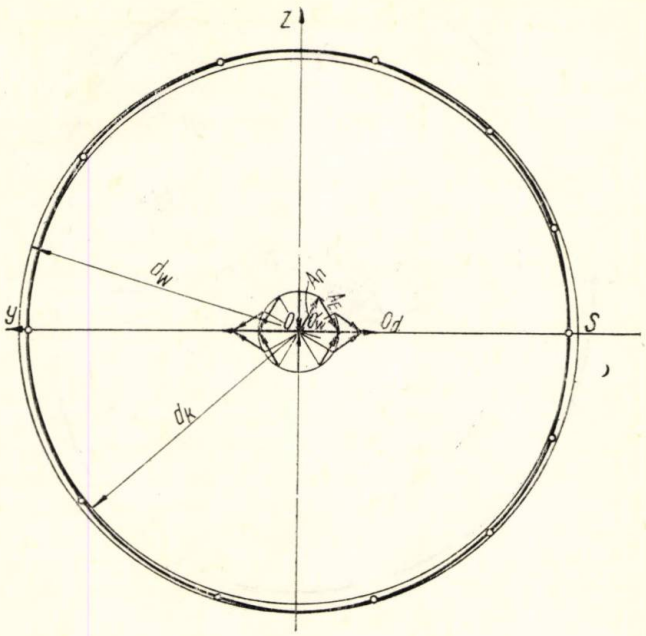


Fig. 6

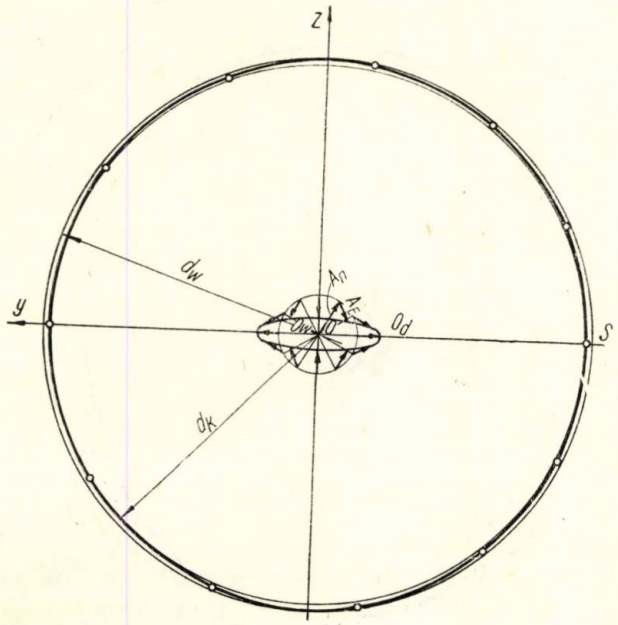


Fig. 7

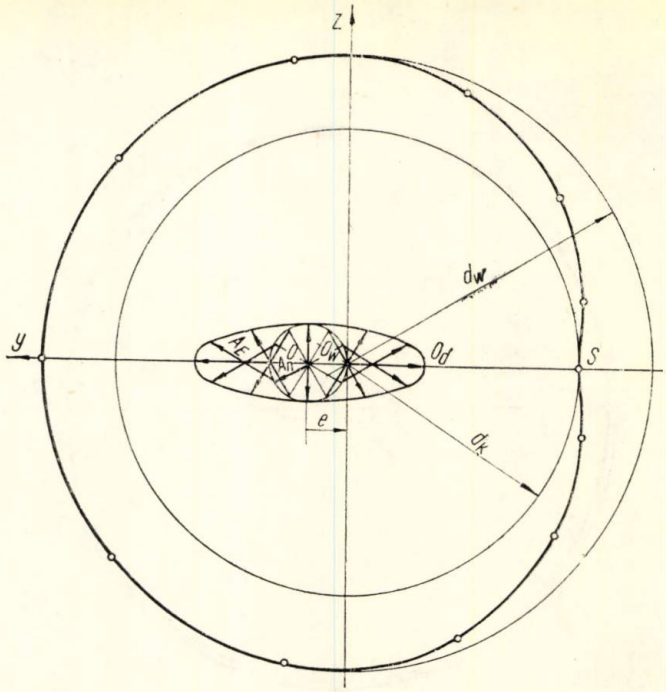


Fig. 8

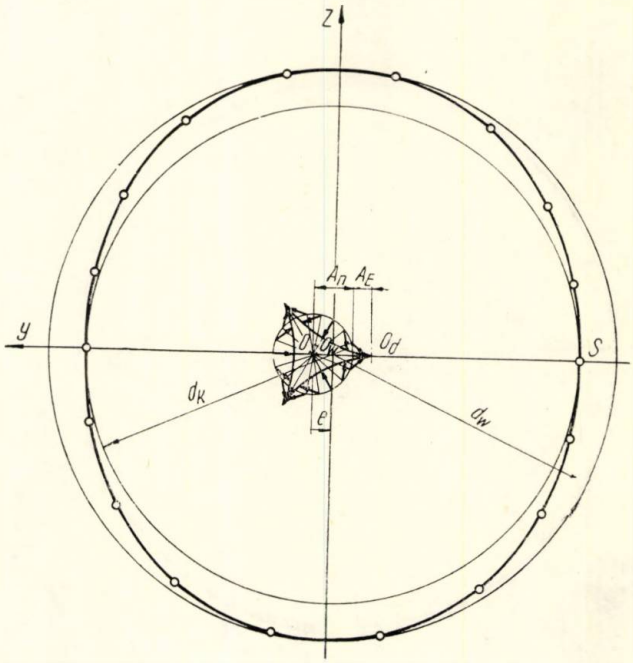


Fig. 9

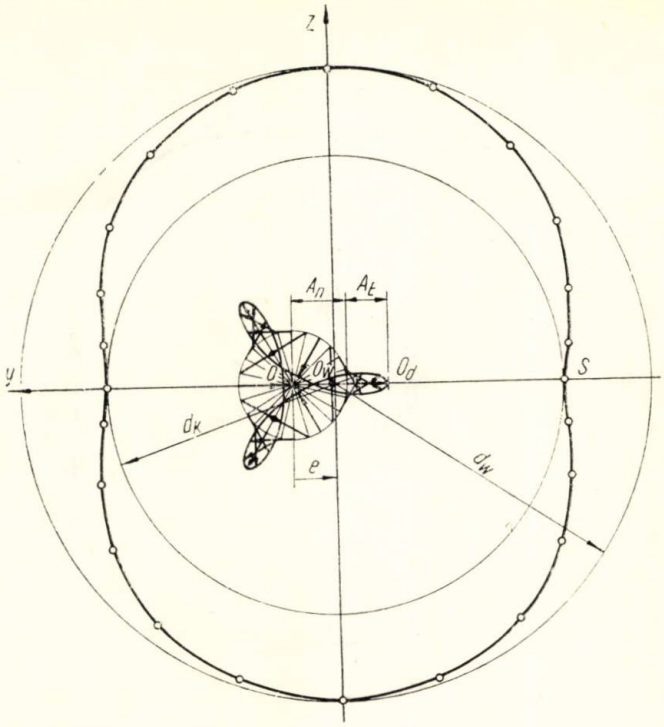


Fig. 10

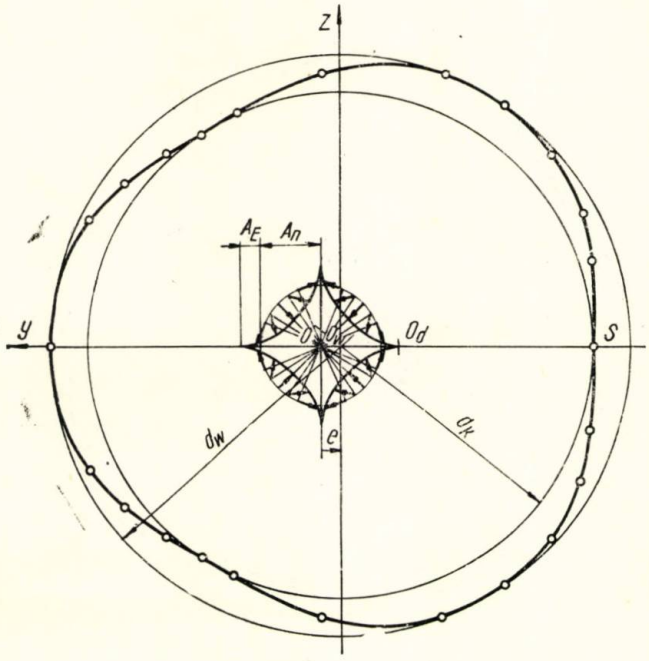


Fig. 11

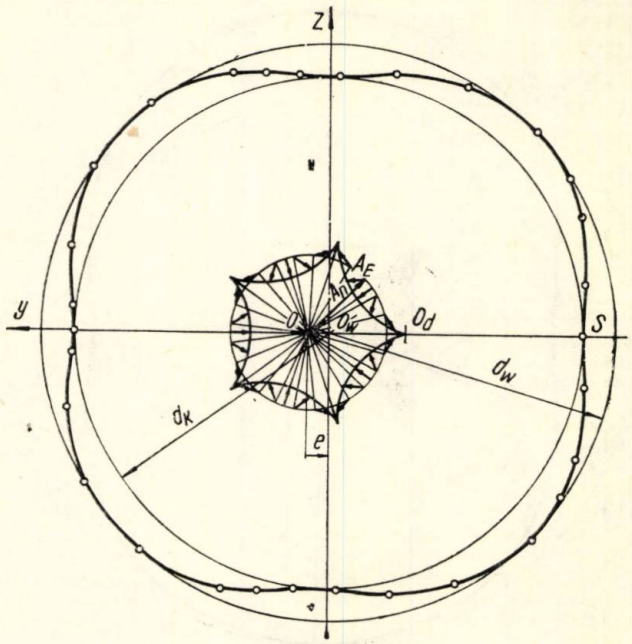


Fig. 12

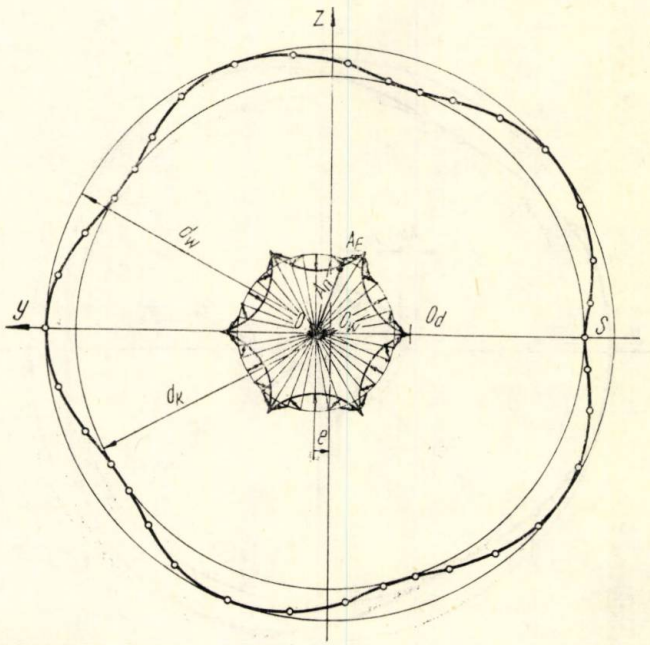


Fig. 13

importanţă. Nu se poate însă trece cu vederea faptul că o traiectorie eliptică a axei de rotaţie a piesei poate apărea nu numai datorită vibraţiilor, ci şi provocată de o greşeală de formă a lagărelor axului principal. De aici rezultă că ovalitatea lagărelor nu are decît o influenţă neglijabilă asupra preciziei de prelucrare, atît timp cît prin aceasta nu sînt provocate vibraţii în frecvenţele proprii ale sistemului *piesă-dispozitiv de prindere a piesei-maşină-unealtă*.

3. TRAIECTORIA AXEI DE ROTAŢIE A PIESEI ESTE O EPITROCOIDĂ

Parametrii aleşi şi rezultatele obţinute se găsesc în tabela 2 (fig. 14—19). Rezultă aceleaşi greşeli de prelucrare ca la hipotrocoide.

Tabela 2

m_f	n_E	m_A	λ	e	R_F	R_D	Fig.
1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	1/2	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	14
2	1	1	2	A_E	$2A_E$	$2A_E$	15
3	2	1/3	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	16
4	3	1/4	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	17
4	3	1/4	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	18
5	4	1/5	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	19

Pentru $m_f = 4$ (fig. 17 şi 18) se arată că poziţia traiectoriei axei de rotaţie a piesei în raport cu vîrful cuţitului nu are influenţă asupra conturului piesei, ci numai asupra poziţiei acestuia.

Dacă această poziţie se schimbă, poate apărea o excentricitate dinamică relativă a cărei valoare maximă nu depăşeşte $2A_E$.

Orice variaţie a mărimii şi direcţiei avansului sau a turaţiei în timpul aşchierii are ca urmare o deplasare (rotire) a maximelor conturului, fapt care înseamnă apariţia unei rugozităţi de vibraţii. Prevenirea parţială a acestui fenomen se poate face prin ridicarea preciziei lanţurilor cinematice. Micşorarea bătăii şi a amplitudinilor vibraţiilor axiale ale axului principal reprezintă doar una din problemele ce trebuie rezolvate. O astfel de verificare trebuie făcută în cadrul recepţiei dinamice a maşinii. Trebuie subliniat că apariţia rugozităţii de vibraţii este de multe ori dorită, deoarece prin aceasta se măreşte suprafaţa portantă, dar acest lucru trebuie realizat prin alegerea optimă a raportului m_f.

4. TRAIECTORIA AXEI DE ROTAŢIE A PIESEI ESTE CIRCULAR-TRANSLATORICĂ

În tabela 3 sînt date mărimile parametrilor aleşi şi rezultatele obţinute. Şi în acest caz sînt valabile cele spuse la punctele 2 şi 3.

Cazul cînd $A_n = 0$ şi în direcţia cuţitului există o vibraţie armonică de amplitudine A_E şi de frecvenţă $f_E = f_n$, adică $m_f = f_E/f_n = 1$, este re-

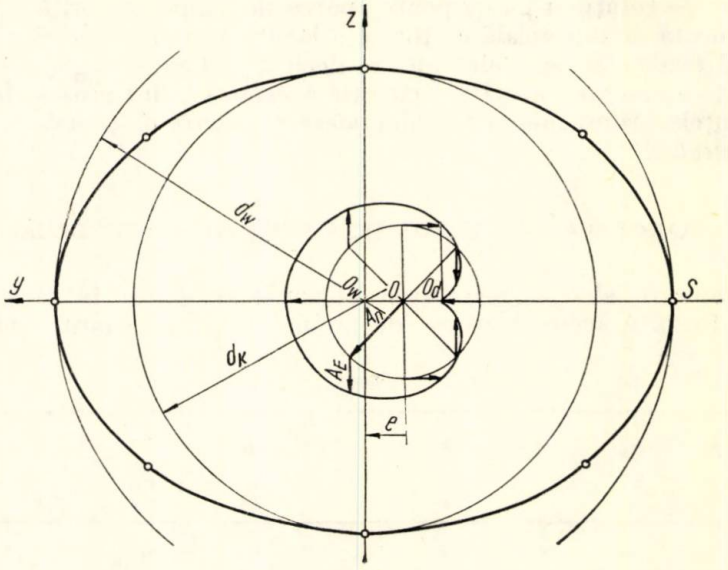


Fig. 14

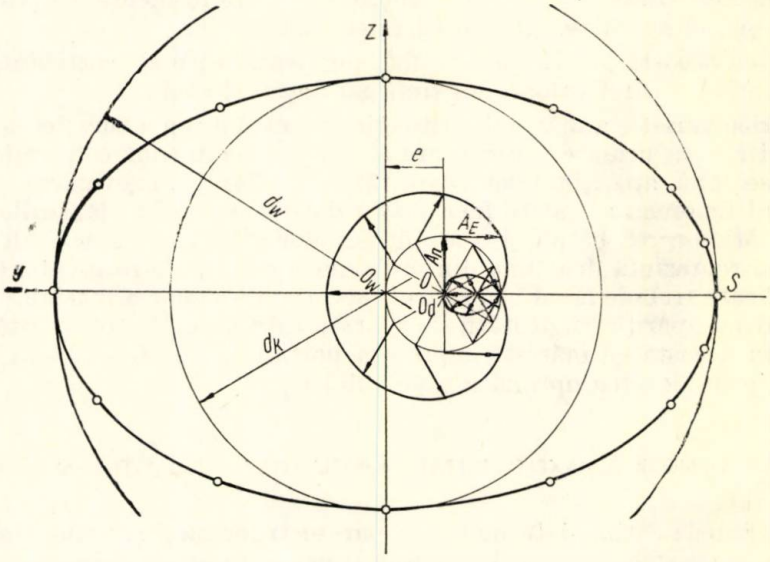


Fig. 15

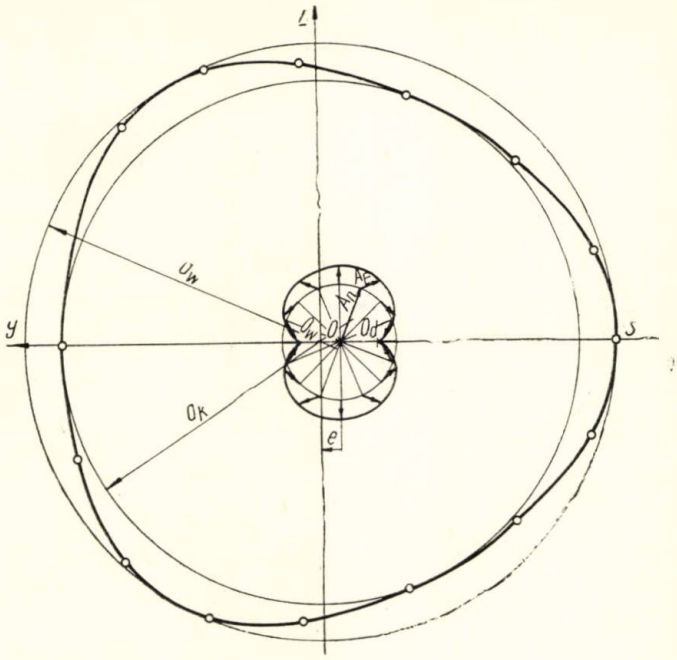


Fig. 16

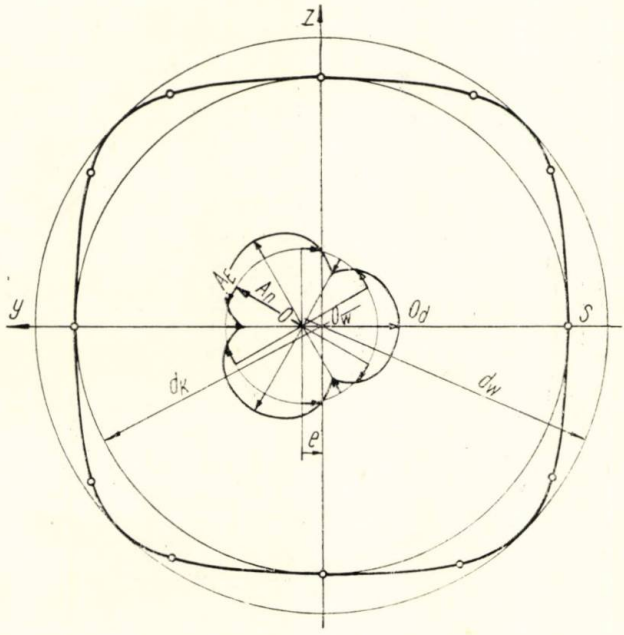


Fig. 17

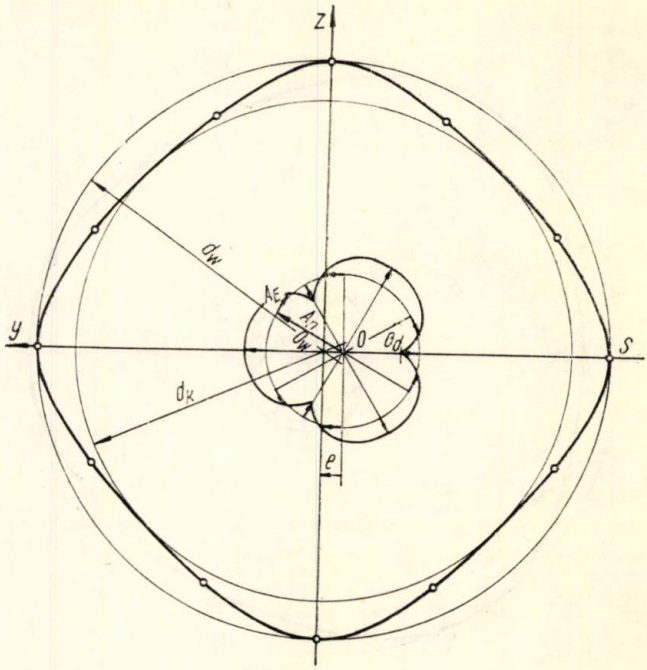


Fig. 18

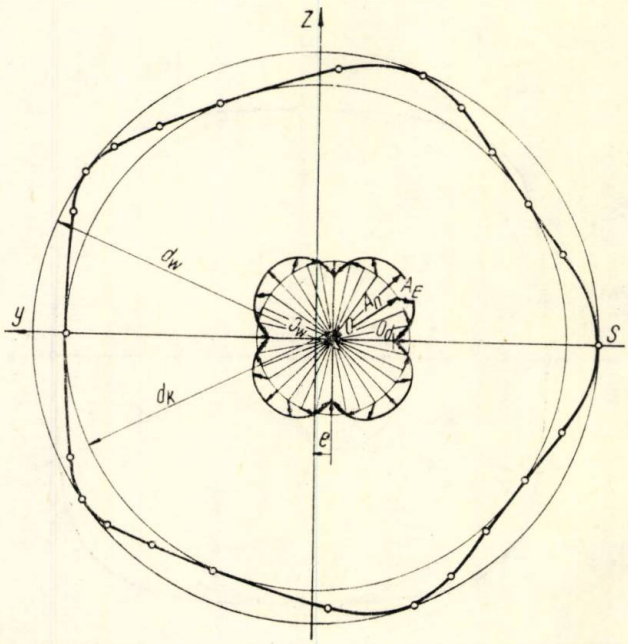


Fig. 19

prezentat în figura 20. Conturul piesei este același ca în cazurile cînd traiectoriile axei de rotație sînt epi- sau hipotrocoide.

Tabela 3

m_f	n_H	m_A	e	R_F	R_D	Fig.
1	2	3	4	5	6	7
2	3	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	22
3	4	2/5	A_E	$2A_E$	$2A_E$	24
3	4	1/2	A_E	$2A_E$	$2A_E$	25
3	4	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	26
4	5	1/2	A_E	$2A_E$	$2A_E$	27
4	5	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	28
8	9	1	A_E	$2A_E$	$2A_E$	29

La prelucrarea unui arbore în trepte, a unui alezaj în trepte, a unei suprafețe exterioare simultan cu una interioară sau a unei suprafețe oarecare în raport cu una de referință (de prindere), apare un defazaj de contur

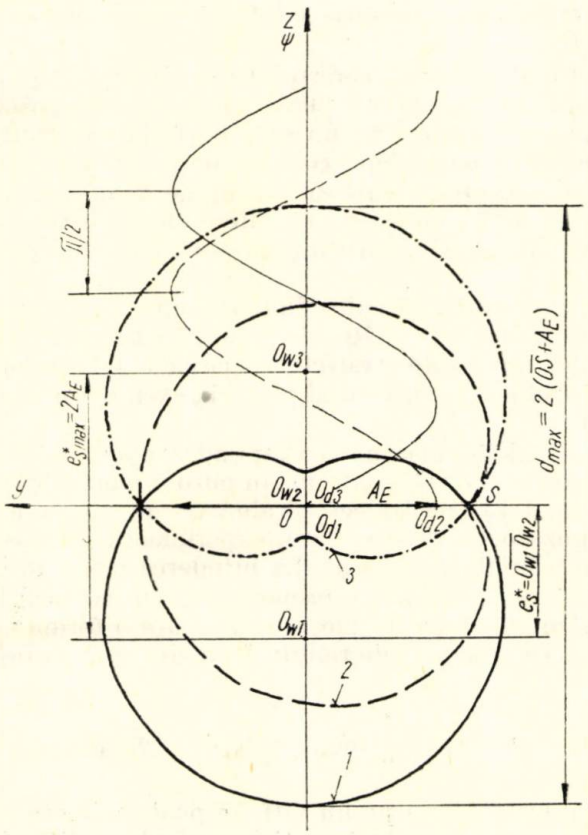


Fig. 20

cauzat de poziția diferită a axei de rotație O_d în raport cu vîrful sculei S în momentul începerii prelucrării (de exemplu, contururile 1 și 3 fiind defazate cu $\pi/2$, există o excentricitate dinamică relativă, adică o greșeală de poziție $e^*_{max} = 2A_E$).

Dacă traiectoria vîrfului cuțitului nu este perturbată, iar raportul frecvențelor este un număr întreg, între suprafețele (contururile) menționate apare o greșeală de poziție, adică o excentricitate relativă e^*_s a cărei valoare maximă este $2A_E$. Același fenomen apare și în cazul cînd în timpul prelucrării unei suprafețe procesul de așchiere se întrerupe (de exemplu prin variația vitezei de avans, printr-o vibrație axială etc.). În acest caz excentricitatea relativă intră direct în greșeala de diametru.

Determinarea exactă a diametrului este o problemă dificilă. Formarea mediei valorilor determinate prin măsurători este, evident, o greșeală dacă arborele se asamblează cu un alezaj sau invers.

Dacă $A_n \neq 0$ și raportul frecvențelor m_f nu este număr întreg, intervine suplimentar și influența diferenței de fază a celor două vibrații (ε). Suprafața piesei va fi foarte complicată, iar greșelile se pot micșora sau mări.

Figura 21 arată, de exemplu, pentru $m_f = 1$ și $m_A = 3/2$ că și la variația direcției de vibrare η sau a defazajului ε dintre cele două vibrații apare o excentricitate dinamică relativă a cărei valoare maximă este $e^* = 2A_E = \overline{O_{w2}O_{w4}}$.

Cazul cel mai favorabil corespunde pentru $\eta = 0$ și $\varepsilon = \pi$.

Din figura 23 rezultă că pentru $m_f = 3$, $m_A = 5/3$ $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = \pi$ și $\eta = 0$ (sistemul vibrează în direcția cuțitului) amplitudinea A_E intră dublu în greșeala de rotunjime (contururile *a*, *c*), în timp ce pentru $\eta = \pi/2$ și $\varepsilon = 0$ apare o greșeală de rotunjime de ordinul doi (conturul *b*).

Figurile 24 și 25 dovedesc că diferența de fază ε modifică forma traiectoriei axei de rotație, dar nu și forma conturului piesei, contur care se rotește.

Influența raportului amplitudinilor asupra conturului piesei rezultă din compararea figurilor 9 cu 10, 14 cu 15, 25 cu 26 și 27 cu 28.

Figura 30 reprezintă traiectoria circular-translatorică a axei de rotație și conturul corespunzător al piesei la excitații prin șoc pentru $m_f = 4$ și $n_H = 5$.

Aici numărul de maxime corespunde raportului frecvențelor, dar înălțimea acestora variază conform amplitudinilor vibrației.

Figura 31 arată trei traiectorii ale axei de rotație a piesei și contururile corespunzătoare determinate experimental (traiectoriile au fost fotografiate în timpul prelucrării). La prinderea piesei în universal amplitudinea A_E variază aproximativ proporțional cu pătratul lungimii în consolă a piesei. Din acest motiv piesa nu mai are o formă cilindrică, ci una ca în figura 32. În lungimea de referință l apare deci o greșeală de cilindricitate

$$Z_F = \frac{1}{2}(d_{max} - d_{min}) \quad [\mu m].$$

Prin sprijinirea piesei pe un vîrf, se poate micșora această greșeală. Rezultatele obținute pe cale teoretică au fost confirmate fără excepție de practică.

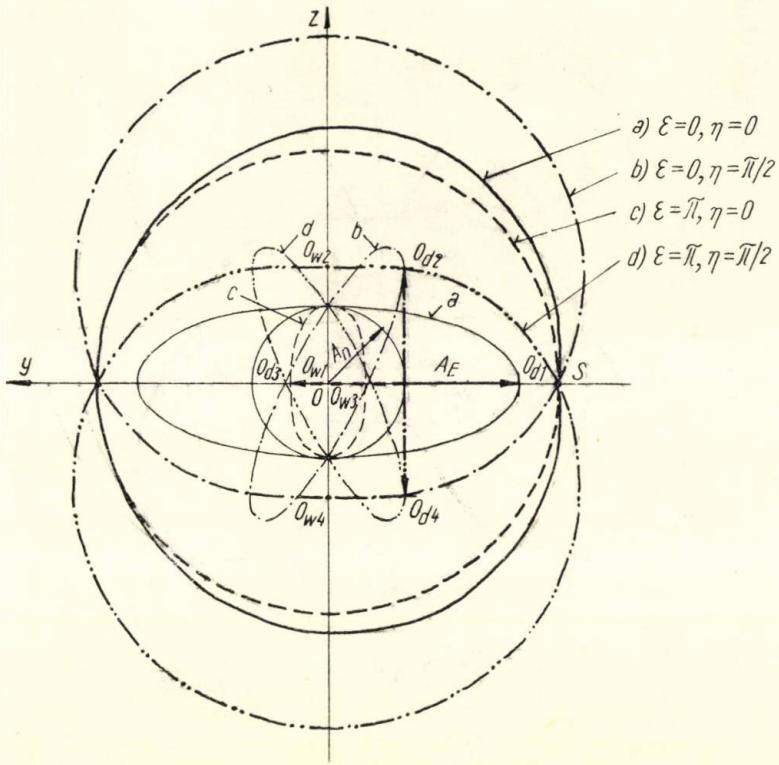

z
y
S
a) $\varepsilon=0, \eta=0$
b) $\varepsilon=0, \eta=\pi/2$
c) $\varepsilon=\pi, \eta=0$
d) $\varepsilon=\pi, \eta=\pi/2$
d
b
c
a
O_{w2}
O_{d2}
O_{d3}
O_{w1}
An
AE
O_{d1}
O
O_{w3}
O_{w4}
O_{d4}

Fig. 21

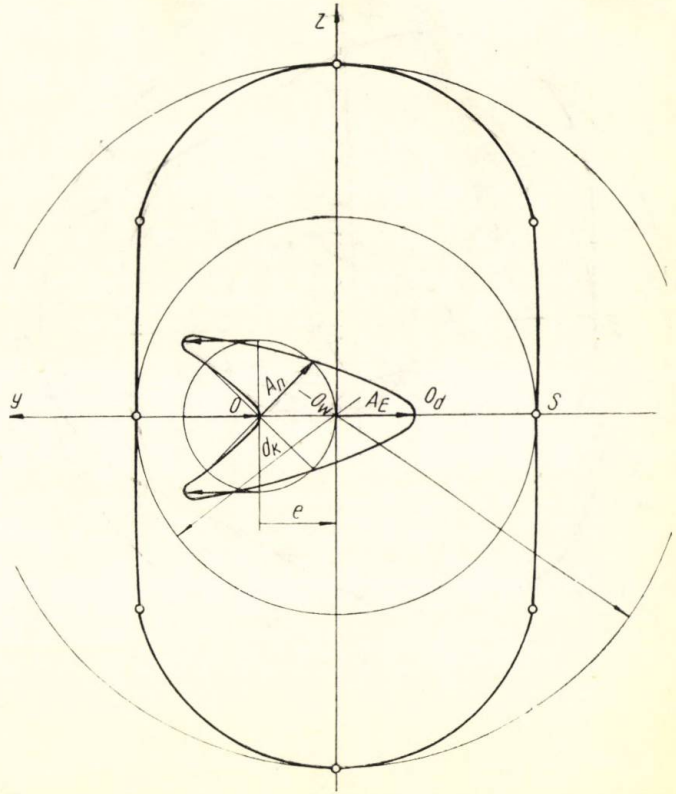

z
y
S
O
An
O_w
AE
O_d
O_K
e

Fig. 22

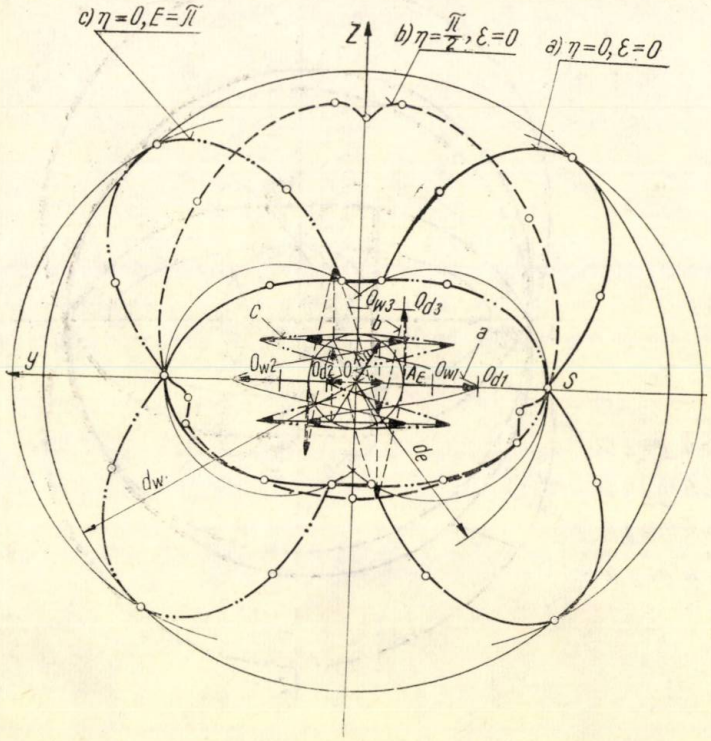

c) $\eta = 0, E = \pi$
b) $\eta = \frac{\pi}{2}, \varepsilon = 0$
a) $\eta = 0, \varepsilon = 0$
Z
y
S
C
b
a
O_{w3}
O_{d3}
O_{w2}
O_{d2}
O
A_E
O_{w1}
O_{d1}
d_e
d_W

Fig. 23

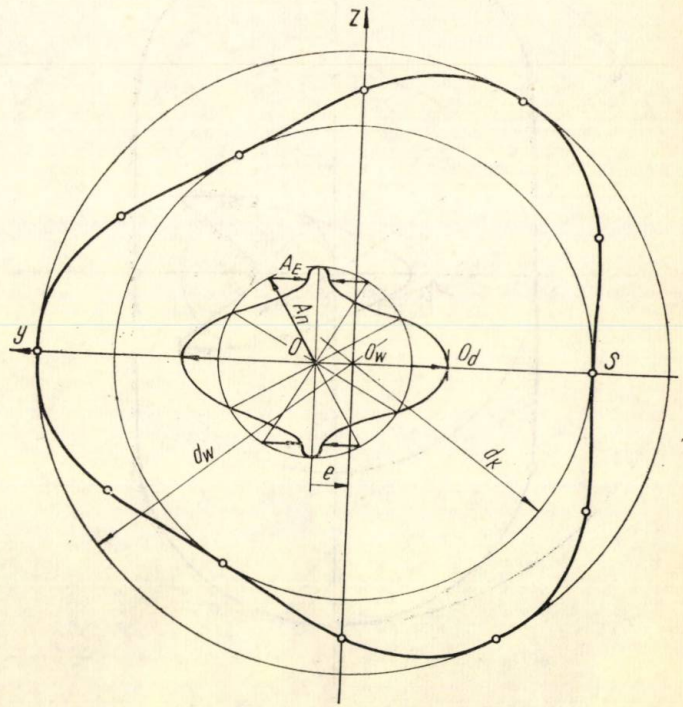

Z
y
S
A_E
A_n
O
O_W
O_d
d_W
d_K
e

Fig. 24

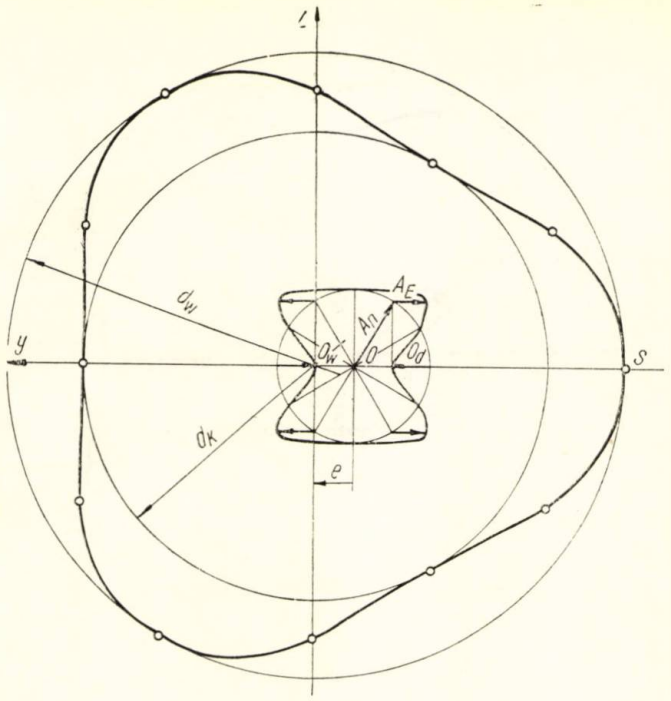


Fig. 25

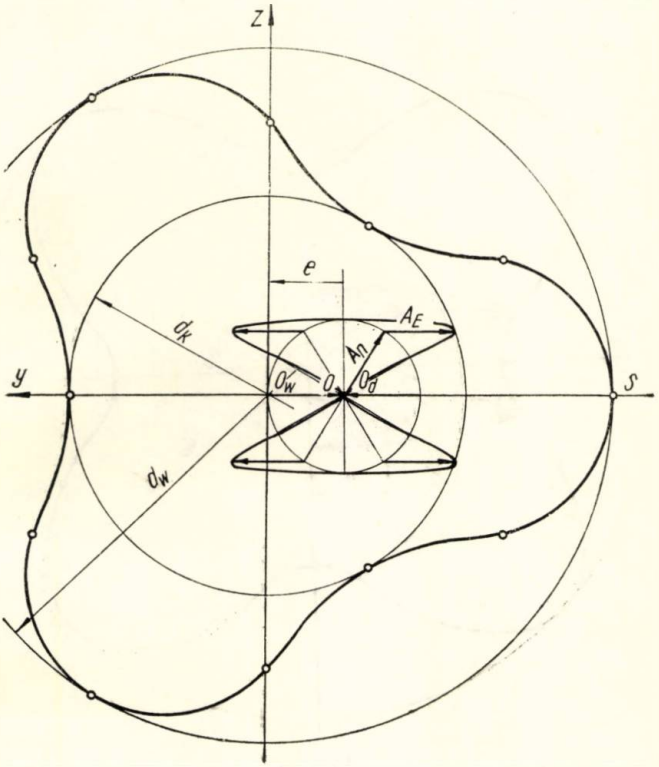


Fig. 26

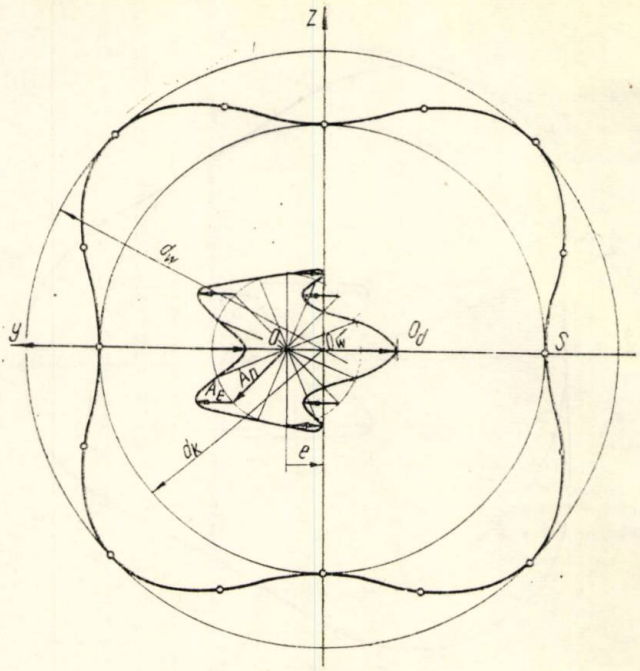


Fig. 27

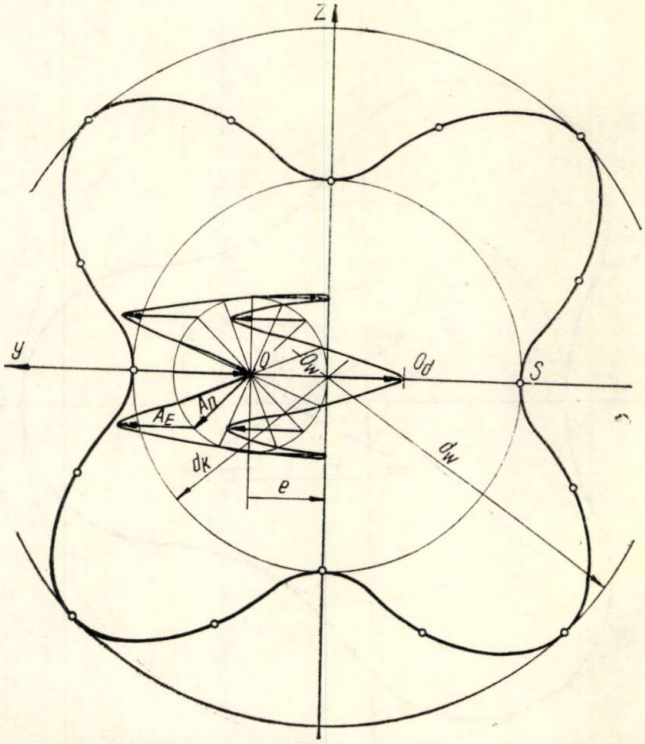


Fig. 28

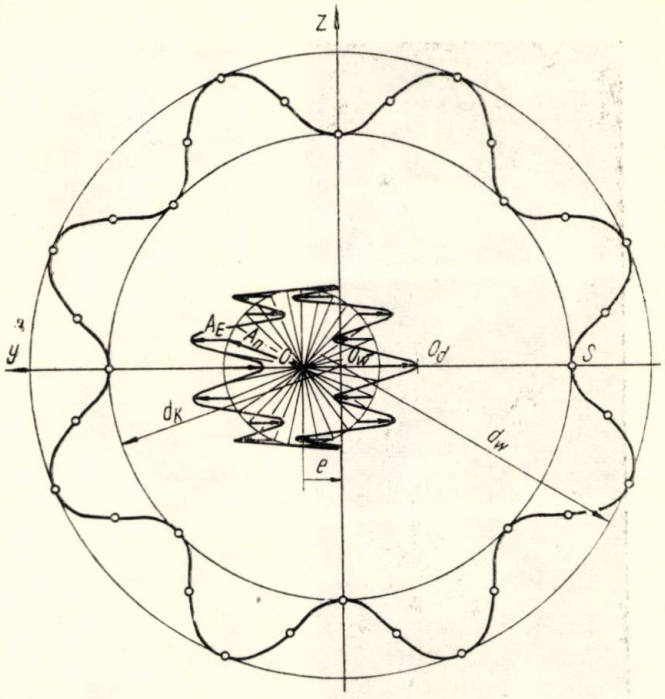


Fig. 29

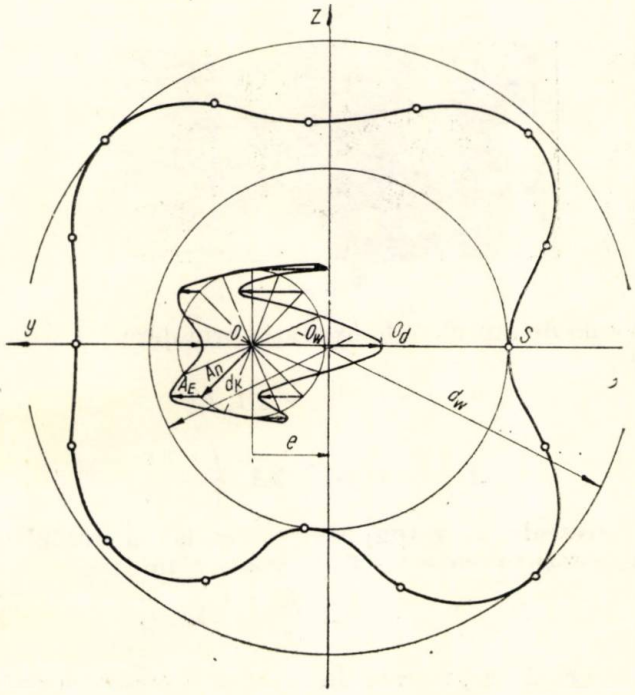


Fig. 30

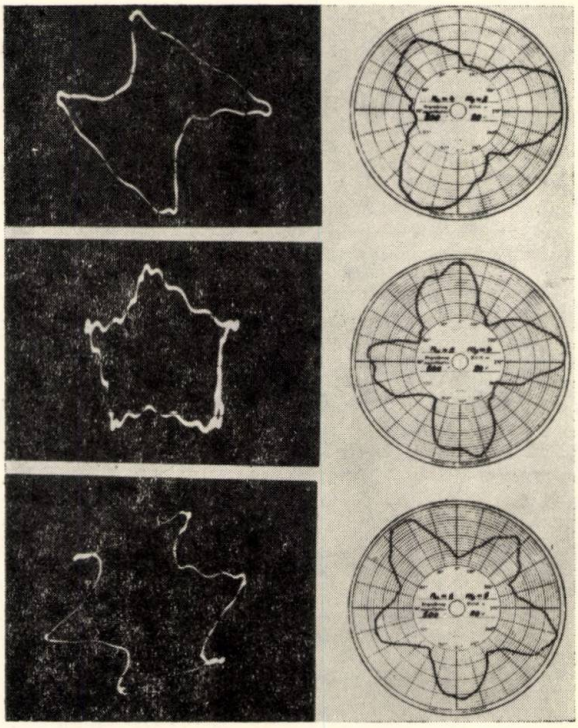


Fig. 31

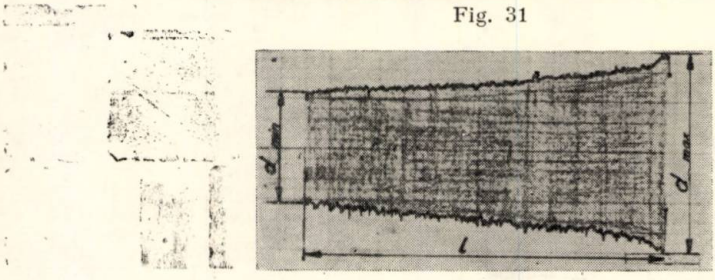


Fig. 32

Ţinînd seama de faptul că la excitaţia prin dezechilibru este valabilă relaţia [7], [8],

$$m_f = \lambda A_n / A_E = \pm f_E / f_n,$$

se poate deduce

$$A_E = \lambda A_n / m_f = \lambda A_n \frac{f_n}{f_E}.$$

Deoarece greşeala de rotunjime este egală cu dublul amplitudinii vibraţiei proprii (vezi tabelele 1—3), se poate scrie

$$R_F = 2A_E = 2\lambda A_n \frac{f_n}{f_E} = 2\lambda A_n \eta. \qquad (1)$$

Relaţia (1) arată că greşeala de rotunjime creşte cu creşterea turaţiei şi scade cu creşterea frecvenţei proprii. După cum s-a menţionat,

amplitudinea A_n nu influențează decît indirect (prin creșterea amplitudinii A_E) greșeala de rotunjime.

Dacă se are în vedere că amplitudinea vibrației forțate depinde de amortizare (D), de raportul frecvențelor $m_f = f_E/f_n = 1/\eta$ și de excentricitatea statică e_1 conform relației [12]

$$A_n = e_1 \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta)^2 + 4D^2\eta^2}},$$

se poate scrie

$$R_F = K \frac{\left(\frac{f_n}{f_E}\right)^3}{\sqrt{[1-(f_n/f_E)^2]^2 + 4D^2(f_n/f_E)^2}}, \qquad (2)$$

în care K este o constantă de proporționalitate.

Din relația (2) și din cele spuse mai sus rezultă că pentru micșorarea greșelii de rotunjime (ca și a celorlalte greșeli) este necesar ca

— frecvența proprie f_E să fie cît se poate de mare;

— frecvența de rotație f_n să fie mică;

— coeficientul de amortizare D să fie mare;

— raportul frecvențelor $m_f = f_E/f_n$ să fie cît se poate de mare și fracționar (fig. 3).

— jocurile în lagăre să fie mici;

— numărul corpurilor de rostogolire ale lagărelor cu rulmenți să fie mare, iar greșelile de formă ale acestora să fie cît se poate de mici;

— dezechilibrarea sistemului în rotație să fie mică;

— bătaia axială și amplitudinile vibrațiilor axiale ale axului principal să fie cît se poate de mici;

— viteza de avans să fie constantă.

În încheiere trebuie menționat faptul că, în prezent, la înregistrarea conturului piesei palpatorul nu urmărește conturul definit mai sus, adică traiectoria vîrfului cuțitului în timpul unei rotații a piesei, și de aceea conturul înregistrat este puțin deformat.

Dacă în locul unei bile se folosește un palpator în formă de cuțit, se înregistrează mai multe contururi incomplete. În acest caz rezultă R_F mai mic decît cel real iar m_f mult mai mare. Se poate deci trage concluzia că mașina asigură o precizie dinamică de prelucrare foarte ridicată, deși ea poate fi necorespunzătoare. Clarificarea completă a acestei probleme nu constituie obiectul articolului de față, ignorarea ei de către personalul care se ocupă cu recepția dinamică a mașinilor-unelte constituie însă o greșeală.

Cele expuse mai sus, referirile bibliografice [7] — [9], ca și propunerile de inventii ale autorului [13] — [15], completate cu rezultatele altor cercetări, ar putea sta la baza elaborării unor norme, chiar incomplete, de recepție dinamică a mașinilor-unelte pentru așchiere, problemă actuală de importanță capitală pentru construcția de mașini.

Primită la redacție la 7 februarie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. H. Moll, *Die Herstellung hochwertiger Drehflächen*, Disertaţie, TH Aachen, 1939.
2. K. E. Wetzel, *Beitrag zur Erfassung und Beurteilung von Schwingbewegungen an Werkzeugmaschinenspindeln*, Disertaţie, TH Stuttgart, 1955.
3. P. T. Eisele, R. F. Griffin, *Schwingungserscheinungen auf gedrehten Oberflächen*, Industrie Anzeiger 36 (1956).
4. Dchang, Schj-ying, *Beitrag zur Aufstellung von Prüfverfahren für die dynamische Einzelabnahme von Drehmaschinen*, Disertatie, TU Dresden, 1961.
5. W. Bahmann, *Ursachen von Relativbewegungen zwischen Werkstück und Werkzeug und ihre Auswirkungen auf die Gestaltabweichungen des Werkstückes beim Schlicht — und Feindrehen*, Disertatie, TU Dresden, 1963.
6. P. Dodoc, *Ursachen der dynamischen Verlagerung der Werkstückdrehachse und ihre Auswirkungen auf die Herstellungsgenauigkeit beim Drehen*, Disertatie, TU Dresden, 1967.
7. — *Trocoide de vibraţii la axele principale ale maşinilor-unelte*, Construcţia de maşini, *2* (1968).
8. — *Trocoide de vibraţii la axele principale ale maşinilor-unelte*, Construcţia de maşini, *3* (1968).
9. — *Mecanismul transmiterii vibraţiilor la suprafaţa piesei în procesul de strunjire*, St. cerc. mec. apl., *4* (1968).
10. H. Berthold, *Haladó modszerek a preciziós szerszámgépek tervezésében*, G E P *6* (1965).
11. R. Piekenbrink, *3. FoKoMa*, p. D155—162.
12. A. Weigand, *Einführung in die Berechnung mechanischer Schwingungen, Band I, p. 76*, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1965.
13. P. Dodoc, *Metodă pentru determinarea rapidă a preciziei dinamice a maşinilor-unelte pentru aşchiere*, Propunere de invenţie O.S.I. nr. 55311/11.12.1967.
14. — *Metodă pentru determinarea limitei de stabilitate la autovibraţii a maşinilor-unelte pentru aşchiere*, Propunere de invenţie O.S.I. nr. 55616/12.1.1968.
15. — *Metodă şi instalaţie pentru recepţia dinamică a maşinilor-unelte şi a arborilor în rotaţie*, Propunere de invenţie O.S.I. nr. 55637/15.1.1968.

RECENZII

L. M. MILNE-THOMSON, *Theoretical Hydrodynamics*, Fifth Edition, Revised and enlarged, Macmillan & Co Ltd, Londra, 1968, 743 p.

De multă vreme, *Hidrodinamica teoretică* a profesorului L. M. Milne-Thomson este unanim considerată ca o lucrare clasică. Bogăția conținutului, tratarea aprofundată a problemelor abordate, claritatea expunerii, eleganța demonstrațiilor, contribuțiile originale deosebit de valoroase ale autorului, prima utilizare consecventă în hidrodinamică a calculului vectorial și tensorial — iată numai o parte dintre caracteristicile acestui tratat, a cărui nouă ediție este mult amplificată.

În 23 de capitole, lucrarea profesorului L. M. Milne-Thomson prezintă sub o formă detaliată, uneori exhaustivă, dar subliniind întotdeauna rezultatele esențiale, stadiul actual al hidrodinamicii teoretice.

Capitolul I, intitulat „Ecuația lui Bernoulli", are scopul de a da o privire de ansamblu a întregii cărți, prin evidențierea problemelor fundamentale ale hidrodinamicii, așa cum rezultă ele din tratarea unidimensională a fenomenelor, și în special din aplicarea ecuației lui Bernoulli și a teoremelor impulsului.

Se trece apoi la prezentarea materiei propriu-zise. După o expunere a noțiunilor de calcul vectorial și tensorial folosite în continuare (cap. II), în capitolul III se stabilesc ecuațiile și teoremele fundamentale ale hidrodinamicii fluidelor perfecte. Aceste rezultate sînt particularizate în capitolul IV pentru mișcarea plană.

Mișcarea plană a fluidelor perfecte este amplu analizată în capitolele VI — XV, folosindu-se teoria funcțiilor analitice, ale cărei fundamente sînt rezumate în capitolul V. Astfel se prezintă: mișcarea plană în jurul corpurilor și evaluarea forțelor hidrodinamice (cap. VI), teoria profilelor aero-hidrodinamice (cap. VII), mișcările datorite surselor (cap. VIII), mișcarea corpurilor într-un fluid perfect (cap. IX), mișcarea în canale în special ca o aplicație a teoremei lui Schwarz-Christoffel (cap. X), teoria jeturilor bidimensionale (cap. XI), teoria lui Helmholtz a suprafețelor de discontinuitate (cap. XII), mișcarea sistemelor de vîrtejuri (cap. XIII), mișcarea fluidelor grele cu suprafață liberă (cap. XIV) și teoria valurilor (cap. XV). Remarcăm că, chiar în cadrul acestei materii clasice, profesorul Milne-Thomson aduce o seamă de contribuții proprii, de cea mai mare însemnătate. Menționăm astfel cele două teoreme ale cercului (cea foarte cunoscută dată în 1940 și așa-numita „a doua teoremă a cercului" mult mai recentă), apoi introducerea „soluțiilor tangente" în studiul fluidelor grele cu suprafață liberă, precum și o nouă metodă, dovedită foarte fructuoasă, privind teoria undei solitare.

Capitolele XVI—XVII tratează mișcarea axial-simetrică a fluidelor perfecte. Teoria generală a acestor mișcări este prezentată în capitolul XVI; în capitolul XVII se studiază mișcarea sferelor și elipsoizilor, iar în capitolul XVIII mișcarea unui solid de o formă oarecare.

În capitolul XIX se discută mișcarea generală cu vîrtejuri, cu aplicații la aripa de anvergură finită, iar capitolul XX este o introducere în teoria mișcărilor compresibile, subsonice și supersonice.

Capitolele XXI—XXIII sînt dedicate mişcării fluidelor vîscoase. În capitolul XXI se stabilesc, printr-o metodă deosebit de elegantă, ecuaţiile generale ale fluidelor vîscoase incompresibile şi se prezintă cazurile clasice de integrare a acestor mişcări. Capitolul XXII, nou adăugat faţă de ediţia precedentă, prezintă mişcarea lentă a fluidelor vîscoase în aproximaţiile lui Stokes şi Oseen, insistîndu-se în special asupra metodei bazate pe utilizarea funcţiilor analitice în hidrodinamica fluidelor vîscoase. În sfîrşit, capitolul XXIII conţine teoria stratului-limită laminar.

Peste 600 de exerciţii, deosebit de interesante, întregesc textul.

Prin calităţile sale didactice deosebite, prin nivelul ştiinţific superior şi prin rigoarea cu care sînt tratate problemele, tratatul de *Hidrodinamică teoretică* al profesorului L. M. Milne-Thomson se impune ca o sursă de bază pentru cei ce predau această materie în învăţămîntul tehnic superior şi pentru studenţi. De asemenea, această lucrare poate fi consultată cu un real folos şi de specialiştii din cercetare care vor să-şi continue studiile în acest domeniu, precum şi de inginerii din proiectare şi industrie. În general, putem spune că *Hidrodinamica teoretică* a profesorului L. M. Milne-Thomson poate fi consultată cu un real folos de toţi cei care doresc să aibă o orientare de un înalt nivel ştiinţific în domeniul hidromecanicii.

Dan Gh. Ionescu şi C. Berbente

Л. Н. Решемов, Конструирование рациональных механизмов, (Proiectarea mecanismelor raţionale), Машиностроение, Moscova, 1967, 208 p.

Mecanismele raţionale în sensul lui Reşetov se consideră acelea care nu conţin legături pasive, înţelegînd prin acestea din urmă acele legături care, fiind îndepărtate din mecanism, nu măresc gradul de mobilitate al acestuia. Mecanismele fără legături pasive se mai numesc mecanisme static determinate.

În lucrare, profesorul L. N. Reşetov, analizînd o mare varietate de mecanisme utilizate în cele mai diferite domenii ale construcţiei de maşini (toate verificate în practică), arată felul în care trebuie concepute şi proiectate mecanismele static determinate.

Avantajul de bază al mecanismelor fără legături pasive constă în aceea că abaterile de la anumite dimensiuni ale elementelor, cît şi erorile de montaj (de exemplu nerespectarea distanţelor dintre axele cuplelor cinematice sau a paralelismului acestor axe) nu influenţează buna funcţionare a mecanismelor, ceea ce înseamnă că toleranţele la aceste dimensiuni pot fi alese mai mari, asigurînd astfel economii însemnate în procesul de prelucrare şi montaj. În multe cazuri numărul legăturilor pasive indică numărul dimensiunilor elementelor care trebuie prelucrate cu mare precizie deci şi cu mari cheltuieli.

Mecanismele static determinate au o mare siguranţă în funcţionare şi în acele cazuri cînd lucrează la temperaturi ridicate (mecanismele de reglare ale turbinelor cu abur sau cu gaz) sau în condiţii în care elementele mecanismelor sînt expuse la deformaţii elastice mari (la maşinile agricole datorită neregularităţii terenului).

În construcţia multor maşini se găsesc mecanisme fără legături pasive, acestea fiind realizări ale unor proiectanţi talentaţi, cu o vastă experienţă în crearea unor mecanisme raţionale într-un anumit domeniu al construcţiilor de maşini. În prezent însă nu se întîlnesc recomandări concrete care să permită construirea pe bază ştiinţifică a unor mecanisme static determinate, din care cauză în multe scheme ale mecanismelor se mai găsesc legături pasive care în mod normal ar trebui evitate.

Cartea profesorului L. N. Reşetov este prima lucrare în care se pun bazele ştiinţifice de alegere a unor scheme structurale ale mecanismelor în aşa fel ca acestea să fie lipsite de legături

pasive. Sinteza structurală a mecanismelor static determinate se realizează în primul rînd prin alegerea judicioasă a claselor cuplelor cinematice şi prin aşezarea lor într-o succesiune bine determinată.

În cele şase capitole din carte se tratează amănunţit, cu un limbaj accesibil cercurilor largi de proiectanţi, construirea raţională a mecanismelor plane şi spaţiale cu cuple inferioare şi superioare. De asemenea, se studiază influenţa neparalelismului axelor cuplelor cinematice asupra legii de mişcare a elementului condus şi influenţa frecărilor asupra autoreglării (autoechilibrării) elementelor.

Traducerea acestei cărţi în limba română ar deschide perspective largi în ceea ce priveşte îmbunătăţirea siguranţei în funcţionare a unor maşini proiectate şi executate în ţară şi ar permite reducerea preţului de cost al acestora.

I. Székely

Frecarea şi uzarea maşinilor (Friction and Wear in machinery), editată de The American Society of Mechanical Engineers, New York (distribuită de Pergamon Press, 1968) reprezintă traducerea în limba engleză a lui „Iznos i Tremie Metallov i Plastmass", volumul 19, 1965.

Lucrarea prezintă în continuare lucrări din domeniul tribologiei ce interesează construcţia de maşni şi mecanica tehnică. Publică autori cunoscuţi, din U.R.S.S., dintre care menţionăm: prof. M. M. Hruşciov, G. V. Vinogradov, M. A. Babicev, V. I. Kostetski, Gh. M. Bilik, R. M. Matveevski, Iu. Ia. Podolkii, V. A. Mustafaev şi alţii.

De la început reţin atenţia cercetările asupra rezistenţei la uzarea abrazivă a cîtorva oţeluri aliate în condiţiile călirii şi durificării mecanice. De asemenea, cercetările experimentale efectuate cu maşina de încercat tip Haworth, privind efectul compoziţiei, structurii şi schimbărilor stării de suprafaţă asupra rezistenţei la uzarea abrazivă a 19 tipuri de oţeluri aliate în prezenţa unor minereuri de fier şi aglomerate. O altă lucrare interesantă prezintă rezultate asupra comportării la uzarea abrazivă a 47 de tipuri diferite de oţeluri supuse în prealabil la diferite moduri de tratament termic.

Preocupările privind domeniul uzării abrazive sînt întregite cu o serie de cercetări privind proprietăţile abrazive ale particulelor minerale de dimensiuni reduse din mediul de lucru al unor maşini agricole.

Reţin în continuare atenţia procesele de oxidare din timpul frecării şi uzării metalelor, precum şi unele rezultate obţinute prin analize cu raze X asupra schimbărilor structurale în stratul superficial.

Mai multe cercetări privesc comportarea, în procesele de frecare, a diferitelor mase plastice, urmărindu-se de pildă, îmbunătăţirea comportării la temperatură a unor polimeri pentru lagăre, în cupla plastic-oţel. Sînt prezentate rezutatele unor încercări în vacuum sau atmosferă şi presiune normală, în condiţii variate de temperatură ($-70°C$ pînă la $+60°C$), explicîndu-se anumite relaţii găsite cu ajutorul teoriei lui Bartenev.

Colectivul prof. G. V. Vinogradov prezintă lucrări variate atît privind comportarea unor materiale plastice în cupla oţel-plastic cu lubrifianţi lichizi şi mediu gazos cu conţinut variat de oxigen, precum şi proprietăţile de antiuzură a unor lubrifianţi solizi (polimeri) în cupla oţel-oţel şi condiţii de extremă presiune.

Problema lubrifianţilor solizi este reluată de R.M. Matveevski; rezultatele sînt obţinute cu o maşină de încercat tip 4 bile în mediu gazos (argon) şi temperaturi pînă la 600°C.

Culegerea se încheie cu lucrarea teoretică a lui N. I. Glagolev, privind frecarea de rostogolire şi uzarea elementelor de rostogolire ale cuplei metalice.

Lucrările menţionate sînt însoţite de bibliografii utile şi cuprinzătoare. De asemenea, la finele colecţiei este prezentată şi o bibliografie privind lucrări sovietice şi străine din domeniul tribologiei, publicate în 1961, în limba rusă şi în alte limbi. (Nu sînt incluse lucrările autorilor români, publicate în Revue de mécanique appliquée).

Colecţia menţionată interesează pe cercetătorii şi specialiştii care se preocupă de problemele fundamentale şi aplicative ale tribologiei.

dr. ing. Dan Pavelescu

G. I. BRANKOV, *Mekanika na polimerite* (Mecanica polimerilor), Edit. Academiei Bulgare de Ştiinţe, Sofia, 1967, 171. p.

Dezvoltarea vertiginoasă a chimiei în domeniul polimerilor a avut importante influenţe şi asupra unor ramuri industriale care folosesc masele plastice în cele mai diferite scopuri. Acest proces de înlocuire a unor materiale pînă nu de mult clasice, cu materiale sintetice mai corespunzătoare este în plină dezvoltare. Cartea profesorului Brankov prezintă bazele teoretice şi practice privind comportarea maselor plastice sub diferite ramuri şi arată fenomenele micro- şi macromoleculare în care rezidă comportarea specifică a polimerilor.

În capitolul 1 se expune structura polimerilor legată de proprietăţile lor fizice, chimice şi mecanice.

Capitolul 2 este consacrat proprietăţilor mecanice, insistîndu-se asupra comportării maselor din polimeri sub sarcină, studiindu-se influenţa temperaturii şi a timpului. Pe baza celor trei modele, anume corp elastic, plastic şi visco-fluid, se examinează influenţa diferitelor sarcini statice şi dinamice, precum şi unele probleme în legătură cu fenomenele de histereză, viscozitate şi fluaj, problema valabilităţii legii lui Boltzmann de superpoziţie, efectul de temperatură îmbătrînire şi modificarea structurii. Aspectele comportării sub diferite solicitări au fost mai larg tratate, inclusiv termoelasticitatea, respectiv şi termoplasticitatea.

Capitolul 3 pătrunde mai adînc în mecanismul proprietăţilor mecanice, şi în mod special al conlucrării polimerului cu elemente de armare şi factori care influenţează legătura dintre cele două elemente.

Capitolul 4 constă dintr-o expunere matematică a teoriei generale a relaţiei rezistenţă-deformaţii cu aplicare specială privind materialele plastice, la bază stînd mecanica mediilor continui deformabile.

Capitolul 5 continuă cu problema relaţiei rezisenţă-deformaţie şi prezintă sub formă sistematică şi sugestivă o serie de modele de comportare diferită a materialelor plastice sub sarcină (Maxwell, Voigt-Sechrin, Zener, Bürgens), cît şi încercări de generalizare care sînt oglindite în cercetări foarte recente publicate de Freudenthal, Bland, Lee, Gurtin Sternberg, Novacki, Ogibalov, Suvorova şi alţii. Se arată în continuare că metoda reologică cu cinci parametri oferă o posibilitate avantajoasă pentru înţelegerea proprietăţilor fizico-chimice ale polimerilor.

Un capitol special, cel de-al şaselea, este în exclusivitate consacrat termoelasticităţii, întrucît influenţa temperaturii asupra comportării generale a acestor materiale are o influenţă primordială. În capitolul 7 se continuă cu studiul modelelor reologice, insistîndu-se asupra unui model cu şase parametri.

În capitolul 8 se expune, pe baza teoriilor generale din mecanica mediilor continui anizotrope, comportarea maselor plastice armate, bazată pe o serie de lucrări experimentale în care

se studiază în mod special natura și gradul de legătură între masa de bază și elementul care constituie armătura.

Se dă o teorie aproximativă a relației rezistență-deformație pentru un paralelipiped armat, insistîndu-se asupra fenomenului de aderență a masei de polimer pe elementul de armătură. Se examinează două teorii simplificatoare ale corpurilor din materiale plastice polimerizate.

Capitolul 9 studiază teoria moleculară a visco-elasticității, insistîndu-se asupra unor teorii fenomenologice ale visco-elasticității care pot fi considerate ca o primă aproximație și pătrunzînd în mecanismul intramolecular al forțelor care acționează. Sînt atinse de asemenea și probleme de oscilație proprii și induse ale corpului plastic, folosind metodele mecanice clasice și cuantice.

Aceste teorii științifice pătrund adînc în mecanismul comportării substanțelor polimerizate și prezintă baza pentru explicarea însușirilor specifice ale acestor corpuri.

Scopul final însă este de a pune la îndemîna tehnicii și industriei cunoștințele teoretice și practice pentru folosirea adecvată a unor materiale noi.

Astfel, în capitolul 10, se dau aplicațiile imediate ale cercetărilor de bază, cît și aplicative ale polimerilor, folosirea lor ca elemente constructive ale unor suprafețe subțiri, ondulate, cilindrice, sferice, insistîndu-se asupra încercării în laborator a unor astfel de suprafețe, comparîndu-se deformațiile măsurate cu tensometre cu cele calculate pe baza teoriei generale, cuprinsă în capitolele anterioare.

Expunerile bazate pe un studiu profund al cercetărilor din acest domeniu care se găsește într-o dezvoltare fără precedent, lucru care rezultă din lista bibliografică a 93 de lucrări citate, îmbină înaltul nivel de expuneri teoretice cu elemente utile pentru inginerul sau fizicianul cercetător din laboratoarele științifice privind introducerea și aplicația unor metode noi, studiate complet din toate punctele de vedere.

Mai trebuie amintită și forma de prezentare clară și concisă, îmbinată cu forma exterioară a cărții, care se situează la un nivel care continuă tradiția lucrărilor editate și anterior de Academia Bulgară de Științe.

ing. Robert Möckesch

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1968

INDEX ALFABETIC

STUDII	Tomul	Nr.	Pag
ANTON IOAN, IONESCU DUMITRU, O metodă aproximativă pentru calculul stratului-limită laminar	27	6	1117
ANTON IOAN, POPA OCTAVIAN, Incipienţa fenomenului de cavitaţie în mişcări plane şi periodice	27	4	667
ANTON IOAN, ŞIŞAK ERNEST, Contribuţii la definirea caracteristicilor energetice şi cavitaţionale ale reţelelor de profile din maşinile hidraulice axiale	27	3	439
ARSENIE D., DAVID I., Asupra apariţiei turbulenţei la mişcarea între doi pereţi cu rugozitate periodică dată	27	3	495
BĂRĂNESCU G., MANIŢIU RODICA, DOBRE C., Asupra dimensionării segmenţilor de piston	27	6	1237
BĂRĂNESCU G., TARAZA DINU, Unele probleme privind calculul la oboseală	27	5	963
BEIU-PALADI ERNEST, Calculul iterativ al frecvenţelor proprii de vibraţie la sisteme elastice avînd mase concentrate dispuse „în lanţ"	27	5	975
BIŢĂ OLGA, DINCĂ ION, Efectul unor aditivi asupra lubrifiaţiei oţelului dur la sarcini ridicate	27	1	77
BIŢĂ OLGA, DINCĂ ION, Aspecte experimentale ale influenţei mediului lubrifiant asupra rezistenţei la oboseală a oţelului de rulmenţi	27	4	783
BODNĂRESCU DAN, Asupra efectului de super-skin	27	3	521
BOICU N., Calculul forţelor care acţionează în plăcile plane asamblate în puncte	27	1	197
CARAFOLI ELIE, Henri Coandă, pionier al aerodinamicii aplicate	27	3	411
CARAFOLI ELIE, BERBENTE C., Determinarea cîmpului de presiuni în mişcarea plană supersonică-hipersonică moderată	27	5	847
CARAFOLI ELIE, PANTAZOPOL DAN, Scurgerea supersonică plană a doi curenţi gazoşi separaţi printr-o pînză de jet	27	4	661
CARAFOLI ELIE, STAICU ŞTEFAN, Asupra aripii delta cu antisimetrie forţată în curent supersonic, considerînd separaţia la bordurile de atac.	27	2	275
CETĂŢEANU STELIAN, Metoda reducerii, metodă aproximativă pentru rezolvarea problemei stabilităţii plăcii plane	27	2	381
CHALÉAT R., OGUZTÖRELI, M. N. MANGERON, D. Analiza numerică a micilor oscilaţii în funcţie de amplitudinea lor	27	4	723
CHALÉAT R., OGUZTÖRELI M. N., MANGERON D., Aplicarea aproximaţiilor de ordin superior din teoria perturbaţiilor la calculul perioadei oscilaţiilor			
CIGAN LEONTIN, Influenţa principalilor factori ai frecării asupra alunecării intermitente la ghidajele maşinilor-unelte	27	5	1079
CONSTANTINESCU V. N., DIMOFTE FL., Asupra efectului de pompaj electromagnetic în lubrificaţia cu gaze	27	6	1221

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 27, NR. 6, P 1385–1388, BUCUREŞTI. 1968

	Tomul	Nr.	Pag.
CONSTANTINESCU V. N., RĂDULESCU E., Asupra influenței compresibilității în sisteme de etanșare și lagărele cu canale spirale	27	3	503
CRAIFALEANU D., Stabilitatea la răsucire a barelor cu reazeme intermediare	27	3	527
DAVID IOAN, Mișcarea plan-orizontală într-un mediu poros în prezența unui dren arcuit	27	1	35
DAVID IOAN, Efectul neuniformității curentului subteran asupra debitului drenului arcuit și rectiliniu	27	5	877
DIMOFTE FL., Asupra influenței unor cîmpuri electrice transversale și cîmpuri magnetice tangențiale în lubrificația cu gaze	27	4	757
DODOC PETRE, Mecanismul transmiterii vibrațiilor la suprafața piesei în procesul de strunjire	27	5	1091
DODOC PETRE, Influența vibrațiilor asupra preciziei de prelucrare la strunjire	27	6	1355
DUMITRESCU LUCIAN Z. Acțiunea undelor de șoc slabe asupra obstacolelor plane	27	3	469
GHEORGHIU ALEX., PACOSTE C., IONESCU CR., IORDANESCU M., Utilizarea calculatoarelor electronice pentru stabilirea directă a ordinii de formare a articulațiilor plastice la cadre încărcate proporțional	27	5	1015
GUȚU ALEXANDRU, Contribuții la studiul grinzilor cu două reazeme elastice	27	2	375
HACKER T., Stabilitatea dinamică neutră a avioanelor	27	5	909
HACKER T., MĂLAIU E., Unele probleme ale stabilizării optimale a zborului	27	4	745
IONESCU VASILE, COZMA CIPRIAN, Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase omogene	27	6	1187
KEINTZEL EINAR, Calculul diafragmelor cu goluri rezemate elastic la sarcini orizontale	27	1	145
KEINTZEL EINAR, Matrice de influență pentru calculul cadrelor etajate la forțe orizontale	27	2	349
KEINTZEL EINAR, Matrice de influență pentru calculul la forțe orizontale al diafragmelor cu goluri la construcții multietajate	27	3	573
LĂZĂRESCU ION D., Asupra posibilității de abstractizare a sculei așchietoare	27	1	159
LIBRESCU LIVIU, Fundamentarea unei teorii a învelitorilor și plăcilor elastice, anizotrope	27	1	105
MANEA GH., BOICU N., VOICA I., Deformațiile locale sub efectul presiunii în problema ungerii hidrodinamice	27	2	289
MANGERON D., DRĂGAN C., OGUZTÖRELI M. N., CHALÉAT R., Teoria generală a aproximațiilor succesive în studiul mecanismelor și mașinilor prin noua metodă matriceală-tensorială, elaborată în vederea folosirii mașinilor electronice de calcul. Studiul cinematic al mecanismelor spațiale care conțin contururi închise nedeformabile prin metoda matriceală-tensorială	27	5	1045
MANGERON D., M. N. OGUZTÖRELI, Aplicarea transformatelor lui Laplace-Picone la studiul sistemelor diferențiale interesînd fizica matematică. I. Probleme referitoare la ecuații cu derivate parțiale de ordinul al patrulea	27	5	883
MANOLESCU GABRIEL, Contribuții la cunoașterea efectelor interfețelor asupra curgerii polifazice în medii poroase	27	6	1145
MARINESCU AL. Asupra manevrei optime de întîlnire cu minimum de combustibil a aparatelor cosmice pe orbite circulare considerînd ecuațiile neliniare de mișcare a aparatului urmăritor	27	5	1300
MATEESCU DAN, Aripi cruciforme și ampenaje prevăzute cu fuzelaj conic în regim supersonic. I. Mișcarea conică	27	6	1167
MOISEI E., Unele contribuții la studiul curgerii gazelor prin canalele cu fante transversale	27	2	257
NIȚĂ M. M., Asupra perturbațiilor vehiculelor orbitale staționare la o latitudine arbitrară, datorite triaxialității pămîntului	27	5	933
ORĂNESCU AMEDEU, Aplicarea metodei schimbării elementului conducător, pentru rezolvarea cinetostaticii mecanismelor complexe	27	4	811
OROVEANU TEODOR, Asupra utilizării metodei caracteristicilor în studiul unor scurgeri lente ale gazelor	27	4	699
OROVEANU TEODOR, Dezlocuirea fluidelor miscibile în regim nestaționar într-un mediu poros	27	6	1112

	Tomul	Nr.	Pag.
OROVEANU TEODOR, I. SPULBER, Influenţa neomogenităţii mediului poros asupra restabilirii presiunii într-un sistem liniar	27	3	421
PANĂ TOMA, Calculul barelor cu pereţi subţiri avînd profilul închis încărcate cu sarcini perturbatoare periodice	27	4	803
PANĂ TOMA, Stabilitatea statică a barelor cu pereţi subţiri avînd profilul închis	27	5	1035
PASCAL HERMAN, Studiul curbei de restabilire a presiunii în cazul curgerii polifazice	27	1	17
PATRAULEA N. N., Consideraţii teoretice asupra efectului Coandă	27	2	245
PATRAULEA N. N., POSTELNICU N., Echilibrul relativ macroscopic al plasmei cu simetrie cilindrică	27	1	3
PAVEL A., Legile de variaţie a presiunii instantanee de contact în cazul îmbinărilor prin mandrinare lisă solicitate axial la întindere sau compresiune	27	6	1251
PAVELESCU DAN, Dependenţa regimului de frecare şi a mişcării sacadate de principalii factori ai uzării	27	1	45
PAVELESCU DAN, Determinarea ponderii influenţei unora dintre factorii uzării prin analiza statistică	27	2	303
PELECUDI CHR., Multipoli cinematici cu elemente rigide	27	5	1061
PELECUDI CHR., Diada interpretată ca dipol şi cvadripol cinematic	27	6	1293
PELECUDI CHR., I. SAVA, ANCA MATHEESCU, Optimizarea legilor de funcţionare ale mecanismelor de distribuţie	27	3	617
PETCU VALERIU, Calculul plastic al grinzilor continue de oţel	27	3	547
PETCU VALERIU, Calculul plastic al planşeelor casetate de beton armat	27	5	993
PETRE A., V. DROBOTĂ, Flambajul lateral al grinzilor pendulare ţinînd seama şi de solicitarea de răsucire a acestora	27	5	985
POP I., Efectul secţiunii periodice asupra convecţiei libere nestaţionare deasupra unei plăci poroase plane verticale	27	3	433
RAICU A., Contribuţii la sinteza structurală a mecanismelor spaţiale	27	3	645
RĂUTU S., V. BĂNUŢ, În legătură cu calculul structurilor formate din elemente prefabricate	27	1	129
RĂUTU S., V. BĂNUŢ, Utilizarea calculatoarelor electronice în calculul static al structurilor formate din bare	27	4	791
RĂUTU S., VETURIA CHIROIU, În legătură cu calculul construcţiilor de greutate minimă	27	2	333
RĂUTU S., VETURIA CHIROIU, Determinarea ultimei articulaţii plastice a unei structuri alcătuite din bare drepte şi solicitate dominant la încovoiere	27	6	1273
SANDI HORIA, Domeniul de rezistenţă al structurilor nedeterminate, ideal elastoplastice	27	3	561
SĂVULESCU ŞT. N., V. TOMA, Studiu experimental al scurgerii în jurul unui jet transversal curbat	27	3	459
SETEANU ION, Dezlocuirea plană negravitaţională a două fluide nemiscibile într-un mediu poros (I)	27	6	1209
SILAŞ GHEORGHE, HORST KLEPP, Aproximarea poligonală a caracteristicilor neliniare	27	5	899
SIMONICI M., Cercetări de laborator asupra coeficienţilor de absorbţie a energiei oscilaţiilor	27	3	581
SOÓS E., Ecuaţii constitutive pentru materiale omogene, izotrope, simple cu microstructură şi memorie	27	5	949
SPULBER I. Influenţa variaţiei vîscozităţii asupra curgerii gazelor prin medii poroase	27	4	711
SZÉKELY I., V. HANDRALUCA, Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale cu mai multe grade de mobilitate cu ajutorul funcţiilor de transmitere	27	4	821
ŞTEFAN ION, Consideraţii asupra rezistenţei la înaintare a corpurilor cu regim de mişcare supercavitant	27	5	865
TEODOSIU C., Contribuţii la teoria macroscopică a dislocaţiilor şi tensiunilor iniţiale. III.	27	1	87
TUTUNARU D., Mecanisme pentru trasarea profilelor cu bord de fugă rotunjit	27	6	1307
ŢEPELUŞ P. C., Metoda generală privind calculul parametrilor diagramelor de viteze ale ascensoarelor	27	6	1319

	Tomul	Nr.	Pag.
ȚOPA NICOLAE, Acțiunea seismică asupra cadrelor plane, de formă oarecare, avînd mase concentrate la noduri	27	3	601
VAICUM AL., Contribuții la stabilirea funcțiilor reologice pentru pămînturi puternic compresibile nesaturate	27	6	1281
VASILICA GH., Rezistența stratului superficial de staniu pe suprafața activă a lagărelor de la motoare	27	1	63
VASILICA GH., VETURIA RASZILLIER, Aspecte cantitative privind microgeometria specifică a suprafețelor de frecare	27	2	315
VASILICA GH., VETURIA RASZILLIER, Influența procesului de alunecare asupra suprafețelor lubrifiate cu apă	27	4	771
VISARION V., D. DRĂGHICESCU, Un model matematic pentru calculul structurilor curbe subțiri celulare	27	2	361
VLAD ION, Ecuațiile de mișcare ale sistemului de manevră al instalațiilor de foraj	27	1	209
ZGURĂ GH., C. ISPAS, Cercetări teoretice asupra stabilității dinamice a procesului de prelucrare la frezarea frontală	27	6	1347

NOTE

ARSENIE MARIA, ARSENIE DUMITRU, Considerații variaționale asupra pierderilor de energie în curgerea laminară a lichidelor newtoniene în conducte rectilinii de secțiune circulară	27	4	829
ILIUC I., Importanța purității lubrifiantului în reproductibilitatea măsurătorilor coeficientului de frecare	27	4	835
POPESCU N. D., Aplicații ale teoriei distribuției la studiul vibrațiilor plăcilor solicitate de sarcini mobile	27	1	229

REFERATE ȘTIINȚIFICE ȘI TEHNICE

ILIUC IVAN, Preocupări și aplicații ale studiilor de frecare și uzare	27	5	1101

RECENZII	27	1	239
	27	2	407
	27	3	655
	27	4	841
	27	5	1111
	27	6	1379